Пловдивски университет "Паисий Хилендарски"
Факултет по математика и информатика

Катедра "Математически анализ"

ЛЮБОМИР ПЕТРОВ ГЕОРГИЕВ

Някои приложения на неподвижни точки в метрични и равномерни пространства

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертационен труд

за присъждане на образователната и научна степен "ДОКТОР"

по област на висше образование

4. Природни науки, математика и информатика;

професионално направление: 4.5. Математика;

докторска програма: Математически анализ

Научни ръководители:
проф. д-р Андрей Иванов Захариев
и
проф. д.т.н. Васил Георгиев Ангелов

Пловдив – 2016

Дисертационният труд е обсъден и насрочен за защита на разширен катедрен съвет на катедра „Математически анализ“ при Факултет по математика и информатика на Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“, проведен на 19.02.2016 г.

Дисертационният труд „Някои приложения на неподвижни точки в метрични и равномерни пространства“ се състои от увод, три глави, заключение и библиография. Библиографията съдържа 132 заглавия. Общият обем на дисертационния труд е 120 страници. Списъкът на авторските публикации по темата включва 5 заглавия.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на 10.06.2016 г. от 11 ч. в Заседателната зала на Нова сграда на Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“, гр. Пловдив.

Материалите по защитата са на разположение на интересуващите се в секретариата на ФМИ, Нова сграда на ПУ „Паисий Хилендарски“, бул. „България“, №236, каб. 330, всеки работен ден от 8:30 до 17:00 часа.

Научно журри

Председател:
проф. д.м.н. Петко Пройнов (ПУ „Паисий Хилендарски“, Пловдив).

Членове:
проф. д.м.н. Павел Симеонов (Медицински университет, София);
проф. д.т.н. Васил Ангелов (МГУ „Св. Иван Рилски“, София);
проф. д-р Михаил Константинов (УАСГ, София);
проф. д-р Ангел Дишлиев (ХТМУ, София).

Номерацията на теоремите, лемите, следствията и дефинициите в автореферата съвпада с тяхната номерация в дисертационния труд.

Съдържание

Актуалност и цел на дисертационния труд

Актуалност на дисертационния труд

Настоящият дисертационен труд е посветен на приложението на метода на неподвижни точки в метрични и равномерни пространства за доказване на теореми за съществуване (и единственост) на решения на някои нелинейни операторни уравнения във функционални пространства, получени при формулиране на конкретни задачи от практиката.

Теорията на неподвижни точки на изображение в метрично пространство е достатъчно добре развита през годините след работата на Банах ([26]) и продължава да се развива, като изследванията с помощта на функционалния анализ и използване на неподвижни точки са все така актуални: [28], [29], [31], [32], [41], [42], [48], [49], [51], [53], [54], [56] – [59], [61], [62], [63], [66], [69], [71], [73], [80], [81], [83], [84], [86], [87], [89], [90] – [92], [93], [94], [95], [96], [98], [97], [99],[102], [105], [113], [119], [124], [129].

За естественото обобщение на метрично пространство, каквото по същество е всяко *равномерно пространство* ([101]), също разполагаме с необходимите средства за изследване на сходимостта на съответните итерационни процеси ([1], [7] – [17], [18], [33], [37], [46], [47], [60], [74], [88], [98]). Фактът, че равномерна топология в едно пространство може да се въведе и чрез една сатурирана фамилия от равномерно непрекъснати *псевдометрики* ([1], [46], [79], [98]), е от съществено значение за използването на метода на неподвижните точки в равномерни пространства при решаване на конкретни задачи.

Прилагането на метода на неподвижни точки е основен подход при решаване на различни нелинейни математически задачи, които се поставят за разглеждане като част от изследването на такива реални модели, при които уравненията, които ги описват, са конкретни функционални уравнения, диференциални уравнения, диференциални уравнения с отклоняващи се аргументи или интегро-диференциални уравнения. Често използван похват е свеждането до съответна задача за операторно (в частност, интегрално) уравнение в подходящо функционално пространство.

През 1908 г. Е. Пикар [82] поставя на вниманието на участниците в Международния конгрес на математиците в Рим въпроса за необходимостта от систематично изучаване на „все по-сложни и по-сложни“ функционални уравнения, с по-широки (в сравнение с диференциалните) области на приложение, които се появяват от „науките за живота“ и в които се отчита „наследствеността“ при съставянето на съответния математически модел.

Първите модели, включващи еволюционни уравнения, при които се отчита и влиянието на миналото състояние на разглежданите неизвестни върху настоящето, са отпреди повече от 100 години. Волтера ([100]) задава закъснения в теория на еластичността през 1909 година.

Теорията на диференциалните уравнения с отклонения се развива от средата на 20-ти век до днес: Д. Мишкис [125], Каменски [114], Белман и Кук [27], Елсголц и Норкин [111], Красноселски и др. [120], Кордунеану [35], Драйвер [39], Борисович [109], Хейл и Лунел [52], Нусбаум [75] и много други([6], [30], [50], [72], [106], [112], [115], [116], [126], [127], [128]). Съществена част от това развитие се дължи и на изследванията за уравнения с частни производни и отклоняващи се аргументи ([2], [64], [103], [118], [131]).

Специфичен тип уравнения с отклоняващи се аргументи са уравненията с „максимуми“. Тяхното изследване е поставено в статиите ([122], [123], [130], [132]) във връзка с конкретни инженерни задачи ([107]). През последните 30 години теорията на диференциалните уравнения с „максимуми“ се развива стремително ([25] и посочената там литература).

Изследванията върху диференциални уравнения с отклонения и диференциални уравнения с „максимуми“ са все така актуални, с оглед на широката област на приложение на такива уравнения при решаване на задачи, които възникват в модели от различни области, в които се отчита влиянието на „памет“ ([19], [25], [65], [70], [85], [103], [131]).

Цел на дисертационния труд

Целта на дисертационния труд е да се решат някои нелинейни математически задачи – част от изследването на реални нелинейни модели (от електротехниката, автоматичното управление и др.), при които е приложим методът на неподвижни точки, като се определят подходящи функционални пространства (снабдени с подходящи метрики или семейства от псевдометрики) и се намерят достатъчни условия за съществуване на неподвижни точки на изображения, действащи в тези пространства.

Тази цел се достига с изпълнението на следните задачи:

Задача 1. *Да се изследва възможността за прилагане на принципа на Банах в подходящи функционални пространства при изследване на конкретни задачи от електротехниката, получени при:*

• *изследване на модела на една нелинейна верига с резистивни елементи, чиито $V - I$ характеристики са от полиномен тип;*

• *моделиране на движението на ротационен феромагнитен елипсоид, поставен в общо положение във въртящо се с постоянна ъглова скорост хомогенно магнитно поле*;

• *разглеждане на една схема за обект на управление, с регулиращо устройство и закъсняваща верига.*

Задача 2. *Да се анализира една задача от тип на Гурса за хиперболично уравнение с отклоняващи се аргументи и да се определят достатъчни условия за съществуване на решения, принадлежащи на подходящо зададени равномерни пространства.*

Задача 3. *Да се намерят достатъчни условия за съществуване на решение на една система от диференциални уравнения с максимуми.*

Задача 4. *Да се получат достатъчни условия за съществуване на решения на интегрални уравнения от волтеров тип, в които участващите функции се дефинират в напълно регулярно хаусдорфово пространство и изобразяват неговите елементи в банахово пространство.*

Кратък обзор на дисертационния труд

Настоящият труд е посветен на използването на метода на неподвижни точки в метрични и равномерни пространства за доказване на теореми за съществуване (и единственост) на решения на някои операторни уравнения в съответни функционални пространства, получени при формулиране на конкретни задачи от практиката.

Глава 1. Топологични, метрични и равномерни пространства

Първа глава има предимно обзорен характер и се състои от три параграфа. В нея са представени накратко някои необходими и постоянно използвани при изследването основни сведения.

В **параграф 1.1** са дадени основни сведения от топологията, в **параграф 1.2** – определенията за свиващо и $\Phi-$свиващо изображение и метод на последователните приближения, а в **параграф 1.3** са представени основните теореми за неподвижни точки, които се използват в следващите глави (от [9], [18] и [26]). В края на **параграф 1.3** е представен един нов резултат, получен (с участието на докторанта) при изследванията от **параграф 3.3**, които се съдържат в приетата за публикуване статия [21].

Теорема 1.3.1. (Banach – Caccioppoli [26]) *Нека (X, ρ) е пълно метрично пространство и нека $F : D \to D$ е свиващ оператор с константа на свиване $k \in (0,1)$, където $D \subset X$ е непразно затворено подмножество на X. Тогава F притежава единствена неподвижна точка ξ в D, която може да бъде намерена като границата: $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, където $x_{n+1} = F(x_n)$ с произволно избрано начално приближение $x_0 \in D$ $(n = 0, 1, 2, ...)$.*
Скоростта на сходимост се определя от неравенствата

$$\rho(x_n, \xi) \leq \frac{k^n}{1-k}\rho(x_1, x_0)\,(n = 1, 2, ...).$$

Навсякъде в този параграф A е дадено индексно множество; $(X, \mathbf{A})$ е хаусдорфово равномерно пространство с равномерност, породена от сатурираната фамилия от псевдометрики $\mathbf{A} = \{\rho_\alpha(x, y) : \alpha \in \mathrm{A}\}$. За функциите от дадена фамилия $(\mathbf{\Phi}) = \{\Phi_\alpha(\cdot) : [0, \infty) \to [0, \infty) : \alpha \in \mathrm{A}\}$ казваме, че са *със свойствата* **(Ф1)**, **(Ф2)**, ако за $\forall\alpha \in \mathrm{A}$:

(Ф1) Φ_α е монотонно растяща и непрекъсната отдясно;

(Ф2) $0 < \Phi_\alpha(t) < t$ за всяко $t > 0$ (в частност $\Phi_\alpha(0) = 0, \forall\alpha \in \mathrm{A}$).

Операторът $T : X \to X$ се нарича $\Phi-$*свиващ*, ако (за дадено $j : \mathrm{A} \to \mathrm{A}$):

$$\rho_\alpha\left(T(x), T(y)\right) \leq \Phi_\alpha\left(\rho_{j(\alpha)}\left(x, y\right)\right), \forall x, y \in X,\ \forall\alpha \in \mathrm{A}.$$

Теорема 1.3.3. (Ангелов [9]) *Нека $(X, \mathbf{A})$ е хаусдорфово секвенциално пълно равномерно пространство и са дадени изображение $j : \mathrm{A} \to \mathrm{A}$ и фамилия от функции $(\mathbf{\Phi})$ със свойствата* **(Ф1)**, **(Ф2)**.
Нека са в сила условията:

1. $T : X \to X$ е $\Phi-$*свиващ оператор.*

2. За $\forall\alpha \in \mathrm{A}$ *съществува* $\bar{\Phi}_\alpha \in (\Phi)$: $\sup\left\{\Phi_{j^n(\alpha)}(t) : n \in \mathbb{N}_0\right\} \leq \bar{\Phi}_\alpha(t)$ *и функцията* $\dfrac{\bar{\Phi}_\alpha(t)}{t}$ *е монотонно растяща в* $(0, \infty)$.

