ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ „ПАИСИЙ ХИЛЕНДАРСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
КАТЕДРА „АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ“

ХРИСТО МАНЧЕВ МАНЕВ

ВЪРХУ ДИФЕРЕНЦИАЛНАТА ГЕОМЕТРИЯ НА ТРИМЕРНИ ПОЧТИ КОНТАКТНИ В-МЕТРИЧНИ МНОГООБРАЗИЯ

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертационен труд
за присъждане на
образователната и научна степен *Доктор*

Област на висше образование:
4. Природни науки, математика и информатика

Професионално направление: *4.5. Математика*

Докторска програма: *Геометрия и топология*

Научен ръководител: проф. д-р Димитър Мекеров

Пловдив, 2016 г.

Дисертационният труд е обсъден и насочен за защита от Катедрения съвет в разширен състав на катедра „Алгебра и геометрия“ при ФМИ на ПУ „Паисий Хилендарски“, проведен на 10.03.2016 г.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на открито заседание на Научното жури, което ще се проведе на 20.05.2016 г. от 14:00 ч. в Заседателната зала на Новата сграда на ПУ „Паисий Хилендарски“.

Научно жури:

- чл.-кор. проф. дмн Стефан Петров Иванов (ФМИ на СУ),
- проф. д-р Димитър Георгиев Мекеров (ФМИ на ПУ),
- доц. д-р Георги Тодоров Ганчев (ИМИ на БАН),
- доц. д-р Галя Василева Накова (ФМИ на ВТУ),
- доц. д-р Добринка Костадинова Грибачева (ФМИ на ПУ).

Дисертационният труд се състои от 89 страници и съдържа увод, три глави, седем параграфа, заключение и библиография от 78 заглавия.

Заглавията и номерациите на главите и параграфите, номерациите на твърденията, както и цитиранията в автореферата съвпадат със съответните заглавия и номерации в дисертационния труд.

Основната част от резултатите на настоящия труд са включени в 6 статии в рецензирани и индексирани научни списания ([31]–[36]). Първите 4 са публикувани в списанията *Filomat* – IF(2014/15):0.638, *Journal of Geometry* – MCQ(2014):0.26, *Facta Universitatis Series Mathematics and Informatics* и *Annuaire de l'Université de Sofia "St. Kliment Ohridski" Faculté de Mathématiques et Informatique*, а другите 2 са приети за печат в списанията *Novi Sad Journal of Mathematics* – SJR(2014):0.16 и *Acta Universitatis Palackianae Olomucensis Facultas Rerum Naturalium Mathematica*. Някои от резултатите са изнесени в 9 доклада на 7 научни форума, от които 5 са международни конференции.

* * *

Целта на дисертационния труд е да се изследват диференциално-геометрични въпроси за почти контактните B-метрични многообразия от най-ниската размерност. По-специално:

• да се изучат геометричните свойства, свързани с ковариантната производна на структурния ендоморфизъм и метриката на многообразието, както и негови кривинни характеристики;

• да се конструират разглежданите многообразия чрез различни подходи (като хиперповърхнини, изкривено произведение с реалната права, групи на Ли);

• да се свържат получените резултати с някои известни факти за изучаваните многообразия от произволна размерност, както и групи и алгебри на Ли.

* * *

Увод

Както е известно, всяко почти комплексно многообразие (M', J) (което по необходимост е четномерно) може да се снабди с псевдориманова метрика h, съгласувана по два различни начина с почти комплексна структура J. Ако J индуцира изометрия върху всеки допирателен слой, многообразието (M', J, h) е почти комплексно многообразие с ермитова метрика, а ако J индуцира антиизометрия върху всеки допирателен слой, тогава (M', J, h) е почти комплексно многообразие с норденова метрика.

В нашите разглеждания използваме почти комплексните многообразия с норденова метрика. Началото на тяхното изучаване е поставено в [3], [4], [23], [18], [19]. В настоящия момент тези многообразия са обект на интензивно изучаване в работи на редица чуждестранни автори, например [11]–[14], [16], [70], [71], [73]–[75].

Ако M е нечетномерно многообразие, тогава то може да бъде снабдено с почти контактна структура (φ, ξ, η). Полученото многообразие (M, φ, ξ, η) се нарича почти контактно многообразие. Върху него може да се разглежда псевдориманова метрика g, съгласувана по два различни начина с (φ, ξ, η), които са съответни на съгласуванията на ермитовата метрика и норденовата метрика с почти комплексната структура. Така се получава многообразие $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$, което в единия случай е почти контактно метрично многообразие, а в другия – почти контактно многообразие с B-метрика, наричано още почти контактно B-метрично многообразие.

В този дисертационен труд обект на изследване са почти контактните B-метрични многообразия. Тяхното изучаване започва през 1993 г. с работата [20] на Г. Ганчев, В. Михова, К. Грибачев и статиите [46], [47], [63] на К. Грибачев, М. Манев и Г. Накова. Изследванията продължават с [37]–[39], [1], [40]–[45], [53], [54], [57]–[62], [64]–[68] на К. Грибачев, М. Манев и Г. Накова и по-късно с [55], [76], [77], [48]–[52], [26], [27] на М. Манев, М. Теофилова и М. Иванова.

Известно е ([8]), че за (M, φ, ξ, η) рестрикцията на всяка почти контактна структура върху контактното разпределение $H = \ker \eta$ е почти комплексна структура J, т.е. $J = \varphi|_H$. За $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ рестрикцията на B-метриката g върху H съвпада със съответната ѝ норденова метрика h относно $\varphi|_H$, т.е. $h = g|_H$. По този начин има съответствие между $(2n+1)$-мерно почти контактно B-метрично многообразие $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ и $2n$-мерно почти комплексно многообразие с норденова метрика (M', J, h).

Да отбележим, че всяка хиперповърхнина на почти комплексно многообразие с норденова метрика може да се разглежда като почти контактно B-метрично многообразие. Освен това произволно почти комплексно многообразие с норденова метрика може да бъде разширено по подходящ начин до почти контактно B-метрично многообразие.

Известно е, че геометрични свойства, присъщи на дадено многообразие от най-ниската възможна размерност, могат да не са в сила за такова многообразие от по-висока размерност. Най-ниската размерност за почти контактните многообразия е размерност 3. Тримерните почти контактни метрични многообразия са добре изучени – например в работите [8], [9], [28]–[30], [17]. Изследвания върху тримерни почти контактни B-метрични многообразия са направени в [54], [68], [26], [27].

Обект на изучаване в настоящата дисертация са главно тримерните почти контактни B-метрични многообразия.

Глава I (*Общи сведения за почти контактните B-метрични многообразия*) съдържа §1 (*Основни дефиниции и зависимости*) и §2 (*Ковариантните производни на структурните тензори*). Глава II (*Тримерни почти контактни B-метрични многообразия, породени от двумерни и четиримерни почти комплексни многообразия с норденова метрика*) съдържа

§3 (*Тримерни почти контактни B-метрични многообразия като хиперповърхнини на четиримерни псевдоевклидови пространства*) и §4 (*Тримерни почти контактни B-метрични многообразия като разширения на двумерни пространствени форми*). Глава III (*Тримерни почти контактни B-метрични многообразия като групи на Ли*) съдържа §5 (*Почти контактни B-метрични структури върху тримерни групи на Ли*), §6 (*Почти контактни B-метрични структури и класификацията на Бианки на тримерните алгебри на Ли*) и §7 (*Матрични групи на Ли като тримерни почти контактни B-метрични многообразия*).

* * *

В **§1** излагаме някои основни понятия и зависимости, свързани с почти контактните B-метрични многообразия, които използваме в по-нататъшните изследвания.

Нека M е $(2n+1)$-мерно реално диференцируемо многообразие. Разглеждаме почти контактна структура (φ,ξ,η) върху M: $\eta(\xi)=1$, $\varphi^2 = -\operatorname{Id}+\eta\otimes\xi$, $\varphi\xi=0$, $\eta\circ\varphi=0$ и B-метрика g: $g(\varphi x,\varphi y)=-g(x,y)+\eta(x)\eta(y)$. Тогава M се нарича *почти контактно B-метрично многообразие* и се означава с (M,φ,ξ,η,g). Присъединена B-метрика на g се задава чрез $\tilde{g}(x,y)=g(x,\varphi y)+\eta(x)\eta(y)$. Двете B-метрики са индефинитни и имат сигнатура $(n+1,n)$.

Нека $\mathcal{G}$ е матричната група $\mathcal{GL}(n;\mathbb{C})\cap\mathcal{O}(n,n)$, а $\mathcal{I}$ – идентитетът на $\operatorname{span}(\xi)$. Тогава групата $\mathcal{G}\times\mathcal{I}$ е структурната група на многообразието.

Нека ∇ е свързаността на Леви-Чивита, която е породена от метриката g. Важна роля в теорията на почти контактните B-метрични многообразия (M,φ,ξ,η,g) играе тензорното поле F от тип $(0,3)$ и присъединените му 1-форми θ, θ^* и ω (лиеви 1-форми), зададени чрез $F(x,y,z)=g\big((\nabla_x\varphi)\,y,z\big)$, $\theta(z)=g^{ij}F(e_i,e_j,z)$, $\theta^*(z)=g^{ij}F(e_i,\varphi e_j,z)$, $\omega(z)=F(\xi,\xi,z)$. В [20] е дадена една класификация на почти контактните B-метрични многообразия относно F. Тя е съставена единадесет основни класа $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, …, $\mathcal{F}_{11}$ със сечение специалният клас $\mathcal{F}_0 : F=0$.

В работата [44] е дефинирана квадратична норма на $\nabla\varphi$ по следния начин $\|\nabla\varphi\|^2=g^{ij}g^{ks}g\big((\nabla_{e_i}\varphi)\,e_k,(\nabla_{e_j}\varphi)\,e_s\big)$, а почти контактно B-метрично многообразие с нулева $\|\nabla\varphi\|^2$ е наречено *изотропно косимплектично B-метрично многообразие.*

Тензорът на Нийенхойс N за почти контактната структура (φ, ξ, η) се определя чрез равенството $N = [\varphi, \varphi] + \mathrm{d}\eta \otimes \xi$, където $[\varphi, \varphi](x, y) = [\varphi x, \varphi y] + \varphi^2 [x, y] - \varphi [\varphi x, y] - \varphi [x, \varphi y]$, $[x, y] = \nabla_x y - \nabla_y x$ и $\mathrm{d}\eta(x, y) = (\nabla_x \eta)\, y - (\nabla_y \eta)\, x$.

В [48] е дефиниран присъединен тензор $\widehat{N}$ на N чрез равенството $\widehat{N} = \{\varphi, \varphi\} + (\mathcal{L}_\xi g) \otimes \xi$, където $\{\varphi, \varphi\}(x, y) = \{\varphi x, \varphi y\} + \varphi^2\{x, y\} - \varphi\{\varphi x, y\} - \varphi\{x, \varphi y\}$, $\{x, y\} = \nabla_x y + \nabla_y x$ и $(\mathcal{L}_\xi g)(x, y) = g(\nabla_x \xi, y) + g(\nabla_y \xi, x) = (\nabla_x \eta)\, y + (\nabla_y \eta)\, x$.

В [44] са разгледани три естествени свързаности върху произволно $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$, т.е. линейни свързаности, които запазват φ, ξ, η, g. Те са наречени φB-свързаност, φ-канонична свързаност и φKT-свързаност, като φB-свързаността се дефинира чрез $D_x y = \nabla_x y + \frac{1}{2}\big\{(\nabla_x \varphi)\, \varphi y + (\nabla_x \eta)\, y \cdot \xi\big\} - \eta(y) \nabla_x \xi$, φ-каноничната свързаност е определена чрез тъждество за нейната торзия, а φKT-свързаността се характеризира като естествена свързаност с напълно антисиметрична торзия.

Нека R е *тензорът на кривина* от тип $(1, 3)$ за ∇ върху $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$, т.е. $R(x, y)z = \nabla_x \nabla_y z - \nabla_y \nabla_x z - \nabla_{[x,y]} z$. Съответният му тензор от тип $(0, 4)$ се бележи със същата буква и се определя чрез равенството $R(x, y, z, w) = g(R(x, y)z, w)$. За тензора R са в сила следните свойства $R(x, y, z, w) = -R(y, x, z, w) = -R(x, y, w, z)$ и $R(x, y, z, w) + R(y, z, x, w) + R(z, x, y, w) = 0$.

За R се дефинират *тензор на Ричи* ρ чрез $\rho(x, y) = g^{ij} R(e_i, x, y, e_j)$ и *скаларна кривина* τ чрез $\tau = g^{ij} \rho(e_i, e_j)$. *Присъединените величини* ρ^*, τ^* и τ^{**} на ρ и τ се дефинират съответно чрез: $\rho^*(x, y) = g^{ij} R(e_i, x, y, \varphi e_j)$, $\tau^* = g^{ij} \rho^*(e_i, e_j)$ и $\tau^{**} = g^{ij} \rho^*(e_i, \varphi e_j)$.

