Пловдивски университет “Паисий Хилендарски”
Факултет по математика и информатика

Катедра “Математически анализ”

МАРИЯ ТОНКОВА ВАСИЛЕВА

Ускорена сходимост на фамилии от итерационни методи за едновременна апроксимация на нули на полиноми

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертационен труд
за присъждане на образователната и научна степен
“ДОКТОР”
по област на висше образование
4. Природни науки, математика и информатика;
професионално направление 4.5. Математика;
докторска програма Математически анализ

Научен ръководител:
проф. д.м.н. Петко Димитров Пройнов

Пловдив – 2016

Дисертационният труд е обсъден и насрочен за защита на разширен катедрен съвет на катедра “Математически анализ” при Факултет по математика и информатика на Пловдивски университет “Паисий Хилендарски”, проведен на 15.01.2016 г.

Дисертационният труд “Ускорена сходимост на фамилии от итерационни методи за едновременна апроксимация на нули на полиноми” се състои от увод, три глави, заключение и библиография. Библиографията съдържа 116 заглавия. Общият обем на дисертационния труд е 124 страници. Списъкът на авторските публикации включва 3 заглавия.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на 15.04.2016 г. от 11 ч. в Заседателната зала на Нова сграда на Пловдивски университет “Паисий Хилендарски”, гр. Пловдив.

Материалите по защитата са на разположение за интересуващите се в секретариата на ФМИ, Нова сграда на ПУ “Паисий Хилендарски”, бул. “България” № 236, каб. 330, всеки работен ден от 8:30 до 17:00 часа.

Научно жури

Председател:
проф. д.м.н. Петко Пройнов (ПУ „П. Хилендарски“, Пловдив).

Членове:
проф. д.т.н. Васил Ангелов (МГУ „Св. Иван Рилски“, София);
проф. д-р Ангел Дишлиев (ХТМУ, София, рецензент);
проф. д-р Николай Кюркчиев (ПУ „П. Хилендарски“, Пловдив, рецензент);
доц. д-р Тодор Стоянов (Икономически университет, Варна).

Номерацията на теоремите, лемите, следствията, дефинициите, таблиците и фигурите в автореферата съвпада с тяхната номерация в дисертационния труд.

Съдържание

Актуалност и цел на дисертационния труд

Актуалност на дисертационния труд

Настоящият дисертационен труд е посветен на детайлно изследване на локалната и полулокалната сходимост на две фамилии итерационни методи за едновременна апроксимация на всичките нули на даден полином f от степен $n \geq 2$, въведени от българските математици Николай Кюркчиев и Андрей Андреев [29, 30] съответно през 1985 и 1987 година. Всяка от тези фамилии съдържа изброимо множество итерационни методи. Първата фамилия се състои от методи от типа на Вайерщрас [106] с ред на сходимост $r = 2, 3, 4, 5, \ldots$. Втората фамилия се състои от методи от типа на Ерлих [18] с ред на сходимост $r = 3, 5, 7, 9, \ldots$. Предмет на изследване за итерационните методи на всяка от двете фамилии са следните два основни проблема:

• Коректност и сходимост на итерацията. Проблемът за намиране на начални условия (за началното приближение $x^{(0)}$), такива че съответната итерационна редица $x^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, да е коректно дефинирана и сходяща към вектор ξ в n-мерно пространство, координатите на който са корените на полинома f;

• Оценки на грешката. Проблемът за намиране на априорни и апостериорни оценки на грешката $\|x^{(k)} - \xi\|$, които да са в съответствие с реда r на сходимост на съответния итерационен метод.

Нека да споменем няколко класически монографии, които изцяло или частично са посветени на итерационни методи за едновременна апроксимация на нули на полиноми: Дюран [16] (1960), Илиев [25] (1987), Петкович [49] (1989), Сендов, Андреев и Кюркчиев [95] (1994), Петкович, Херцег и Илич [56] (1997), Кюркчиев [32] (1998), Петков и Кюркчиев [47] (2000).

За да добием представа за актуалността на темата, е достатъчно да погледнем монографиите и научните статии, издадени през последното десетилетие (2005-2015 г.), които в една или друга степен третират проблеми от теорията на итерационните методи за едновременна апроксимация на нули на полиноми. В този период излизат монографиите на Макнаме [35] (2007), Петкович [51] (2008), Илиев и Кюркчиев [24] (2010), Чира [10] (2012), Петкович, Нета, Петкович и Джунич [62] (2013), Макнаме и Пан [36] (2013).

Много по-многоброен е броят на научните статии в указания период, изследващи итерационните методи за едновременна апроксимация на нули на полиноми. Ето някои от тези публикации: Ахмад, Мир и Акмал [2], Илиев и Кюркчиев [22], Илиев, Кюркчиев и Фанг [23], Милошевич,

Милошевич и Джунич [38], Мир, Мюнер и Ябен [41], Неджибов [42], Неджибов и Петков [43], Петкович и Петкович [63], Петкович [52], Петкович, Херцег и Петкович [58], Петкович, Ранчич и Милошевич [66], Петкович, Петкович и Джунич [64], Петкович и Милошевич [61], Пройнов [69, 70, 75, 77, 78], Пройнов и Петкова [86, 88, 88], Пройнов и Иванов [81, 84], Пройнов и Чолаков [80, 79], Ранчич и Петкович [93], Тоцева, Кюркчиев и Илиев [101], Чира и Марустер [13], Чира и Чира [11, 12], Чолаков [6, 7], Чолаков и Петкова [9], Сонг [98] и други.

В същия период са защитени следните дисертационни трудове, които частично или напълно са посветени на итерационни методи за едновременна апроксимация на нули на полиноми: Милошевич Д. [37], Ранчич [92], Милошевич М. [39], Джунич [17], Иванов [26], Петкова [48], Чолаков [8], Пройнов [74] и други.

През 1891 година Вайерщрас въвежда и изследва първия итерационен метод за едновременна апроксимация на всичките нули на даден комплексен полином f. Той изследва полулокалната сходимост на метода и по този начин дава първото конструктивно доказателство на основната теорема на алгебрата, която гласи, че полето на комплексните числа е алгебрично затворено. През 1913 година Кюршак [34] показва, че итерационната редица на Вайерщрас може да се разглежда в произволно нормирано поле $\mathbb{K}$, а не само в полето на комплексните числа $\mathbb{C}$. Като използва идеи на Вайерщрас, той доказва, че всяко нормирано поле може да бъде разширено до пълно алгебрично затворено нормирано поле (вж. също [48, 87]).

С $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ ще означаваме алгебрично затворено нормирано поле, а с $\mathbb{K}[z]$ – пръстена на полиномите (на една променлива) над $\mathbb{K}$. За даден вектор $x \in \mathbb{K}^n$, с x_i ще означаваме i-тата координата на x.

Методът на Вайерщрас се дефинира чрез следната итерационна редица:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - W_f(x^{(k)}) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

където операторът $W_f \colon \mathcal{D} \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ се дефинира чрез

$$W_f(x) = (W_1(x), \ldots, W_n(x)), \quad W_i(x) = \frac{f(x_i)}{a_0 \prod\limits_{j \neq i} (x_i - x_j)} \quad (i = 1, \ldots, n),$$

където $a_0 \in \mathbb{K}$ е старшият коефициент на полинома f, а $\mathcal{D}$ е множеството от всички вектори в $\mathbb{K}^n$ с различни координати. Методът на Вайерщрас има втори ред на сходимост.[1] В математическата литература методът

[1]За всички итерационни методи редът на сходимост е даден в случая, когато нулите на полинома са прости.

на Вайерщрас е известен също като *метод на Дюран-Кернер*, *метод на Вайерщрас-Дочев*, *метод на Дочев*, *метод на Прешич* и други.

Вторият знаменит метод за едновременна апроксимация на нули на полиноми е въведен от Ерлих [18] през 1967 година. Методът на Ерлих има трети ред на сходимост и се дефинира чрез следната итерация:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - F(x^{(k)}), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

където операторът F се дефинира в $\mathbb{K}^n$ чрез $F(x) = (F_1(x), \ldots, F_n(x))$ като

$$F_i(x) = \frac{f(x_i)}{f'(x_i) - f(x_i) \displaystyle\sum_{j \neq i} \frac{1}{x_i - x_j}} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Методът на Ерлих е известен още като *метод на Ерлих-Абърт*, *метод на Бьорш-Зупан*, *метод на Абърт* и други.

През 1977 година Нурейн [46], като коригира корекцията W_f на метода на Вайерщрас (1) със същата корекция W_f, конструира нов итерационен метод с ускорена скорост на сходимост. Методът на Нурейн има трети ред на сходимост и се дефинира чрез следната итерация:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - G(x^{(k)}), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

където операторът G се дефинира в $\mathbb{K}^n$ чрез $G(x) = (G_1(x), \ldots, G_n(x))$ като

$$G_i(x) = \frac{f(x_i)}{a_0 \displaystyle\prod_{j \neq i} (x_i - x_j + W_j(x))} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Фамилия итерационни методи от типа на Вайерщрас. През 1985 година Кюркчиев и Андреев, доразвивайки идеята на Нурейн [46], конструират и изследват безкрайна редица от итерационни методи с ускорена скорост на сходимост за едновременно апроксимиране на нули на полиноми. Първият метод $T^{(1)}$ от фамилията на Кюркчиев-Андреев е методът на Вайерщрас (1), а вторият метод $T^{(2)}$ от фамилията е методът на Нурейн (3).

При дадено $N \in \mathbb{N}$, N-тият метод от фамилията на Кюркчиев и Андреев има ред на сходимост $N + 1$ и се дефинира чрез следната итерация:

$$x^{(k+1)} = T^{(N)}(x^{(k)}), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

където операторът $T^{(N)} \colon D_N \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ се дефинира чрез

$$T^{(N)}(x) = (T_1^{(N)}(x), \ldots, T_n^{(N)}(x)),$$

като $T^{(0)}(x) \equiv x$ и

$$T_i^{(N+1)}(x) = x_i - \frac{f(x_i)}{a_0 \prod\limits_{j \neq i} (x_i - T_j^{(N)}(x))} \quad (i = 1, \ldots, n),$$

а редицата от дефиниционните области D_N се дефинира чрез $D_0 = \mathbb{K}^n$ и

$$D_{N+1} = \{x \in D_N \colon x \# T^{(N)}(x)\}^2.$$

Фамилия итерационни методи от типа на Ерлих. През 1987 година Кюркчиев и Андреев [30] конструират и изследват втора безкрайна редица от итерационни методи с ускорена сходимост за едновременно апроксимиране на нули на полиноми. Първият член $T^{(1)}$ от втората фамилия на Кюркчиев-Андреев е методът на Ерлих (2).