3. *Съществува елемент $x_0 \in X$, за който при всеки произволен избор на индекс $\alpha \in \mathrm{A}$ може да се намери константа $q_\alpha = q(\alpha) > 0$* така, че

$$\rho_{j^n(\alpha)}\left(x_0, T(x_0)\right) \leq q_\alpha\ \left(\forall n = 0,\ 1,\ 2, ...\right).$$

Тогава T има поне една неподвижна точка в X.

Теорема 1.3.4. [9] *Нека освен условията на* Теорема 1.3.3 *е изпълнено и*

4. *За* $\forall\alpha \in \mathrm{A}$ *и* $\forall x, y \in X$ *съществува* $Q = Q(x, y, \alpha) > 0$ така, че

$$\rho_{j^n(\alpha)}(x, y) \leq Q,\ \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Тогава T има единствена неподвижна точка в X. При това, за общия член на редицата на Пикар $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}, x_n = T(x_{n-1}),\ n \in \mathbb{N}$, при произволен и фиксиран избор на индекс $\alpha \in \mathrm{A}$, е в сила оценката:

$$\rho_\alpha(x_n, x) \leq \frac{k_\alpha^n q_\alpha}{1-k_\alpha},\ \text{с}\ k_\alpha = \frac{\overline{\Phi}_\alpha\left(q_\alpha\right)}{q_\alpha} < 1.$$

Нека $\Gamma = \mathrm{A} \times \mathbb{N}_0$ е декартовото произведение на индексното множество A (от равномерното пространство $(X, \mathbf{A})$) с множеството $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ и нека е дадена фамилията от функции $\left(\mathbf{\Phi^2}\right) = \{\Phi_{(\alpha,n)} : (\alpha, n) \in \Gamma\}$ със свойствата:

($\mathbf{\Phi^2.1}$) За $\forall(\alpha, n) \in \Gamma$ функцията $\Phi_{(\alpha,n)} : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ е монотонно растяща и непрекъсната отдясно.

($\mathbf{\Phi^2.2}$) За $\forall\alpha \in \mathrm{A}$ $\exists n(\alpha) \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n(\alpha)$ функциите $\Phi_{(\alpha,n)}$ удовлетворяват неравенствата $0 < \Phi_{(\alpha,n)}(t) < t$, $\forall t > 0$.

Дефиниция. Казваме, че операторът $T : X \to X$ е $(\Phi)-$*почти свиващ* в X по отношение на фамилията $\left(\mathbf{\Phi^2}\right)$ и дадено фиксирано изображение $j : \Gamma \to A$, ако за всеки фиксиран индекс $\alpha \in \mathrm{A}$ и $\forall n \in \mathbb{N}_0$ съществува

$\Phi_{(\alpha,n)}(t) \in \left(\Phi^2\right) : \rho_\alpha(T^n(x), T^n(y)) \leq \Phi_{(\alpha,n)}(\rho_{j(\alpha,n)}(x, y)) \forall (x, y) \in X \times X.$

Теорема 1.3.5. [21] *Нека в равномерното, хаусдорфово и секвенциално пълно пространство $(X, \boldsymbol{A})$ са изпълнени следните условия:*

1. *Операторът $T : X \to X$ е $(\Phi)-$почти свиващ по отношение на някоя фамилия от функции $(\mathbf{\Phi^2})$ и фиксирано изображение $j : \Gamma \to \mathrm{A}$.*

2. *Съществува елемент $x_0 \in X$ такъв, че за $\forall\alpha \in \mathrm{A}$ съществува $q = q(\alpha) : A \to (0, \infty)$ и $\rho_{j(\alpha,n)}(x_0, T(x_0)) \leq q(\alpha) < \infty$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.*

3. За $\forall\alpha \in \mathrm{A} : \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{(\alpha,n)}(q(\alpha)) < \infty$.

Тогава T има неподвижна точка в X.

Глава 2. Приложения на метода на неподвижни точки при нелинейни задачи от електротехниката

Втора глава се състои от три параграфа. В тази глава се прилага методът на неподвижни точки при решаване на задачи, които възникват при изследване на модели от електротехниката. Получени са три основни резултата: теорема за съществуване и единственост на решение на едно функционално уравнение (Теорема 2.1.1), теорема за съществуване и единственост на решение на задача на Коши за система от нелинейни диференциални уравнения от втори ред (Теорема 2.2.1) и две теореми за съществуване и единственост на решение (Теорема 2.3.1 и Теорема 2.3.2) на задача с начални условия за едно интегро-диференциално уравнение с отклонение в аргумента (от неутрален тип).

Резултати от втора глава са публикувани в [20] и [45].

В **параграф 2.1** се разглежда една нелинейна верига с резистивни елементи, чиито $V - I$ характеристики са от полиномен тип ([108]). Изходната система, получена като следствие от съответните уравнения на равновесие на токовете и напреженията, е следната ([20]):

$$\begin{cases} i_1 = A_1 u_1^{\frac{1}{3}} \\ u_2 = A_2 i_2 \\ u_3 = A_3 i_3 + A_4 i_3^3 \\ i_1 + i_3 = i_0 \\ i_2 = i_3 \\ u_1 = u_0 \\ u_1 = u_2 + u_3 \end{cases}, \tag{1}$$

където $A_k \neq 0\,(k = 1, 2, 3, 4)$ са дадени със своите физични размерности константи, а с i и u (със съответните индекси) означаваме съответно функции за токове и за напрежения (i_0 и u_0 са дадени, а $i_1, ..., u_3$ – неизвестни).

Изследването на тази система води до решаване на следното нелинейно уравнение за една от неизвестните функции ($i(t) \equiv i_3(t)$), с $\alpha = A_1^3 A_4$:

$$i(t) = \frac{A_4}{\alpha\,(A_2 + A_3)} \left[i_0^3(t) - 3i_0^2(t)\, i(t) + 3i_0(t)\, i^2(t) - (1 + \alpha)\;\; i^3(t) \right]. \tag{2}$$

При решаването на това уравнение прилагаме класическия принцип на Банах за свиващото изображение T, което се дефинира чрез дясната страна на (2) и действа в подходящо пространство от функции, дефинирани, непрекъснати и ограничени в $[0, \infty)$:

Теорема 2.1.1. *Нека A_1, A_2, A_3, A_4 са известни ненулеви константни величини, $A_2 + A_3 \neq 0$. Нека е дадена и функцията $i_0(t) : [0, \infty) \to [0, \infty)$, която е непрекъсната и $|i_0(t)| \leq I_0,\ \forall t \geq 0$, където I_0 е дадена константна величина, която удовлетворява неравенствата*

$$0 < I_0 < \sqrt{\frac{|A_1^3\,(A_2 + A_3)|}{9 + 3\,|1 + A_1^3 A_4|}}.$$

Тогава уравнение (2) има единствено непрекъснато и ограничено решение $i^* \in M = \{i(t) \in C\,([0, \infty)) : |i(t)| \leq I_0\, \forall t \geq 0\}$. Това решение е равномерна граница на редицата от последователни приближения на Пикар $\left\{ i^{(n)}(t) \right\}_{n=0}^{\infty}$, $i^{(n+1)} = T(i^{(n)})$, като началната функция $i^{(0)}(t)$ е произволен елемент на множеството M и е в сила оценката:

$$\rho\left(i^*, i^{(n)}\right) \leq \frac{k^n}{1 - k} \cdot \rho\left(i^{(1)}, i^{(0)}\right) \; \left(k = \frac{9 + 3\,|1 + \alpha|}{|\alpha|} \cdot \left|\frac{A_4}{A_2 + A_3}\right| I_0^2 < 1\right).$$

Като следствие получаваме разрешимост и на системата (1).

В **параграф 2.2** разглеждаме задача, получена при изследване на движението на ротационен феромагнитен елипсоид, поставен в общо положение във въртящо се с постоянна ъглова скорост хомогенно магнитно поле. Моделът, описващ това движение, се изразява със система от диференциални уравнения от втори ред на Лагранж ([45]). При изследването се разглежда и следната задача с начални условия за системата от две уравнения за неизвестните ъгли $\gamma = \gamma(t),\ \delta = \delta(t)$ (при $t \in [0, \infty)$):

$$\begin{cases} \ddot{\gamma} = -M\cos^2\delta\sin 2\gamma - k\dot{\gamma} \\ \ddot{\delta} = -M\sin 2\delta - k\dot{\delta} - k\omega \end{cases}. \tag{3}$$

За системата (3) доказваме съществуване на единствено решение (γ, δ) (с дадени при $t = 0$ начални условия $\gamma(0),\ \dot{\gamma}(0),\ \delta(0),\ \dot{\delta}(0)$), което принадлежи на подходящо метрично пространство, свеждайки системата (3) до следната система от операторни уравнения:

$$\begin{cases} \gamma(t) = H(\gamma, \delta)(t) \\ \delta(t) = G(\delta)(t) \end{cases},\ t \geq 0, \tag{4}$$

като операторът G е дефиниран върху подмножество B на пространството от непрекъснатите в $[0,\ \infty)$ функции така: за $\forall f \in B$ се определя $G(f)$ така, че за $\forall t \geq 0$

$$G(f)(t) = \delta(0) + \frac{\omega + \dot{\delta}(0)}{k}\left(1 - e^{-kt}\right) - \omega t - \frac{M}{k}\int\limits_0^t \left(1 - e^{-k(t-s)}\right)\sin 2f(s)ds,$$

а изображението H се дефинира върху $B \times B$ както следва: за всеки елемент $(h, f) \in B \times B$ определяме $H(h, f)$ така, че за всяко $t \geq 0$

$$H(h,f)(t) = \gamma(0) + \frac{\dot{\gamma}(0)}{k}\left(1 - e^{-kt}\right) - \frac{M}{k}\int\limits_0^t \left(1 - e^{-k(t-s)}\right)\cos^2 f(s)\sin 2h(s)ds.$$

Множеството $B \subset C\left([0,\ \infty)\right)$ дефинираме, както следва:

$$B = \left\{f \in C\left([0,\ \infty)\right) : |f(t)| \leq Ce^{\lambda t}, \forall t \geq 0\right\}$$

с дадени константи C и $\lambda > 0$, които избираме и фиксираме така, че:

$$\begin{aligned} &C = |\delta(0)| + \frac{\left|\omega + \dot{\delta}(0)\right|}{k} + |\gamma(0)| + \frac{|\dot{\gamma}(0)|}{k} + \frac{1}{2}, \\ &\lambda > m, \quad m = \max\left\{\frac{3M}{k}, \omega + \frac{M}{k}\right\}, \end{aligned} \tag{5}$$

с норма $\|f\|_B = \sup\left\{e^{-\lambda t}|f(t)| : t \geq 0\right\}$, $f \in B$ и метрика $d(f,\bar{f}) = \|f-\bar{f}\|_B$, $\forall f, \bar{f} \in B$. Така B се превръща в банахово пространство.