Една площадка (2-мерна равнина) α във векторното пространство $T_p M$ се нарича *неизродена*, ако рангът на рестрикцията на g върху α е 2. Площадката α се нарича *φ-холоморфна*, ако $\varphi\alpha = \alpha$, а *ξ-площадка*, ако съдържа вектора ξ.

Нека $k(\alpha; p)$ е *секционната кривина* на неизродена площадка α в точка p относно ортогонална база $\{x, y\}$ на α, дефинирана чрез равенството $k(\alpha; p) = \frac{R(x,y,y,x)}{g(x,x)g(y,y)}$.

* * *

В **§2** разглеждаме пространството на тензорите със свойствата на F. Използваме разлагането на това пространство на ортогонални и инвариантни подпространства относно действието на структурната група, представено в [20]. Определяме съответните компоненти на тензора F за всеки основен клас. Разглеждаме случая на изучаваните многообразия с размерност 3.

Тук привеждаме някои необходими за по-нататъшните ни разглеждания резултати от [20], свързани с разлагане на подпространства на векторното пространство $\mathcal{F}$ на тензорите F върху произволно $(2n+1)$-мерно почти контактно В-метрично многообразие (M,φ,ξ,η,g).

Теорема 2.1 ([20])**.** *Разлагането $\mathcal{F} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \mathcal{V}_3 \oplus \mathcal{V}_4$ е ортогонално и инвариантно относно действието на $\mathcal{G} \times \mathcal{I}$. Подпространствата $\mathcal{V}_i$ $(i = 1,2,3,4)$ са определени чрез*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}_1 &= \left\{F \in \mathcal{F} \mid F(v(x),y,z) = F(x,v(y),z) = F(x,y,v(z)) = 0\right\},\\
\mathcal{V}_2 &= \left\{F \in \mathcal{F} \mid F(v(x),y,z) = F(x,h(y),h(z)) = 0\right\},\\
\mathcal{V}_3 &= \left\{F \in \mathcal{F} \mid F(h(x),y,z) = F(x,v(y),z) = F(x,y,v(z)) = 0\right\},\\
\mathcal{V}_4 &= \left\{F \in \mathcal{F} \mid F(h(x),y,z) = F(x,h(y),h(z)) = 0\right\}.
\end{aligned}
$$

Оттук получаваме проекцията $p_i(F)(x,y,z)$ на $F(x,y,z)$ в съответното подпространство $\mathcal{V}_i$ $(i = 1,2,3,4)$ както следва:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{V}_1: \ p_1(F)(x,y,z) = -F(\varphi^2 x, \varphi^2 y, \varphi^2 z),\\
&\mathcal{V}_2: \ p_2(F)(x,y,z) = \eta(y)F(\varphi^2 x, \xi, \varphi^2 z) + \eta(z)F(\varphi^2 x, \varphi^2 y, \xi),\\
&\mathcal{V}_3: \ p_3(F)(x,y,z) = \eta(x)F(\xi, \varphi^2 y, \varphi^2 z),\\
&\mathcal{V}_4: \ p_4(F)(x,y,z) = -\eta(x)\left\{\eta(y)F(\xi,\xi,\varphi^2 z) + \eta(z)F(\xi,\varphi^2 y,\xi)\right\}.
\end{aligned}
$$

Очевидно имаме $F = p_1(F) + p_2(F) + p_3(F) + p_4(F)$.

Следствие 2.2. *Лиевите 1-форми на F имат следните свойства във всяко едно от подпространствата $\mathcal{V}_i$ $(i = 1,2,3,4)$:*

1) *Ако $F \in \mathcal{V}_1$, то $\theta \circ v = \theta^* \circ v = \omega = 0$,*
2) *Ако $F \in \mathcal{V}_2$, то $\theta \circ h = \theta^* \circ h = \omega = 0$,*
3) *Ако $F \in \mathcal{V}_3$, то $\theta = \theta^* = \omega = 0$,*
4) *Ако $F \in \mathcal{V}_4$, то $\theta = \theta^* = 0$.*

Нека разгледаме $2n$-мерното разпределение $H = \ker(\eta)$ на допирателното разслоение на (M,φ,ξ,η,g), ендоморфизма $J = \varphi|_H$ и метриката $h = g|_H$, където $\varphi|_H$ и $g|_H$ са съответно рестрикциите на φ и g върху H. Да отбележим, че J и h са съответно почти комплексна структура и норденова метрика върху H, т.е. $J^2 = -\mathrm{Id}$, $h(Jx,Jy) = -h(x,y)$. Тогава (H,J,h) може да се разглежда като почти комплексно многообразие с норденова метрика.

Твърдение 2.3. *Нека F принадлежи на $\mathcal{F}$ и F^i $(i=1,2,3)$ са съответно проекциите на F върху подпространствата $\mathcal{F}_i$. Тогава имаме*

$$\begin{aligned}
F^1(x,y,z) &= \tfrac{1}{2n}\big\{g(\varphi x,\varphi y)\theta(\varphi^2 z)+g(x,\varphi y)\theta(\varphi z)+g(\varphi x,\varphi z)\theta(\varphi^2 y)+g(x,\varphi z)\theta(\varphi y)\big\};\\
F^2(x,y,z) &= -\tfrac{1}{4}\big\{F(\varphi^2 x,\varphi^2 y,\varphi^2 z)+F(\varphi^2 y,\varphi^2 z,\varphi^2 x)-F(\varphi y,\varphi^2 z,\varphi x)\\
&\qquad +F(\varphi^2 x,\varphi^2 z,\varphi^2 y)+F(\varphi^2 z,\varphi^2 y,\varphi^2 x)-F(\varphi z,\varphi^2 y,\varphi x)\big\}\\
&\quad -\tfrac{1}{2n}\big\{g(\varphi x,\varphi y)\theta(\varphi^2 z)+g(x,\varphi y)\theta(\varphi z)+g(\varphi x,\varphi z)\theta(\varphi^2 y)+g(x,\varphi z)\theta(\varphi y)\big\};\\
F^3(x,y,z) &= -\tfrac{1}{4}\big\{F(\varphi^2 x,\varphi^2 y,\varphi^2 z)-F(\varphi^2 y,\varphi^2 z,\varphi^2 x)+F(\varphi y,\varphi^2 z,\varphi x)\\
&\qquad +F(\varphi^2 x,\varphi^2 z,\varphi^2 y)-F(\varphi^2 z,\varphi^2 y,\varphi^2 x)+F(\varphi z,\varphi^2 y,\varphi x)\big\}.
\end{aligned}$$

Следователно компонентата на F върху $\mathcal{V}_1$ е $p_1(F)=F^1+F^2+F^3$.

Нека разгледаме линейните оператори $L_j\colon \mathcal{V}_2\to\mathcal{V}_2$ $(j=1,2)$ дефинирани чрез $L_1(F)(x,y,z)=F(\varphi x,\varphi y,\xi)\eta(z)+F(\varphi x,\varphi z,\xi)\eta(y)$ и $L_2(F)(x,y,z)=F(\varphi^2 y,\varphi^2 x,\xi)\eta(z)+F(\varphi^2 z,\varphi^2 x,\xi)\eta(y)$.

Лема 2.4. *Линейният оператор L_j $(j=1,2)$ е инволютивна изометрия върху $\mathcal{V}_2$ и той е инвариантен относно $\mathcal{G}\times\mathcal{I}$, т.е. $L_j\circ L_j=\mathrm{Id}_{\mathcal{V}_2}$, $\langle L_j(F'),L_j(F'')\rangle=\langle F',F''\rangle$ и $L_j((\lambda a)F)=(\lambda a)(L_j(F))$.*

Тогава L_1 има две собствени стойности $+1$ и -1 и съответните собствени пространства $\mathcal{V}_2^+=\{F\in\mathcal{V}_2\mid L_1(F)=F\}$ и $\mathcal{V}_2^-=\{F\in\mathcal{V}_2\mid L_1(F)=-F\}$ са инвариантни ортогонални подпространства на $\mathcal{V}_2$.

Използваме оператора L_2 съответно върху $\mathcal{V}_2^+$ и $\mathcal{V}_2^-$, с цел да ги разложим. Означаваме съответните собствени подпространства чрез $\mathcal{V}_{2,1}=\big\{\mathcal{V}_2^+\mid L_2(F)=-F\big\}$, $\mathcal{V}_{2,2}=\big\{\mathcal{V}_2^-\mid L_2(F)=-F\big\}$, $\mathcal{V}_{2,3}=\big\{\mathcal{V}_2^+\mid L_2(F)=F\big\}$ и $\mathcal{V}_{2,4}=\big\{\mathcal{V}_2^-\mid L_2(F)=F\big\}$.

Теорема 2.5. *Разлагането $\mathcal{V}_2=\mathcal{V}_{2,1}\oplus\mathcal{V}_{2,2}\oplus\mathcal{V}_{2,3}\oplus\mathcal{V}_{2,4}$ е ортогонално и инвариантно относно структурната група $\mathcal{G}\times\mathcal{I}$.*

Твърдение 2.6. *Нека F^j $(j=4,\dots,9)$ са проекциите на $\mathcal{F}$ в класовете $\mathcal{F}_j$ и $F\in\mathcal{F}$. Тогава имаме*

$$\begin{aligned}
F^4(x,y,z) &= -\tfrac{\theta(\xi)}{2n}\big\{g(\varphi x,\varphi y)\eta(z)+g(\varphi x,\varphi z)\eta(y)\big\};\\
F^5(x,y,z) &= -\tfrac{\theta^*(\xi)}{2n}\big\{g(x,\varphi y)\eta(z)+g(x,\varphi z)\eta(y)\big\};\\
F^6(x,y,z) &= \tfrac{\theta(\xi)}{2n}\big\{g(\varphi x,\varphi y)\eta(z)+g(\varphi x,\varphi z)\eta(y)\big\}+\tfrac{\theta^*(\xi)}{2n}\big\{g(x,\varphi y)\eta(z)+g(x,\varphi z)\eta(y)\big\}\\
&\quad +\tfrac{1}{4}\big\{F(\varphi^2 x,\varphi^2 y,\xi)+F(\varphi^2 y,\varphi^2 x,\xi)-F(\varphi x,\varphi y,\xi)-F(\varphi y,\varphi x,\xi)\big\}\eta(z)\\
&\quad +\tfrac{1}{4}\big\{F(\varphi^2 x,\varphi^2 z,\xi)+F(\varphi^2 z,\varphi^2 x,\xi)-F(\varphi x,\varphi z,\xi)-F(\varphi z,\varphi x,\xi)\big\}\eta(y);\\
F^7(x,y,z) &= \tfrac{1}{4}\big\{F(\varphi^2 x,\varphi^2 y,\xi)-F(\varphi^2 y,\varphi^2 x,\xi)-F(\varphi x,\varphi y,\xi)+F(\varphi y,\varphi x,\xi)\big\}\eta(z)\\
&\quad +\tfrac{1}{4}\big\{F(\varphi^2 x,\varphi^2 z,\xi)-F(\varphi^2 z,\varphi^2 x,\xi)-F(\varphi x,\varphi z,\xi)+F(\varphi z,\varphi x,\xi)\big\}\eta(y);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F^8(x,y,z) &= \tfrac{1}{4}\big\{F(\varphi^2x,\varphi^2y,\xi)+F(\varphi^2y,\varphi^2x,\xi)+F(\varphi x,\varphi y,\xi)+F(\varphi y,\varphi x,\xi)\big\}\eta(z)\\
&+\tfrac{1}{4}\big\{F(\varphi^2x,\varphi^2z,\xi)+F(\varphi^2z,\varphi^2x,\xi)+F(\varphi x,\varphi z,\xi)+F(\varphi z,\varphi x,\xi)\big\}\eta(y);\\
F^9(x,y,z) &= \tfrac{1}{4}\big\{F(\varphi^2x,\varphi^2y,\xi)-F(\varphi^2y,\varphi^2x,\xi)+F(\varphi x,\varphi y,\xi)-F(\varphi y,\varphi x,\xi)\big\}\eta(z)\\
&+\tfrac{1}{4}\big\{F(\varphi^2x,\varphi^2z,\xi)-F(\varphi^2z,\varphi^2x,\xi)+F(\varphi x,\varphi z,\xi)-F(\varphi z,\varphi x,\xi)\big\}\eta(y).
\end{aligned}$$

Следователно компонентата на F върху $\mathcal{V}_2$ е $p_2(F)=F^4+F^5+F^6+F^7+F^8+F^9$.