При фиксирано $N \in \mathbb{N}$, N-тият метод от втората фамилия на Кюркчиев и Андреев има ред на сходимост $2N + 1$ и се дефинира чрез следната итерация

$$x^{(k+1)} = T^{(N)}(x^{(k)}), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

където операторът $T^{(N)} \colon D_N \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ се дефинира чрез

$$T^{(N)}(x) = (T_1^{(N)}(x), \ldots, T_n^{(N)}(x)),$$

като $T^{(0)}(x) \equiv x$ и

$$T_i^{(N+1)}(x) = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i) - f(x_i) \sum\limits_{j \neq i} \dfrac{1}{x_i - T_j^{(N)}(x)}} \quad (i = 1, \ldots, n),$$

където $D_0 = \mathbb{K}^n$ и

$$D_{N+1} = \{x \in D_N \colon x \# T^{(N)}(x), f'(x_i) - f(x_i) \sum_{j \neq i} \frac{1}{x_i - T_j^{(N)}(x)} \neq 0 \text{ за } i \in I_n\}.$$

Цел на дисертационния труд

Целта на дисертационния труд е намиране на начални условия от различен тип, гарантиращи сходимостта на итерационните методи от типа на Вайерщрас (4) и на итерационните методи от типа на Ерлих (5), а също

[2] С $\#$ означаваме бинарна релация в $\mathbb{K}^n$, дефинирана с $x \# y \Leftrightarrow x_i \neq y_j \; \forall i \neq j$.

така и намиране на априорни и апостериорни оценки на грешката за тези итерационни методи.

Нека векторното пространство $\mathbb{K}^n$ е снабдено със стандартна p-норма $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$ за всяко $1 \le p \le \infty$. Нека $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ е снабдено с векторна наредба $\preceq$, дефинирана чрез

$$x \preceq y \quad \Leftrightarrow \quad x_i \le y_i \ \text{ за всички } \ i = 1, \dots, n.$$

Тогава $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ е телесно векторно пространство. Дефинираме конусна норма $\|\cdot\| \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^n$ чрез равенството

$$\|x\| = (|x_1|, \dots, |x_n|).$$

Тогава $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ е конусно нормирано пространство над $\mathbb{R}^n$. Вектор $\xi \in \mathbb{K}^n$ се нарича *вектор-корен* на полинома f, ако $f(z) = a_0 \prod_{i=1}^n (z - \xi_i)$ за всяко $z \in \mathbb{K}$, където $a_0 \in \mathbb{K}$. Дефинираме функция $\delta \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$ чрез

$$\delta(x) = \min_{i \neq j} |x_i - x_j|$$

и функция $d \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^n$ чрез $d(x) = (d_1(x), \dots, d_n(x))$, където

$$d_i(x) = \min_{j \neq i} |x_i - x_j| \qquad (i = 1, \dots, n).$$

За два вектора $x \in \mathbb{K}^n$ и $y \in \mathbb{R}^n$ дефинираме в $\mathbb{R}^n$ вектор $\dfrac{x}{y}$ чрез равенството $\dfrac{x}{y} = \left(\dfrac{|x_1|}{y_1}, \cdots, \dfrac{|x_n|}{y_n} \right)$, при условие че векторът y има само ненулеви координати.

В периода 2009-2015 Пройнов [71, 72, 75, 76, 78] разработва обща теория за сходимост на итерационни процеси от типа на Пикар в метрични пространства, конусно метрични пространства и в n-мерно векторно пространство $\mathbb{K}^n$. Основна роля в тази теория играе понятието *функция на началните условия*. В тази теория сходимостта на всеки итерационен процес от типа на Пикар винаги се изучава относно предварително избрана функция на началните условия.

Дефиниция. Нека $T \colon D \subset X \to X$ е изображение в произволно множество X. Функция $E \colon D \to \mathbb{R}_+$ се нарича *функция на началните условия* на T (с контролна функция φ), ако съществува функция $\varphi \colon J \to J$, такава че

$$E(Tx) \le \varphi(E(x)) \quad \text{за всички } \ x \in D, \ \text{такива че } \ Tx \in D \ \text{ и } \ E(x) \in J.$$

Началните условия се задават чрез стойност $E(x^{(0)})$ на функцията на началните условия E в началното приближение $x^{(0)}$. Ето няколко примера на „класически“ функции на началните условия:

$$E(x) = \|x - \xi\|_p\,, \quad E(x) = \frac{\|x - \xi\|_p}{\delta(\xi)}, \quad E(x) = \frac{\|x - \xi\|_p}{\delta(x)}.$$

През последните години функциите на началните условия се очертават като един от основните инструменти за изследване на локалната и полулокалната сходимост на итерационни методи (вж. [6, 7, 8, 9, 26, 27, 48, 69, 70, 71, 72, 74, 75, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 86, 87, 88, 89, 90, 91]). През 2015 година Пройнов [78] дава следната класификация на началните условия, които най-често се използват в теореми за сходимост на методи за едновременна апроксимация на нули на полиноми.

Дефиниция. Нека $x^{(0)} \in \mathbb{K}^n$ е начално приближение на итерационен метод с итерационна функция $T\colon D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ и нека $R > 0$. Едно начално условие се нарича *начално условие от*

(a) *първи тип*, ако може да се представи в следния вид

$$\left\| \frac{x^{(0)} - \xi}{d(\xi)} \right\|_p \le R \quad \text{или} \quad \frac{\|x^{(0)} - \xi\|_p}{\delta(\xi)} \le R; \tag{6}$$

(b) *втори тип*, ако може да се представи в следния вид

$$\left\| \frac{x^{(0)} - \xi}{d(x^{(0)})} \right\|_p \le R \quad \text{или} \quad \frac{\|x^{(0)} - \xi\|_p}{\delta(x^{(0)})} \le R; \tag{7}$$

(c) *трети тип*, ако може да се представи в следния вид

$$\left\| \frac{W_f(x^{(0)})}{d(x^{(0)})} \right\|_p \le R \quad \text{или} \quad \frac{\|W_f(x^{(0)})\|_p}{\delta(x^{(0)})} \le R. \tag{8}$$

Всяко от условията (6), (7) и (8) съдържа два вида начални условия. Ще отбележим, че при $n \ge 3$ първото условие дава по-широка област на сходимост.

През 1985 година Кюркчиев и Андреев публикуват следната теорема за сходимост на итерационните методи от типа на Вайерщрас:

Теорема 2.1 (Кюркчиев-Андреев [29]). *Нека $f \in \mathbb{C}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, който притежава само прости нули, $\xi \in \mathbb{C}^n$ е вектор-корен на f и нека $N \geq 1$. Нека $0 < h < 1$ и $c > 0$ са такива, че*

$$\frac{ch(1+e^2)}{\delta - c} \leq 1 \quad \textit{и} \quad 0 < \frac{nce^2}{\delta - ch(2+e^2)} < 1\,,$$

където $\delta = \delta(\xi)$. Нека $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ е начално приближение, удовлетворяващо условието

$$\|x^{(0)} - \xi\|_\infty \leq ch.$$

Тогава итерацията от типа на Вайерщрас (4) *е сходяща към ξ с оценка на грешката*

$$\|x^{(k)} - \xi\|_\infty \leq ch^{(N+1)^k} \quad \textit{за всяко } k \geq 0.$$

Теоремата на Кюркчиев-Андреев за методите от типа на Вайерщрас е теорема за локална сходимост от първи тип с второто начално условие (6), което навежда на мисълта, че теоремата може да се подобри, като се използва първото начално условие (6). В математическата литература не е известна теорема за локална сходимост от втори тип за методите от типа на Вайерщрас. Така възниква следният проблем:

Задача 1. *Да се получи теорема за локална сходимост от първи тип за итерационните методи от типа на Вайерщрас* (4)*, която да обобщава и подобрява резултата на* Кюркчиев и Андреев [29]*, както и теорема за локална сходимост от втори тип с оценки на грешката.*

Ще отбележим още, че не е известна теорема за полулокална сходимост (с компютърно проверяеми начални условия) за фамилията итерационни методи от типа на Вайерщрас. Това обуславя актуалността на следния проблем.

Задача 2. *Да се получи теорема за полулокална сходимост за итерационните методи от типа на Вайерщрас* (4)*.*

През 1987 година Кюркчиев и Андреев публикуват теорема за сходимост на итерационните методи от типа на Ерлих.

Теорема 3.1 (Кюркчиев-Андреев [30]). *Нека $f \in \mathbb{C}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, който притежава само прости нули, $\xi \in \mathbb{C}^n$ е вектор-корен на f и нека $N \geq 1$. Нека $0 < h < 1$ и $c > 0$ са такива, че*

$$\delta > 2c(1 + (2n-1)h) \;\; \textit{и} \;\; \frac{nc^2}{(\delta - c)(\delta - 2c - 2ch) - 3(n-1)c^2h^2} \leq 1,$$

където $\delta = \delta(\xi)$. Нека $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ е начално приближение, удовлетворяващо условието

$$\|x^{(0)} - \xi\|_\infty \leq ch.$$

Тогава итерацията от типа на Ерлих (5) *е сходяща към ξ с ред на сходимост $2N+1$ и оценка на грешката*

$$\|x^{(k)} - \xi\|_\infty \leq ch^{(2N+1)^k} \quad \text{за всяко } k \geq 0.$$

Както при методите от типа на Вайерщрас теоремата на Кюркчиев-Андреев за методите от типа на Ерлих е теорема за локална сходимост от първи тип с второто начално условие (6), което показва, че теоремата допуска подобрение, като се използва първото начално условие (6).

За методите от типа на Ерлих също не е известна теорема за локална сходимост от втори тип. Тези факти мотивират следния проблем.