Разглеждаме метричното пространство $E = B \times B$ с метрика

$$\rho\left((h,f),\left(\bar{h},\bar{f}\right)\right) = \left\|h-\bar{h}\right\|_B + \left\|f-\bar{f}\right\|_B.$$

С така въведената метрика E става пълно метрично пространство (то е и нормирано с нормата $||(h,f)|| = \|h\|_B + \|f\|_B$).

В това пространство задаваме изображението $T : E \to E$:

$$T((h,f)) = (H(h,f), G(f)),\ \forall (h,f) \in E, \tag{6}$$

където G и H са операторите, определени по-горе.

Теорема 2.2.1. *Системата (4) притежава единствено непрекъснато решение* (γ,δ) *в пространството* $E = B \times B$, *при условие, че константите* C *и* $\lambda > 0$ *са избрани в съответствие с* (5). *Това решение е единствената неподвижна точка на изображението* $T : E \to E$, *дефинирано в (6), и може да бъде получено като границата в* E *на функционалната редица* $\{(h_n,f_n)\}_{n=0}^{\infty}$, *където* $(h_n,f_n) = T((h_{n-1},f_{n-1}))$, $n \in \mathbb{N}$;

$$h_0(t) = \gamma(0) + \frac{\dot{\gamma}(0)}{k}\left(1-e^{-kt}\right);\ f_0(t) = \delta(0) + \frac{\omega+\dot{\delta}(0)}{k}\left(1-e^{-kt}\right).$$

При доказателството на последната теорема отново се възползваме от принципа на свиващото изображение, действащо в пълно метрично пространство, който прилагаме, за да намерим единствената граница в E на итерационната редица от наредени двойки от функции, чиито координати се задават така: за всяко $n \in \mathbb{N}$ определяме

$$h_n(t) = h_0(t) - \frac{M}{k}\int_0^t \left(1-e^{-k(t-s)}\right)\cos^2[f_{n-1}(s)]\sin[2h_{n-1}(s)]ds;$$

$$f_n(t) = f_0(t) - \omega t - \frac{M}{k}\int_0^t \left(1-e^{-k(t-s)}\right)\sin[2f_{n-1}(s)]ds.$$

В **параграф 2.3** се разглежда едно уравнение от теорията на автоматичното управление, което се получава при разглеждане на схема за обект на управление под въздействието на регулиращо устройство с отрицателна обратна връзка (представена от Попов и Бесекерски в [107]).

Разглеждаме следната задача с начални условия: да се намери неизвестната функция $x(t)$, за която:

$$\begin{cases} x'(t) = \varphi(t,x(t)) + ax(t-k) + b\displaystyle\int_{t-k-h}^{t-k} x(s)ds + cx'(t-k) + z(t), t > 0 \\ x(t) = g(t), x'(t) = g'(t),\ t \leq 0 \end{cases} \tag{7}$$

където са дадени $c \in \mathbb{R}$, постоянните величини $a, b,\ k > 0, h > 0$ (с физическите си размерности) и функциите $z(t), \varphi(t,u)$ и $g(t)$. Функцията $z(t)$ е непрекъсната в $[0,\infty)$. Функцията $\varphi = \varphi(t,u)$ е дефинирана (нелинейна) в $[0,\infty) \times (-\infty,\infty)$ и е непрекъсната по всеки от двата си аргумента, а началната функция $g(t)$ е дефинирана и непрекъснато диференцируема в $(-\infty, 0]$ (под $g'(0)$ разбираме $g'_{-}(0)$).

Ако търсим непрекъснато диференцируемо решение $x(t)$ на (7), е необходимо да бъде изпълнено условието (за съгласуване):

$$g'_{-}(0) = \varphi(0, g(0)) + ag(-k) + b \int\limits_{-k-h}^{-k} g(s)ds + cg'(-k) + z(0). \tag{8}$$

Теорема 2.3.1. *Нека $z(t)$ е дадена непрекъсната функция, а $g(t)$ е дадена функция, която е дефинирана и непрекъснато диференцируема в $(-\infty, 0]$. Нека е дадена и функцията $\varphi(t,u) : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, която е непрекъсната по t и по u и удовлетворява неравенството*

$$|\varphi(t,u) - \varphi(t,v)| \leq \omega(t)\,|u - v|\,,\ \forall u, v \in \mathbb{R},$$

където ω е неотрицателна функция, дефинирана навсякъде в $[0,\infty)$ и за някое p: $1 \leq p \leq \infty$: $\omega(\cdot) \in L^p\left([0,\infty);[0,\infty)\right)$.

Тогава съществува непрекъсната в $\mathbb{R}$ функция $x(t)$, която е непрекъснато диференцируема в множеството

$$M = (-\infty, 0) \bigcup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} (nk, (n+1)k) \right)$$

и е единственото решение на началната задача:

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = \varphi(t, x(t)) + ax(t-k) + b \int\limits_{t-k-h}^{t-k} x(s)ds + \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + cx'(t-k) + z(t)\,,\ 0 < t \in M \\ x(t) = g(t), x'(t) = g'(t)\,, \qquad t \leq 0. \end{array} \right. \tag{9}$$

В доказателството използваме теоремите на Ангелов (Теорема 1.3.3 и Теорема 1.3.4 от първа глава) за $\Phi-$свиващо изображение в равномерното пространство $(X, \mathbf{A})$, където $X = \{x \in C(\mathbb{R}) : x(t) = g(t) \forall t \leq 0\}$, а сатурираната фамилия от псевдометрики $\mathbf{A} = \{\rho_K : K \in \mathrm{A}\}$ се дефинира чрез полунорми с тегло по аналогия с нормите, въведени от Биелецки ([28], [68], [94], [117]):

$$\rho_K(u,v) = \sup\left\{ e^{-\lambda t}\,|u(t) - v(t)| : t \in K \right\},\ \forall (u,v) \in X \times X,$$

където K описва множеството A от всички компактни подмножества на $\mathbb{R}$, а $\lambda > 0$ е подходяща константа.

Разглеждаме изображението T:

$$T(x)(t)=\begin{cases} g(0)+\int\limits_0^t \varphi(s,x(s))ds+a\int\limits_{-k}^{t-k} x(s)ds+b\int\limits_{-k}^{t-k}\int\limits_{s-h}^{s} x(\tau)d\tau ds+ \\ \qquad +cx(t-k)-cx(-k)+\int\limits_0^t z(s)ds,\ t>0 \\ g(t), \quad t\le 0 \end{cases} \tag{10}$$

Дефинираме изображението $j:\mathrm{A}\to\mathrm{A}$: $j(K)=\begin{cases} K, & \sup K\le 0 \\ [0,\sup K], & \sup K>0 \end{cases}$ и функцията $x_0(t)=\begin{cases} g(0),\ t>0 \\ g(t),\ t\le 0 \end{cases}$, която принадлежи на X.

С подходящ избор на константата λ доказваме, че са изпълнени всички условия на Теорема 1.3.3 и Теорема 1.3.4, което гарантира съществуване на единствена неподвижна точка на T (като определянето на подходяща фамилия от функции $(\Phi)=\{\Phi_K : K\in \mathrm{A}\}$, за която T е $\Phi-$свиващо в X, съществено зависи от свойствата на сравняващата функция ω – от това дали $p=1$ или $1<p\le\infty$).

След това с индукция показваме, че неподвижната точка $x\in X$ на изображението T е и непрекъснато диференцируема във всеки от интервалите, обединени в множеството M, а ако е изпълнено и (8) – че тя е непрекъснато диференцируема в $\mathbb{R}$ – в сила е и:

Теорема 2.3.2. *Ако е изпълнено условието за съгласуване (8) и условията на Теорема 2.3.1, то задачата (7) има единствено непрекъснато диференцируемо в* $\mathbb{R}$ *решение.*

Глава 3. Приложения на метода на неподвижни точки при някои задачи за оператори в равномерни пространства

Трета глава се състои от три параграфа. В тази глава се прилага методът на неподвижни точки за изображения, действащи в равномерни пространства: в **параграф 3.1** се разглежда задача с условия *от тип на Гурса* за едно *хиперболично* диференциално уравнение с отклоняващи се аргументи, в **параграф 3.2** – задача с начални условия за една система от диференциални уравнения с *максимуми*, а в **параграф 3.3** методът се прилага при абстрактни интегрални уравнения от волтеров тип. Получени са 4 основни резултата: две теореми за съществуване и единственост за задачата от тип на Гурса в параграф 3.1 (Теорема 3.1.1 и Теорема 3.1.2), една – за системата от параграф 3.2 (Теорема 3.2.2) и един резултат за съществуване – за уравненията от параграф 3.3 (Теорема 3.3.4). Резултатите от първите два параграфа на тази глава са публикувани съответно в статиите [43] и [44], а изследванията от параграф 3.3 са включени в приетата за публикуване статия [21].

В **параграф 3.1** разглеждаме (в $\mathbb{R}_+^2 = (0,\infty)\times(0,\infty)$) уравнението

$$u_{xy} = F(x, y, u(\Delta,\tau), u_x(\alpha,\beta), u_y(\theta,\kappa), u_{xy}(\mu,\nu)),\ (x,y)\in\mathbb{R}_+^2, \tag{11}$$

в което са дадени както нелинейната функция F, дефинирана в $\mathbb{R}_+^2\times\mathbb{R}^4$, така и „отклоненията“ в аргументите – функциите $\Delta=\Delta(x,y), \tau=\tau(x,y)$, $\alpha=\alpha(x,y), \beta=\beta(x,y)$, $\theta=\theta(x,y), \kappa=\kappa(x,y)$, $\mu=\mu(x,y)$ и $\nu=\nu(x,y)$, дефинирани за $\forall\,(x,y)\in\overline{\mathbb{R}_+^2}$, а $u=u\,(x,y)$ е неизвестната функция с частни производни: $u_x=\dfrac{\partial u}{\partial x}, u_y=\dfrac{\partial u}{\partial y}, u_{xy}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\equiv\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$.

За такова уравнение казваме, че е хиперболично диференциално уравнение с отклоняващи се аргументи. То е от неутрален тип заради участието на u_{xy} и в дясната страна като последен аргумент на F.

