

РЕЦЕНЗИЯ

от д-р Ангел Борисов Дишлиев, професор в ХТМУ-София

на дисертационен труд за присъждане на образователната и научна степен „доктор“

Област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика;

Професионално направление: 4.5. Математика;

Докторска програма: Математически анализ;

Автор на дисертационния труд: Мария Тонкова Василева, редовен докторант към катедра „Математически анализ“, Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“ (ПУ);

Тема: Ускорена сходимост на фамилии от итерационни методи за едновременна апроксимация на нули на полиноми;

Научен ръководител: проф. д.м.н. Петко Димитров Проинов - ПУ

При изготвяне на моята рецензия ще се придържам към образеца, представен на страницата на ПУ.

1. Общо описание на представените материали

Със заповед № Р33-408 от 12.02. 2016 г. на Ректора на Пловдивския университет „Паисий Хилендарски“ съм определен за член на научното жури за осигуряване на процедура за защита на дисертационен труд на тема „Ускорена сходимост на фамилии от итерационни методи за едновременна апроксимация на нули на полиноми“ за придобиване на образователната и научна степен „доктор“ в област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5. Математика, докторска програма Математически анализ. Автор на дисертационния труд е Мария Тонкова Василева – докторантка в редовна форма на обучение към катедра „Математически анализ“, с научен ръководител проф. д.м.н. Петко Димитров Проинов от Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“.

Представеният от дисертантката комплект материали на хартиен носител е в съответствие с чл. 36 (1) от Правилника за развитие на академичния състав на ПУ:

1. Молба за откриване на процедура за придобиване на образователната и научна степен „доктор“;
2. Автобиография по европейски формат;
3. Диплома за образователно-квалификационна степен „магистър“: серия ПУ-2012, № 044408 – копие;
4. Протокол № 10/07.12. 2015 г. от катедрен съвет (КС) за откриване на процедура за предварително обсъждане на дисертационен труд – препис–извлечение;

5. Заповед № РЗЗ-5725/14.12. 2015 г. за разширяване на КС във връзка с предварителното обсъждане на дисертационния труд;
6. Протокол № 01/05.01. 2016 г. от КС за предварително обсъждане на дисертационен труд – препис–извлечение;
7. Декларация за оригиналност и достоверност на приложените документи;
8. Справка за спазване на изискванията на Факултета по математика и информатика (ФМИ), съгласно чл. 36 (1), т. 9 от Правилника за развитие на академичния състав на ПУ за придобиване на образователната и научна степен „доктор“;
9. Списък на научните публикации на докторантката;
10. Копия на публикациите по темата на дисертационния труд;
11. Заповед № РЗЗ-422/04.02. 2013 г. за зачисляване в редовна докторантура;
12. Заповед № 79/22.10. 2013 г. за назначаване на комисия за провеждане на изпит за докторантски минимум;
13. Протокол от 07.11.2013 г. за успешно издържан изпит за докторантски минимум;
14. Заповед № РЗЗ-1188/30.03. 2015 г. за промяна на темата на дисертационния труд;
15. Заповед № РЗЗ-81/11.01. 2016 г. за отчисляване от докторантура с право на защита;
16. Служебна бележка изх. № НПД 732/25.11. 2015 г. от поделение НПД при ПУ за участие в научноизследователски проекти;
17. Автореферат;
18. Дисертационен труд.

Докторантката е приложила към документите 3 бр. публикации.

2. Кратки биографични данни

Мария Василева е завършила трите степени на висшето си образование в ПУ. От 2007 г. до 2011 г. е следвала и завършила образователно-квалификационната степен „бакалавър“ по специалността „Информатика“. През 2012 г. завършва двусеместриална магистърска програма по специалността „Приложна математика“ с отличен успех 6,00. През периода от 01.03. 2013 г. до 01.01. 2016 г. е редовен докторант в докторска програма „Математически анализ“. През последните няколко години е хоноруван асистент към ФМИ, като е преподавала на студенти от бакалавърска степен на образование. По-точно водила е упражнения по основни дисциплини от математическия анализ и математическото моделиране.