Твърдение 2.7. *Нека F^l $(l=10,11)$ са проекциите на $\mathcal{F}$ в подпространствата $\mathcal{F}_l$ и $F\in\mathcal{F}$. Тогава имаме*

$$\begin{aligned}
&F^{10}(x,y,z)=\eta(x)F(\xi,\varphi^2y,\varphi^2z);\\
&F^{11}(x,y,z)=-\eta(x)\left\{\eta(y)F(\xi,\xi,\varphi^2z)+\eta(z)F(\xi,\varphi^2y,\xi)\right\}.
\end{aligned}$$

Оттук следва, че компонентите на F съответно върху $\mathcal{V}_3$ и $\mathcal{V}_4$ са $p_3(F)=F^{10}$ и $p_4(F)=F^{11}$.

Теорема 2.8. *Едно почти контактно В-метрично многообразие (M,φ,ξ,η,g) принадлежи на класа $\mathcal{F}_i$ $(i=1,\dots,11)$ тогава и само тогава, когато тензорът F удовлетворява условието $F=F^i$, където компонентите F^i на F са дадени в Твърдение 2.3, Твърдение 2.6 и Твърдение 2.7.*

Нека разглежданите многообразия (M,φ,ξ,η,g) са от най-ниската размерност, т.е. $\dim M=3$, и нека $\{e_1,e_2,e_3\}$ е φ-база с условията:

$$\begin{gathered}
\varphi e_1=e_2,\qquad \varphi e_2=-e_1,\qquad \varphi e_3=0,\qquad \xi=e_3,\qquad \eta(e_1)=\eta(e_2)=0,\qquad \eta(e_3)=1,\\
g(e_1,e_1)=-g(e_2,e_2)=g(e_3,e_3)=1,\qquad g(e_i,e_j)=0,\qquad i,j=1,2,3,\ i\neq j.
\end{gathered}$$

Означаваме компонентите на F, θ, θ^* и ω относно $\{e_1,e_2,e_3\}$ съответно чрез $F_{ijk}=F(e_i,e_j,e_k)$, $\theta_k=\theta(e_k)$, $\theta^*_k=\theta^*(e_k)$ и $\omega_k=\omega(e_k)$ и намираме:

$$\begin{array}{lll}
\theta_1=F_{111}-F_{221}, & \theta_2=F_{112}-F_{211}, & \theta_3=F_{113}-F_{223},\\
\theta^*_1=F_{112}+F_{211}, & \theta^*_2=F_{111}+F_{221}, & \theta^*_3=F_{123}+F_{213},\\
\omega_1=F_{331}, & \omega_2=F_{332}, & \omega_3=0.
\end{array}$$

Твърдение 2.9. *Компонентите F^i $(i=1,2,\dots,11)$ на тензора F за съответните класове $\mathcal{F}_i$ са следните:*

$$
\begin{aligned}
&F^1(x,y,z)=\left(x^1\theta_1-x^2\theta_2\right)\left(y^1z^1+y^2z^2\right),\\
&\qquad \theta_1=F_{111}=F_{122}, \quad \theta_2=-F_{211}=-F_{222};\\
&F^2(x,y,z)=F^3(x,y,z)=0;\\
&F^4(x,y,z)=\tfrac{1}{2}\theta_3\Big\{x^1\left(y^3z^1+y^1z^3\right)-x^2\left(y^3z^2+y^2z^3\right)\Big\},\\
&\qquad \tfrac{1}{2}\theta_3=F_{131}=F_{113}=-F_{232}=-F_{223};\\
&F^5(x,y,z)=\tfrac{1}{2}\theta_3^*\big\{x^1\left(y^3z^2+y^2z^3\right)+x^2\left(y^3z^1+y^1z^3\right)\big\},\\
&\qquad \tfrac{1}{2}\theta_3^*=F_{132}=F_{123}=F_{231}=F_{213};\\
&F^6(x,y,z)=F^7(x,y,z)=0;\\
&F^8(x,y,z)=\lambda\big\{x^1\left(y^3z^1+y^1z^3\right)+x^2\left(y^3z^2+y^2z^3\right)\big\},\\
&\qquad \lambda=F_{131}=F_{113}=F_{232}=F_{223};\\
&F^9(x,y,z)=\mu\big\{x^1\left(y^3z^2+y^2z^3\right)-x^2\left(y^3z^1+y^1z^3\right)\big\},\\
&\qquad \mu=F_{132}=F_{123}=-F_{231}=-F_{213};\\
&F^{10}(x,y,z)=\nu x^3\left(y^1z^1+y^2z^2\right), \quad \nu=F_{311}=F_{322};\\
&F^{11}(x,y,z)=x^3\big\{\left(y^1z^3+y^3z^1\right)\omega_1+\left(y^2z^3+y^3z^2\right)\omega_2\big\},\\
&\qquad \omega_1=F_{313}=F_{331}, \quad \omega_2=F_{323}=F_{332},
\end{aligned}
$$

където $x=x^ie_i$, $y=y^je_j$, $z=z^ke_k$.

Теорема 2.10. *Класът на тримерните почти контактни В-метрични многообразия е* $\mathcal{F}_1\oplus\mathcal{F}_4\oplus\mathcal{F}_5\oplus\mathcal{F}_8\oplus\mathcal{F}_9\oplus\mathcal{F}_{10}\oplus\mathcal{F}_{11}$.

* * *

В **§3** разглеждаме четиримерни псевдоевклидови пространства със скаларни произведения от сигнатури (3,1) и (2,2). Разглеждаме пространственоподобна хиперсфера и времеподобна хиперсфера, известни съответно като тримерно де Ситер пространство-време и анти де Ситер пространство-време ([15]). Тези хиперповърхнини снабдяваме с почти контактни В-метрични структури, като получените многообразия характеризираме геометрично.

Нека $\langle\cdot,\cdot\rangle$ е лоренцовото скаларно произведение в пространството на Лоренц-Минковски $\mathbb{R}^{3,1}$, т.е. в сила е $\langle x,y\rangle=x^1y^1+x^2y^2+x^3y^3-x^4y^4$ за произволни вектори $x(x^1,x^2,x^3,x^4)$ и $y(y^1,y^2,y^3,y^4)$ от $\mathbb{R}^{3,1}$ относно канонична база.

В $\mathbb{R}^{3,1}$ разглеждаме пространственоподобна хиперсфера S_1^3 с център началото на координатната система и радиус r, определена чрез условието $\langle z,z\rangle=r^2$, където z е радиус-векторът на произволна точка $p\in S_1^3$.

Параметризираме S^3_1 по следния начин:

$$z(r\cos u^1\cos u^2, r\cos u^1\sin u^2, r\sin u^1 \operatorname{ch} u^3, r\sin u^1 \operatorname{sh} u^3),$$

където $u^1, u^2, u^3 \in \mathbb{R}$, $u^1 \neq \frac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$, $u^2 \in [0; 2\pi]$.

Тогава за локалните базисни вектори $\partial_i = \frac{\partial z}{\partial u^i}$ имаме

$$\langle \partial_1, \partial_1\rangle = r^2, \quad \langle \partial_2, \partial_2\rangle = r^2\cos^2 u^1, \quad \langle \partial_3, \partial_3\rangle = -r^2\sin^2 u^1, \quad \langle \partial_i, \partial_j\rangle = 0,\ i \neq j.$$

Чрез субституцията $e_i = \frac{1}{\sqrt{|\langle \partial_i, \partial_i\rangle|}}\partial_i$ $(i = 1, 2, 3)$ получаваме базата $e_1 = \frac{1}{r}\partial_1$, $e_2 = \frac{\varepsilon_1}{r\cos u^1}\partial_2$, $e_3 = \frac{\varepsilon_2}{r\sin u^1}\partial_3$ върху $T_pS^3_1$, където $\varepsilon_1 = \operatorname{sgn}(\cos u^1)$, $\varepsilon_2 = \operatorname{sgn}(\sin u^1)$.

Снабдяваме S^3_1 с почти контактна структура (φ, ξ, η). Рестрикцията на $\langle\cdot,\cdot\rangle$ върху S^3_1 означаваме с g. Тогава $\{e_1, e_2, e_3\}$ е псевдоортонормирана φ-база относно метриката g.

Твърдение 3.1. *Многообразието $(S^3_1, \varphi, \xi, \eta, g)$ е тримерно почти контактно B-метрично многообразие.*

Теорема 3.2. *За многообразието $(S^3_1, \varphi, \xi, \eta, g)$ в сила са свойствата:*

1) *$(S^3_1, \varphi, \xi, \eta, g)$ принадлежи на класа $\mathcal{F}_5 \oplus \mathcal{F}_9$, но не принадлежи на класовете $\mathcal{F}_5$ и $\mathcal{F}_9$,*
2) *$(S^3_1, \varphi, \xi, \eta, g)$ не е изотропно косимплектично B-метрично многообразие,*
3) *φB-свързаността е нулева в базата $\{e_1, e_2, e_3\}$,*
4) *квадратичната норма на $\nabla\varphi$ е отрицателна,*
5) *квадратичните норми на N и $\widehat{N}$ са положителни,*
6) *контактната форма η е затворена,*
7) *интегралните криви на ξ са геодезични,*
8) *$(S^3_1, \varphi, \xi, \eta, g)$ е пространствена форма с положителна постоянна секционна кривина.*

Нека сега разгледаме случая на времеподобна сфера в $\mathbb{R}^{2,2}$. Тук използваме подход, различен от използвания в [20], за снабдяване с почти контактна B-метрична структура на времеподобна хиперсфера в $\mathbb{R}^{2n+2}$ при $n = 1$.

Нека $\langle\cdot,\cdot\rangle$ е скаларно произведение в неутралното псевдоевклидово четиримерно пространство $\mathbb{R}^{2,2}$, т.е. в сила е $\langle x, y\rangle = x^1y^1 + x^2y^2 - x^3y^3 - x^4y^4$

за произволни вектори $x(x^1, x^2, x^3, x^4)$ и $y(y^1, y^2, y^3, y^4)$ от $\mathbb{R}^{2,2}$ относно канонична база.

В $\mathbb{R}^{2,2}$ разглеждаме времеподобна хиперсфера H_1^3 с център началото на координатната система и радиус r, определена чрез условието $\langle z, z\rangle = -r^2$, където z е радиус-векторът на произволна точка $p \in H_1^3$.

Параметризираме H_1^3 по следния начин:

$$z(r \operatorname{sh} u^1 \cos u^2, r \operatorname{sh} u^1 \sin u^2, r \operatorname{ch} u^1 \cos u^3, r \operatorname{ch} u^1 \sin u^3),$$

където $u^1, u^2, u^3 \in \mathbb{R}$, $u^1 \neq 0$.

Тогава за локалните базисни вектори ∂_i, имаме

$$\langle \partial_1, \partial_1\rangle = r^2, \quad \langle \partial_2, \partial_2\rangle = r^2 \operatorname{sh}^2 u^1, \quad \langle \partial_3, \partial_3\rangle = -r^2 \operatorname{ch}^2 u^1, \quad \langle \partial_i, \partial_j\rangle = 0,\ i \neq j.$$

Полагаме $e_i = \frac{1}{\sqrt{|\langle \partial_i, \partial_i\rangle|}}\partial_i$ и получаваме псевдоортонормираната база $e_1 = \frac{1}{r}\partial_1$, $e_2 = \frac{\varepsilon}{r \operatorname{sh} u^1}\partial_2$, $e_3 = \frac{1}{r \operatorname{ch} u^1}\partial_3$ върху $T_pH_1^3$, където $\varepsilon = \operatorname{sgn}(u^1)$.

Снабдяваме H_1^3 с почти контактна структура (φ, ξ, η). Рестрикцията на $\langle \cdot, \cdot\rangle$ върху H_1^3 означаваме с g. Тогава $\{e_1, e_2, e_3\}$ е псевдоортонормирана φ-база относно метриката g.

Твърдение 3.3. *Многообразието $(H_1^3, \varphi, \xi, \eta, g)$ е тримерно почти контактно B-метрично многообразие.*

Теорема 3.4. *За многообразието $(H_1^3, \varphi, \xi, \eta, g)$ в сила са свойствата:*

1) $(H_1^3, \varphi, \xi, \eta, g)$ *принадлежи на класа $\mathcal{F}_5 \oplus \mathcal{F}_9$, но не принадлежи на класовете $\mathcal{F}_5$ и $\mathcal{F}_9$,*
2) $(H_1^3, \varphi, \xi, \eta, g)$ *не е изотропно косимплектично B-метрично многообразие,*
3) *φB-свързаността е нулева в базата $\{e_1, e_2, e_3\}$,*
4) *квадратичната норма на $\nabla\varphi$ е отрицателна,*
5) *квадратичните норми на N и $\widehat{N}$ са положителни,*
6) *контактната форма η е затворена,*
7) *интегралните криви на ξ са геодезични,*
8) $(H_1^3, \varphi, \xi, \eta, g)$ *е пространствена форма с отрицателна постоянна секционна кривина.*

* * *

Обект на изследване в **§4** са почти контактни B-метрични многообразия, които получаваме като произведение на реалната права и двумерно многообразие, снабдено с комплексна структура и норденова метрика. Използваме два различни метода за получаване на В-метриката върху полученото многообразие. Конструираните многообразия характеризираме относно класификацията в [20] и получаваме някои техни геометрични свойства.