Нека е дадена и функцията $\psi=\psi(x,y)$, дефинирана за всяка точка $(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\mathbb{R}_+^2$ заедно със своите производни

$$\psi_x=\frac{\partial\psi}{\partial x}, \psi_y=\frac{\partial\psi}{\partial y}, \psi_{xy}=\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\equiv\frac{\partial^2\psi}{\partial\psi\partial x}.$$

Поставяме следната задача от тип на Гурса ([43], [118]):

Да се намери абсолютно непрекъсната функция $u\,(x,y)$ (в $\mathbb{R}^2$, локално), която в $\mathbb{R}_+^2$ удовлетворява уравнението (11), а в $\mathbb{R}^2\backslash\mathbb{R}_+^2$ съвпада с $\psi(x,y)$:

$$\left\{\begin{array}{l} u(x,y)=\psi(x,y),\ u_x(x,y)=\psi_x(x,y),\\ u_y(x,y)=\psi_y(x,y), u_{xy}(x,y)=\psi_{xy}(x,y),\end{array}\right.\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\mathbb{R}_+^2\ . \tag{12}$$

С функциите $v=v(x,y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ и $\varphi=\varphi(x,y):\mathbb{R}^2\backslash\mathbb{R}_+^2\to\mathbb{R}$:
$v(x,y)=u_{xy}(x,y),\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}_+^2$ и $\varphi(x,y)=\psi_{xy}(x,y),\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\mathbb{R}_+^2$
и със съответни преобразувания получаваме:

$$u(x,y)=\varphi_0(x,y)+\int_0^x\int_0^y v(\xi,\eta)d\eta d\xi,$$

$$u_x(x,y)=\varphi_1(x)+\int_0^y v(x,\eta)d\eta,\quad u_y(x,y)=\varphi_2(y)+\int_0^x v(\xi,y)d\xi$$

$(\varphi_0(x,y)=\psi(0,y)+\psi(x,0)-\psi(0,0),\ \varphi_1(x)=\psi_x(x,0),\ \varphi_2(y)=\psi_y(0,y))$.

Така на задачата на Гурса (11) – (12) съответства следната задача:

$$v(x,y)=\begin{cases} F\Big(x,y,\overline{\varphi}_0+\int\limits_0^{\Delta}\int\limits_0^{\tau}v(\xi,\eta)d\eta d\xi,\overline{\varphi}_1+\int\limits_0^{\beta}v(\alpha,\eta)d\eta,\overline{\varphi}_2+ \\ \qquad +\int\limits_0^{\theta}v(\xi,\kappa)d\xi,v(\mu,\nu)\Big), \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2_+ \\ \varphi(x,y), \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\mathbb{R}^2_+ \end{cases}, \qquad (13)$$

където, за краткост, използваме означенията:
$\Delta=\Delta(x,y),\tau=\tau(x,y),\alpha=\alpha(x,y),\beta=\beta(x,y),$
$\theta=\theta(x,y),\kappa=\kappa(x,y),\mu=\mu(x,y),\nu=\nu(x,y);$
$\overline{\varphi}_0=\varphi_0\left(\Delta(x,y),\tau(x,y)\right),\overline{\varphi}_1=\varphi_1\left(\alpha(x,y)\right),\overline{\varphi}_2=\varphi_2\left(\kappa(x,y)\right).$

Казваме, че $u(x,y)$ *е решение* (*в обобщен смисъл*) *на* (11) – (12), *ако съответната функция* $v(x,y)$ ($=u_{xy}(x,y)$, *п. н.*) *е решение на* (13).

В **параграф 3.1** търсим подходящи условия за съществуване на решение на (13), принадлежащо на $L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}^2)$, както и такива, които гарантират съществуване на решение на (13) в $L^{p}_{loc}(\mathbb{R}^2)$ за $p\in(1,\infty)$.

За получаване на подходящи равномерни пространства и за намиране на търсените достатъчни условия разглеждаме съвкупността А от всички компактни (затворени и ограничени, в случая) множества $K\subset\mathbb{R}^2$. Означаваме с K_+ сечението на K с $\mathbb{R}^2_+$ и дефинираме изображението $j:\mathrm{A}\to\mathrm{A}$, както следва: $j(K)=\begin{cases} K, & K_+=\varnothing \\ K_{\Delta\tau}\cup K_{\alpha\beta}\cup K_{\theta\kappa}\cup K_{\mu\nu}, & K_+\neq\varnothing \end{cases}$,
като компактните множества $K_{\Delta\tau},K_{\alpha\beta},K_{\theta\kappa}$ и $K_{\mu\nu}$ се определят така:
$K_{\Delta\tau}=K_{\Delta}\times K_{\tau}$, $K_{\alpha\beta}=K_{\alpha}\times K_{\beta}$, $K_{\theta\kappa}=K_{\theta}\times K_{\kappa}$, където:

$$K_{\Delta}=\begin{cases} \left[\Delta_{\inf},\Delta_{\sup}\right], \Delta_{\inf}<0<\Delta_{\sup} \\ \left[0,\Delta_{\sup}\right], \quad \Delta_{\inf}\geq 0 \\ \left[\Delta_{\inf},0\right], \quad \Delta_{\sup}\leq 0 \end{cases}, K_{\tau}=\begin{cases} \left[\tau_{\inf},\tau_{\sup}\right], \tau_{\inf}<0<\tau_{\sup} \\ \left[0,\tau_{\sup}\right], \quad \tau_{\inf}\geq 0 \\ \left[\tau_{\inf},0\right], \quad \tau_{\sup}\leq 0 \end{cases},$$

$$K_{\alpha}=cl\left\{\alpha(K)\right\},\ K_{\beta}=\begin{cases} \left[\beta_{\inf},\beta_{\sup}\right], \ \beta_{\inf}<0<\beta_{\sup} \\ \left[0,\beta_{\sup}\right], \quad \beta_{\inf}\geq 0 \\ \left[\beta_{\inf},0\right], \quad \beta_{\sup}\leq 0 \end{cases},$$

$$K_{\theta}=\begin{cases} \left[\theta_{\inf},\theta_{\sup}\right], \ \theta_{\inf}<0<\theta_{\sup} \\ \left[0,\theta_{\sup}\right], \quad \theta_{\inf}\geq 0 \\ \left[\theta_{\inf},0\right], \quad \theta_{\sup}\leq 0 \end{cases}, K_{\kappa}=cl\left\{\kappa(K)\right\},$$

$K_{\mu\nu}=cl\left\{(\mu(x,y),\nu(x,y)):(x,y)\in K\right\}$
(за краткост използваме $\Delta_{\inf},\Delta_{\sup}$, $\tau_{\inf},\tau_{\sup}$, $\beta_{\inf},\beta_{\sup}$, $\theta_{\inf}$, $\theta_{\sup}$ съответно за $\Delta_{\inf}=\inf\left\{\Delta(x,y):(x,y)\in K_+\right\}$,...,$\theta_{\sup}=\sup\left\{\Delta(x,y):(x,y)\in K_+\right\}$,
а с $cl\{P\}=\overline{P}$ означаваме затворената обвивка на множеството P).

Условията, които са достатъчни за съществуване на локално съществено ограничено решение на (13), формулираме, както следва:

(**А1**) ψ е абсолютно непрекъсната в $\mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{R}^2_+$: $\varphi = \psi_{xy} \in L^\infty_{loc}\left(\mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{R}^2_+\right)$, $\psi(x,0)$ и $\varphi_1(x) = \psi_x(x,0)$ са непрекъснати функции за всяко $x \in \mathbb{R}$, а функциите $\psi(0,y)$ и $\varphi_2(y) = \psi_y(0,y)$ са непрекъснати за всяко $y \in \mathbb{R}$.

(**А2**) $\Delta, \tau, \alpha, \beta, \theta, \kappa, \mu, \nu : \overline{\mathbb{R}^2_+} \to \mathbb{R}$ са измерими функции, които изобразяват ограничени множества в ограничени множества и (без Δ, τ) имат свойството (M) (*прообразът на множество с мярка 0 е измерим*).

(**А3**) За всяка точка $(x,y) \in \mathbb{R}^2_+$, за която $(\Delta(x,y), \tau(x,y)) \in \mathbb{R}^2_+$ (или съответно $(\alpha(x,y), \beta(x,y)) \in \mathbb{R}^2_+$, или $(\theta(x,y), \kappa(x,y)) \in \mathbb{R}^2_+$), е в сила: $\Delta(x,y) + \tau(x,y) \leq x + y$ (или, съответно: $\alpha(x,y) + \beta(x,y) \leq x + y$, или $\theta(x,y) + \kappa(x,y) \leq x + y$).

Съществува такова число $\delta_0 > 0$, че за всяка точка $(x,y) \in \mathbb{R}^2_+$, за която $(\mu(x,y), \nu(x,y)) \in \mathbb{R}^2_+$, е изпълнено $\mu(x,y) + \nu(x,y) \leq x + y - \delta_0$.

(**А4**) Функцията $F = F(x,y,z_1,z_2,z_3,z_4) : \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ е измерима по x и y, непрекъсната по z_1, z_2, z_3, z_4 и удовлетворява условията (*от тип на Каратеодори*):

$|F(x,y,z_1,z_2,z_3,z_4)| \leq \Omega_1\left(x,y,|z_1|,|z_2|,|z_3|,|z_4|\right);$

$$|F(x,y,z_1,z_2,z_3,z_4) - F(x,y,\bar{z}_1,\bar{z}_2,\bar{z}_3,\bar{z}_4)| \leq$$
$$\leq \Omega_2\left(x,y,|z_1-\bar{z}_1|,|z_2-\bar{z}_2|,|z_3-\bar{z}_3|,|z_4-\bar{z}_4|\right)$$

с дадени функции $\Omega_{1,2}\left(x,y,t_1,t_2,t_3,t_4\right) : \mathbb{R}^2_+ \times \overline{\mathbb{R}^4_+} \to [0,\infty)$, които са измерими по x и y и непрекъснати по t_1, t_2, t_3, t_4, като $\Omega_1\left(\cdot,\cdot,t_1,t_2,t_3,t_4\right)$ е локално съществено ограничена функция в $\mathbb{R}^2_+$, а $\Omega_2\left(x,y,t_1,t_2,t_3,t_4\right)$ е монотонно растяща по всеки от аргументите t_1, t_2, t_3, t_4 и съществува такава съществено ограничена в $\mathbb{R}^2_+$ функция ω, че за всяко $t > 0$ почти навсякъде в $\mathbb{R}^2_+$ е изпълнено: $\Omega_2(\cdot,\cdot,t,t,t,t) \leq t\omega(\cdot,\cdot)$.

(**А5**) За всеки компакт $K \in \mathrm{A}\ \exists \hat{K} \in \mathrm{A} : j^l(K) \subset \hat{K}, \forall l = 0,1,2,...$

Теорема 3.1.1. *При изпълнение на условията (**А1**) – (**А5**) задача (13) има единствено решение* $v(x,y) \in L^\infty_{loc}\left(\mathbb{R}^2\right)$.

При доказване на твърдението на Теорема 3.1.1 въвеждаме равномерното хаусдорфово и секвенциално пълно пространство $(X, \mathbf{A})$, където X е пространството от всички функции, които принадлежат на $L^\infty_{loc}\left(\mathbb{R}^2\right)$ и (почти навсякъде) в $\mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{R}^2_+$ съвпадат с началната функция $\varphi = \psi_{xy}(x,y)$, а сатурираната фамилия от псевдометрики $\mathbf{A} = \{\rho_K(\cdot,\cdot) : K \in \mathrm{A}\}$, дефинирани върху $X \times X$, както следва: за $\forall (f,g) \in X \times X$

$$\rho_K(f,g) = \operatorname{ess\,sup}\left\{e^{-\lambda(|x|+|y|)}|f(x,y) - g(x,y)| : (x,y) \in K\right\}$$

(където λ е положително число), поражда съответна равномерност в X.