Задача 3. *Да се получи теорема за локална сходимост от първи тип за методите от типа на Ерлих* (5), *която да подобрява резултата на* Кюркчиев и Андреев [30], *както и теорема за локална сходимост от втори тип с оценки на грешката.*

В математическата литературата не е известна теорема за полулокална сходимост (с компютърно проверяеми начални условия) за фамилията итерационни методи от типа на Ерлих. Така възниква следният проблем.

Задача 4. *Да се получи теорема за полулокална сходимост за методите от типа на Ерлих* (5).

Кратък обзор на дисертационния труд

Дисертационният труд се състои от увод, три глави, заключение и библиография. Заключението съдържа: резюме на получените резултати, списък на публикациите по дисертационния труд и апробация на получените резултати.

Ще изложим накратко съдържанието на дисертационния труд.

Глава 1. Основни определения и литературен обзор

Първа глава има предимно обзорен характер и се състои от пет параграфа. В тази глава единствено §1.2 съдържа нови резултати, които са публикувани в статиите [89] и [90].

В **параграф 1.1** са изложени някои основни понятия от теорията на нормираните полета и от теорията на конусно метричните пространства.

В **параграф 1.2** са доказани три нови неравенства в $\mathbb{K}^n$, които се използват в доказателствата на основните резултати и които са формулирани в три леми. Ще формулираме две от лемите. Във втората лема и навсякъде в дисертационния труд с q означаваме спрегнатото число на $1 \le p \le \infty$, т.е.

$$1 \le q \le \infty \quad \text{и} \quad 1/p + 1/q = 1.$$

Лема 1.3. *Нека $u, v, \xi \in \mathbb{K}^n$, $\alpha \ge 0$ и $1 \le p \le \infty$. Ако v е вектор с различни координати, такъв че*

$$\|u - \xi\| \preceq \alpha \|v - \xi\|, \tag{9}$$

то за всяко $i, j \in I_n$ е в сила неравенството

$$|u_j - v_i| \ge \left(1 - (1 + \alpha) \left\| \frac{v - \xi}{d(v)} \right\|_p \right) |v_i - v_j|.$$

Лема 1.4. *Нека $u, v, \xi \in \mathbb{K}^n$, $\alpha \ge 0$ и $1 \le p \le \infty$. Ако v е вектор с различни координати, удовлетворяващ условие* (9)*, то за всяко $i, j \in I_n$ е в сила неравенството*

$$|u_i - u_j| \ge \left(1 - 2^{1/q} (1 + \alpha) \left\| \frac{v - \xi}{d(v)} \right\|_p \right) |v_i - v_j|.$$

В **параграф 1.3** е формулирана една теорема на Пройнов [75] за локална сходимост на итерационни методи от типа на Пикар (Теорема 1.2).

В **параграф 1.4** са формулирани две теореми на Пройнов [75] за преобразуване на теореми за локална сходимост от втори тип в теореми за полулокална сходимост (Теорема 1.3 и Теорема 1.4). През 2015 година Пройнов [76] показва, че съществува тясна връзка между различните типове начални условия, които гарантират сходимост на итерационни методи за едновременно намиране на нулите на даден полином. В своята работа той показва, че от всяка теорема за локална сходимост може да се получи теорема за полулокална сходимост.

В **параграф 1.5** е направен кратък обзор на три класически итерационни методи за едновременна апроксимация нули на полиноми – метод на Вайерщрас (1), метод на Ерлих (2) и метод на Нурейн (3), които са тясно свързани с изследванията в настоящия дисертационен труд.

Формулирани са последните теореми на Пройнов [75, 77, 78], които обобщават и подобряват всички предишни резултати както за локална сходимост, така и за полулокална сходимост на метода на Вайерщрас и метода на Ерлих.

Глава 2. Теореми за сходимост на фамилия итерационни методи от типа на Вайерщрас с висок ред на сходимост

Втора глава се състои от пет параграфа. В тази глава се изследва фамилията итерационни методи от типа на Вайерщрас (4). Получени са четири основни резултата: две теореми за локална сходимост (Теорема 2.2 и Теорема 2.3) и две теореми за полулокална сходимост (Теорема 2.4 и Теорема 2.5). Втора глава завършва с числени примери, които показват някои практически приложения на получените резултати за полулокална сходимост.

Резултатите от втора глава са публикувани в статиите [89] и [91].

В **параграф 2.1** е въведена фамилията итерационни методи от типа на Вайерщрас (4) и е формулирана теоремата на Кюркчиев и Андреев [29] за сходимост на методите от типа на Вайерщрас (Теорема 2.1).

В **параграф 2.2** изследваме сходимостта на методите от типа на Вайерщрас относно функцията на началните условия от първи тип $E\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$, дефинирана по следния начин

$$E(x) = \left\| \frac{x-\xi}{d(\xi)} \right\|_p \quad (1 \le p \le \infty). \tag{10}$$

В този параграф с R означаваме реалното число

$$R = \frac{2^{1/(n-1)} - 1}{2^{1/q}(2^{1/(n-1)} - 1) + (n-1)^{-1/p}}\,. \tag{11}$$

Дефиниция 2.2. Нека $1 \le p \le \infty$. Дефинираме редица $(\phi_N)_{N=0}^{\infty}$ от функции $\phi_N\colon [0,R] \to [0,1]$ рекурентно, като положим $\phi_0(t) \equiv 1$ и

$$\phi_{N+1}(t) = \left(1 + \frac{t\,\phi_N(t)}{(n-1)^{1/p}(1-2^{1/q}\,t)}\right)^{n-1} - 1.$$

Първият основен резултат в Глава 2 е следната теорема за локална сходимост от първи тип. Тя обобщава, подобрява и допълва резултата на Кюркчиев и Андреев [29] (Теорема 2.1), а именно тази теорема дава по-широка област на сходимост, по-добра априорна оценка на грешката, както и допълва с апостериорна оценка на грешката. При $N = 1$ тази теорема съвпада с резултата на Пройнов [75] за локална сходимост от първи тип на метода на Вайерщрас (1).

Теорема 2.2. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, който притежава n прости нули в $\mathbb{K}$, $\xi \in \mathbb{K}^n$ е вектор-корен на f, $N \geq 1$ и $1 \leq p \leq \infty$. Нека $x^{(0)} \in \mathbb{K}^n$ е начално приближение, удовлетворяващо условието*

$$E(x^{(0)}) = \left\| \frac{x^{(0)} - \xi}{d(\xi)} \right\|_p < R = \frac{2^{1/(n-1)} - 1}{2^{1/q}(2^{1/(n-1)} - 1) + (n-1)^{-1/p}}\,, \tag{12}$$

където E се дефинира чрез (10)*. Тогава итерацията от типа на Вайерщрас* (4) *е коректно дефинирана и сходяща към ξ с оценки на грешката*

$$\|x^{(k+1)} - \xi\| \preceq \lambda^{(N+1)^k} \|x^{(k)} - \xi\| \quad \text{и} \quad \|x^{(k)} - \xi\| \preceq \lambda^{((N+1)^k - 1)/N} \|x^{(0)} - \xi\|$$

за всяко $k \geq 0$, където $\lambda = \phi_N(E(x^{(0)}))$.

Ще формулираме две следствия от тази теорема. Всяко от тях е подобрение на теоремата на Кюркчиев и Андреев [29] (Теорема 2.1). Второто следствие ни дава възможност да сравним получената теорема с резултата на Кюркчиев и Андреев [29].

Следствие 2.2. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, който притежава n прости нули в $\mathbb{K}$, $\xi \in \mathbb{K}^n$ е вектор-корен на f, $N \geq 1$, $1 \leq p \leq \infty$ и $0 < h < 1$. Нека $x^{(0)} \in \mathbb{K}^n$ е начално приближение, удовлетворяващо условието*

$$\left\| \frac{x^{(0)} - \xi}{d(\xi)} \right\|_p < R_h = \frac{(1+h)^{1/(n-1)} - 1}{2^{1/q}((1+h)^{1/(n-1)} - 1) + (n-1)^{-1/p}}.$$

Тогава итерацията от типа на Вайерщрас (4) *е коректно дефинирана и сходяща към ξ с оценки на грешката*

$$\|x^{(k+1)} - \xi\| \preceq h^{N(N+1)^k} \|x^{(k)} - \xi\| \quad \text{и} \quad \|x^{(k)} - \xi\| \preceq h^{(N+1)^k - 1} \|x^{(0)} - \xi\|$$

за всяко $k \geq 0$.

Следствие 2.3. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, който притежава n прости нули в $\mathbb{K}$, $\xi \in \mathbb{K}^n$ е вектор-корен на f, $N \geq 1$, $1 \leq p \leq \infty$ и нека*

$$0 < h < 1 \quad \text{и} \quad 0 < c \leq R\,\mathrm{sep}(f),$$

където R се дефинира чрез (11)*. Нека $x^{(0)} \in \mathbb{K}^n$ е начално приближение, удовлетворяващо условието*

$$\|x^{(0)} - \xi\|_p \leq ch.$$

Тогава итерацията от типа на Вайерщрас (4) *е коректно дефинирана и сходяща към* ξ *с оценки на грешката*

$$\|x^{(k+1)} - \xi\| \preceq h^{N(N+1)^k} \|x^{(k)} - \xi\|, \quad \|x^{(k)} - \xi\| \preceq h^{(N+1)^k - 1} \|x^{(0)} - \xi\|,$$

$$\|x^{(k)} - \xi\|_p \le c h^{(N+1)^k} \quad \text{за всяко } k \ge 0.$$

В **параграф 2.3** изследваме сходимостта на методите от типа на Вайерщрас (4) относно функция на началните условия от втори тип $E\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}_+$, дефинирана чрез

$$E(x) = \left\| \frac{x - \xi}{d(x)} \right\|_p \quad (1 \le p \le \infty). \tag{13}$$

Дефинираме функцията $\Psi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ чрез равенството

$$\Psi(t) = (1 + 2t) \left(1 + \frac{t}{(n-1)^p} \right)^{n-1}. \tag{14}$$

В този параграф с R означаваме единственото положително решение на уравнението $\Psi(t) = 2$.