Първо разглеждаме конуса над двумерна комплексна пространствена форма с норденова метрика.

Нека $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ е $(2n+1)$-мерно почти контактно В-метрично многообразие. С x', y', z', w' означаваме произволни векторни полета или вектори в контактното му разпределение H.

Тъй като g е В-метрика, тогава $h = g|_H$ е норденова метрика върху H, т.е. съгласувана е с почти комплексната структура $J = \varphi|_H$ по следния начин $h(Jx', Jy') = -h(x', y')$. Асоциираната норденова метрика $\widetilde{h}$ на h е определена чрез $\widetilde{h}(x', y') = h(x', Jy')$. Двете метрики h и $\widetilde{h}$ имат сигнатура (n, n).

Едно $2n$-мерно многообразие M' с почти комплексна структура J и норденова метрика h се нарича *почти комплексно многообразие с норденова метрика* ([18]). Такова многообразие означаваме с (M', J, h). Многообразието $(M', J, \widetilde{h})$ също е почти комплексно многообразие с норденова метрика. Едно многообразие (M', J, h) се нарича *келерово многообразие с норденова метрика*, когато е в сила условието $\nabla' J = 0$ за свързаността на Леви-Чивита ∇', породена от метриката h.

В [56] величината $\|\nabla' J\|^2 = h^{ij} h^{ks} h\big((\nabla'_{e_i} J)e_k, (\nabla'_{e_j} J)e_s\big)$ върху многообразие (M', J, h) е наречена *квадратична норма* на $\nabla' J$, определена чрез произволна база, а (M', J, h) с условието $\|\nabla' J\|^2 = 0$ е наречено *изотропно келерово многообразие с норденова метрика*.

Да отбележим, че (M', J, h) от най-ниската размерност 2 е пространствена форма, т.е. многообразието е с постоянна секционна кривина k' и кривинният му тензор има вида $R' = k' \pi'_1$, където $\pi'_1 = h(y', z')x' - h(x', z')y'$. Също така фундаменталният тензор F' на такова двумерно многообразие (M', J, h) е дефиниран чрез $F'(x', y', z') = h\big((\nabla'_{x'} J)\, y', z'\big)$ и има следния вид ([18]):

$$F'(x', y', z') = \tfrac{1}{2}\{h(x', y')\theta'(z') + h(x', Jy')\theta'(Jz') + h(x', z')\theta'(y') + h(x', Jz')\theta'(Jy')\},$$

където лиевата 1-форма θ' е дефинирана чрез $\theta'(z') = h^{ij} F'(e'_i, e'_j, z')$ относно произволна база $\{e'_1, e'_2\}$ на $T_{p'}M'$, $p' \in M'$.

Разглеждаме конуса $\mathcal{C}(M') = \mathbb{R}^+ \times_t M'$, където $\mathbb{R}^+$ е множеството на положителните реални числа. Снабдяваме го с метрика g, дефинирана чрез $g\left(\left(x', a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right), \left(y', b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\right) = t^2\, h(x', y') + ab$, където a, b са диференцируеми функции върху $\mathcal{C}(M')$, а t е координатата върху $\mathbb{R}^+$.

Въвеждаме почти контактна структура (φ, ξ, η) върху $\mathcal{C}(M')$ чрез $\varphi|_H = J$, $\xi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, $\eta = \mathrm{d}t$, $\varphi\xi = 0$ и $\eta \circ \varphi = 0$.

Твърдение 4.1. *Многообразието $(\mathcal{C}(M'), \varphi, \xi, \eta, g)$ е тримерно почти контактно B-метрично многообразие.*

Твърдение 4.2. *В сила са следните равенства за кривинния тензор R на $(\mathcal{C}(M'), \varphi, \xi, \eta, g)$:*

$$R(x', y', z', w') = \frac{1}{t^2}(k' - 1)\pi_1(x', y', z', w'),$$
$$R(\xi, y', z', w') = R(x', \xi, z', w') = R(x', y', \xi, w') = R(x', y', z', \xi) = R(\xi, y', z', \xi) = 0,$$

където $\pi_1(x', y', z', w') = g(\pi_1(x', y')z', w')$.

Теорема 4.3. *В сила са следните твърдения:*

1) *Многообразието $(\mathcal{C}(M'), \varphi, \xi, \eta, g)$ е изотропно косимплектично B-метрично многообразие тогава и само тогава, когато за (M', J, h) е в сила $\|\nabla' J\|^2 = 4$.*
2) *Многообразието (M', J, h) е изотропно келерово многообразие с норденова метрика тогава и само тогава, когато за $(\mathcal{C}(M'), \varphi, \xi, \eta, g)$ е в сила $\|\nabla\varphi\|^2 = -\frac{4}{t^2}$.*

Теорема 4.4. *Многообразието $(\mathcal{C}(M'), \varphi, \xi, \eta, g)$*

1) *принадлежи на $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_5$,*
2) *принадлежи на $\mathcal{F}_5$ тогава и само тогава, когато (M', J, h) е келерово многообразие с норденова метрика,*
3) *не принадлежи на $\mathcal{F}_1$.*

Теорема 4.5. *Многообразието $(\mathcal{C}(M'), \varphi, \xi, \eta, g)$ е плоско тогава и само тогава, когато $k' = 1$.*

Твърдение 4.6. *За $(\mathcal{C}(M'), \varphi, \xi, \eta, g)$ в сила са свойствата:*

1) *Секционните кривини на ξ-площадките са равни на нула,*
2) *$\tau^* = 0$,*
3) *$\tau = \tau^{**}$.*

Твърдение 4.7. *За $(\mathcal{C}(M'), \varphi, \xi, \eta, g)$ в сила са свойствата:*

1) $k' < 1$ *тогава и само тогава, когато* $\tau < 0$,
2) $k' = 1$ *тогава и само тогава, когато* $\tau = 0$,
3) $k' > 1$ *тогава и само тогава, когато* $\tau > 0$.

Сега разглеждаме S^1-разрешимо разширение на двумерна комплексна пространствена форма с норденова метрика.

В [24] едно изкривено продуктно многообразие $S^1(M') = \mathbb{R}^+ \times_t M'$ е снабдено с почти контактна B-метрична структура върху $S^1(M')$ чрез $\varphi|_H = J$, $\xi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, $\eta = \mathrm{d}t$, $\eta \circ \varphi = 0$, и $g = \mathrm{d}t^2 + \cos 2t\, h - \sin 2t\, \widetilde{h}$, където $\mathrm{d}t$ е координатната 1-форма върху $\mathbb{R}^+$.

В равенствата по-нататък, с $\theta'^\sharp$ означаваме дуалния вектор на θ' относно h, т.е. $\theta'(z) = h(z, \theta'^\sharp)$. Аналогично, $\theta^\sharp$ е означение на дуалния вектор на θ относно g, т.е. $\theta(z) = g(z, \theta^\sharp)$.

Твърдение 4.8. *Многообразието* $(S^1(M'), \varphi, \xi, \eta, g)$ *е тримерно почти контактно B-метрично многообразие.*

Теорема 4.9. *Многообразието* $(S^1(M'), \varphi, \xi, \eta, g)$ *е изотропно косимплектично B-метрично многообразие тогава и само тогава, когато за* (M', J, h) *е в сила* $\|\nabla' J\|^2 = -2(1 + \cos 4t + \sin 4t\, \theta'_1 \theta'_2)$.

Теорема 4.10. *Многообразието* $(S^1(M'), \varphi, \xi, \eta, g)$

1) *принадлежи на* $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_4$,
2) *принадлежи на* $\mathcal{F}_4$ *тогава и само тогава, когато* (M', J, h) *е келерово многообразие с норденова метрика,*
3) *не може да принадлежи на* $\mathcal{F}_1$.

Теорема 4.11. *Следните твърдения за многообразието* $(S^1(M'), \varphi, \xi, \eta, g)$ *са еквивалентни:*

1) $(S^1(M'), \varphi, \xi, \eta, g) \in \mathcal{F}_4$,
2) (M', J, h) *е келерово многообразие с норденова метрика,*
3) $\rho = k' \cos 2t\, g + (2 - k' \cos 2t)\eta \otimes \eta$,
4) $\rho^* = (1 - k' \cos 2t)(\widetilde{g} - \eta \otimes \eta)$.

Твърдение 4.12. *За* $(S^1(M'), \varphi, \xi, \eta, g)$ *в сила са свойствата:*

1) *Секционните кривини на* ξ*-площадките са постоянни,*
2) $\tau^* = 0$,
3) $\tau^{**} = \tau - 4$.

Следствие 4.13. *Ако (M', J, h) е келерово многообразие с норденова метрика, тогава в сила са $\tau = 2(k' \cos 2t + 1)$ и $\tau^{**} = 2(k' \cos 2t - 1)$.*

Следствие 4.14. *Ако (M', J, h) е келерово многообразие с норденова метрика, тогава в сила са твърденията:*

1) $k' < 0$ *тогава и само тогава, когато* $2(k'+1) < \tau < 2$ *и* $2(k'-1) < \tau^{**} < -2$,
2) $k' = 0$ *тогава и само тогава, когато* $\tau = 2$ *и* $\tau^{**} = -2$,
3) $k' > 0$ *тогава и само тогава, когато* $2 < \tau < 2(k'+1)$ *и* $-2 < \tau^{**} < 2(k'-1)$.

* * *

В **§5** върху произволна тримерна група на Ли, разглеждана като гладко многообразие, въвеждаме почти контактна B-метрична структура. Установяваме необходими и достатъчни условия полученото тримерно почти контактно B-метрично многообразие да принадлежи на основен клас от класификацията в [20]. Разглеждаме някои специални почти контактни B-метрични структури. Накрая намираме някои геометрични характеристики на разглежданите многообразия от всеки клас.

Нека с L означим тримерна реална свързана група на Ли, а с $\mathfrak{l}$ – съответната алгебра на Ли с база $\{E_1, E_2, E_3\}$ от лявоинвариантни векторни полета.

Дефинираме почти контактна структура (φ, ξ, η) както следва

$$\varphi E_1 = E_2, \quad \varphi E_2 = -E_1, \quad \varphi E_3 = 0, \quad \xi = E_3, \quad \eta(E_1) = \eta(E_2) = 0, \quad \eta(E_3) = 1$$

и B-метрика g, за която

$$g(E_1, E_1) = -g(E_2, E_2) = g(E_3, E_3) = 1, \qquad g(E_1, E_3) = g(E_2, E_3) = g(E_1, E_2) = 0.$$

Така полученото многообразие означаваме с $(L, \varphi, \xi, \eta, g)$.

Твърдение 5.1. *Многообразието $(L, \varphi, \xi, \eta, g)$ е тримерно почти контактно B-метрично многообразие.*

Теорема 5.2. *Многообразието $(L, \varphi, \xi, \eta, g)$ принадлежи на основния клас $\mathcal{F}_s$ $(s = 1, 4, 5, 8, 9, 10, 11)$ тогава и само тогава, когато съответната алгебра на Ли $\mathfrak{l}$ е определена чрез комутаторите:*

$$\begin{array}{llll}
\mathcal{F}_1: & [E_3, E_1] = 0, & [E_3, E_2] = 0, & [E_1, E_2] = \alpha E_1 + \beta E_2; \\
\mathcal{F}_4: & [E_3, E_1] = \alpha E_2, & [E_3, E_2] = -\alpha E_1, & [E_1, E_2] = 0; \\
\mathcal{F}_5: & [E_3, E_1] = \alpha E_1, & [E_3, E_2] = \alpha E_2, & [E_1, E_2] = 0;
\end{array}$$

$$
\begin{array}{llll}
\mathcal{F}_8: & [E_3,E_1]=\alpha E_2, & [E_3,E_2]=\alpha E_1, & [E_1,E_2]=-2\alpha E_3;\\
\mathcal{F}_9: & [E_3,E_1]=\alpha E_1, & [E_3,E_2]=-\alpha E_2, & [E_1,E_2]=0;\\
\mathcal{F}_{10}: & [E_3,E_1]=\alpha E_2, & [E_3,E_2]=\alpha E_1, & [E_1,E_2]=0;\\
\mathcal{F}_{11}: & [E_3,E_1]=\alpha E_3, & [E_3,E_2]=\beta E_3, & [E_1,E_2]=0,
\end{array}
$$

където α и β са произволни реални параметри. Освен това за съответен клас $\mathcal{F}_s$ в сила са равенствата

$$
\begin{array}{ll}
\mathcal{F}_1: \quad \alpha=\frac{1}{2}\theta_1, \quad \beta=\frac{1}{2}\theta_2; & \mathcal{F}_4: \quad \alpha=\frac{1}{2}\theta_3;\\
\mathcal{F}_5: \quad \alpha=-\frac{1}{2}\theta_3^*; & \mathcal{F}_8: \quad \alpha=-\lambda;\\
\mathcal{F}_9: \quad \alpha=-\mu; & \mathcal{F}_{10}: \quad \alpha=\frac{1}{2}\nu;\\
\mathcal{F}_{11}: \quad \alpha=-\omega_2, \quad \beta=\omega_1, &
\end{array}
$$

където θ_1, θ_2, θ_3, θ_3^*, λ, μ, ν, ω_1 и ω_2 са определени в Твърдение 2.9.