Дефинираме оператора $T : X \to X$ чрез дясната страна на (13) и с подходящ избор на числото λ доказваме, че за него са в сила всички условия на теоремите за съществуване и единственост на неподвижна точка на $\Phi-$свиващ оператор в равномерно пространство (Теорема 1.3.3 и Теорема 1.3.4), когато функциите от фамилията (Φ) са определени така: за всеки фиксиран компакт K и за $\forall t \geq 0$: $\Phi_K(t) = \begin{cases} 0, & K_+ = \varnothing \\ t\lambda^{-\gamma} \|\omega\|_{L^\infty(K_+)}, & K_+ \neq \varnothing \end{cases}$ $\Big($където $\gamma = \min\{1, \delta_0\}$ и $\lambda > 1 : \lambda^\gamma > \|\omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2_+)}\Big)$.

Нека за някое $p \in (1, \infty)$ са изпълнени следните условия:

(**B1**) ψ е абсолютно непрекъсната функция: $\varphi = \psi_{xy} \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{R}^2_+)$, функциите $\psi(x, 0)$ и $\varphi_1(x) = \psi_x(x, 0)$ са непрекъснати за $\forall x \in \mathbb{R}$, а функциите $\psi(0, y)$ и $\varphi_2(y) = \psi_y(0, y)$ са непрекъснати за $\forall y \in \mathbb{R}$.

(**B2**) Функциите $\Delta, \tau,\ \alpha, \beta,\ \theta, \kappa,\ \mu, \nu : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ са измерими, изобразяват ограничени множества в ограничени множества и (без Δ, τ) имат свойството (M). Изображенията $P_\alpha : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R} \times (0, \infty)$, $P_\kappa : \mathbb{R}^2_+ \to (0, \infty) \times \mathbb{R}$ и $P_{\mu\nu} : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2$, съответно: $P_\alpha(x, y) = (\alpha(x, y), y)$, $P_\kappa(x, y) = (x, \kappa(x, y))$, $P_{\mu\nu}(x, y) = (\mu(x, y), \nu(x, y))$, са такива, че (по смисъла на смяна на променливите в двоен интеграл) са допустими смените

$\left| \begin{array}{l} x = \alpha^*(u, v) \\ y = v \end{array} \right.$, $\left| \begin{array}{l} x = u \\ y = \kappa^*(u, v) \end{array} \right.$ и $\left| \begin{array}{l} x = \mu^*(u, v) \\ y = \nu^*(u, v) \end{array} \right.$, където $\alpha^*(P_\alpha(x, y)) = x$, $\kappa^*(P_\kappa(x, y)) = y$, $(\mu^*(P_{\mu\nu}(x, y)), \nu^*(P_{\mu\nu}(x, y))) = (x, y)$, като функциите $\alpha^*, \kappa^*, \mu^*$ и ν^* са достатъчно гладки, а производните α^*_u, κ^*_v и детерминантата $\dfrac{D(\mu^*, \nu^*)}{D(u, v)}$, са ограничени функции в $\mathbb{R}^2_+$.

(**B4**) Функцията $F : \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ удовлетворява следните условия (*от тип на Каратеодори*): $F(x, y, z_1, z_2, z_3, z_4)$ е измерима по (x, y), непрекъсната по z_1, z_2, z_3, z_4 и за $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2_+$ и $\forall (z_1, z_2, z_3, z_4), (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_4) \in \mathbb{R}^4$ са изпълнени неравенствата:

$|F(x, y, z_1, z_2, z_3, z_4)| \leq a(x, y) + b(|z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|)$;

$$|F(x, y, z_1, z_2, z_3, z_4) - F(x, y, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_4)| \leq \omega_1(x, y)|z_1 - \bar{z}_1| + \\ + \omega_2(y)|z_2 - \bar{z}_2| + \omega_3(x)|z_3 - \bar{z}_3| + \omega_4|z_4 - \bar{z}_4|,$$

където $a(x, y) \geq 0$ почти навсякъде в $\overline{\mathbb{R}^2_+}$ и за всеки компакт $K \subset \overline{\mathbb{R}^2_+}$:

$\iint\limits_K a^p(x, y)\,dxdy < \infty$, $\omega_1(x, y) \geq 0$ п.н. в $\overline{\mathbb{R}^2_+}$ и $\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \omega_1^p(x, y)dxdy < \infty$,

$\omega_{2,3}(s) \geq 0$ за почти всяко $s \geq 0$ и $\int\limits_0^\infty \omega^p_{2,3}(s)ds < \infty$, а $b \geq 0$ и $\omega_4 \geq 0$ са дадени константи.

Теорема 3.1.2. *Ако са изпълнени условията* (**B1**), (**B2**), (**A3**), (**B4**) и (**A5**), *то задачата* (13) *има единствено решение* $v(x,y) \in L^p_{loc}\left(\mathbb{R}^2\right)$.

При доказателството на Теорема 3.1.2 равномерното пространството $(X, \mathbf{B})$ определяме така: X е пространството от всички функции, принадлежащи на $L^p_{loc}\left(\mathbb{R}^2\right)$ (с числото p от (**B1**) и (**B4**)), които (п. н.) в $\mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{R}^2_+$ съвпадат с $\varphi = \psi_{xy}(x,y)$.

Фамилията от псевдометрики $\mathbf{B} = \{\rho_K(\cdot,\cdot) : K \in \mathrm{A}\}$, дефинирани за $\forall\,(f,g) \in X \times X$ и $\forall K \in \mathrm{A}$:

$$\rho_K(f,g) = \Big(\iint\limits_K e^{-\lambda(|x|+|y|)} \left|f(x,y) - g(x,y)\right|^p dxdy \Big)^{\frac{1}{p}}$$

(където λ е подходящо избрано и фиксирано положително число) е сатурирана и поражда равномерност в X.

Изображението $j : \mathrm{A} \to \mathrm{A}$ се задава както по-горе, а операторът T се определя отново чрез дясната страна на (13).

Подходящият избор на λ и изпълнението на поставените условия гарантират съществуването в $(X, \mathbf{B})$ на единствена неподвижна точка на T, която е и единственото решение в $L^p_{loc}\left(\mathbb{R}^2\right)$ на (13), в този случай.

В **параграф 3.2** се търси решение на една система от уравнения, в която върху актуалното състояние оказват влияние максимумите на (модулите на) неизвестните функции. Разглежданата система ([44]) е:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \|x(t)\|_g),\ t > 0,$$

за която поставяме задача с начални условия:

$$x(t) = \varphi(t),\ t \le 0,$$

където $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ е неизвестната вектор-функция, $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, а $\dot{x}(t) = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), ..., \dot{x}_n(t))$ е векторът от производните $\dot{x}_i(t) = \dfrac{dx_i(t)}{dt}$ на координатните функции, $\|x(t)\|_g = \max\limits_{g(t) \le s \le t} \|x(s)\|$, като предварително е зададена измеримата функция $g(t) : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, за която е в сила $-\infty < g(t) \le t, \forall t \ge 0$ и $\|x(\cdot)\| = \max\{|x_i(\cdot)| : 1 \le i \le n\}$ е max-нормата в $\mathbb{R}^n$.

Началната вектор-функция φ: $(-\infty, 0] \to \mathbb{R}^n$ и изображението в дясната страна f:$[0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ са дадени.

Както обикновено свеждаме поставената задача до следната задача за система от интегрални уравнения:

$$\begin{cases} x(t) = x(0) + \int\limits_0^t f(\tau, x(\tau), \|x(\tau)\|_g) d\tau, & t > 0 \\ x(t) = \varphi(t), & t \le 0 \end{cases}. \tag{14}$$

Формулираме условията (**I**), при които (14) има единствено решение, принадлежащо на $C(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)$:

(**I1**) Дадено е изображението $f:[0,\infty)\times\mathbb{R}^n\times[0,\infty)\to\mathbb{R}^n$, което изпълнява следните условия *на Каратеодори*: $f(t,u,v)$ е измеримо по t, непрекъсното по u,v, $\|f(\cdot,0,0)\|\in L^1_{loc}([0,\infty))$;

$\|f(t,u_1,v_1)-f(t,u_2,v_2)\|\le\Omega(t,\|u_1-u_2\|,|v_1-v_2|)$,
където функцията $\Omega(t,y,z)$ е дефинирана за $\forall t\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$, $\Omega(\cdot,y,z)$ е измерима $\forall y\ge 0, z\ge 0$, $\Omega(t,\cdot,\cdot)$ е непрекъсната за почти всяко $t\ge 0$ и $\Omega(t,y,z)$ е монотонно растяща по y и по z функция, за която при всяко фиксирано $z\ge 0$ е в сила оценката $\Omega(\cdot,z,z)\le z\omega(\cdot)$ с дадена функция $\omega(\cdot)\in L^p([0,\infty);[0,\infty))$ за някое p: $1\le p\le\infty$.

(**I2**) $\varphi\in C((-\infty,0];\mathbb{R}^n)$.

Теорема 3.2.2. *Нека функцията* $g(t)$ *е дефинирана и измерима в* $[0,\infty)$, *като е в сила*: $-\infty<g(t)\le t, \forall t\ge 0$. *Нека са в сила условията* (**I**).
Тогава задачата (14) *притежава единствено решение* $x(t)\in C(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)$.

В **параграф 3.3** се изследват интегрални уравнения, в които дадените и неизвестните функции са дефинирани в напълно регулярно хаусдорфово пространство и са със стойности в банахово пространство.

С помощта на Теорема 1.3.5 се доказват теореми за съществуване и единственост на решение на абстрактно интегрално уравнение от тип на Волтера, представено във вида:

$$f(x)=g(x)+\int\limits_{M_x}Q(x,y,f(y))\mathrm{d}\mu_y, \tag{15}$$

където неизвестна е функцията $f:\Omega\to B$, а функцията $g:\Omega\to B$ и изображението $Q:\Omega\times\Omega\times B\to B$ са дадени. Върху $\sigma-$алгебрата от борелеви подмножества на Ω е зададена и функцията μ – нетривиална $\sigma-$финитна борелева мярка без атоми.

При разглеждане на (15) предполагаме изпълнението на следните условия за изображението M, което изпраща всеки елемент x на хаусдорфовото пространство Ω в затвореното множество $M_x=M(x)\subset\Omega$:

A1. За всяка точка $x\in\Omega$ множеството M_x е компактно.

A2. За $\forall\varepsilon>0$ и $\forall x\in\Omega$ съществува отворена околност $O(x,\varepsilon)\ni x$: $\forall y\in O(x,\varepsilon)$ е изпълнено $\mu((M_x\cup M_y)\setminus(M_x\cap M_y))<\varepsilon$.

A3. За $x\in\Omega$, $\forall y\in M_x$ е изпълнено $M_y\subset M_x$ ($M^2(x)=M(M_x)\subset M_x$).

A4. $\exists x_0\in\Omega:\mu(M_{x_0})=0$.

Множеството $G\subset\Omega$ *наричаме* M*-звездно, ако за всеки елемент* $x\in G$ *е изпълнено и* $M_x\subset G$.

В частност, $M_\Omega:=\cup\{M_x:x\in\Omega\}$ е M-звездно множество.