Автор е на три публикации. Участвала е в работата на три конференции, проведени в България, където е изнесла научни доклади по темата на дисертацията. Участвала е в три проекта с регионално значение към звено „Научна и приложна дейност“ на ПУ на теми, свързани с повишаване на качеството на научните изследвания и методика на обучението по математика и информатика.

3. Актуалност на тематиката и целесъобразност на поставените цели и задачи

Изследванията в дисертационния труд са посветени на вечно актуалните и класически проблеми за намиране нулите на полиноми. Изследват се итерационни методи за едновременно апроксимиране на тези нули. И тук, както в редица тематично подобни изследвания, се отделя особено внимание на два важни въпроса:

- Намиране на „подходящи“ начални точки или по-точно - установяване на общи условия, които тези точки трябва да изпълняват. Ще уточним, че стартирането на итерационния процес от коя да е „подходяща“ начална точка гарантирано води до коректно намиране на сходяща редица от приближения към търсената точка;
- Оценка на грешката и уточняване на ред на сходимост на итерационния процес.

Изследванията в разглежданата от дисертантката научна тема стартират в края на 19 век (1891 г.) с фундаменталната работа на К. Weierstrass, където за първи път е представена сходяща рекурентна процедура (от втори ред на сходимост) за намиране на всички корени на полином, който притежава еднократни комплексни корени. Оттогава са регистрирани редица итерационни методи или модификации на известни такива, при които се подобряват различни елементи на итерационната процедура. От тези елементи най-важни са началното множество и „скоростта“ или по-точно редът на сходимост. Тук задължително трябва да посочим итерационните методи на L. Ehrlich (1967) и A. Nurein (1977) с по-висок ред на сходимост. Със задоволство трябва да припомним, че българските математици имат сериозен принос в теорията на едновременната апроксимация на всички нули на полиноми: К. Дочев, Бл. Сендов, А. Андреев, Н. Кюркчиев, М. Петков, П. Проинов и др. Както е отбелязала докторантката, през последните двадесетина години са публикувани повече от десет монографии, посветени на този интересен и важен въпрос както от математическа гледна точка, така и с практическа значимост. Определено считам, че дисертационната тема е актуална.

4. Познание на проблема

Докторантката е добре запозната с основните резултати, посветени на изследвания проблем. По темата са публикувани стотици научни трудове, от които повече от дузина монографии. Считам, че Мария Василева познава съвременното състояние, степента на развитие, нерешените задачи, специфичните трудности и др. подобни проблеми, които възникват при изучаването на итерационните методи за намиране на нулите на полиноми. Убеден съм, че тя може да поставя и разрешава нови математически задачи от посоченото научно направление. Сигурен съм, че тя е усвоила идеите, формулирани и разработени в основополагащите съчинения, изследващи тази постоянно актуална тема. Вижда се, че нейните познания върху научните работите на българските учени по темата се отличават с висока степен на дълбочина и пълнота. От направения от М. Василева в увода общ анализ на предходните изследвания по въпросите на дисертационния труд и съответната цитирана литература е ясно, че тя познава отлично трайно установените ключови твърдения, които тя успешно прилага и обобщава в своите изследвания.