Да отбележим, че $\mathcal{F}_0$-многообразие се получава когато съответната алгебра на Ли е абелева. По-нататък пропускаме този специален случай.

Разглеждаме някои специални структури (φ,ξ,η,g).

Метриката g се нарича *килингова*, ако е в сила свойството $g([x,y],z)=g(x,[y,z])$.

Теорема 5.3. *Метриката g е килингова тогава и само тогава, когато (L,φ,ξ,η,g) принадлежи на подкласа на $\mathcal{F}_8\oplus\mathcal{F}_{10}$, определен от условието $2\lambda=-\nu$.*

Теорема 5.4. *Метриката $\tilde{g}$ е килингова тогава и само тогава, когато (L,φ,ξ,η,g) принадлежи на подкласа на $\mathcal{F}_8\oplus\mathcal{F}_9\oplus\mathcal{F}_{10}$, определен от условието $2\lambda=\mu=\nu$.*

Структурата φ се нарича *биинвариантна*, ако е изпълнено свойството $\varphi[x,y]=[x,\varphi y]$.

Теорема 5.5. *Структурата φ е биинвариантна тогава и само тогава, когато (L,φ,ξ,η,g) принадлежи на подкласа на $\mathcal{F}_8\oplus\mathcal{F}_{10}$, определен от условието $2\lambda=\nu$.*

Структурата φ се нарича *абелева*, ако е в сила свойството $[\varphi x,\varphi y]=[x,y]$.

Теорема 5.6. *Структурата φ е абелева тогава и само тогава, когато (L,φ,ξ,η,g) принадлежи на подкласа на $\mathcal{F}_1\oplus\mathcal{F}_8\oplus\mathcal{F}_{10}$, определен от условието $2\lambda=\nu$.*

Векторното поле ξ се нарича *килингово*, ако производната на Ли относно ξ на метриката g е нула (т.е. $\mathcal{L}_\xi g = 0$), а многообразие $(L, \varphi, \xi, \eta, g)$ с килингово векторно поле ξ се нарича *K-контактно B-метрично многообразие.*

Теорема 5.7. *Векторното поле ξ е килингово тогава и само тогава, когато $(L, \varphi, \xi, \eta, g)$ принадлежи на $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$, т.е. това е класът на тримерните K-контактни B-метрични многообразия.*

Изследваме кривинните свойства на разглежданите многообразия и получаваме:

Теорема 5.8. *Многообразията $(L, \varphi, \xi, \eta, g)$ от класа $\mathcal{F}_{10}$ са плоски, а ненулевите компоненти на R, ρ, ρ^* и ненулевите стойности на τ, τ^*, k_{ij} за останалите класове $\mathcal{F}_s$ са следните:*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_1 :\quad & R_{1212} = \rho_{11} = -\rho_{22} = \rho^*_{12} = \rho^*_{21} = \tfrac{1}{2}\tau = k_{12} = \alpha^2 - \beta^2;\\
\mathcal{F}_4 :\quad & R_{2323} = -R_{1313} = \tfrac{1}{2}\rho_{11} = -\rho_{22} = \rho_{33} = \tfrac{1}{4}\tau = k_{13} = k_{23} = \alpha^2;\\
\mathcal{F}_5 :\quad & R_{1212} = -R_{1313} = R_{2323} = \tfrac{1}{2}\rho_{11} = -\tfrac{1}{2}\rho_{22} = \tfrac{1}{2}\rho_{33}\\
& \qquad = \rho^*_{12} = \rho^*_{21} = \tfrac{1}{6}\tau = k_{12} = k_{13} = k_{23} = -\alpha^2;\\
\mathcal{F}_8 :\quad & R_{1212} = R_{1313} = -R_{2323} = \rho^*_{12} = \rho^*_{21} = -\tfrac{1}{2}\rho_{33}\\
& \qquad = -\tfrac{1}{2}\tau = k_{12} = -k_{13} = -k_{23} = \alpha^2;\\
\mathcal{F}_9 :\quad & R_{1212} = R_{1313} = -R_{2323} = \rho^*_{12} = \rho^*_{21} = -\tfrac{1}{2}\rho_{33}\\
& \qquad = -\tfrac{1}{2}\tau = k_{12} = -k_{13} = -k_{23} = \alpha^2;\\
\mathcal{F}_{11} :\quad & R_{1313} = -\rho_{11} = -k_{13} = \alpha^2, \qquad R_{2323} = -\rho_{22} = k_{23} = \beta^2,\\
& R_{1332} = \rho_{12} = \tfrac{1}{2}\tau^* = -\alpha\beta, \qquad \rho_{33} = \tfrac{1}{2}\tau = -\alpha^2 + \beta^2.
\end{aligned}
$$

Теорема 5.9. *За $\mathcal{F}_s$-многообразията $(L, \varphi, \xi, \eta, g)$, непринадлежащи на $\mathcal{F}_0$, в сила са следните твърдения:*

1) *Кривинният тензор R е келеров, точно когато $(L, \varphi, \xi, \eta, g)$ е $\mathcal{F}_1$-многообразие,*
2) *Едно $\mathcal{F}_1$-многообразие е плоско тогава и само тогава, когато е в сила равенството $\alpha^2 = \beta^2$,*
3) *Многообразията от класовете $\mathcal{F}_8$ и $\mathcal{F}_9$ имат кривинни тензори с едни и същи компоненти относно базата,*
4) *Кривинният тензор на всяко $\mathcal{F}_s$-многообразие $(s = 4, 11)$ притежава свойството $R(x, y, \varphi z, \varphi w) = 0$,*
5) *Всяко $\mathcal{F}_s$-многообразие $(s = 4, 11)$ има нулев $*$-Ричи тензор,*
6) *Всяко $\mathcal{F}_s$-многообразие $(s = 4, 8, 9)$ има положителна скаларна кривина,*

7) *Едно $\mathcal{F}_1$-многообразие (съответно $\mathcal{F}_{11}$-многообразие) има положителна скаларна кривина тогава и само тогава, когато $\alpha^2 > \beta^2$ (съответно $\alpha^2 < \beta^2$),*
8) *Всяко $\mathcal{F}_5$-многообразие има отрицателна скаларна кривина,*
9) *Едно $\mathcal{F}_1$-многообразие (съответно $\mathcal{F}_{11}$-многообразие) има отрицателна скаларна кривина тогава и само тогава, когато $\alpha^2 < \beta^2$ (съответно $\alpha^2 > \beta^2$),*
10) *Всяко $\mathcal{F}_s$-многообразие ($s = 1, 4, 5, 8, 9$) има нулева $*$-скаларна кривина,*
11) *Едно $\mathcal{F}_{11}$-многообразие има нулева $*$-скаларна кривина тогава и само тогава, когато $\alpha\beta = 0$ за $\alpha \neq \beta$,*
12) *Едно $\mathcal{F}_{11}$-многообразие има положителна (съответно отрицателна) $*$-скаларна кривина тогава и само тогава, когато $\alpha\beta < 0$ (съответно $\alpha\beta > 0$),*
13) *Всяко $\mathcal{F}_1$-многообразие има нулеви секционни кривини на ξ-площадките,*
14) *Всяко $\mathcal{F}_4$-многообразие има положителни секционни кривини на ξ-площадките,*
15) *Всяко $\mathcal{F}_s$-многообразие ($s = 5, 8, 9$) има отрицателни секционни кривини на ξ-площадките,*
16) *Едно $\mathcal{F}_1$-многообразие има нулева скаларна кривина на φ-холоморфната площадка тогава и само тогава, когато многообразието е плоско,*
17) *Всяко $\mathcal{F}_s$-многообразие ($s = 4, 11$) има нулева секционна кривина на φ-холоморфната площадка,*
18) *Всяко $\mathcal{F}_s$-многообразие ($s = 8, 9$) (съответно $\mathcal{F}_5$-многообразие) има положителна (съответно отрицателна) скаларна кривина на φ-холоморфната площадка,*
19) *Едно $\mathcal{F}_1$-многообразие има положителна (съответно отрицателна) скаларна кривина на φ-холоморфната площадка тогава и само тогава, когато $\alpha^2 > \beta^2$ (съответно $\alpha^2 < \beta^2$).*

Следствие 5.10. *Видът на тензора на Ричи върху $(L, \varphi, \xi, \eta, g)$ в съответния основен клас е следния:*

$$\begin{array}{llll}
\mathcal{F}_1: & \rho = \frac{\tau}{2}\left(g - \eta\otimes\eta\right); & \mathcal{F}_4: & \rho = \frac{\tau}{4}\left(g + \eta\otimes\eta\right); \\
\mathcal{F}_5: & \rho = \frac{\tau}{3}g; & \mathcal{F}_8: & \rho = \tau(\eta\otimes\eta); \\
\mathcal{F}_9: & \rho = \tau(\eta\otimes\eta); & \mathcal{F}_{10}: & \rho = 0,
\end{array}$$

$$\mathcal{F}_{11}: \quad \rho = \rho(\varphi\cdot,\varphi\cdot) + \tfrac{\tau}{2}g - \tau^* g^*,$$

където $g^*(\cdot,\cdot) = g(\cdot,\varphi\cdot) = \tilde{g} - \eta\otimes\eta$.

Кривинният тензор на всяко тримерно многообразие има вида $R = -g \owedge \left(\rho - \frac{\tau}{4}g\right)$, където означението $\owedge$ е използвано за произведението на Кулкарни-Номизу на два тензора g и h от тип (0,2), т.е. $(g\owedge h)(x,y,z,w) = g(x,z)h(y,w) - g(y,z)h(x,w) + g(y,w)h(x,z) - g(x,w)h(y,z)$.

Следствие 5.11. *Видът на кривинния тензор върху* (L,φ,ξ,η,g) *в съответния основен клас е:*

$\mathcal{F}_1: \quad R = -\frac{\tau}{4}(g\owedge g) + \frac{\tau}{2}(g\owedge(\eta\otimes\eta));$ $\qquad \mathcal{F}_4: \quad R = -\frac{\tau}{4}(g\owedge(\eta\otimes\eta));$

$\mathcal{F}_5: \quad R = -\frac{\tau}{12}(g^*\owedge g^*) - \frac{\tau}{6}(g\owedge(\eta\otimes\eta));$ $\qquad \mathcal{F}_8: \quad R = \frac{\tau}{4}(g^*\owedge g^*) - \frac{\tau}{2}(g\owedge(\eta\otimes\eta));$

$\mathcal{F}_9: \quad R = \frac{\tau}{4}(g^*\owedge g^*) - \frac{\tau}{2}(g\owedge(\eta\otimes\eta));$ $\qquad \mathcal{F}_{11}: \quad R = -\rho\owedge(\eta\otimes\eta).$

Едно почти контактно В-метрично многообразие (M,φ,ξ,η,g) наричаме *η-комплексно айнщайново многообразие*, ако неговият тензор на Ричи удовлетворява условието $\rho = \lambda g + \mu\tilde{g} + \nu\eta\otimes\eta$, където λ, μ и ν са функции върху M. Случаят на η-комплексни айнщайнови сасакиевоподобни многообразия е разгледан в [24].

Ако $\mu = 0$ многообразието се нарича *η-айнщайново многообразие*. Да отбележим, че разгледаното тримерно почти контактно В-метрично многообразие $(S^1(M'),\varphi,\xi,\eta,g)$, съгласно Теорема 4.11, е η-айнщайново многообразие, точно когато (M',J,h) е келерово многообразие с норденова метрика.

В [54] са разгледани някои свойства на почти контактните В-метрични многообразия, свързани с айнщайновото условие. Едно почти контактно В-метрично многообразие (M,φ,ξ,η,g) е наречено *контактно айнщайново*, ако тензорът на Ричи ρ има вида

$$\rho = \lambda g|_H + \mu\tilde{g}|_H + \nu\eta\otimes\eta, \quad \lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}.$$

Едно контактно айнщайново многообразие е наречено *h-айнщайново* (съответно *v-айнщайново*), ако $\rho = \lambda g|_H + \mu\tilde{g}|_H$ (съответно $\rho = \nu\eta\otimes\eta$). Едно h-айнщайново многообразие е наречено *φ-айнщайново* (съответно *$*$-айнщайново*), ако $\rho = \lambda g|_H$ (съответно $\rho = \mu\tilde{g}|_H$).