Линейните пространства $C_M(\Omega)$ и C_M се определят така:

$C_M(\Omega) = \{\varphi : \Omega \to B \ : \ \varphi \in C(M_s; B), \, \forall s \in \Omega\}$;

$C_M = \{f : M_\Omega \to B \ : \ f \equiv \varphi|_{M_\Omega}$, за някоя функция $\varphi \in C_M(\Omega)\}$.

За оператора $Q : \Omega \times \Omega \times B \to B$ формулираме условия, които заедно с някои допълнителни предположения за Ω гарантират съществуване (респ. единственост) на решение на (15) за всяка фиксирана дадена $g \in C_M$.

S1. Операторът Q е непрекъснат в $\Omega^* \times \Omega^* \times B$ за всяко M-звездно множество $\Omega^* \subset \Omega$.

S2. За всяка функция $f \in C_M$ и за всеки елемент $x \in \Omega$ съществуват числа $\delta = \delta(f, x) > 0$ и $L = L(f, x, \delta) > 0$ така, че за всяка функция $g \in C_M$, за която $||f - g||_{M_x} < \delta$, е изпълнено

$||Q(x, y, f(y)) - Q(x, y, g(y))||_B \leq L(f, x, \delta)||f(y) - g(y)||_B, \forall y \in M_x$.

S3. За $\forall x \in \Omega$ и $\forall r > 0$ съществува число $L(x, r) > 0$: за всеки две функции $f_1, f_2 \in \overline{U}(x, r) = \{f \in C_M : ||f||_{M_x} \leq r\}$, е в сила

$||Q(x, y, f_1(y)) - Q(x, y, f_2(y))||_B \leq L(x, r)||f_1(y) - f_2(y)||_B, \forall y \in M_x$.

S4. За $\forall x \in \Omega$ съществува число $L(x) > 0 : \forall f_1, f_2 \in C_M$ е изпълнено

$||Q(x, y, f_1(y)) - Q(x, y, f_2(y))||_B \leq L(x)||f_1(y) - f_2(y)||_B, \forall y \in M_x$.

Ясно е, че от условието **S4** следва **S3**, а от него – **S2**.

Теорема 3.3.3. *Нека са в сила следните условия*:

1. Ω *е свързано множество.*
2. *В сила са* $(A), S1$ *и* $S3$.
3. M_x *е свързано множество за* $\forall x \in \Omega$.

Тогава за всяка фиксирана функция $g \in C(M_\Omega; B)$ *уравнението* (15) *има най-много едно решение* $f \in C(M_\Omega; B)$.

Теорема 3.3.4. *Нека са в сила условията на Теорема 3.3.3, като вместо* $S3$ *е изпълнено условието* $S4$ *и нека за всяко естествено* n *и за всяко* $x = x_0 \in \Omega$ *е в сила*

$$\int\limits_{M_x} \Big(\int\limits_{M_{x_1}} \Big(\dots \Big(\int\limits_{M_{x_{n-1}}} \mu(M_{x_n}) \mathrm{d}\mu_{x_n} \Big) \dots \Big) \mathrm{d}\mu_{x_2} \Big) \mathrm{d}\mu_{x_1} \leq \frac{C_x \mu^n(M_x)}{n!}.$$

Тогава за всяка фиксирана функция $g \in C_M(\Omega)$ *уравнението* (15) *има в* M_Ω *поне едно решение* $f \in C_M$.

Тъй като от условието **S4** следва **S3**, намерената в Теорема 3.3.4 функция f е единственото решение на (15), което принадлежи на $C(M_\Omega; B)$.

Заключение

Резюме на получените резултати

По мнение на автора основните приноси в настоящия дисертационен труд са:

1. Доказано е съществуване на единствено решение на едно функционално уравнение в подходящо пространство от непрекъснати и ограничени реални функции, което позволява извод за разрешимост и на съответната система от функционални уравнения, която възниква при изследване на модела на една нелинейна верига с резистивни елементи с $V - I$ характеристики от полиномен тип (Теорема 2.1.1);
2. С принципа на Банах е доказано съществуване на единствено решение (в намереното подходящо пространство от наредени двойки от непрекъснати реални функции) на задачата на Коши за система от две диференциални уравнения от втори ред, което е необходимо при качественото изследване на един модел на движение на ротационен феромагнитен елипсоид, поставен в общо положение във въртящо се с постоянна ъглова скорост хомогенно магнитно поле (Теорема 2.2.1);
3. С метода на неподвижни точки в равномерни пространства е доказано съществуване и единственост на решение на задача с начални условия за едно интегро-диференциално уравнение с отклонения от неутрален тип, което възниква при разглеждане на схема с обратна връзка за обект на управление (Теорема 2.3.1 и Теорема 2.3.2);
4. Намерени са подходящи равномерни пространства и достатъчни условия за получаване на два резултата за съществуване на решения (в обобщен смисъл) при анализиране на една задача от тип на Гурса за хиперболично уравнение с отклоняващи се аргументи от неутрален тип (Теорема 3.1.1 и Теорема 3.1.2);
5. Намерени са достатъчни условия за съществуване на решение (в смисъл на реална вектор-функция с абсолютно непрекъснати координатни функции) на една система от диференциални уравнения с максимуми (Теорема 3.2.2);
6. Получени са теорема за съществуване на неподвижна точка (Теорема 1.3.5) и достатъчни условия за съществуване на решения на интегрални уравнения от волтеров тип, в които участващите функции се дефинират в напълно регулярно хаусдорфово пространство и изобразяват неговите елементи в банахово пространство (Теорема 3.3.4).

Списък на публикациите по дисертационния труд

Основните резултати, представени в дисертационния труд, са публикувани в следните научни статии:

1. GEORGIEV L.P. *On the Goursat problem for hyperbolic functional-differential equations.* Stud. Univ. „Babes-Bolyai“ Math. 44, №3 (1999), 39-52, ISSN: 0252-1938.
MR1989053 (2004f:35179), zbmath.org/1027.35141
2. GEORGIEV L.P., V.G. ANGELOV *On the existence and uniqueness of solutions for maximum equations.* Glasnik Matematicki, v.37 (57), (2002), 275-281, ISSN: 0017-095X; 1846-7989(e).
MR1951532 (2003j:34113), zbmath.org/1044.34019
3. ANGELOV V.G., D. ANGELOVA, L. GEORGIEV *Nonlinear circuits with polynomial resistive elements.* 50 years University of Mining and Geology "St. Ivan Rilski", Ann., vol.46, part III, Mechanization, Electrification and Automation in Mines, Sofia, 2003, 205-208, ISSN: 1312-1820.
4. GEORGIEV L.P., K. KOSTOV *Solution of a nonlinear system of second kind Lagrange′s equations by fixed-point method.* Stud. Univ. „Babes-Bolyai“ Math. 56, 3(2011), 105-112, ISSN: 2065-961x.
MR2869719, zbmath.org/1274.70021
5. ANGELOV V., H.KISKINOV, A.ZAHARIEV, L.GEORGIEV *On a fixed point theorem in uniform spaces and its application to nonlinear Volterra type operators.* Fixed Point Theory: An International Journal on Fixed Point Theory, Computation and Applications (*accepted for publication*), ISSN 1583-5022; 2066-9208(e). **(2014(2015) Impact factor: 1.000)**

Връзките между приносите, целите, задачите, мястото на описание в дисертационния труд и направените публикации по темата са следните:

Принос	Цел	Задачи	Параграф	Публикации
1	1	1	2.1	3
2	1	1	2.2	4
3	1	1	2.3	
4	1	2	3.1	1
5	1	3	3.2	2
6	1	4	1.3, 3.3	5

Резултатът от §2.3 е съавторски на Л. Георгиев с В. Ангелов ([18]).

Статията *On the existence and uniqueness of solutions for maximum equations* е цитирана в монографията [25] и в следните статии и доклади:

ВІТЮК О.Н., О.Д. КІЧМАРЕНКО, К.Ю. САПОЖНІКОВА, *Про наближений розв′язок диференціального рівняння з максимумом.* „Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики“ (APAMCS-2015), Львівський національний університет ім. Івана Франка, 85-86;

ВИТЮК, А.Н., О.Д. КИЧМАРЕНКО, Е.Ю. САПОЖНИКОВА, *О разрешимости начальной задачи для дифференциального уравнения с максимумом.* Вісник Одеського національного університету, Математика і механіка, т. 20, в. 1(25) (2015), 38–45;

OTROCOL D., *Properties of the solutions of a system of differential equations with maxima.* Comm. in Applied Analysis, 17, №1 (2013), 99-108;

OTROCOL D., I.A. RUS, *Functional-differential equations with „maxima“ via weakly Picard operators theory.* Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie, 51(99), №3 (2008), 253-261;

OTROCOL D., I.A. RUS, *Functional-differential equations with maxima of mixed type.* Fixed Point Theory 9, №1 (2008), 207-220.

Апробация на получените резултати

Участие в научно-изследователски проекти към МЕМФ на МГУ „Св. Иван Рилски“ на тема:

• „Някои приложения на нелинейни методи в задачи от електродинамиката и механиката“, 2010 г.

• „Изследване на функционално-диференциални уравнения, възникващи в предавателни линии, натоварени с нелинейни елементи“, 2011 г.

• „Създаване на възможности за реални лабораторни изследвания на промишлени машини благодарение на прилагането на математически и статистически методи за изследване на процесите на пробиване и рязане на скалния масив“, 2011 г.

• „Изследване на математически модели на предавателни линии и минно-технически проблеми“, 2012 г.

• „Усъвършенстване на някои математически модели при предавателни линии и при решаване на минно-технологични задачи“, 2013 г.

• „Изследване на предавателни линии без загуби, натоварени с вериги, еквивалентни на триоден генератор и модели на вибрационни процеси при решаване на минно-технологични задачи“, 2014 г.

• „Изследване на свръхпроводящи предавателни линии с Джозефсонов преход и модели на вибрационни и стохастични процеси“, 2015 г.

Декларация за оригиналност

от **Любомир Петров Георгиев**,
докторант на самостоятелна подготовка
към катедра "Математически анализ"
на Факултет по математика и информатика
на Пловдивски университет "Паисий Хилендарски"

Във връзка с провеждането на процедура за придобиване на образователната и научна степен "доктор" в Пловдивски университет "Паисий Хилендарски" и защита на представения от мен дисертационен труд, декларирам:

Резултатите и приносите на проведеното дисертационно изследване, представени в дисертационния ми труд на тема: „Някои приложения на неподвижни точки в метрични и равномерни пространства", са оригинални и не са заимствани от изследвания и публикации, в които нямам участие.

22.01.2016 г. ДЕКЛАРАТОР:
гр. Пловдив /Любомир Петров Георгиев/

Благодарности

Изказвам своята искрена и дълбока благодарност на моите научни ръководители проф. д.т.н. Васил Ангелов и проф. д-р Андрей Захариев за получените знания и умения и за цялостното съдействие при разработването и оформянето на настоящия дисертационен труд. Изключително благодаря за безценната подкрепа и проявеното търпение, благодаря и на доц. д-р Дафинка Ангелова за компетентните препоръки и неоценимата подкрепа. Благодаря на колегите и приятелите за подкрепата и стимулиращите напътствия.