5. Методика на изследването

Методите на реалния и функционалния анализ са единствените, с помощта на които може да се постигнат формулираните цели и решат конкретните задачи в дисертационния труд. Точно те са използвани в работата на докторантката върху поставената тема. По-конкретно, основният математически апарат на изследванията в дисертацията е теорията на сходимост на итерационни процеси от типа на Пикар:

$$x^{k+1} = Tx^k, \quad k = 0, 1, \dots,$$

разработена както от класиците на този продуктивен метод, така и в няколко блестящи труда на научния ѝ ръководител. Тук операторът T е дефиниран в конусно метрично пространство X над телесно векторно пространство. В използваната съвременна теория основна роля играе функцията на началните условия E и съответната ѝ контролна функция φ . Нека операторът $T: D \rightarrow X$, където $D \subset X$. Нека функцията $E (E: D \rightarrow R^+)$ удовлетворява условието:

$$(\exists \varphi: J \rightarrow J, J \subset R^+): (E(Tx) \leq \varphi(E(x))) \text{ при } x \in D, Tx \in D \text{ и } E(x) \in J.$$

Тогава E се нарича функция на началните условия на оператора T , а φ контролна функция. С помощта на тези функции са формулирани и доказани няколко теореми за сходимост на итерационни процеси и е получена оценка на съответните грешки на приближенията към векторния прост корен на даден полином.

6. Характеристика и оценка на дисертационния труд

Представеният дисертационен труд е структуриран в увод, три глави, резюме на приносите, списък на публикациите по дисертацията, апробация на получените резултати, декларация за оригиналност и библиография от 116 заглавия. Дисертацията е поместена на 124 страници. Трудът е оформен грижливо и внимателно. Ясно са подчертани произхода и авторите на описаните резултати. Това дава възможност точно да се преценят заслугите на докторантката. Материалът е представен в логична последователност, която допълнително облекчава четенето, запознаването и вникването в идеите на дисертационния труд. Самият запис на дефинициите, теоремите и доказателствата е професионален.

Основни обекти на изследване в дисертацията са две изброими фамилии от итерационни методи за едновременно намиране на нулите на полиноми с прости корени от степен по-висока от 2. Тези фамилии от полиноми са конструирани от българските математици Н. Кюркчиев и А. Андреев.

Първата фамилия от итерационни процедури е обобщение на методите на К. Weierstrass и А. Nurein. Нека f е полином от степен $n > 2$ над алгебрично затворено поле K , притежаващ векторен прост корен $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in K^n$, т.е.

$$f(t) = a_0 \prod_{i=1, \dots, n} (t - \xi_i), \quad t \in K,$$

където $\xi_i \neq \xi_j$ при $i \neq j$ и $a_0 \in K$, $a_0 \neq 0$, е старшият коефициент на полинома. Нека N е произволно естествено число. Итерационната процедура (за всяко естествено число N) има вида

$$x^{k+1} = T^N x^k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

където операторът $T^N : K^n \rightarrow K^n$, $T^N x = (T_1^N x, \dots, T_n^N x)$, $T^0 x = x$ и

$$T_i^{N+1} x = x_i - \frac{f(x_i)}{a_0 \prod_{j \neq i} (x_i - T_j^N x)}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Ясно е, че (при $N = 1$) операторът T^1 съвпада с оператора на К. Weierstrass, а (при $N = 2$) операторът T^2 съвпада с оператора на А. Nurein. Редът на сходимост на оператора T^N е с единица по-висок от неговия номер.

Втората фамилия от итерационни процедури е обобщение на метода на L. Ehrlich. Тук разликата с горната фамилия от итерационни процедури е в координатите на операторите $T^N x = (T_1^N x, \dots, T_n^N x)$, $T^0 x = x$. Имаме

$$T_i^{N+1} x = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i) - f(x_i) \sum_{j \neq i} (x_i - T_j^N x)^{-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Отново се забелязва, че (при $N = 1$) операторът T^1 съвпада с оператора на L. Ehrlich.