Твърдение 5.12. *Многообразието* (L,φ,ξ,η,g) *е:*

1) *φ-айнщайново, ако принадлежи на $\mathcal{F}_1$,*
2) *η-айнщайново, ако принадлежи на $\mathcal{F}_4$,*

3) *айнщайново, ако принадлежи на* $\mathcal{F}_5$,
4) v-*айнщайново, ако принадлежи на* $\mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_9$.

* * *

В **§6** привеждаме известната класификация на Бианки за тримерни реални алгебри на Ли. Разглеждаме групите на Ли, асоциирани с алгебрите на Ли от съответните класове на Бианки. Тези групи снабдяваме с почти контактна B-метрична структура и установяваме принадлежността на всяко от получените почти контактни B-метрични многообразия към съответния клас от класификацията на Ганчев-Михова-Грибачев. За многообразията, чиито алгебри на Ли са от клас на Бианки, зависещ от реален параметър, намираме някои геометрични свойства.

Известна е класификацията на Бианки за тримерните реални (и комплексни) алгебри на Ли ([6, 7]). Тази класификация е дадена в [22] чрез следната

Теорема 6.1 (Бианки). *Нека* $\mathfrak{l}$ *е реална тримерна алгебра на Ли. Тогава* $\mathfrak{l}$ *е изоморфна на точно една от следните алгебри на Ли:*

$$
\begin{array}{llll}
\mathrm{Bia(I)}: & [e_1,e_2]=0, & [e_2,e_3]=0, & [e_3,e_1]=0,\\
\mathrm{Bia(II)}: & [e_1,e_2]=0, & [e_2,e_3]=e_1, & [e_3,e_1]=0,\\
\mathrm{Bia(IV)}: & [e_1,e_2]=0, & [e_2,e_3]=e_1-e_2, & [e_3,e_1]=e_1,\\
\mathrm{Bia(V)}: & [e_1,e_2]=0, & [e_2,e_3]=e_2, & [e_3,e_1]=e_1,\\
\mathrm{Bia(VI}_h)\ (h\leq 0): & [e_1,e_2]=0, & [e_2,e_3]=e_1-he_2, & [e_3,e_1]=he_1-e_2,\\
\mathrm{Bia(VII}_h)\ (h\geq 0): & [e_1,e_2]=0, & [e_2,e_3]=e_1-he_2, & [e_3,e_1]=he_1+e_2,\\
\mathrm{Bia(VIII)}: & [e_1,e_2]=-e_3, & [e_2,e_3]=e_1, & [e_3,e_1]=e_2,\\
\mathrm{Bia(IX)}: & [e_1,e_2]=e_3, & [e_2,e_3]=e_1, & [e_3,e_1]=e_2,
\end{array}
$$

където $\{e_1,e_2,e_3\}$ *е каноничната база,* h *е реален параметър, а с* Bia(I), Bia(II), Bia(IV), Bia(V), Bia(VI$_h$) ($h \leq 0$), Bia(VII$_h$) ($h \geq 0$), Bia(VIII) *и* Bia(IX) *са означени съответните класове от алгебри на Ли.*

Класът Bia(III) съвпада с класа Bia(VI$_h$) при $h = -1$, поради което този клас не фигурира в Теорема 6.1.

Изследваме групите на Ли, асоциирани с алгебрите на Ли от съответните класове на Бианки. С оглед на по-нататъшните изследвания разглеждаме всички случаи, дадени в Таблица 1, следващи от Теорема 6.1, получени чрез циклична смяна на базисните вектори e_1, e_2, e_3.

Таблица 1

Bia(I)			
(1)	$[e_1,e_2]=0,$	$[e_2,e_3]=0,$	$[e_3,e_1]=0$
Bia(II)			
(1)	$[e_1,e_2]=0,$	$[e_2,e_3]=e_1,$	$[e_3,e_1]=0$
(2)	$[e_1,e_2]=0,$	$[e_2,e_3]=0,$	$[e_3,e_1]=e_2$
(3)	$[e_1,e_2]=e_3,$	$[e_2,e_3]=0,$	$[e_3,e_1]=0$
Bia(III) $\equiv$ Bia(VI$_{-1}$)			
(1)	$[e_1,e_2]=0,$	$[e_2,e_3]=e_1+e_2,$	$[e_3,e_1]=-e_1-e_2$
(2)	$[e_1,e_2]=-e_2-e_3,$	$[e_2,e_3]=0,$	$[e_3,e_1]=e_2+e_3$
(3)	$[e_1,e_2]=e_1+e_3,$	$[e_2,e_3]=-e_1-e_3,$	$[e_3,e_1]=0$
Bia(IV)			
(1)	$[e_1,e_2]=0,$	$[e_2,e_3]=e_1-e_2,$	$[e_3,e_1]=e_1$
(2)	$[e_1,e_2]=e_2,$	$[e_2,e_3]=0,$	$[e_3,e_1]=e_2-e_3$
(3)	$[e_1,e_2]=-e_1+e_3,$	$[e_2,e_3]=e_3,$	$[e_3,e_1]=0$
Bia(V)			
(1)	$[e_1,e_2]=0,$	$[e_2,e_3]=e_2,$	$[e_3,e_1]=e_1$
(2)	$[e_1,e_2]=e_2,$	$[e_2,e_3]=0,$	$[e_3,e_1]=e_3$
(3)	$[e_1,e_2]=e_1,$	$[e_2,e_3]=e_3,$	$[e_3,e_1]=0$
Bia(VI$_h$), $h\leq 0$			
(1)	$[e_1,e_2]=0,$	$[e_2,e_3]=e_1-he_2,$	$[e_3,e_1]=he_1-e_2$
(2)	$[e_1,e_2]=he_2-e_3,$	$[e_2,e_3]=0,$	$[e_3,e_1]=e_2-he_3$
(3)	$[e_1,e_2]=-he_1+e_3,$	$[e_2,e_3]=-e_1+he_3,$	$[e_3,e_1]=0$
(1)	$[e_1,e_2]=0,$	$[e_2,e_3]=e_1-he_2,$	$[e_3,e_1]=he_1+e_2$
(2)	$[e_1,e_2]=he_2+e_3,$	$[e_2,e_3]=0,$	$[e_3,e_1]=e_2-he_3$
(3)	$[e_1,e_2]=-he_1+e_3,$	$[e_2,e_3]=e_1+he_3,$	$[e_3,e_1]=0$
Bia(VIII)			
(1)	$[e_1,e_2]=-e_3,$	$[e_2,e_3]=e_1,$	$[e_3,e_1]=e_2$
(2)	$[e_1,e_2]=e_3,$	$[e_2,e_3]=-e_1,$	$[e_3,e_1]=e_2$
(3)	$[e_1,e_2]=e_3,$	$[e_2,e_3]=e_1,$	$[e_3,e_1]=-e_2$
Bia(IX)			
(1)	$[e_1,e_2]=e_3,$	$[e_2,e_3]=e_1,$	$[e_3,e_1]=e_2$

Известно е (напр. [21]), че за реална алгебра на Ли $\mathfrak{l}$ от крайна размерност съществува съответна свързана 1-свързана група на Ли L, която е определена с точност до изоморфизъм. Получената група L снабдяваме с почти контактна В-метрична структура (φ,ξ,η,g).

Чрез следващата теорема за получените по такъв начин почти контактни В-метрични многообразия (L,φ,ξ,η,g) установяваме принадлежността им към съответен клас от класификацията в [20].

Теорема 6.2. *Многообразието (L,φ,ξ,η,g), съответно на различните случаи на алгебри на Ли от Таблица 1, принадлежи на класа от класификацията на Ганчев-Михова-Грибачев, показан в Таблица 2.*

Разглеждаме многообразията (L,φ,ξ,η,g), чиито асоциирани алгебри на Ли са от Bia(VI$_h$) и Bia(VII$_h$) и намираме някои техни геометрични свойства.

Първо разглеждаме поотделно случаите (1), (2) и (3) за Bia(VI$_h$) от Таблица 1, където $h\leq 0$, като формулираме следните твърдения.

Таблица 2

Bia(I)	
(1)	$\mathcal{F}_0$
Bia(II)	
(1)	$\mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_{10}$
(2)	$\mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_{10}$
(3)	$\mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$
Bia(III)	
(1)	$\mathcal{F}_5 \oplus \mathcal{F}_{10}$
(2)	$\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{11}$
(3)	$\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10} \oplus \mathcal{F}_{11}$
Bia(IV)	
(1)	$\mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_5 \oplus \mathcal{F}_{10}$
(2)	$\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_{10} \oplus \mathcal{F}_{11}$
(3)	$\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10} \oplus \mathcal{F}_{11}$
Bia(V)	
(1)	$\mathcal{F}_9$
(2)	$\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_{11}$
(3)	$\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_{11}$
Bia(VI$_h$), $h = 0$	
(1)	$\mathcal{F}_{10}$
(2)	$\mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_8$
(3)	$\mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$

Bia(VI$_h$), $h < 0$	
(1)	$\mathcal{F}_5 \oplus \mathcal{F}_{10}$
(2)	$\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{11}$
(3)	$\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10} \oplus \mathcal{F}_{11}$
Bia(VII$_h$), $h = 0$	
(1)	$\mathcal{F}_4$
(2)	$\mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$
(3)	$\mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_8$
Bia(VII$_h$), $h > 0$	
(1)	$\mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_5$
(2)	$\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10} \oplus \mathcal{F}_{11}$
(3)	$\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{11}$
Bia(VIII)	
(1)	$\mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$
(2)	$\mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$
(3)	$\mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$
Bia(IX)	
(1)	$\mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$

Твърдение 6.3. *За многообразие* $(L, \varphi, \xi, \eta, g)$ *с асоциирана алгебра от* Bia(VI$_h$) *в случая (1) са в сила следните свойства:*

1) $(L, \varphi, \xi, \eta, g)$ *е плоско многообразие, точно когато* $h = 0$,
2) $(L, \varphi, \xi, \eta, g)$ *е изотропно косимплектично B-метрично многообразие, точно когато* $h = -\sqrt{2}$,
3) *Скаларната кривина и секционните кривини са неположителни,*
4) $(L, \varphi, \xi, \eta, g)$ *е $*$-скаларно плоско многообразие, т.е.* $\tau^* = 0$,
5) $(L, \varphi, \xi, \eta, g)$ *е айнщайново многообразие.*

Твърдение 6.4. *За многообразие* $(L, \varphi, \xi, \eta, g)$ *с асоциирана алгебра от* Bia(VI$_h$) *в случая (2) са в сила следните свойства:*

1) $(L, \varphi, \xi, \eta, g)$ *е плоско многообразие, точно когато* $h = 0$,
2) $(L, \varphi, \xi, \eta, g)$ *е изотропно косимплектично B-метрично многообразие, точно когато* $h = -\frac{\sqrt{5}}{5}$,
3) *Скаларната кривина и секционните кривини са неположителни,*
4) $(L, \varphi, \xi, \eta, g)$ *е $*$-скаларно плоско многообразие,*
5) $(L, \varphi, \xi, \eta, g)$ *е айнщайново многообразие.*

Твърдение 6.5. *За многообразие* $(L, \varphi, \xi, \eta, g)$ *с асоциирана алгебра от* Bia(VI$_h$) *в случая (3) са в сила следните свойства:*

1) *Квадратичната норма на* $\nabla\varphi$ *и скаларната кривина са положителни,*

2) $(L, \varphi, \xi, \eta, g)$ *е $*$-скаларно плоско многообразие,*
3) *Секционните кривини на φ-холоморфните площадки са положителни.*

Сега разглеждаме поотделно случаите (1), (2) и (3) от $\mathrm{Bia}(\mathrm{VII}_h)$ в Таблица 1, където $h \geq 0$, и формулираме следните твърдения.