Дефиниция 2.4. Нека $1 \le p \le \infty$. Дефинираме редица $(\phi_N)_{N=0}^{\infty}$ от функции $\phi_N\colon [0, R] \to [0, 1]$ рекурентно, като положим $\phi_0(t) = 1$ и

$$\phi_{N+1}(t) = \frac{\omega_N(t) - 1}{1 - 2t\omega_N(t)}, \quad \text{където} \quad \omega_N(t) = \left(1 + \frac{t\phi_N(t)}{(n-1)^p} \right)^{n-1}. \tag{15}$$

За дадено цяло число $N \ge 1$ дефинираме функция $\psi_N\colon [0, R] \to (0, 1]$ чрез

$$\psi_N(t) = 1 - 2t\omega_{N-1}(t), \tag{16}$$

където функцията ω_N е дефинирана в (15).

Следващият резултат е втората основна теорема в Глава 2. В случая $N = 1$ и $p = \infty$ тази теорема съвпада с резултата на Пройнов [75] за локална сходимост от втори тип за метода на Вайерщрас (1).

Теорема 2.3. *Нека* $f \in \mathbb{K}[z]$ *е полином от степен* $n \ge 2$, $\xi \in \mathbb{K}^n$ *е вектор-корен на* f, $N \ge 1$ *и* $1 \le p \le \infty$. *Нека* $x^{(0)} \in \mathbb{K}^n$ *е вектор с различни координати, такъв че*

$$\Psi(E(x^{(0)})) \le 2, \tag{17}$$

където функцията E *се дефинира с* (13) *и* Ψ *се дефинира с* (14). *Тогава* f *притежава само прости нули и итерацията от типа на Вайерщрас* (4) *е коректно дефинирана и сходяща към* ξ *с оценки на грешката*

$$\|x^{(k+1)} - \xi\| \preceq \theta \lambda^{(N+1)^k} \|x^{(k)} - \xi\| \quad \text{и} \quad \|x^{(k)} - \xi\| \preceq \theta^k \lambda^{((N+1)^k - 1)/N} \|x^{(0)} - \xi\| \tag{18}$$

за всяко $k \geq 0$, където $\lambda = \phi_N(E(x^{(0)}))$, $\theta = \psi_N(E(x^{(0)}))$ и функциите ϕ_N и ψ_N се дефинират съответно с (15) *и* (16). *Освен това, ако неравенството в* (17) *е строго, то итерацията от типа на Вайерщрас е сходяща към ξ с ред на сходимост $N+1$.*

Завършваме този параграф със следния резултат за сходимост на методите от типа на Вайерщрас.

Следствие 2.5. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, $\xi \in \mathbb{K}^n$ е вектор-корен на f, $N \geq 1$ и $1 \leq p \leq \infty$. Нека $x^{(0)} \in \mathbb{K}^n$ е вектор с различни координати, такъв че*

$$E(x^{(0)}) = \left\| \frac{x^{(0)} - \xi}{d(x^{(0)})} \right\|_p \leq \frac{n(2^{1/n} - 1)}{(n-1)^{1/q} + 2},$$

където E се дефинира чрез (13). *Тогава f притежава само прости нули и итерацията от типа на Вайерщрас* (4) *е коректно дефинирана и сходяща към ξ с оценки на грешката* (18).

В **параграф 2.4** изследваме полулокалната сходимост на методите от типа на Вайерщрас (4) относно функция на началните условия от трети тип $E_f \colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}_+$, дефинирана с равенството

$$E_f(x) = \left\| \frac{W_f(x)}{d(x)} \right\|_p \qquad (1 \leq p \leq \infty). \tag{19}$$

В този параграф използваме изложената в параграф 1.4 теория за връзката между теореми за локална и полулокална сходимост на методи за едновременна апроксимация. Така от получената в параграф 2.3 теорема за локална сходимост от втори тип извеждаме две теореми за полулокална сходимост на методите от типа на Вайерщрас с компютърно проверяеми начални условия. При $N \geq 2$ тези две теореми са първите резултати в математическата литература за сходимост на методите от типа на Вайерщрас с компютърно проверяеми начални условия.

Дефинираме реалната функция

$$\Omega(t) = \Psi(h(t)), \tag{20}$$

където Ψ и h се дефинират съответно с (14) и

$$\alpha(t) = \frac{2}{1 - (a-1)t + \sqrt{(1-(a-1)t)^2 - 4t}} \quad \text{и} \quad h(t) = t\,\alpha(t). \tag{21}$$

Следващият резултат е третата основна теорема в Глава 2.

Теорема 2.4. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, $N \geq 1$ и нека $1 \leq p \leq \infty$. Нека $x^{(0)} \in \mathbb{K}^n$ е начално приближение с различни координати, такова че*

$$E_f(x^{(0)}) \leq 1/(1+\sqrt{a})^2 \quad \text{и} \quad \Omega(E_f(x^{(0)})) < 2, \tag{22}$$

където E_f се дефинира с (19), Ω се дефинира с (20) и $a = (n-1)^{1/q}$. В случая $n = 2$ и $p = \infty$ приемаме, че първото неравенство в (22) е строго. Тогава f притежава само прости нули в $\mathbb{K}$ и итерацията от типа на Вайерщрас (4) е коректно дефинирана и сходяща към вектор-корен ξ на f с ред на сходимост $N+1$ и с оценка на грешката

$$\|x^{(k)} - \xi\| \preceq \alpha(E_f(x^{(k)}))\, \|W_f(x^{(k)})\| \tag{23}$$

за всяко $k \geq 0$, такова че $E_f(x^{(k)}) \leq 1/(1+\sqrt{a})^2$ и $\Omega(E_f(x^{(k)})) < 2$, където функцията α се дефинира с (21).

Следствие 2.6. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, $N \geq 1$ и нека $1 \leq p \leq \infty$. Нека $x^{(0)} \in \mathbb{K}^n$ е начално приближение с различни координати, такова че*

$$E_f(x^{(0)}) = \left\| \frac{W_f(x^{(0)})}{d(x^{(0)})} \right\|_p \leq \frac{2}{5a+6},$$

където E_f се дефинира чрез (19) и $a = (n-1)^{1/q}$. Тогава f притежава само прости нули в $\mathbb{K}$ и итерацията от типа на Вайерщрас (4) е коректно дефинирана и сходяща към вектор-корен на f с ред на сходимост $N+1$ и оценка на грешката (23).

Следващият резултат е четвъртата основна теорема в Глава 2.

Теорема 2.5. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, $N \geq 1$ и нека $1 \leq p \leq \infty$. Нека $x^{(0)} \in \mathbb{K}^n$ е начално приближение с различни координати, такова че*

$$E_f(x^{(0)}) = \left\| \frac{W_f(x^{(0)})}{d(x^{(0)})} \right\|_p < \mathcal{R} = \frac{n(\sqrt[n]{2}-1)(a+2-n(\sqrt[n]{2}-1))}{(a+2)(a+2+n(a-1)(\sqrt[n]{2}-1))},$$

където E_f се дефинира чрез (19) и $a = (n-1)^{1/q}$. Тогава f притежава само прости нули в $\mathbb{K}$ и итерацията от типа на Вайерщрас (4) е коректно дефинирана и сходяща към вектор-корен на f с ред на сходимост $N+1$ и с оценка на грешката

$$\|x^{(k)} - \xi\| \preceq \alpha(E_f(x^{(k)}))\, \|W_f(x^{(k)})\|$$

за всяко $k \geq 0$, такова че $E_f(x^{(k)}) \leq \mathcal{R}$, където функцията α се дефинира с (21).

В **параграф 2.5** са приведени три числени примера, които илюстрират някои практически приложения на получените теореми за полулокална сходимост на методите от типа на Вайерщрас. Тези теореми могат да се използват за компютърно доказване, че:

• даден полином $f \in \mathbb{C}[z]$ притежава само прости нули;

• N-тият метод от типа на Вайерщрас (4) при дадено начално приближение $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ е коректно дефиниран и сходящ към вектор-корен на полинома f с ред на сходимост $N+1$;

• При k-тата итерация чрез итерационните методи от типа на Вайерщрас (4) нулите на полинома f са пресметнати с гарантирана точност ε_k, където

$$\varepsilon_k = \alpha(E_f(x^{(k)}))\, \|W_f(x^{(k)})\|_\infty \,. \tag{24}$$

В Пример 2.3 се опровергава твърдението на Ванг и Чао [105], че при полиноми от висока степен (по-голяма от 10) трудно се намират начални приближения $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$, при които методът на Вайерщрас (1) е сходящ. Направени са две серии експерименти за полиномите[3]

$$f(z) = z^{20} - 1 \quad \text{и} \quad f(z) = z^{30} - 1.$$

И в двете серии експерименти е показано, че съществуват много начални приближения, при които методът на Вайерщрас е сходящ.

В първата серия експерименти се използват 1000 случайно избрани начални приближения $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$, такива че $\|x^{(0)}\|_\infty \le 2$. Като използваме първата теорема за полулокална сходимост доказваме, че методът на Вайерщрас (1) при всяко от тези начални приближения е коректно дефиниран и сходящ към вектор-корен на полинома f.

Втората серия експерименти са проведени за методите от типа на Вайерщрас (4) при $N = 1, 2, \ldots, 10$ и $N = 61, 100, 101$, като се използват началните приближения $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ на Абърт [1]:

$$x_\nu^{(0)} = r_0 \exp{(i\theta_\nu)}, \quad \theta_\nu = \frac{\pi}{n}\left(2\nu - \frac{3}{2}\right), \quad \nu = 1, \ldots, n,$$

при $r_0 = 1 + 0.1k \quad (k = 0, 1, \ldots, 10)$ и $n = 20$ или $n = 30$, като се използва стоп критерий $\varepsilon_k < 10^{-15}$, където ε_k е гарантираната точност на метода при k-тата итерация (вж. (24)). Отново във всички тези случаи е доказана сходимост на разгледаните итерационни методи от типа на Вайерщрас. В Таблица 2.7 са представени получените резултати за полинома $f(z) = z^{20} - 1$ при $r_0 = 2$. При m-тата итерация е доказана сходимостта на метода (с ред

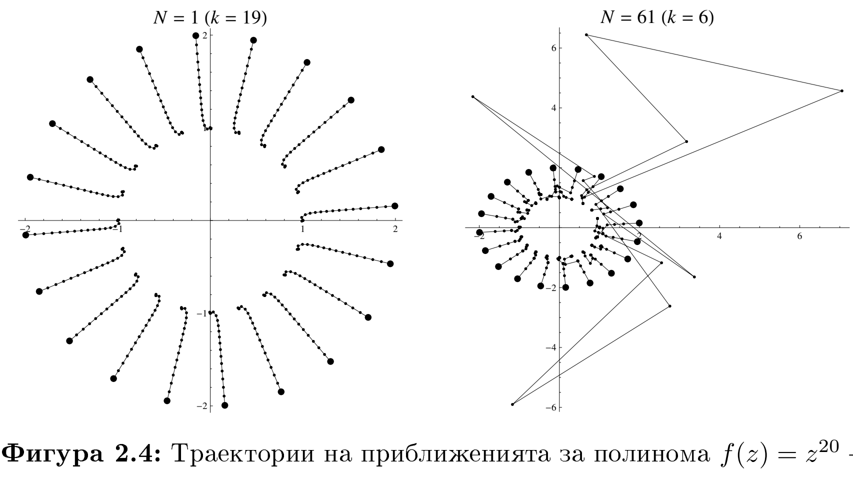
[3]За тези полиноми Ванг и Чао [105] твърдят, че не могат да намерят начални приближени, при които методът на Вайерщрас е сходящ.