Основните цели на дисертационния труд са намиране на начални условия, гарантиращи сходимост на итерационните методи от формулираните по-горе две фамилии от итерационни методи и намиране на оценки на грешките при тези методи. Първите резултати, посветени на поставените по-горе цели, са на Н. Кюркчиев и А. Андреев. В дисертацията споменатите резултати се подобряват. В зависимост от връзката (близостта) между началното условие x^0 и векторния корен ξ на разглеждания полином са въведени три типа начални условия. Най-напред ще представим ограниченията за първия тип:

$$\left\| \frac{x^0 - \xi}{d(\xi)} \right\|_p \leq R \quad \text{или} \quad \frac{\|x^0 - \xi\|_p}{\delta(\xi)} \leq R, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad (4)$$

където функциите

$$d(x) = (d_1(x), \dots, d_n(x)), \quad d_i(x) = \min\{|x_i - x_j|, j \neq i\}, \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

$$\delta(x) = \min\{|x_i - x_j|, j \neq i\}.$$

Ще посочим няколко важни достижения във втора глава на дисертацията. Тук резултатите са посветени на итерационните процедури от вида (2). Една от основните теореми в тази глава разглежда произволен полином f от степен $n > 2$ над нормирано алгебрично затворено поле K , притежаващ векторен прост корен ξ . Разглежда се произволна итерационна процедура от вида (1), която е от типа на К. Weierstrass, т.е. валидно е дефиниционното равенство (2). Ще отбележим, че в дефиниционното равенство N е параметър на фамилията и е произволно естествено число. Нека началното условие x^0 удовлетворява първото неравенство от (4) с подходяща константа R . Тогава итерационната процедура на метода от фамилията с параметър N е коректно дефинирана и получената редица е сходяща към корена ξ с оценка на сходимостта

$$\|x^k - \xi\| < \lambda^{\frac{(N+1)^k - 1}{N}} \|x^0 - \xi\|, \quad k = 1, 2, \dots,$$

където константата λ е подходящо дефинирана. Теоремата, съдържаща горните твърдения, (сравнена с аналогичен резултат на Н. Кюркчиев и А. Андреев) е с по-широка допустима начална област на сходимост и по-фина оценка на грешката. В частност при $N = 1$ тази теорема дублира резултат на научния ръководител на докторантката. В същата втора глава се разглеждат и начални точки на итерационните методи от типа на К. Weierstrass, които са от така наречените втори и трети тип. За тези начални точки са изпълнени съответно ограниченията:

$$\left\| \frac{x^0 - \xi}{d(x^0)} \right\|_p \leq R \quad \text{или} \quad \frac{\|x^0 - \xi\|_p}{\delta(x^0)} \leq R; \quad (5)$$

$$\left\| \frac{W_f(x^0)}{d(x^0)} \right\|_p \leq R \quad \text{или} \quad \frac{\|W_f(x^0)\|_p}{\delta(x^0)} \leq R, \quad (6)$$

където $1 \leq p \leq \infty$ и W_f е известният оператор на К. Weierstrass:

$$W_f(x) = (W_1(x), \dots, W_n(x)), \quad W_i(x) = \frac{f(x_i)}{a_0 \prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Чрез втория тип начални условия във втора глава е посочена област, в която итерационната процедура на произволен метод (получаващ се при някое естествено число N) от фамилията на К. Weierstrass е коректно дефинирана. Намерени са съответните оценки на грешките. Резултатите обобщават резултат на проф. П. Проинов за случая $N = 1$.

Пак във втора глава е изследван въпросът за полулокална сходимост на методите от типа на К. Weierstrass. Функцията на началните условия е от третия тип и се задава с равенството

$$E_f(x) = \left\| \frac{W_f(x)}{d(x)} \right\|_p, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

При направените изследвания се използват съществено предишни резултати на проф. П. Проинов, отнасящи се до връзката между локални и полулокални методи за сходимост от разглеждания тип. Така от предходните резултати в дисертацията за локална сходимост при начални условия от втори тип се достига до условия, които гарантират: 1) разглежданият полином да притежава прости нули; 2) съответните итерационни процедури на фамилията от методи (от типа на К. Weierstrass) да са коректни и сходящи към векторния прост корен ξ на полинома f . Редът на сходимост е $N + 1$, където N е номерът на метода от разглежданата фамилия. Оценката на грешката е от вида

$$\|x^k - \xi\| < \alpha(E_f(x^k)) \|W_f(x^k)\|, \quad k = 1, 2, \dots,$$

където функцията α е подходящо дефинирана.