Твърдение 6.6. *За многообразие $(L, \varphi, \xi, \eta, g)$ с асоциирана алгебра от $\mathrm{Bia}(\mathrm{VII}_h)$ в случая (1) са в сила следните свойства:*

1) $(L, \varphi, \xi, \eta, g)$ *е изотропно косимплектично B-метрично многообразие, точно когато $h = 1$,*
2) $(L, \varphi, \xi, \eta, g)$ *е скаларно плоско многообразие, точно когато $h = \frac{\sqrt{3}}{3}$,*
3) $(L, \varphi, \xi, \eta, g)$ *е $*$-скаларно плоско многообразие, точно когато $h = 0$,*
4) *Секционните кривини на φ-холоморфните площадки са отрицателни,*
5) *Секционните кривини на ξ-площадките са постоянни,*
6) $(L, \varphi, \xi, \eta, g)$ *е η-комплексно айнщайново многообразие.*

Твърдение 6.7. *За многообразие $(L, \varphi, \xi, \eta, g)$ с асоциирана алгебра от $\mathrm{Bia}(\mathrm{VII}_h)$ в случая (2) са в сила следните свойства:*

1) $(L, \varphi, \xi, \eta, g)$ *е изотропно косимплектично B-метрично многообразие, точно когато $h = 1$,*
2) $(L, \varphi, \xi, \eta, g)$ *е скаларно плоско многообразие, точно когато $h = \frac{\sqrt{3}}{3}$,*
3) $(L, \varphi, \xi, \eta, g)$ *е $*$-скаларно плоско многообразие,*
4) $(L, \varphi, \xi, \eta, g)$ *е хоризонтално плоско многообразие, т.е. $R|_H = 0$ за $H = \ker(\eta)$, точно когато $h = 1$,*
5) ρ^* *и $\tilde{g}$ са пропорционални върху H, като $\rho^*|_H = (h^2 - 1)\tilde{g}|_H$,*
6) $(L, \varphi, \xi, \eta, g)$ *е хоризонтално $*$-Ричи плоско многообразие, т.е. в сила е $\rho^*|_H = 0$, точно когато $h = 1$.*

Твърдение 6.8. *За многообразие $(L, \varphi, \xi, \eta, g)$ с асоциирана алгебра от $\mathrm{Bia}(\mathrm{VII}_h)$ в случая (3) са в сила следните свойства:*

1) $(L, \varphi, \xi, \eta, g)$ *е плоско многообразие, точно когато $h = 0$,*
2) *Квадратичната норма на $\nabla\varphi$ е положителна,*
3) $(L, \varphi, \xi, \eta, g)$ *е $*$-скаларно плоско многообразие,*
4) *Скаларната кривина и секционните кривини са неотрицателни,*
5) $(L, \varphi, \xi, \eta, g)$ *е айнщайново многообразие.*

$* * *$

Таблица 3

$\mathcal{F}_1$:	$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha b & \beta b \\ 0 & -\alpha a & -\beta a \end{pmatrix}$ $\mathrm{tr}A=\alpha b-\beta a$	$t=\begin{cases} \frac{e^{\mathrm{tr}A}-1}{\mathrm{tr}A}, & \mathrm{tr}A\neq 0 \\ 1, & \mathrm{tr}A=0 \end{cases}$ $u=0$
$\mathcal{F}_4$:	$A=\begin{pmatrix} 0 & -\alpha b & \alpha a \\ 0 & 0 & -\alpha c \\ 0 & \alpha c & 0 \end{pmatrix}$ $\mathrm{tr}A^2=-2\alpha^2c^2$	$t=\begin{cases} \frac{\sin\sqrt{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}A^2}}{\sqrt{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}A^2}}, & \mathrm{tr}A^2\neq 0 \\ 1, & \mathrm{tr}A=0 \end{cases}$ $u=\begin{cases} \frac{1-\cos\sqrt{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}A^2}}{\sqrt{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}A^2}}, & \mathrm{tr}A^2\neq 0 \\ 0, & \mathrm{tr}A=0 \end{cases}$
$\mathcal{F}_5$:	$A=\begin{pmatrix} 0 & \alpha a & \alpha b \\ 0 & -\alpha c & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha c \end{pmatrix}$ $\mathrm{tr}A=-2\alpha c$	$t=\begin{cases} \frac{e^{\frac{1}{2}\mathrm{tr}A}-1}{\frac{1}{2}\mathrm{tr}A}, & \mathrm{tr}A\neq 0 \\ 1, & \mathrm{tr}A=0 \end{cases}$ $u=0$
$\mathcal{F}_8$:	$A=\begin{pmatrix} 0 & \alpha b & \alpha a \\ -2\alpha b & 0 & -\alpha c \\ 2\alpha a & -\alpha c & 0 \end{pmatrix}$ $\mathrm{tr}A^2=2\alpha^2\Delta$ $\Delta=2a^2-2b^2+c^2$	$t=\begin{cases} -\frac{\sin\alpha\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{\alpha\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}, & \mathrm{tr}A^2<0 \\ 1, & \mathrm{tr}A^2=0 \\ \frac{\mathrm{sh}\,\alpha\sqrt{\Delta}}{\alpha\sqrt{\Delta}}, & \mathrm{tr}A^2>0 \end{cases}$ $u=\begin{cases} \frac{\cos\alpha\sqrt{\lvert\Delta\rvert}-1}{\alpha^2\Delta}, & \mathrm{tr}A^2<0 \\ \frac{1}{2}, & \mathrm{tr}A^2=0 \\ \frac{\mathrm{ch}\,\alpha\sqrt{\Delta}-1}{\alpha^2\Delta}, & \mathrm{tr}A^2>0 \end{cases}$
$\mathcal{F}_9$:	$A=\begin{pmatrix} 0 & \alpha a & -\alpha b \\ 0 & -\alpha c & 0 \\ 0 & 0 & \alpha c \end{pmatrix}$ $\mathrm{tr}A^2=2\alpha^2c^2$	$t=\begin{cases} \frac{\mathrm{sh}\sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{tr}A^2}}{\sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{tr}A^2}}, & \mathrm{tr}A^2\neq 0 \\ 1, & \mathrm{tr}A^2=0 \end{cases}$ $u=\begin{cases} \frac{\mathrm{ch}\sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{tr}A^2}-1}{\sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{tr}A^2}}, & \mathrm{tr}A^2\neq 0 \\ 0, & \mathrm{tr}A^2=0 \end{cases}$
$\mathcal{F}_{10}$:	$A=\begin{pmatrix} 0 & \alpha b & \alpha a \\ 0 & 0 & -\alpha c \\ 0 & -\alpha c & 0 \end{pmatrix}$ $\mathrm{tr}A^2=2\alpha^2c^2$	$t=\begin{cases} \frac{\mathrm{sh}\,\alpha c}{\alpha c}, & \mathrm{tr}A^2\neq 0 \\ 1, & \mathrm{tr}A^2=0 \end{cases}$ $u=\begin{cases} \frac{\mathrm{ch}\,\alpha c}{\alpha^2c^2}, & \mathrm{tr}A^2\neq 0 \\ 0, & \mathrm{tr}A^2=0 \end{cases}$
$\mathcal{F}_{11}$:	$A=\begin{pmatrix} \alpha a+\beta b & 0 & 0 \\ -\alpha c & 0 & 0 \\ -\beta c & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\mathrm{tr}A=\alpha a+\beta b$	$t=\begin{cases} \frac{e^{-\mathrm{tr}A}-1}{\mathrm{tr}A}, & \mathrm{tr}A\neq 0 \\ 1, & \mathrm{tr}A=0 \end{cases}$ $u=0$

В **§7** изследваме тримерни групи на Ли, разгледани като почти контактни B-метрични многообразия. Даваме явно матрично представяне на група на Ли, разгледана като многообразие от всеки основен клас на Ганчев-Михова-Грибачев.

Нека (L,φ,ξ,η,g) е тримерно почти контактно B-метрично многообразие, където L е група на Ли с асоциирана алгебра на Ли $\mathfrak{g}$. В Теорема 5.2 дадохме вида на $\mathfrak{g}$ за такова многообразие от всеки клас $\mathcal{F}_s$ $(s=1,4,5,8,9,10,11)$. В следната теорема даваме явно матрично представяне на група на Ли G, изоморфна на дадената група на Ли L, със същата асоциирана алгебра на Ли $\mathfrak{g}$ във всеки клас $\mathcal{F}_s$.

Теорема 7.1. *Ако* $(L, \varphi, \xi, \eta, g)$ *е тримерно почти контактно B-метрично многообразие, принадлежащо на основен клас* $\mathcal{F}_s$*, а* G *е 1-свързаната група на Ли, изоморфна на* L*, със същата асоциирана алгебра на Ли* $\mathfrak{g}$*, тогава* G *има матрично представяне* $e^A = E + tA + uA^2$*, където* E *е единичната матрица, а* A *е матричното представяне на* $\mathfrak{g}$*. В Таблица 3 са дадени* A*,* t*, и за различните класове* $\mathcal{F}_s$*, където* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *и* α*,* β *са въведени в Теорема 5.2.*

$* * *$

Научни приноси на дисертационния труд

- Определянето на компонентите на фундаменталния тензор F, които са проекции в подпространствата, съответни на основните класове на класификацията на Ганчев-Михова-Грибачев.
- Конструирането и геометричното характеризиране на тримерни почти контактни В-метрични многообразия като хиперповърхнини на четиримерните псевдоевклидови пространства $\mathbb{R}^{3,1}$ и $\mathbb{R}^{2,2}$.
- Конструирането по два метода на тримерни почти контактни В-метрични многообразия като произведение на реалната права и двумерно комплексно многообразие с норденова метрика и тяхното геометрично характеризиране.
- Конструирането на почти контактно В-метрично многообразие върху тримерна група на Ли и установяването на необходими и достатъчни условия за съответната алгебра на Ли, при които полученото многообразие да принадлежи на основен клас от използваната класификация, както и получаването на някои геометрични характеристики на това многообразие.
- Установяването на връзка между класовете от класификацията на Бианки на тримерните алгебри на Ли и класовете от класификацията на Ганчев-Михова-Грибачев и намирането на някои геометрични свойства на многообразията, чиито алгебри на Ли са от клас на Бианки, зависещ от реален параметър.
- Намирането на явно матрично представяне на тримерна група на Ли, разгледана като многообразие от всеки основен клас на класификацията на Ганчев-Михова-Грибачев.

* * *

Библиография

[1] М. Манев. *Примери на някои почти контактни B-метрични многообразия от някои специални класове*, Математика и матем. образование. Доклади на XXVI Пролетна конференция на СМБ, Пловдив (1997), 153–160.

[2] М. Манев. *Върху конформната геометрия на почти контактни многообразия с B-метрика*, Дисертация за ОНС Доктор, Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“, Пловдив (1998).

[3] А.П. Норден. *Об одном классе четырёхмерных A-пространств*, Известия ВУЗ – Матем. т. 4 (1960), 145–157.

[4] А.П. Норден. *О структуре связаности на многообразии прямых неевклидова пространства*, Известия ВУЗ – Матем. т. 12 (1972), 84–94.

[5] V. Alexiev, G. Ganchev. *On the classification of almost contact metric manifolds*, Math. and Educ. in Math., Proc. of 15th Spring Conf. of UBM, Sunny Beach (1986), 155–161.

[6] L. Bianchi. *Sugli spazi a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti*, Memorie di Matematica e di Fisica della Societa Italiana delle Scienze, Serie Terza, vol. 11 (1898), 267–352.

[7] L. Bianchi. *On the three-dimensional spaces which admit a continuous group of motions*, Gen. Rel. Grav. vol. 33 (2001), 2171–2253.

[8] D.E. Blair. *Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds*, Progress in Mathematics 203, Birkhäuser, Boston (2002).

[9] D.E. Blair, T. Koufogiorgos, R. Sharma. *A classification of 3-dimensional contact metric manifolds with $Q\phi = \phi Q$*, Kodai Math. J. vol. 13 (1990), 391–401.

[10] C.P. Boyer, K. Galicki, P. Matzeu. *On η-Einstein Sasakian geometry*, Commun. Math. Phys. vol. 262 (2006), 177–208.

[11] E. Bonome, R. Castro, L. M. Hervella. *On an almost complex structure with Norden metric on the tangent bundle of an almost Hermitian manifold*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie (N.S.), vol. 33 (1989), 309–318.

[12] E. Bonome, R. Castro, L. M. Hervella, Y. Matsushita. *Construction of Norden structure on neutral four-manifolds*, JP J. Geom. Topol., vol. 5 (2005), 121–140.

[13] A. Borowiec, M. Francaviglia, I. Volovich. *Anti-Kahlerian manifolds*, Differ. Geom. Appl., vol. 12 (2000), 281–289.

[14] R. Castro, L. M. Hervella, E. García-Río. *Some examples of almost complex manifolds with Norden metric*, Riv. Math. Univ. Parma, vol. 15 (1989), 133–141.

[15] B.Y. Chen, J. Van der Veken. *Complete classification of parallel surfaces in 4-dimensional Lorentz space forms*, Tôhoku Math. J. vol. 61 (2009), 1–40.

[16] L. Cordero, M. Fernández, M. de Léon. *Some examples of compact complex manifolds with Norden metric*, Volumen Homenaje N. Hayek Calil, Univ. de La Laguna, España (1990), 85–94.

[17] J.B. Etnyre, R. Komendarczyk, P. Massot. *Tightness in contact metric 3–manifolds*, Invent. Math. vol. 188, no.3 (2012), 621-657.

[18] G. Ganchev, A. Borisov. *Note on the almost complex manifolds with a Norden metric*, Compt. rend. Acad. bulg. Sci. vol. 39 (1986), 31–34.