на сходимост $N+1$), а при k-тата итерацията е изпълнен стоп критерия. Например за итерационният метод от типа на Вайерщрас (4) за $N=61$ таблицата показва, че при петата итерация е доказано, че методът е сходящ към вектор-корен на полинома $f(z)=z^{20}-1$ с ред на сходимост 62, а при шестата итерация е достигната предварително зададената точност 10^{-15}. Нещо повече, при шестата итерация всъщност е гарантирана точност 10^{-229}, а при седмата итерация е гарантирана точност 10^{-14153}.

Таблица 2.7: Стойности на m, k и ε_k за $f(z)=z^{20}-1$.

N	m	$E_f(x^{(m)})$	$\Omega(E_f(x^{(m)}))$	ε_m	k	ε_k	ε_{k+1}
1	16	0.005454	1.135937	1.906753×10^{-3}	19	5.251672×10^{-16}	2.620105×10^{-30}
2	10	0.008641	1.241514	3.249990×10^{-3}	12	6.054274×10^{-16}	2.002780×10^{-44}
3	8	0.006432	1.165842	2.298445×10^{-3}	10	3.924632×10^{-29}	2.034074×10^{-111}
4	7	0.003429	1.079931	1.147442×10^{-3}	9	1.568679×10^{-51}	7.736874×10^{-251}
5	7	0.000000	1.000000	1.310563×10^{-8}	8	3.920705×10^{-43}	2.810626×10^{-250}
6	6	0.000465	1.009907	1.469386×10^{-4}	7	1.026738×10^{-21}	8.842207×10^{-142}
7	6	0.000000	1.000006	9.113539×10^{-8}	7	3.323098×10^{-50}	1.038511×10^{-389}
8	5	0.014073	1.494951	6.079699×10^{-3}	7	2.518063×10^{-112}	2.700157×10^{-997}
9	5	0.001649	1.036367	5.324415×10^{-4}	6	8.150179×10^{-25}	8.150497×10^{-233}
10	5	0.000075	1.001583	2.357206×10^{-5}	6	7.347516×10^{-42}	2.017354×10^{-443}
61	5	0.000069	1.001472	2.192754×10^{-5}	6	5.604020×10^{-230}	$1.117175\times10^{-14154}$
100	3	0.000000	1.000000	4.366726×10^{-17}	3	4.366726×10^{-17}	2.679890×10^{-1555}
101	3	0.000000	1.000000	1.612383×10^{-17}	3	1.612383×10^{-17}	8.163089×10^{-1615}

На Фигура 2.4 са показани траекториите на приближенията, генерирани от методите (4) за $N=1$ до 19-тата итерация и за $N=61$ до 6 итерация. Траекториите на приближенията, генерирани от другите изследвани методи от типа на Вайерщрас (4), са подобни или на $N=1$, или на $N=61$.



Фигура 2.4: Траектории на приближенията за полинома $f(z)=z^{20}-1$.

Глава 3. Теореми за сходимост на фамилия итерационни методи от типа на Ерлих с висок ред на сходимост

Трета глава се състои от пет параграфа. В тази глава се изследва локалната и полулокалната сходимост на фамилията итерационни методи от типа на Ерлих (5). Получени са три основни резултата: две теореми за локална сходимост от първи и втори тип (Теорема 3.2 и Теорема 3.3) и една теореми за полулокална сходимост (Теорема 3.4). Тази глава също завършва с числени примери, които показват някои практически приложения на получената теорема за полулокална сходимост.

Резултатите от трета глава са публикувани в статията [90].

В **параграф 3.1** е въведена фамилията итерационни методи от типа на Ерлих (5) и теоремата на Кюркчиев и Андреев [30] за сходимост на методите от типа на Ерлих (вж. Теорема 3.1).

В **параграф 3.2** изследваме сходимостта на методите от типа на Ерлих (5) относно функцията на началните условия от първи тип $E\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$, дефинирана чрез (10). Дефинираме реалното число R както следва:

$$R = \frac{2}{b+1+\sqrt{(b-1)^2+8a}} \qquad (a > 0 \text{ и } b \geq 1). \tag{25}$$

Дефиниция 3.2. Дефинираме рекурентната редица $(\phi_N)_{N=0}^{\infty}$ от функции $\phi_N\colon [0,R] \to [0,1]$ като положим $\phi_0(t) \equiv 1$ и

$$\phi_{N+1}(t) = \frac{at^2\phi_N(t)}{(1-t)(1-bt) - at^2\phi_N(t)}\,. \tag{26}$$

Следващият резултат е първата основна теорема в Глава 3. Този резултат обобщава, подобрява и допълва резултата на Кюркчиев-Андреев [30] за итерационните методи от типа на Ерлих (Теорема 3.1). Подобренията са: по-широка област на сходимост и по-добра априорна оценка на грешката. Освен това теоремата допълва резултата на Кюркчиев-Андреев с апостериорна оценка на грешката. При $N = 1$ новата теорема съвпада с резултата на Пройнов [77] за сходимост от първи тип на метода на Ерлих (2).

Теорема 3.2. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, който притежава само прости нули в $\mathbb{K}$, $\xi \in \mathbb{K}^n$ е вектор-корен на f, $N \geq 1$ и $1 \leq p \leq \infty$. Нека $x^{(0)} \in \mathbb{K}^n$ е начално приближение, удовлетворяващо условието:*

$$E(x^{(0)}) = \left\| \frac{x^{(0)} - \xi}{d(\xi)} \right\|_p < R = \frac{2}{b+1+\sqrt{(b-1)^2+8a}}\,, \tag{27}$$

където E се дефинира чрез (10), $a = (n-1)^{1/q}$ *и* $b = 2^{1/q}$*. Тогава итерацията от типа на Ерлих* (5) *е коректно дефинирана и сходяща към* ξ *с оценки на грешката*

$$\|x^{(k+1)} - \xi\| \preceq \lambda^{(2N+1)^k} \|x^{(k)} - \xi\| \quad и \quad \|x^{(k)} - \xi\| \preceq \lambda^{((2N+1)^k-1)/(2N)} \|x^{(0)} - \xi\|$$

за всяко $k \geq 0$*, където* $\lambda = \phi_N(E(x^{(0)}))$*.*

От първата основна теорема в Глава 3 са получени две следствия, всяко от които подобрява резултата на Кюркчиев и Андреев [30].

Следствие 3.2. *Нека* $f \in \mathbb{K}[z]$ *е полином от степен* $n \geq 2$*, който притежава* n *прости нули в* $\mathbb{K}$*,* $\xi \in \mathbb{K}^n$ *е вектор-корен на* f*,* $N \geq 1$*,* $1 \leq p \leq \infty$ *и* $0 < h < 1$*. Нека* $x^{(0)} \in \mathbb{K}^n$ *е начално приближение, такова че*

$$E(x^{(0)}) = \left\| \frac{x^{(0)} - \xi}{d(\xi)} \right\|_p < R_h = \frac{2}{b + 1 + \sqrt{(b-1)^2 + 4a(1 + 1/h^2)}}\,,$$

където E се дефинира чрез (10), $a = (n-1)^{1/q}$ *и* $b = 2^{1/q}$*. Тогава итерацията от типа на Ерлих* (5) *е коректно дефинирана и сходяща към* ξ *с оценки на грешката*

$$\|x^{(k+1)} - \xi\| \preceq h^{2N(2N+1)^k} \|x^{(k)} - \xi\| \quad и \quad \|x^{(k)} - \xi\| \preceq h^{(2N+1)^k - 1} \|x^{(0)} - \xi\|$$

за всяко $k \geq 0$*.*

В **параграф 3.3** изследваме сходимостта на методите от типа на Ерлих (5) относно функцията на началните условия от втори тип $E\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}_+$, дефинирана чрез (13). В предния параграф дефинирахме числото R и функциите ϕ_N съответно с (25) и (26). В този параграф дефинираме R и ϕ_N по същия начин, но като положим $b = 2$. С други думи, дефинираме R и ϕ_N чрез формулите

$$R = \frac{2}{3 + \sqrt{1 + 8a}} \quad \text{и} \quad \phi_{N+1}(t) = \frac{at^2 \phi_N(t)}{(1-t)(1-2t) - at^2\phi_N(t)}\,,$$

където $a > 0$ е константа. За дадено цяло число $N \geq 1$ дефинираме функция $\psi_N\colon [0, R] \to (0, 1]$ както следва:

$$\psi_N(t) = \frac{(1-t)(1-2t) - at^2\phi_{N-1}(t)}{1 - t - at^2\phi_{N-1}(t)}\,.$$

Следващият резултат е втората основна теорема в Глава 3. В случая $N = 1$ и $p = \infty$ този резултат съвпада с резултата на Пройнов [77] за сходимост от втори тип на метода на Ерлих (2).