Специално благодаря на съпругата си Биляна – за всестранната подкрепа при написването на настоящия дисертационен труд.

Библиография

[1] ACHARYA, S. P., Some results on fixed points in uniform space. Yokohama Math. J., 22 (1974), 105-116.

[2] AGARWAL R.P., E. THANDAPANI, On the uniqueness of solutions of hyperbolic delay differential equations. Math. Sem. Notes, v.6 (1978), 531-536.

[3] AGARWAL R.P., D. O′REGAN, Infinite interval problems for differential, difference, and integral equations. Kluwer Acad. Publishers, Dordrecht, Netherlands (2001).

[4] AGARWAL R.P., D. O′REGAN, P. J. Y. WONG, Constant-Sign Solutions of Systems of Integral Equations. Springer (2013).

[5] AIZICOVICI S., On an abstract Volterra equation. In S.O. Londen and O.J. Staffans, ed., „Volterra Equations“, Berlin, Springer Verlag (1979), 1–8.

[6] ANGELOV V.G., On the neutral equations in a complex domain. University Annual, Applied Mathematics, v.20, №1 (1984), 21-28.

[7] ANGELOV V.G., An extension of Edelstein theorem to uniform spaces. Aequationes Mathematicae, v. 29 (1985), 145-149.

[8] ANGELOV V.G., A reuniformization for contractive mappings in uniform spaces. Math. Nachrichten, v. 127 (1986), 211-221.

[9] ANGELOV V.G., Fixed point theorems in uniform spaces and applications. Czechoslovak Math. Journal, v. 37 (112) (1987), 19-33.

[10] ANGELOV V.G., A surjectivity results for non-linear mappings in uniform spaces and applications. Revista Colombiana de Mathematicae, v. 22 (1988), 51-62.

[11] ANGELOV V.G., A reuniformization of „Dynamical systems ensemble“ in uniform spaces. Math. Balkanica, New Series, v. 3, №1 (1989), 67-90.

[12] ANGELOV V.G., Fixed points of densifying mappings in locally convex spaces and applications. J. Inst. Math. Computer Sci. (Calcutta) 2 (1989), 22-39.

[13] ANGELOV V.G., j-nonexpansive mappings in uniform spaces and applications. Bull. Austr. Math. Soc. v. 43, №2 (1991), 331-339.

[14] ANGELOV V.G., A coincidence theorem in uniform spaces and applications. Math. Balkanica, New Series v. 5, №1 (1991), 47-65.

[15] ANGELOV V.G., A continuous dependence of fixed points of $\Phi-$contractive mappings in uniform spaces. Archivum Mathematicum v.28, №3-4 (1992), 155-162.

[16] ANGELOV V.G., Uniform asymptotic stability and contractive semigroups of mappings in uniform spaces. Acta Math. Hungaricae v.59, № 3-4 (1992), 345-353.

[17] ANGELOV V.G., On the iterative test for j-contractive mappings in uniform spaces. Discussiones Mathematicae-Differential Inclusions, v. 19 (1999), 103-109.

[18] ANGELOV V.G., Fixed points in uniform spaces and applications. Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2009.

[19] ANGELOV V.G., A Method for Analysis of Transmission Lines Terminated by Nonlinear Loads. Nova Science, New York, 2014.

[20] ANGELOV V.G., D.ANGELOVA, L.GEORGIEV, Nonlinear circuits with polynomial resistive elements. 50 years University of Mining and Geology "St. Ivan Rilski", Annual, vol.46, part III, Mechanization, Electrification and Automation in Mines, Sofia, 2003, 205-208.

[21] ANGELOV V.G., H.KISKINOV, A.ZAHARIEV, L.GEORGIEV, On a fixed point theorem in uniform spaces and its application to nonlinear Volterra type operators. Fixed Point Theory, Cluj-Napoca (accepted for publication).

[22] APPELL J. M., A. S. KALITVIN, P. P. ZABREJKO, Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, Inc., NY, 569 (2000).

[23] BAINOV D. D., A. D. MYSHKIS, A. I. ZAHARIEV, On an Abstract Analog of the Bellman-Gronwall Inequality. Publ. RIMS, Kyoto University, Vol. 20, No.5 (1984), 903-911.

[24] BAINOV D. D., S. I. KOSTADINOV, A. I. ZAHARIEV, Abstract Volterra Type Integral Equations. Bull. of the Institute of Math. Academia Sinica, Vol. 16, No. 1 March (1988), 93-104.

[25] BAINOV D., S.G. HRISTOVA, Differential Equations with Maxima. Chapman and Hall/CRCPress (2011).

[26] BANACH S., Sur les operations dans les ensambles abstraits et leur application aux equations integrals. Fund. Math. v. 3 (1922), 133-181.

[27] BELLMAN R., K.L. COOK, Differential-difference equations. Academic Press, New York, 1963.

[28] BIELECKI A., Une remarque sur la methode de Banach-Caccioppoli-Tikhonov dans la theory des equations differentielles ordinaries. Bull. Acad. Polon. Sci. v.4, (1956), 261-264.

[29] BOYD F.E., J.S.W. WONG, On nonlinear contractions. Proc. Amer. Math. Soc. v.20, №2 (1969), 458-464.

[30] BRAYTON R. K., Bifurcation of Periodic Solutions in a Nonlinear Difference-Differential Equation. Quarterly of Applied Mathematics, v. 24, 3, (1966), 215-224.

[31] BROWDER F.E., On the convergence of successive approximations for nonlinear functional equations. Indag. Math. v. 30, №1 (1969), 27-35.

[32] BROWDER F.E., Remarks on fixed point theorems of contractive type. J. Nonlinear Anal. TMA v.3 (1979), 657-661.

[33] BROWN T.A., W.W. COMFORT, New method for expansion and contractive maps in uniform spaces. Proc. Amer. Math. Soc. v. 11 (1960), 483-486.

[34] CORDUNEANU C., Integral Equations and Stability of Feedback Systems. Academic Press, New York, USA, 1973.

[35] CORDUNEANU C., Recent contributions to the theory of differential systems with infinite delays. Rapport No.95(1976), Inst. Math. Pure et Applique, Univ. Catholique de Louvain, Louvain-La Neuve, 1-42.

[36] CORDUNEANU C., I.W. SANDBERG, Volterra Equations and Applications. Gordon and Breach Science Publishers, 2000.

[37] DELEANU A., K. MARINESCU, Fixed point theorem and implicit functions in locally convex spaces. Revue Roum. Math. Pure et Appl. v. 8, №1 (1963), 91-99.

[38] DRAKHLIN M.E., E. LITSIN, Volterra operator: Back to the future. J. Nonlinear Convex Anal. 6 (3) (2005), 375–391.

[39] DRIVER R.D., Ordinary and delay differential equations. Springer Verlag, 1977.

[40] DUNFORD N., J.SCHWARTZ, Linear operators. Inter Sci. Publ., New York, 1964.

[41] EDELSTEIN M., An extension of Banach's contraction principle. Proc. Amer. Math. Soc. v. 12 (1961), 7-10.

[42] FURI M., A. VIGNOLI, A fixed point theorem in complete metric spaces. Boll. Unione Math. Ital. v. 2, № 4-5 (1969), 505-509.

[43] GEORGIEV L.P., On the Goursat problem for hyperbolic functional-differential equations. Stud. Univ. „Babes-Bolyai“ Math. 44 (1999), No.3, 39-52.

[44] GEORGIEV L.P., V.G. ANGELOV, On the existence and uniqueness of solutions for maximum equations. Glasnik Matematicki, v.37, (2002), 275-281.

[45] GEORGIEV L.P., K. KOSTOV, Solution of a nonlinear system of second kind Lagrange′s equations by fixed-point method. Stud. Univ. „Babes-Bolyai“ Math. 56 (2011), No. 3, 105–112.

[46] GHEORGHIU N., A contraction mapping theorem in uniform spaces. St. Cerc. Mat. Acad. Romania, v.19 (1967), 131-135 (in Romanian).

[47] GHEORGHIU N., E. ROTARU, A fixed point theorem in uniform spaces. Anal. St. Univ. „Al. Cuza“, Iasi, I-a, Math. v. 18 (1972), 311-314.

[48] GÖHDE D., Zum Princip der kontraktiven Abbildungen. Math. Nachrichten, v.30, №3/4 (1965), 251-258.

[49] GÖHDE D., V. SEDA, Uber Koinzidensatze und deren Anwendungen suf Funktionendifferential gleichungen. Beitrage sur Analysis, v.7 (1975), 43-54.

[50] GRIMM L.J., L.M. HALL, Holomorphic solutions of singular functional differential equations. J. Math. Anal. Appl. v.50 (1975), 627-638.

[51] HADZIC O., B. STANKOVIC, Some theorems on fixed point in locally convex spaces. Publ. de l'Institute Math. Beograd, v.10 (1970), 9-19.

[52] HALE J.K., SJOERD M. VERDUYN LUNEL, Introduction to functional differential equations. Springer Verlag, 1993.

[53] HALMOS, P., Measure theory. Springer Verlag, Graduate Texts in Mathematics, 1974.

[54] HANDBOOK of Metric Fixed Point Theory. Ed. by W.E. Kirk and B. Sims, Kluwer Academic Publishers, Dodrecht, 2001.

[55] HILLE E., R.S. PHILLIPS, Functional analysis and semigroups. Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, v.31, 1957.

[56] JACHYMSKI J., Some consequences of Fundamental Ordering Principles in Metric Fixed Point Theory. Annales Universitatis Marieae Curie-Sklodowska, Lublin-Polonia, v.I, 1.2, Sectio A(1997), 123-134.

[57] JACHYMSKI J., Some Consequences of the Tarski-Kantorowitch ordering Theorem in Metric Fixed Point Theory. Quaestiones Mathematicae, v.21 (1998), 89-99.

[58] JACHYMSKI J., Order-Theoretic Aspects of Metric Fixed Point Theory. Handbook of Metric Fixed Point Theory Ch.18, Kluwer Academic Publishers, 613-641.

[59] JACHYMSKI J., General Solutions of two Functional Inequalities and Converses to Contraction Theorems. Bull. Polish Academy of Sciences, Mathematics, v.51, No.2 (2003), 147-156.

[60] KAMERER W.J, R.H. KASRIEL, On contractive mappings in uniform spaces. Proc. Amer. Math. Soc. v. 15 (1965), 288-290.

[61] KASAHARA S., Surjectivity and fixed points of nonlinear mappings. Math. Japonicae, v.20 (special issue) (1975), 57-64.

[62] KELLEY J.E., General topology. D. van Nostrand Co., Inc. Princeton, New Jersey, 1955.

[63] KIRK W.A., A fixed point theorem for mappings which do not increase distances. Amer. Math. Monthly, v.72 (1965), 1004-1006.

[64] KISIELEVICZ M., K. GRYTCZUK, The existence of solutions of hereditary systems of hyperbolic type. Demonstratio Mathematica, v.9, №4 (1976), 545-561.