В последния параграф на втора глава са разгледани няколко числови примера, които дават представа за практическото приложение на достигнатите теоретични резултати. Например, получените от авторката теореми може да се използват за доказване, че: 1) даден полином притежава прости нули; 2) даден итерационен метод от фамилията е коректно дефиниран при фиксирано начално условие; 3) оценка на грешката и др. Някои от числовите примери са интересни от гледна точка на това, че се отхвърлят хипотези на други изследователи.

Резултатите от трета глава са аналогични на разгледаните по-горе твърдения от втора глава, поради което няма да се спирам на тяхното описание. Само ще отбележа, че те се отнасят за втората фамилия от итерационни методи за едновременно намиране на корените на полиноми (методи от типа на L. Ehrlich).

Накрая на тази точка, ще отбележа, че направената тук характеристика и анализ на достиженията в дисертационния труд не могат да претендират за пълнота и изчерпателност. Постигнатите резултати са значително повече. По-скоро, целта на направеното изложение в тази точка е да се осветят основните достижения на док-

торантката, представени в дисертацията, техните качества и мястото, което заемат в научните изследвания по темата.

7. Приноси и значимост на разработката за науката и практиката

Изследванията в дисертационния труд отговарят на следните характеристики:

1. Получените резултати имат теоретичен характер. Продължено е развитието на теорията, съдържаща се в няколко водещи научни труда в областта на итерационните методи за едновременно апроксимиране на корените на полиноми. Резултатите на докторантката в действителност обобщават, подобряват и допълват известни твърдения в тази теория (термините са взети от дисертацията и аз считам, че те са употребени правилно). Такива например са нейните изследвания, свързани с локалната сходимост от първи вид (виж ограниченията (4)) върху итерационните методи от типа на K. Weierstrass и L. Ehrlich. Някои от нейните достижения са нови (нямат аналози в научната литература по разглеждания въпрос). Такива например са изследванията за локална сходимост на итерационните методи от типа на K. Weierstrass и L. Ehrlich от втори тип (виж ограниченията (5)).
2. Изследваните фамилии итерационни методи са снабдени с нов тип (специфични) ограничения на началните приближения на корените на даден полином (виж ограниченията (6)). В този случай са получени твърдения за полулокална сходимост на разглежданите фамилии итерационни процедури.
3. Получените резултати имат приложен характер. Приведени са приложения на получените теореми за полулокална сходимост на разглежданите методи. Демонстрира се пресмятане на нулите на полиноми с гарантирана точност.

Определено считам, че изследванията на авторката ще заемат достойно място в теорията на итерационните методи, предназначени за намиране на корените на полиноми. Нещо повече, убеден съм, че бъдещите резултати по темата (от докторантката или от други специалисти) трябва да се основават и сравняват с постигнатото в този труд.

8. Преценка на публикациите по дисертационния труд

По темата на дисертацията докторантката е публикувала (съвместно с научния си ръководител) три научни статии:

1. P. Proinov, M. Vasileva, *On the convergence of a family of Weierstrass-type root-finding methods*, C. R. Bulg. Acad. Sci., 68 (2015), 697-704.
2. P. Proinov, M. Vasileva, *On the convergence of high-order Ehrlich-type iterative methods for approximating all zeros of a polynomial simultaneously*, J. Inequal. Appl. (2015), 25 pages.
3. P. Proinov, M. Vasileva, *On a family of Weierstrass-type root-finding methods with accelerated convergence*, Appl. Math. Comput., 273, (2016), 957-968.