[19] G. Ganchev, S. Ivanov. *Characteristic curvatures on complex Riemannian manifolds*, Riv. Mat. Univ. Parma, vol. 5 (1992), 155–162.

[20] G. Ganchev, V. Mihova, K. Gribachev. *Almost contact manifolds with B-metric*, Math. Balk. vol. 7, no. 3-4 (1993), 261–276.

[21] R. Gilmore. *Lie Groups, Lie Algebras and Some of Their Applications*, John Wiley & Sons, Inc., New York (1974).

[22] M. Glas, P. Konstantis, A. Krause, F. Loose. *Bianchi's classification of 3-dimensional Lie algebras revisited*, (2014), arXiv:1403.2278.

[23] K. Gribachev, D. Mekerov, G. Djelepov. *Generalized B-manifolds*, Compt. rend. Acad. bulg. Sci. vol. 38 (1985), 299–302.

[24] S. Ivanov, H. Manev, M. Manev. *Sasaki-like almost contact complex Riemannian manifolds*, (2014), arXiv:1402.5426.

[25] O. Kowalski. *Generalized Symmetric Spaces*, Lecture Notes in Mathematics, 805 (A. Dold, B. Eckmann, eds.), Springer, Heidelberg (1980).

[26] M. Ivanova. *Lie groups as 3-dimensional almost contact B-metric manifolds in the main vertical classes*. International Scientific On-line Journal "Science & Technologies". vol. 5, no. 3 (2015), 73–78.

[27] M. Ivanova. *Lie groups as 3-dimensional almost contact B-metric manifolds in two main classes*. International Scientific On-line Journal "Science & Technologies". vol. 5, no. 3 (2015), 66–72.

[28] T. Koufogiorgos, M. Markellos, V.J. Papantoniou. *The harmonicity of the reeb vector field on contact metric 3-manifolds*. Pacific. J. Math. vol. 234, no. 2 (2008), 325–344.

[29] T. Koufogiorgos, M. Markellos, V.J. Papantoniou. *The (κ,μ,ν)-contact metric manifolds and their classification in the 3-dimensional case*. Differential Geom. Appl., Proc. Conf. in Honour of Leonhard Euler, Olomouc, August 2007. (2008), 293–303.

[30] T. Koufogiorgos, C. Tsichlias. *Three dimensional contact metric manifolds with vanishing Jacobi operator*. Beitr. Algebra Geom. vol. 50, no. 2 (2009), 563–573.

[31] H. Manev. *On the structure tensors of almost contact B-metric manifolds*, Filomat. vol. 29, no. 3 (2015), 427–436.

[32] H. Manev. *Almost contact B-metric structures and the Bianchi classification of the three-dimensional Lie algebras*, Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Inform. vol. 102 (2015), 133–144.

[33] H. Manev. *Matrix Lie groups as 3-dimensional almost contact B-metric manifolds*, Facta Univ. Ser. Math. Inform. vol. 30, no. 3 (2015), 341–351.

[34] H. Manev. *Space-like and time-like hyperspheres in real pseudo-Riemannian 4-spaces with almost contact B-metric structures*, Novi Sad J. Math. (in press) arXiv:1504.00267.

[35] H. Manev. *Almost contact B-metric manifolds as extensions of a 2-dimensional space-form*, Acta Univ. Palack. Olomuc. Fac. Rerum Natur. Math. (in press) arXiv:1506.05 712.

[36] H. Manev, D. Mekerov. *Lie groups as 3-dimensional almost contact B-metric manifolds*, J. Geom. vol. 106 (2015), 229–242.

[37] M. Manev. *Properties of curvature tensors on almost contact manifolds with B-metric*, Proc. of Jubilee Sci. Session of Vasil Levski Higher Mil. School, Veliko Tarnovo. vol. 27 (1993), 221–227.

[38] M. Manev. *Examples of almost contact manifolds with B-metric, derived from almost complex manifolds with B-metric*, Plovdiv Univ. Sci. Works – Math. vol. 32 (1995), 61–66.

[39] M. Manev. *Contactly conformal transformations of general type of almost contact manifolds with B-metric. Applications*, Math. Balkanica (N.S.). vol. 11 (1997), 347–357.

[40] M. Manev. *Almost contact B-metric hypersurfaces of Kählerian manifolds with B-metric*, In: Perspectives of Complex Analysis, Differential Geometry and Mathematical Physics, eds. St. Dimiev and K. Sekigawa, World Sci. Publ., Singapore (2001), 159–170.

[41] M. Manev. *On the curvature properties of almost contact B-metric hypersurfaces of Kählerian manifolds with B-metric*, Plovdiv Univ. Sci. Works – Math. vol. 33 (2001), 61–72.

[42] M. Manev. *Classes of real time-like hypersurfaces of a Kähler manifold with B-metric*, J. Geom. vol. 75 (2002), 113–122.

[43] M. Manev. *Classes of real isotropic hypersurfaces of a Kähler manifold with B-metric*, Compt. rend. Acad. bulg. Sci. vol. 55 (2002), 27–32.

[44] M. Manev. *A connection with totally skew-symmetric torsion on almost contact manifolds with B-metric*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. vol. 9, no. 5 (2012), 1250044 (20 pages)

[45] M. Manev. *Curvature properties on some classes of almost contact manifolds with B-metric*, Compt. rend. Acad. bulg. Sci. vol. 65, no. 3 (2012), 283–290.

[46] M. Manev, K. Gribachev. *Contactly conformal transformations of almost contact manifolds with metric*, Serdica Math. J. vol. 19 (1993), 287–299.

[47] M. Manev, K. Gribachev. *Conformally invariant tensors on almost contact manifolds with B-metric*, Serdica Math. J. vol. 20 (1994), 133–147.

[48] M. Manev, M. Ivanova. *A classification of the torsion tensors on almost contact manifolds with B-metric*, Cent. Eur. J. Math. vol. 12, no. 10 (2014), 1416–1432.

[49] M. Manev, M. Ivanova. *A natural connection on some classes of almost contact manifolds with B-metric*, Compt. rend. Acad. bulg. Sci. vol. 65, no. 4 (2012), 429–436.

[50] M. Manev, M. Ivanova. *Canonical-type connection on almost contact manifolds with B-metric*, Ann. Global Anal. Geom. vol. 43, no. 4 (2013), 397–408.

[51] M. Manev, M. Ivanova. *Natural connections with torsion expressed by the metric tensors on almost contact manifolds with B-metric*, Plovdiv Univ. Sci. Works – Math. vol. 38, no. 3 (2011), 47–58.

[52] M. Manev, M. Ivanova. *Almost contact B-metric manifolds with curvature tensor of Kähler type*, Plovdiv Univ. Sci. Works – Math. vol. 39, no. 3 (2012), 57–69.

[53] M. Manev, G. Nakova. *Curvature tensors on hypersurfaces of a Kähler manifold with B-metric*, Math. Educ. Math., Proc. of 32nd Spring Conf. of UBM, Sunny Beach (2003), 186–191.

[54] M. Manev, G. Nakova. *Curvature properties on some three-dimensional almost contact B-metric manifolds*, Plovdiv Univ. Sci. Works – Math. vol. 34 (2004), 51–60.

[55] M. Manev, M. Teofilova. *On the curvature properties of real time-like hypersurfaces of a Kähler manifold with Norden metric* In: Trends in Differential Geometry, Complex Analysis and Mathematical Physics, eds. K. Sekigawa, V. Gerdjikov and S. Dimiev, World Sci. Publ., Singapore (2009), 174–184.

[56] D. Mekerov, M. Manev. *On the geometry of quasi-Kähler manifolds with Norden metric*, Nihonkai Math. J. vol. 16 (2005), 89–93.

[57] G. Nakova. *An example of Lorentzian submanifold of 5-dimensional almost contact manifold with B-metric*, Proc. of Jubilee Sci. Session of Vasil Levski Higher Mil. School, Veliko Tarnovo (1998), 59–65.

[58] G. Nakova. *Four-dimensional submanifolds of seven-dimensional almost contact manifolds with B-metric*, Aspects of Complex Analysis, Diff. Geometry, Math. Physics and Applications, World Sci. Publ., Singapore (1999), 148–159.

[59] G. Nakova. *Some remarks on the integrability conditions for almost contact manifolds with B-metric*, Plovdiv Univ. Sci. Works – Math. vol. 33 (2001), 87–94.

[60] G. Nakova. *Curvature tensors in the basic classes of real isotropic hypersurfaces of a Kaehler manifold with B-metric*, Trends in Complex Analysis, Differential Geometry

and Mathematical Physics, eds. S. Dimiev and K. Sekigawa, World Scientific, Singapore (2003), 159–167.
[61] G. Nakova. *Curvature tensors on almost contact manifolds with B-metric*, Trends in Complex Analysis, Differential Geometry and Mathematical Physics, eds. S. Dimiev and K. Sekigawa, World Scientific, Singapore (2003), 145–158.
[62] G. Nakova. *Some submanifolds of almost complex manifolds with B-metric of codimension two*, Math. Educ. Math., Proc. of 33th Spring Conf. of UBM, Borovets (2004), 162–166.
[63] G. Nakova, K. Gribachev. *One classification of almost contact manifolds with B-metric*, Proc. of Jubilee Sci. Session of Vasil Levski Higher Mil. School, Veliko Tarnovo. vol. 27 (1993), 208–214.
[64] G. Nakova, K. Gribachev. *On the Lorentzian submanifolds of almost contact manifold with B-metric of dimension 5*, Proc. of Jubilee Sci. Session of Vasil Levski Higher Mil. School, Veliko Tarnovo (1997), 56–62.
[65] G. Nakova, K. Gribachev. *Submanifolds of some almost contact manifolds with B-metric with codimension two. I*, Math. Balkanica. vol. 11 (1997), 255–267.
[66] G. Nakova, K. Gribachev. *Submanifolds of some almost contact manifolds with B-metric with codimension two. II*, Math. Balkanica. vol. 12 (1998), 93–108.
[67] G. Nakova, M. Manev. *Curvature tensors on some five-dimensional almost contact B-metric manifolds*, Math. Educ. Math., Proc. of 32nd Spring Conf. of UBM, Sunny Beach (2003), 192–197.
[68] G. Nakova, M. Manev. *Curvature properties on some three-dimensional almost contact manifolds with B-metric, II*, Proc. 5th Intern. Conf. Geometry, Integrability & Quantization V, eds. I.M. Mladenov, A.C. Hirshfeld, SOFTEX, Sofia (2004), 169–177.
[69] Z. Olszak. *On almost cosymplectic manifolds*, Kodai Math. J. vol. 4, no. 2 (1981), 239–250.
[70] Z. Olszak. *On almost complex structures with Norden metrics on tangent bundles*, Period. Math. Hung., vol. 51 (2005), 59–74.
[71] V. Oproiu, N. Papaghiuc. *An anti-Kählerian Einstein structure on the tangent bundle of a space form*, Colloq. Math., vol. 103 (2005), 41–46.
[72] S. Sasaki. *On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure I*, Tohoku Math. J. vol. 12 (1960), 459–476.
[73] A. Singh, S. Singh. *On an almost complex manifold with Norden metric*, Acta Cienc. Indica Math., vol. 21 (1995), 478–482.
[74] K. Słuka. *On the curvature of Kähler-Norden manifolds*, J. Geom. Phys., vol. 54 (2005), 131–145.
[75] N. Soare. *Remarks on submanifolds of an almost complex manifold with Norden metric*, An. Univ. Oradea, Fasc. Mat., vol. 8 (2000–2001), 47–54.
[76] M. Teofilova. *On a class almost contact manifolds with Norden metric*, In: Research and Education in Mathematics, Informatics and their Applications – REMIA 2010, Proc. Anniv. Intern. Conf., Plovdiv, Bulgaria. (2010), 217–223
[77] M. Teofilova. *Linear connections on normal almost contact manifolds with Norden metric*, In: Research and Education in Mathematics, Informatics and their Applications – REMIA 2010, Proc. Anniv. Intern. Conf., Plovdiv, Bulgaria. (2010), 209–216.
[78] K. Yano, M. Kon. *Structures on manifolds*, Word Scientific (1976), 601–612.

* * *

Благодарности

Изказвам най-искрена благодарност на проф. д-р Димитър Мекеров за това, че като мой научен ръководител ме въведе в проблематиката на съвременната диференциална геометрия, както и за подкрепата, ценните съвети и напътствията при разработването и оформянето на настоящата дисертация.

Благодаря и на доц. д-р Костадин Грибачев за идеите, подкрепата и ценните съвети.

Признателен съм на всички колеги от катедра „Алгебра и геометрия“ на Факултета по математика и информатика при Пловдивския университет „Паисий Хилендарски“ за тяхната подкрепа.

Благодаря на специалистите, дали препоръки при предварителното обсъждане на дисертационния труд и допринесли за неговото подобрение.

* * *