[65] KUANG Y., Delay differential equations: With applications in population dynamics. Mathematics in science and engineering, v. 191, Academic Press, Inc., 1993.

[66] KURATOWSKI C., Topology I. Acad. Press, New York, London. Panstnowe Widawnictwo Naukowe, Warsaw, 1966.

[67] KWAPISZ M., On the existence and uniqueness of solutions of a certain integral-functional equation. Annales Polonici Mathematici, v.31, (1975), 23-41.

[68] KWAPISZ M., On the existence and uniqueness of L-integrable solutions of a certain integral-functional equation. Funkcialaj Ekvacioj, v.19, No.2, (1976), 191-202.

[69] LAKSHMIKANTHAM V., Applied nonlinear analysis. Academic Press, 1979.

[70] LAKSHMIKANTHAM V., Nonlinear Phenomena in mathematical sciences. Academic Press, 1982

[71] MATKOWSKI J., Integrable solutions of functional equations. Dissertationes Mathematicae, v. CXXVII, Warsawa, 1975.

[72] MELVIN W.R., Topologies for neutral differential equations. J. Diff. Eq., v.13 (1973), 24-32.

[73] MIYADERA I., Semigroups of operators in Frechet spaces and applications to partial differential equations. Tohoku Math. J. v.11 (1959), 162-183.

[74] NIEZUY S.I., On a fixed point theorem in complete uniform spaces. Anal. St. Univ. „Al. Cuza“, Iasi, I-a, Math. v. 14 (1968), 391-397.

[75] NUSSBAUM R., Existence and uniqueness theorems for some functional differential equations of neutral type. J. Diff. Eq. v.11 (1972), 607-623.

[76] OTROCOL D., I.A. RUS, Functional-differential equations with maxima of mixed type. Fixed Point Theory 9, №1 (2008), 207-220.

[77] OTROCOL D., I.A. RUS, Functional-differential equations with „maxima“ via weakly Picard operators theory. Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie, 51(99), №3 (2008), 253-261.

[78] OTROCOL D., Properties of the solutions of a system of differential equations with maxima. Communications in Applied Analysis, 17, №1 (2013), 99-108.

[79] PAGE W., Topological Uniform structures. J.Wiley&Sons, New York, 1978.

[80] PAVEL N., Ecuatii differentiale associate unor operatori nelineari pe spatii Banach. Ed, Academiei Romania, Bucuresti, 1977.

[81] PETRUSEL A., I.A. RUS and J.C. YAO, Well-posedness in the generalized sense of the fixed point problems. Taiwanese J.Math., 11(2007), No.3, 903-914.

[82] PICARD, E., La mathématique dans ses rapports avec la physique. Proceedings of the IVth Mathematicians' International Symposium, Rome, 1908.

[83] PROINOV P.D., General local convergence theory for a class of iterative processes and its applications to Newton's method. J. Complexity 25 (2009) 38-62

[84] PROINOV P.D., New general convergence theory for iterative processes and its applications to Newton-Kantorovich type theorem. J. Complexity 26 (2010) 3-42.

[85] PRÜSS. J., Evolutionary Integral Equations and Applications. Springer Basel AG, Birkhäuser (1993), XII – XV.

[86] RAKOTCH E., A note on contractive mappings. Proc. Amer. Math. Soc. v.13, №3 (1962), 459-465.

[87] REICH S., Some remarks concerning contractive mappings. Canad. Math. Bull. v.14 (1971), 121-124.

[88] REINERMANN J., On a fixed point theorem of Banach type in uniform spaces. Mat. Vesnik, v.6 (1969), 211-213.

[89] RHOADES B.E., A comparison of various definitions of contractive mappings. Trans. Amer. Math. Soc. v. 226 (1977), 257-290.

[90] RUS I.A., Metrical fixed point theorems. Cluj-Napoca, 1979.

[91] RUS I.A., Generalized contractions and applications. Cluj-Napoca, 2001.

[92] RUS I.A., A. PETRUSEL, M.A. SERBAN, Weakly Picard operators: equivalent definitions, applications and open problems. Fixed Point Theory, v.7, No.1, (2006), 3-22.

[93] RUS I.A., A.PETRUSEL, G.PETRUSEL., Fixed Point Theory. Cluj University Press, 2008

[94] RZEPEZKI, B., A generalization of Banach's contractive theorem. Bull. l'Acad. Polonaise Sci. ser. Sci. Math. Astr. Et Phys. v.26, №7 (1976), 603-609.

[95] RZEPEZKI, B., Some remarks on an operator equation in a Banach space. Ann. Polonici Math. v.37 (1980), 167-174.

[96] SCHAUDER J., Der Fixpunktsatz in Funktionalraümen. Studia Mathematica, v.2, 1 (1930),171-180.

[97] SEHGAL V.M., S.P. SINGH, A fixed point theorem for the sum of two mappings. Math. Japonica, v.23, No.1 (1978), 71-75.

[98] TARAFDAR E., An approach to fixed point theorem in uniform spaces. Trans. Amer. Math. Soc. v.191 (1974), 209-225.

[99] TAYLOR W.W., Fixed point theorems for nonexpansive mappings in linear topological spaces. J. Math. Anal. Appl. v.40 (1972), 164-173.

[100] VOLTERRA V., Sulle Equazioni Integrodifferenziali della Teorie dell'Elasticita. Atti reale Accad. Lincei. 1909, vol. 18, pp. 295.

[101] WEIL A., Sur les espaces a structure uniforme et sur la topologie generale. Hermann&C-ie, Ed. Paris, 1938.

[102] WEISSINGER J., Zur Theorie und Anwendungen des Iterationsverfahrens. Math. Nachrichten, Bd.8 (1952), 193-212.

[103] WU J., Theory and applications of partial functional differential equations. Springer Verlag, 1996.

[104] ZAHARIEV A., A. GEORGIEVA, L. TRENKOVA, On Volterra-type integral equations in noncompact metric space. Journal of Inequalities and Applications 2014, 2014:260.

[105] ZEIDLER E., Nonlinear functional analysis and its Applications: I. Fixed point theorems. Springer Verlag, 1993.

[106] АХМЕРОВ Р.Р., К теории уравнений нейтрального типа. Теория операторных уравнений (сборник статей). Воронеж, Изд. ВГУ, 1 (1979), 3-16.

[107] БЕСЕКЕРСКИЙ В.А., Е.П. ПОПОВ, Теория систем автоматического регулирования. Изд. Наука, Москва, 1975.

[108] БЕССОНОВ Л.А., Нелинейные электрические цепи. Москва, В. школа, 1977.

[109] БОРИСОВИЧ Ю.Г., О некоторых приложениях нелинейных фредгольмовых отображений и задача о периодических решениях дифференциально-функциональных уравнений. Воронеж, Тр. Мат. фак., ВГУ, 1971, т. 3, с. 35-41.

[110] ГУРЬЯНОВА И.Э., А.Д. МЫШКИС, О непродолжимых решениях абстрактных интегральных уравнений типа Вольтерра. Дифференциальные уравнения, т. 22, №10 (1986), Минск, 1786-1789.

[111] ЕЛЬСГОЛЬЦ Л.Е., С.Б. НОРКИН, Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Изд. Наука, Москва, 1971.

[112] ЗВЕРКИН А.М., Об определении понятия решения для уравнения с отклоняющимся аргументом нейтрального типа. Тр. Семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. УДН, 4 (1967), 278-283.

[113] ИВАНОВ А.А., Неподвижные точки отображений метрических пространств, Исследования по топологии. II, Изд. Наука, Ленинград (1976), 5–102.

[114] КАМЕНСКИЙ Г.А., О существовании и единственности решений дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа. Математика, т. VIII, Уч. зап. МГУ, 181 (1956), 83–89.

[115] КАМЕНСКИЙ Г.А., Существование, единственность и непрерывная зависимость от начальных условий решений системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом нейтрального типа. М. сб. 55(97), №4 (1961), 363-378.

[116] КАМЕНСКИЙ Г.А., А.Л. СКУБАЧЕВСКИЙ, Линейные краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений. Москва, 1992.

[117] КОНСТАНТИНОВ М., О применении нормы с весом в теоремах существования и единственности решений функциональных уравнений в банаховом пространстве с искомой функцией, зависящей от многих аргументов. Белград, Математички Весник 13 (28) (1975), 399-404.

[118] КОРЕНЕВСКИЙ Д. Г., Локальные теоремы существования и единственности класических решений задачи Коши-Гурса для нелинейных гиперболических уравнений нейтрального типа. Функциональные и дифференциально-разностные уравнения, Инст. Мат. АН УССР (1974), 70-90.

[119] КРАСНОСЕЛЬСКИЙ М.А., Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. Москва, 1956.

[120] КРАСНОСЕЛЬСКИЙ, М.А., Г.М. ВАЙНИККО, П.П. ЗАБРЕЙКО, Я.Б. РУТИЦКИЙ, В.Я. СТЕЦЕНКО, Приближенное решение операторных уравнений. Изд. Наука, Москва, 1969.

[121] ЛЕВИН А.Ю., Е.А. ЛИФШИЦ, К принципу обобщенного сжатия М. А. Красносельского. Проблемы математического анализа сложных систем, Воронеж, Изд. ВГУ, 1 (1967), 49-52.

[122] МАГОМЕДОВ А.Р., Исследование решений линейных дифференциальных уравнений с максимумами для задач с управлением. Д. АН АССР, 3(1983), 12-18.

[123] МАГОМЕДОВ А.Р., Г.М. НАБИЕВ, Теоремы о нелокальной разрешимости начальной задачи для систем дифференциальных уравнений с максимумами. Докл. АН АССР, №5 (1984), 14-19.

[124] МИЛЛИОНЩИКОВ В.М., К теории дифференциальных уравнений в локально выпуклых пространствах. Мат. сб. 57(99), №4 (1962), 385–406.

[125] МЫШКИС А. Д., Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. УМН (1949), том 4, №5(33), 99–141, Дополнительные библиографические материалы. УМН (1950), том 5, №2(36), 148–154.

[126] МЫШКИС А. Д., Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. Москва, Наука, 1972.

[127] МЫШКИС А. Д., О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Успехи мат. наук, 32, №2 (1977), 173-202.

[128] МЫШКИС А.Д., Л. Е. ЕЛЬСГОЛЬЦ, Состояние и проблемы теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Успехи мат. наук, 22, №2 (1967), 21-57.

[129] ОБРЕШКОВ Н., Върху сходимостта на способа с итериране. Годишник на Софийския университет, Физ.-мат. факултет, т.1, Математика (1958), 91-114.

[130] ПЕТУХОВ В.Р., Вопросы качественного исследования решений уравнений с "максимумами". Изв. ВУЗ, Математика, 3 (1964), 116-119.

[131] ПИСАРЕНКО В.Г., Проблемы релятивистской динамики многих тел и нелинейной теории поля. Наукова думка, Киев, 1974.

[132] РЯБОВ Ю.А., А.Р. МАГОМЕДОВ, О периодических решениях линейных дифференциальных уравнений с максимумами. Наукова думка, Киев, 1, 23 (1978), 3-9.