Теорема 3.3. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, $\xi \in \mathbb{K}^n$ е вектор-корен на f, $N \geq 1$ и $1 \leq p \leq \infty$. Нека $x^{(0)} \in \mathbb{K}^n$ е начално приближение с различни координати, такова че*

$$E(x^{(0)}) = \left\| \frac{x^{(0)} - \xi}{d(x^{(0)})} \right\|_p \leq R = \frac{2}{3 + \sqrt{1 + 8a}},$$

където функцията E е дефинирана чрез (13) и $a = (n-1)^{1/q}$. Тогава f притежава само прости нули в $\mathbb{K}$ и итерацията от типа на Ерлих (5) е коректно дефинирана и сходяща към ξ с оценки на грешката

$$\|x^{(k+1)} - \xi\| \preceq \theta \lambda^{(2N+1)^k} \|x^{(k)} - \xi\| \quad \text{и} \quad \|x^{(k)} - \xi\| \preceq \theta^k \lambda^{((2N+1)^k - 1)/2N} \|x^{(0)} - \xi\|$$

за всяко $k \geq 0$, където $\lambda = \phi_N(E(x^{(0)}))$, $\theta = \psi_N(E(x^{(0)}))$. Освен това методът е сходящ с ред на сходимост $2N + 1$, при условие че $E(x^{(0)}) < R$.

В **параграф 3.4** изследваме полулокалната сходимост на методите от типа на Ерлих (5) относно функция на началните условия от трети тип $E_f \colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}_+$, дефинирана с (19). При $N \geq 2$ следващият резултат е исторически първата теорема за сходимост на методите от типа на Ерлих с компютърно проверяеми начални условия. Тази теорема е третата основна теорема в Глава 3.

Теорема 3.4. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, $N \geq 1$ и нека $1 \leq p \leq \infty$. Нека $x^{(0)} \in \mathbb{K}^n$ е начално приближение с различни координати, такова че*

$$E_f(x^{(0)}) = \left\| \frac{W_f(x^{(0)})}{d(x^{(0)})} \right\|_p < \frac{8}{(3 + \sqrt{1 + 8a})^2},$$

където E_f се дефинира чрез (19) и $a = (n-1)^{1/q}$. Тогава f притежава само прости нули в $\mathbb{K}$ и итерацията от типа на Ерлих (5) е коректно дефинирана и сходяща към вектор-корен ξ на f с ред на сходимост $2N + 1$ и с оценка на грешката

$$\|x^{(k)} - \xi\| \preceq \alpha(E_f(x^{(k)})) \, \|W_f(x^{(k)})\|$$

за всяко $k \geq 0$, такова че $E_f(x^{(k)}) < 8/(3 + \sqrt{1 + 8a})^2$, където функцията α се дефинира чрез (21).

В **Параграф 3.5** са дадени числени примери, които илюстрират някои практически приложения на получената теорема за полулокална сходимост за методите от типа на Ерлих (5). Приложенията са аналогични на тези на полулокалните теореми за сходимост на методите от типа на Вайерщрас (вж. стр. 18) с единствената разлика, че тук редът на сходимост е $2N + 1$.

Заключение

Резюме на получените резултати

По мнение на автора основните приноси в настоящия дисертационен труд са:

1. Получена е нова теорема за локална сходимост от първи тип с априорна и апостериорна оценки на грешката за итерационните методи от типа на Вайерщрас (Теорема 2.2). Полученият резултат обобщава, подобрява и допълва резултата на Кюркчиев и Андреев [29] (1985), а при $N = 1$ съвпада с резултата на Пройнов [75] (2015) за сходимост от първи тип на метода на Вайерщрас.

2. Получена е теорема за локална сходимост от втори тип с априорна и апостериорна оценки на грешката за методите от типа на Вайерщрас (Теорема 2.3). При $N \geq 2$ тази теорема е първият резултат в математическата литература за локална сходимост от втори тип на методите от типа на Вайерщрас, а при $N = 1$ и $p = \infty$ тя съвпада с резултата на Пройнов [75] (2015) за сходимост от втори тип за метода на Вайерщрас.

3. Получени са две теореми за полулокална сходимост с апостериорна оценка за грешката за методите от типа на Вайерщрас (Теорема 2.4 и Теорема 2.5). При $N \geq 2$ тези теореми са първите резултати в математическата литература за полулокална сходимост на методите от типа на Вайерщрас.

4. Получена е нова теорема за локална сходимост от първи тип за итерационните методи от типа на Ерлих с априорни и апостериорни оценки на грешката (Теорема 3.2). Полученият резултат обобщава, подобрява и допълва резултата на Кюркчиев и Андреев [30] (1987), а при $N = 1$ съвпада с резултата на Пройнов [77] (2015) за сходимост от първи тип на метода на Ерлих.

5. Получена е теорема за локална сходимост от втори тип с априорна и апостериорна оценки на грешката за методите от типа на Ерлих (Теорема 3.3). При $N \geq 2$ тази теорема е първият резултат в математическата литература за локална сходимост от втори тип на методите от типа на Ерлих, а при $N = 1$ и $p = \infty$ съвпада с резултата на Пройнов [77] (2015) за сходимост от втори тип за метода на Ерлих.

6. Получена е теорема за полулокална сходимост с апостериорна оценка за грешката за методите от типа на Ерлих (Теорема 3.4). При $N \geq 2$ тази теорема е първият резултат в математическата литература за полулокална сходимост на методите от типа на Ерлих.

7. Приведени са приложения на получените теореми за полулокална сходимост на итерационните методи от типа на Вайерщрас и Ерлих за компютърно доказване, че:

• даден полином притежава само прости нули;

• даден итерационен метод от типа на Вайерщрас или Ерлих при дадено начално приближение е коректно дефиниран и сходящ към вектор-корен на полинома със съответния ред на сходимост;

• при всяка итерация чрез итерационните методи от типа Вайерщрас или Ерлих нулите на полинома са пресметнати с гарантирана точност.

Списък на публикациите по дисертационния труд

Основните резултати от дисертационния труд са публикувани в следните научни статии:

1. Proinov P.D., Vasileva M.T., On the convergence of a family of Weierstrass-type root-finding methods, Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences 68 (2015) No. 6, 697–704.
   www.proceedings.bas.bg/ ISSN:1310–1331. **(Impact factor: 0.284)**

2. Proinov P.D., Vasileva M.T., On the convergence of high-order Ehrlich-type iterative methods for approximating all zeros of a polynomial simultaneously, Journal of Inequalities and Applications 2015 (2015), Article ID 336, 25 pages.
   doi:10.1186/s13660-015-0855-5 ISSN:1029-242X. **(Impact factor: 0.773)**

3. Proinov P.D., Vasileva M.T., On a family of Weierstrass-type root-finding methods with accelerated convergence, Applied Mathematics and Computation 273 (2016) 957–968.
   doi:10.1016/j.amc.2015.10.048 ISSN: 0096–3003. **(Impact factor: 1.551)**

Връзките между приносите, целите, задачите, мястото на описание в дисертационния труд и направените публикации по темата са следните:

Приноси	Цел	Задачи	Параграфи	Публикации
1	1	Задача 1	2.2	1
2	1	Задача 1	2.3	3
3	1	Задача 2	2.4	3
4	1	Задача 3	3.2	2
5	1	Задача 3	3.3	2
6	1	Задача 4	3.4	2
7	1	Задачи 2 и 4	2.5 и 3.5	3 и 2

Апробация на получените резултати

А) Доклади на семинари и конференции

- Итерационни методи от типа на Ерлих с висок ред на сходимост, Научен семинар “Итерационни методи и неподвижни точки”, ПУ “Паисий Хилендарски”, Пловдив, 27 юни 2014. http://fmi-plovdiv.org/GetResource?id=1772
- A family of Ehrlich-type iterative methods with high order of convergence, Юбилейна научна конференция 125 години математика и природни науки в СУ ”Св. Климент Охридски”, София, 5–7 декември 2014. http://125years.fmi.uni-sofia.bg/
- On a family of Weierstrass-type root-finding methods with high order of convergence, Докторантска конференция по математика и информатика, София 15–18 октомври 2015. http://math.bas.bg/midoc2015/

Б) Участие в проекти

- Научен проект НИ11-ФМИ-004 към НПД на ПУ на тема: “Разработка и приложение на иновативни ИКТ за провеждане на качествени конкурентноспособни научни изследвания и цялостно осъвременяване процеса на обучение във ФМИ”, 2011-2012.
- Научен проект НИ13-ФМИ-002 към НПД на ПУ на тема: “Интеграция на ИТ в научните изследвания по математика, информатика и педагогика на обучението”, 2013-2014.
- Научен проект НИ15-ФМИ-004 към НПД на ПУ на тема: “Иновативни фундаментални и приложни научни изследвания по компютърни науки, математика и педагогика на обучението”, 2015-2016.

Декларация за оригиналност

от **Мария Тонкова Василева**,
редовен докторант към катедра "Математически анализ"
при Факултет по математика и информатика
на Пловдивски университет "Паисий Хилендарски"

Във връзка с провеждането на процедура за придобиване на образователната и научна степен "доктор" в Пловдивски университет "Паисий Хилендарски" и защита на представения от мен дисертационен труд, декларирам:

Резултатите и приносите на проведеното дисертационно изследване, представени в дисертационния ми труд на тема "Ускорена сходимост на фамилии от итерационни методи за едновременна апроксимация на нули на полиноми", са оригинални и не са заимствани от изследвания и публикации, в които нямам участие.

27.11.2015 г. ДЕКЛАРАТОР:
гр.Пловдив /Мария Тонкова Василева/

Благодарности

Изказвам своята искрена признателност и благодарност на своя научен ръководител проф. д.м.н. Петко Димитров Пройнов за неговите ценни напътствия, професионална компетентност и съдействие при реализацията на настоящия дисертационен труд. Изключително благодаря за получените знания, умения, както и безценната подкрепа и търпение.

Благодаря специално на своето семейство, приятели и колеги за подкрепата, търпението и стимулиращите напътствия. Сърдечно благодаря на своята майка и приятеля си, които изтърпяха целия творчески процес, свързан с написването на настоящия дисертационен труд.

Библиография

[1] Aberth O., Iteration methods for finding all zeros of a polynomial simultaneously, Math. Comput. 27 (1973) 339–344.

[2] Ahmad F., N.A. Mir, N. Akmal, Simultaneous methods for determining zeros of nonlinear equations, J. Appl. Environ. Biol. Sci. 5 (2015), No. 7, 378–382.