Ще отбележа, че всяко едно от списанията, в които са публикувани изследванията на докторантката, притежава импакт фактор. Числовите характеристики (съответни на списанията в цитирания по-горе ред и съобразени с годините на публикуване) са: 0,284; 0,773 и 1,551. Сумарният импакт фактор на тези списания е 2,608. Нямам данни за цитиране на посочените публикации. Това може да се очаква по-късно, тъй като се вижда, че статиите са публикувани съвсем скоро.

9. Лично участие на докторантката

Трите основни публикации, на които се основава дисертационния труд, са в съавторство с научния ръководител на докторантката. Приемам участието ѝ за равностойно. Естествено е да се предполага, че проф. П. Проинов е въвел докторантката в темата на дисертационния труд и е оказал влияние (ползотворно) върху нейната изследователска работа.

10. Автореферат

Авторефератът заедно с библиографията е поместен на 32 стандартни страници. Съдържа резюме на всички основни резултати в дисертационния труд и отразява напълно приносите на Мария Василева. Отчетливо са формулирани поставените цели и конкретни задачи. Коректно е съобщено, кои от задачите са обобщения на известни резултати и кои от тях са принципно нови. Основните понятия и твърдения в дисертацията са представени съответно под формата на дефиниции, лемми, теореми и следствия (без доказателства). Посочен е приложният аспект на теоретичните изследвания. По този начин се илюстрират получените твърдения и се дава възможност за дообмисляне на идеите в дисертационния труд.

В заключението се резюмират основните приноси.

Авторефератът е изготвен съгласно изискванията. Бих добавил, че е подготвен във форма, която позволява на читателя, който не е запознат с дисертацията, да придобие пълна представа за постигнатото в нея.

11. Критични забележки и препоръки

Нямам съществени критични бележки, които да са извън моите лични предпочитания (означения, форма на запис, начин на изказ и др.). Считам, че този тип бележки (свързани с индивидуалните желания на читателя) не могат и не трябва да бъдат предмет на дискусия, поради което не ги представям. Определено считам, че обемът на дисертационния труд е напълно достатъчен (ако бях напълно откровен щях да кажа много повече от достатъчен), за да може непредубеденият рецензент напълно да изгради своето мнение относно образоваността на докторантката и нейните възможности да провежда научни изследвания в сложна научна среда, каквито са метричните пространства. Приведените примери ме убеждават напълно във възможностите на М. Василева да прилага и тълкува получените теоретични резултати.

12. Лични впечатления

Нямам сериозни лични впечатления от докторантката. Няколкото кратки срещи и разговори с нея ми дават основание да твърдя, че тя е млад, ентузиазизиран и переспективен изследовател, който логично би трябвало да продължи своето развитие в подходяща университетска среда.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получените резултати в дисертационния труд и направените по-горе в рецензията коментари ми дават основание да направя следните изводи:

1. Дисертационният труд съдържа теоретични изследвания, част от които са новост, а друга част развиват и обогатяват реалния и функционалния анализ. Те са оригинален принос на дисертантката и представляват сериозен научен интерес;
2. Дисертационният труд съдържа нови и обобщава известни приложни итерационни методи във важни направления на нелинейния анализ. По този начин се илюстрира полезността на получените от Мария Василева теоретични резултати. Представените в дисертационния труд твърдения са полезни, както за учените, които се занимават с теоретични проблеми в анализа, така и за учените, които прилагат съответни математически методи за решаване на съответните задачи;
3. Достиженията в дисертационния труд отговарят на изискванията на Закона за развитие на академичния състав в Република България (ЗРАСРБ), Правилника за прилагане на ЗРАСРБ и Специфичните изисквания на ФМИ при ПУ за придобиване на образователната и научната степен "доктор".

Поради посочените по-горе факти оценявам „положително” изследванията в дисертационния труд.

Предлагам на научното жури **да присъди** образователната и научната степен “доктор” на Мария Тонкова Василева в:

Област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика;

Професионално направление: 4.5. Математика;

Научна специалност: Математически анализ.

20. 03. 2016 г.

Изготвил рецензията:

проф. д-р Ангел Дишлиев