[3] Batra P., Improvement of a convergence condition for Durand-Kerner iteration, J. Comput. Appl. Math. 96 (1998) 117–125.

[4] Börsch-Supan W., Residuenabschatzung fur Polynom-Nullstellen mittels Lagrange-Interpolation, Numer. Math. 14 (1970) 287–296.

[5] Cauchy A.-L., Sur la résolution des équations numeriques et sur la théorie de l'élimination, Paris, 1829, in: Oeuvres Complétes d'Augustin Cauchy, Ser. 2, Vol. 9, Imprimerie Gauthier, Paris, 1891, pp. 87–161

[6] Cholakov S.I., Local convergence of a Chebyshev-type method for finding polynomial zeros simultaneously, Scientific Researches of the Union of Scientists in Bulgaria-Plovdiv Ser. B 14 (2012) 197–200.

[7] Cholakov S.I., Local convergence of Chebyshev - like method for simultaneous finding polynomial zeros, C. R. Acad. Bulg. Sci. 66 (2013), No. 8, 1081–1090.

[8] Cholakov S.I., Convergence of Chebyshev-like Iteration Methods for Simultaneous Approximation of Polynomial Zeros, PhD dissertation, University of Plovdiv, Plovdiv, 2014, 107 pages. (in Bulgarian)

[9] Cholakov S.I., M.D. Petkova, On the convergence of a fourth–order method for simultaneous finding polynomial zeros, Ind. J. Appl. Res. 5 (2015), No. 4, 397–402.

[10] Cira O., The Convergence Simultaneous Inclusion Methods, Matrix Rom, Bucuresti, 2012.

[11] Cira O., C.M. Cira, Simultaneous inclusion methods with rate of convergence greater than four, Anal. Univ. Vest Timişoara Univ. Ser. Mat.–Inform. 46 (2008), No. 2, 37–56.

[12] Cira O., C.M. Cira, Optimal inequality factor for Durand-Kerner's and Tanabe's methods, Rev. Anal. Numér. Théor. Approx. 40, No. 2 (2011) 128–148.

[13] Cira O., S. Maruster, Optimal inequality factor for Ehrlich-Aberth's method, in: Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing (SYNASC), IEEE, 2011, pp. 63–70.

[14] Dochev K., Modified Newton method for the simultaneous approximation of all roots of an algebraic equation, Phys. Math. J. Bulg. Acad. Sci. 5 (1962) 136–139. (in Bulgarian)

[15] Dochev K., P. Byrnev, Certain modifications of Newton's method for the approximate solution of algebraic equations, USSR Comput. Math. Math. Phys. 4 (1964), No. 5, 174—182.

[16] Durand E., Solutions Numériques des Equations Algébriques, Tome I: Équations du Type $F(x) = 0$; Racines d'un Polynôme, Masson, Paris, 1960.

[17] Džunić, J. Multistep methods for solving nonlinear equations, PhD dissertation, University of Niš, Niš, 2012, 132 pages. (in Serbian)

[18] Ehrlich L.W., A modified Newton method for polynomials, Comm. AMC 10 (1967) 107–108.

[19] Engler A.J., A. Prestel, Valued Fields, Springer Monographs in Mathematics,

Springer, Berlin, 2005.

[20] Han D., The convergence of the Durand-Kerner method for simultaneously finding all zeros of a polynomial, J. Comput. Math. 18 (2000) 567–570.

[21] Hopkins M., B. Marshall, G. Schmidt, S. Zlobec, On a method of Weierstrass for the simultaneous calculation of the roots of a polynomial, Z. Angew. Math. Mech. 74 (1994) 295–306.

[22] Iliev A., N. Kyurkchiev, Some methods for simultaneous extraction of a part of all multiple roots of algebraic polynomials, Computing 75 (2005) 85–97.

[23] Iliev A., N. Kyurkchiev, Q. Fang, On a generalization of the Euler-Chebyshev method for simultaneous extraction of only a part of all roots of polynomials, Japan J. Indust. Appl. Math. 23 (2006) 63–73.

[24] Iliev A., N. Kyurkchiev, Nontrivial Methods in Numerical Analysis: Selected Topics in Numerical Analysis, Lambert Academic Publishing, Saarbrücken, 2010.

[25] Iliev L., Laguerre Entire Functions, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, 1987.

[26] Ivanov S.I., Convergence of Halley's Iteration Method for Individual and Simultaneous Approximation of Polynomial Zeros, PhD dissertation, University of Plovdiv, Plovdiv, 2014, 115 pages. (in Bulgarian)

[27] Ivanov S.I., On the convergence of Chebyshev's method for multiple polynomial zeros, Results Math. (2015)

[28] Kerner I.O., Ein Gesamtschrittverfahren zur Berechnung der Nullstellen von Polynomen, Numer. Math. 8 (1966) 290–294.

[29] Kjurkchiev N.V., A. Andreev, A modification of the Weierstrass-Dochev method of convergence order $R+2$ for the simultaneous approximate calculation of all roots of an algebraic equation, C. R. Acad. Bulg. Sci. 38 (1985) 1461–1463. (in Russian)

[30] Kjurkchiev N.V., A. Andreev, Ehrlich's methods with a raised speed of convergence, Serdica Math. J. 13 (1987) 52–57.

[31] Kjurkchiev N.V., S.M. Markov, Two interval methods for algebraic equation with real roots, Pliska Stud. Math. Bulg. 5 (1983) 118–131.

[32] Kyurkchiev N.V., Initial Approximations and Root Finding Methods, Mathematical Research, Vol. 104, Wiley, Berlin, 1998.

[33] Kyurkchiev N.V., S.P. Taschev, A method for simultaneous determination of all roots of algebraic polynomials, C. R. Acad. Bulg. Sci. 34 (1981) 1053–1055. (in Russian)

[34] Kűrschák J., Über Limesbildung und allgemeine Körpertheorie, J. Reine Angew. Math. 142 (1913) 211–253.

[35] McNamee J.M., Numerical Methods for Roots of Polynomials Part I, Studies in Computational Mathematics, Vol. 14, Elsevier, Amsterdam, 2007.

[36] McNamee J.M., V. Pan, Numerical Methods for Roots of polynomials Part II, Studies in Computational Mathematics, Vol. 16, Elsevier, Amsterdam, 2013.

[37] Miloševic D. Iterative Methods for the Simultaneous Inclusion of Polynomial Zeros, PhD dissertation, University of Niš, Niš, 2005. (in Serbian)

[38] Miloševic D.M, M.R. Miloševic, J.D. Džunic, On an efficient inclusion method for finding polynomial zeros, J. Comput. Appl. Math 290 (2015) 298–309.

[39] Miloševic M.R. Iterative Methods for Approximsting Polynomial Zeros, PhD dissertation, University of Niš, 2011, Niš, 238 pages. (in Serbian)

[40] Milovanovic G., M. Petkovic, On the convergence order of a modified method for simultaneous finding polynomial zeros, Computing 30 (1983) 171–178.

[41] Mir N.A., R. Muneer, I. Jabeen Some families of two-step simultaneous methods for determining zeros of nonlinear equations, ISRN Applied Mathematics (2011), Article ID 817174, 11 pages.

[42] Nedzhibov G.H., A family of multi-point iterative methods for solving systems of nonlinear equations, J. Comput. Appl. Math. 222 (2008) 244–250.

[43] Nedzhibov G.H., M.G. Petkov, On a family of iterative methods for simultaneous extraction of all roots of algebraic polynomial, Appl. Math. Comput. 162 (2005) 427–433.

[44] Niell A.M., The simultaneous approximation of polynomial roots, Comput. Math.

Appl. 41 (2001) 1–14.

[45] Nikolova I.A., Theorems for Existing and Approximating Fixed Points in Cone Normed Spaces, PhD dissertation, University of Plovdiv, Plovdiv, 2015, 104 pages. (in Bulgarian)

[46] Nourein A.-W.M. An improvement on two iteration methods for simultaneous determination of the zeros of a polynomial, Internat. J. Comput. Math. 6 (1977) 241–252.

[47] Petkov M., N. Kyurkchiev, Numerical Methods for Solving Nonlinear equations, University of Sofia, Sofia, 2000. (in Bulgarian)

[48] Petkova M.D., Local and Semilocal Convergence of the One-Point and Two-Point Weierstrass Method for Simultaneous Approximation of Polynomial Zeros, PhD dissertation, University of Plovdiv, Plovdiv, 2014, 104 pages. (in Bulgarian)

[49] Petković M.S., Iterative Methods for Simultaneous Inclusion of Polynomial Zeros, Lecture Notes in Math. Vol. 1387, Springer, Berlin, 1989.

[50] Petković M.S., On initial conditions for the convergence of simultaneous root-finding methods, Computing 57 (1996) 163–177.

[51] Petković M.S., Point Estimation of Root Finding Methods, Lecture Notes in Mathematics Vol. 1933, Springer, Berlin, 2008.

[52] Petković M.S., On new higher order families of simultaneous methods for finding polynomial zeros, Lin. Algebra Appl. 429 (2008) 2602–2622.

[53] Petković M.S., C. Carstensen, M. Trajković, Weierstrass formula and zero-finding methods, Numer. Math. 69 (1995) 353–372.

[54] Petković M.S., D. Herceg, Börsch-Supan-like methods: point estimation and parallel implementation, Int. J. Comput. Math. 64 (1997) 327–341.

[55] Petković M.S., D. Herceg, Point estimation of simultaneous methods for solving polynomial equations, J. Comput. Appl. Math. 136 (2001) 283–307.

[56] Petković M.S., D.D. Herceg, S.M. Ilić, Point Estimation Theory and its Applications, Institute of Mathematics, Novi Sad, 1997.

[57] Petković M.S., D. Herceg, S. Ilić, Safe convergence of simultaneous methods for polynomial zeros, Numer. Algorithms 17 (1998) 313–331.

[58] Petković M.S., D. Herceg, Iv. Petković, On a simultaneous method of Newton-Weierstrass' type for finding all zeros of a polynomial, Appl. Math. Comput. 215 (2009) 2456–2463.

[59] Petković M.S., S. Ilić, Point estimation and the convergence of the Ehrlich-Aberth method, Publ. Inst. Math. 62 (1997) 141–149.

[60] Petković M.S., S. Ilić, Iv. Petković, A posteriori error bound methods for the inclusion of polynomial zeros, J. Comput. Appl. Math. 208 (2007) 316–330.

[61] Petković L.D., M.R. Milošević, Improved higher order method for the inclusion of multiple zeros of polynomials, Facta Universitatis Ser. Math. Inform. 28 (2013), No. 4, 359—372.

[62] Petković M.S., B. Neta, L.D. Petković, J. Džunić, Multipoint Methods for Solving Nonlinear Equations, Amsterdam, Elsevier, 2013.

[63] Petković M.S., L.D. Petković Construction of zero-finding methods by Weierstrass functions, Appl. Math. Comput. 184 (2007) 351–359.

[64] Petković M.S., L.D. Petković, J. Dzunić, On an efficient simultaneous method for finding polynomial zeros, Appl. Math. Letters 28 (2014) 60–65.

[65] Petković M.S., L. Rančić, On the guaranteed convergence of a cubically convergent Weierstrass-like root-finding method, Int. J. Comput. Math. 92 (2015) 1303–1312.

[66] Petković M.S., L. Rančić, M. Milošević, On the new fourth-order methods for the simultaneous approximation of polynomial zeros, J. Comput. Appl. Math. 235 (2011) 4059–4075.

[67] Prešić M.D., A convergence theorem for a method for simultaneous determination of all zeros of a polynomial, Publ. Inst. Math. 28 (1980) 159–165.

[68] Prešić S.B., Un procédé itératif pour la factorisation des polynômes, C. R. Acad. Sci. Paris Sèr. A 262 (1966) A862–A863.

[69] Proinov P.D., A new semilocal convergence theorem for the Weierstrass method from

data at one point, C. R. Acad. Bulg. Sci. 59 (2006) 131–136.

[70] Proinov P.D., Semilocal convergence of two iterative methods for simultaneous computation of polynomial zeros, C. R. Acad. Bulg. Sci. 59 (2006) 705–712.

[71] Proinov P.D., General local convergence theory for a class of iterative processes and its applications to Newton's method, J. Complexity 25 (2009) 38–62.

[72] Proinov P.D., New general convergence theory for iterative processes and its applications to Newton-Kantorovich type theorems, J. Complexity 26 (2010) 3–42.

[73] Proinov P.D., A unified theory of cone metric spaces and its application to the fixed point theory, Fixed Point Theory Appl. 2013 (2013) Article ID 103, 38 pages.

[74] Proinov P.D., Approximation of Fixed Points and Applications to Numerical Solution of Nonlinear Equations, DSc dissertation, University of Plovdiv, Plovdiv, 2014, 304 pages.

[75] Proinov P.D., General convergence theorems for iterative processes and applications to the Weierstrass root-finding method, J. Complexity 33 (2016) 118–144.

[76] Proinov P.D., Relationships between different types of initial conditions for simultaneous root finding methods, Appl. Math. Letters 52 (2016) 102–111.

[77] Proinov P.D., On the local convergence of the Ehrlich method for numerical computation of polynomial zeros, Calcolo (2015) doi:10.1007/s10092-015-0155-y.

[78] Proinov P.D., A general semilocal convergence theorem for simultaneous methods for polynomial zeros and its applications to Ehrlich's and Dochev-Byrnev's methods, Appl. Math. Comput. 284 (2016) 102-114.

[79] Proinov P.D., S.I. Cholakov, Convergence of Chebyshev-like method for simultaneous computation of multiple polynomial zeros, C. R. Bulg. Acad. Sci. 67 (2014) 907–918.

[80] Proinov P.D., S.I. Cholakov, Semilocal convergence of Chebyshev-like root-finding method for simultaneous approximation of polynomial zeros, Appl. Math. Comput. 236 (2014) 669–682.

[81] Proinov P.D., S.I. Ivanov, A theorem for local convergence of Halley's method for finding polynomial zeros simultaneously, Scientific Researches of the Union of Scientists in Bulgaria–Plovdiv Ser. B 14 (2012) 173–176.

[82] Proinov P.D., S.I. Ivanov, On the convergence of Schröder's method for polynomial zeros of unknown multiplicity, C. R. Bulg. Acad. Sci. 66 (2013) 1073–1080.

[83] Proinov P.D., S.I. Ivanov, On the convergence of Halley's method for multiple polynomial zeros, Mediterranean J. Math. (2014) 555–572.

[84] Proinov P.D., S.I. Ivanov, On the convergence of Halley's method for simultaneous computation of polynomial zeros, J. Numer. Math. 23 (2015) 379-394.

[85] Proinov P.D., I.A. Nikolova, Iterative approximation of fixed points of quasi-contraction mappings in cone metric spaces, J. Inequal. Appl. 2014 (2014), Article ID 226, 14 pages.

[86] Proinov P.D., M.D. Petkova, Convergence of the Weierstrass method for simultaneous approximation of polynomial zeros, C. R. Acad. Bulg. Sci. 66 (2013) 809–818.

[87] Proinov P.D., M.D. Petkova, A new semilocal convergence theorem for the Weierstras method for finding zeros of a polynomial simultaneously, J. Complexity 30 (2014) 366–380.

[88] Proinov P.D., M.D. Petkova, Convergence of the two-point Weierstrass root-finding method, Japan J. Indust. Appl. Math. 31 (2014) 279–292.

[89] Proinov P.D., M.T. Vasileva, On the convergence of a family of Weierstrass-type root-finding methods, C. R. Acad. Bulg. Sci. 68 (2015) 697–704.

[90] Proinov P.D., M.T. Vasileva, On the convergence of high-order Ehrlich-type iterative methods for approximating all zeros of a polynomial simultaneously, J. Inequal. Appl. 2015 (2015), Article ID 336, 25 pages.

[91] Proinov P.D., M.T. Vasileva, On a family of Weierstrass-type root-finding methods with accelerated convergence, Appl. Math. Comput. 273 (2016) 957–968.

[92] Rančić L.Z. Simultaneous Methods for Solving Algebraic Equations, PhD dissertation, University of Niš, Niš, 2005. (in Serbian)

[93] Rančić L.Z., M.S. Petković, New simultaneous root-finding methods with accelerated convergence for analytic functions, J. Comput. Appl. Math (2015)

[94] Sakurai T., M.S. Petković, On some simultaneous methods based on Weierstrass correction, J. Comp. Appl. Math. 72 (1996) 275–291.

[95] Sendov Bl., A. Andreev, N. Kjurkchiev, Numerical Solution of Polynomial Equations, in: Handbook of Numerical Analysis, Vol. III, (eds. P.G. Ciarlet, J.L. Lions), Elsevier, Amsterdam, 1994, pp. 625–778.

[96] Sendov Bl., V. Popov, Méthodes d'Analyse Numérique, Tome 1, Sofia, 1996.

[97] Smale S., Newton's method estimates from data at one point, The Merging of Disciplines: New Direction in Pure, Applied, and Computational Mathematics (eds. R.E. Ewing, K.E. Gross, C.F. Martin), Springer, New York, 1986, pp. 185–196.

[98] Song J., Simultaneous methods for finding all zeros of a polynomial, J. Math. Sci. Adv. Appl. 33 (2015) 5–18.

[99] Taschev S., N. Kjurkchiev, Certain modifications of Newton's method for the approximate solution of algebraic equations, Serdica Math. J. 9 (1983) 67–73. (in Russian)

[100] Tilli P., Convergence conditions of some methods for the simultaneous computation of polynomial zeros, Calcolo 35 (1998) 3–15.

[101] Toseva D., N. Kyurkchiev, A. Iliev, On some iterative algorithms for polynomial factorization, C. R. Acad. Bulg. Sci. 64 (2011) 1403–1414.

[102] Wang D., F. Zhao, Complexity analysis of a process for simultaneously obtaining all zeros of polynomials, Computing 43 (1989) 187–197.

[103] Wang D., F. Zhao, On the determination of the safe initial approximation for the Du-rand-Kerner algorithm, J. Comput. Appl. Math. 38 (1991) 447–456.

[104] Wang D., F. Zhao, The theory of Smale's point estimation and its applications, J. Comput. Appl. Math. 60 (1995) 253–269.

[105] Wang D., F. Zhao, The globalization of Duran-Kerner algorithm, Appl. Math. Mech. 18 (1997), No. 11, 1045–1057.

[106] Weierstrass K., Neuer Beweis des Satzes, dass jede ganze rationale Function einer Veränderlichen dargestellt werden kann als ein Product aus linearen Functionen derselben Veränderlichen. Sitzungsber. Königl. Akad. Wiss. Berlin (1891) 1085–1101.

[107] Werner W., On the simultaneous determination of polynomial roots, Lecture Notes Math. 953 (1982) 188–202.

[108] Wilkinson J.H., Rounding Errors in Algebraic Processes, Prentice Hall, New Jersey, 1963.

[109] Wolfram Mathematica, version 7, Wolfram Research, Inc., Champaign, Illinois, USA (2009).

[110] Yakoubsohn J.-C., Simultaneous computation of all the zero-clusters of univariate polynomial, in: Foundations of Computational Mathematics, World Sci. Publ., River Edge, NJ (2002) 433–455.

[111] Zabrejko P.P., K-metric and K-normed linear spaces: survey, Collect. Math. 48 (1997) 825–859.

[112] Zhang X., H. Peng, G. Hu, A high order iteration formula for the simultaneous inclusion of polynomial zeros, Appl. Math. Comput. 179 (2006) 545–552.

[113] Zhao F., D. Wang, The theory of Smale's point estimation and the convergence of Durand-Kerner program, Math. Numer. Sinica 15 (1993) 196–206. (in Chinese)

[114] Zheng S.M., The convergence of the Durand-Kerner method for simultaneously finding all the roots of a polynomial, Chinese Science Bulletin 27 (1982), No. 9, 515–517. (in Chinese)

[115] Zheng S.M., On convergence of a parallel algorithm for finding the roots of a polynomial, J. Math. Res. Appl. 7 (1987), No. 4, 657–660. (in Chinese)

[116] Zheng S.M., Z.D. Huang, On convergence of Nourein iterations for simultaneous finding all zeros of a polynomial, J. Comput. Math. 18 (2000) 113-122.