

Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“

Факултет по математика и информатика

Катедра „Алгебра и геометрия“

Стефан Илиев Божков

МАТЕМАТИЧНИ МЕТОДИ ЗА ИЗСЛЕДВАНЕ НА
ЕЛЕКТРОМАГНИТНИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕЖДУ ТЕЛА,
ИМАЩИ ЦЕНТЪР НА СИМЕТРИЯ

Автореферат

за присъждане на

образователна и научна степен „Доктор“

в област 4. Природни науки, математика и информатика,

професионално направление 4.5. Математика,

докторска програма „Алгебра и теория на числата“

Научен ръководител: **доц. д-р Кирил Христов Коликов**

Пловдив, 2015г.

Дисертационният труд е обсъден и насрочен за защита на разширен катедрен съвет на катедра „Алгебра и геометрия” при Факултет по математика и информатика на Пловдивски университет „Паисий Хилендарски”, град Пловдив, проведен на 05.06.2015 г.

Дисертационният труд е с общ обем от 90 страници и включва увод, девет глави и библиография, състояща се от 46 източника. Списъкът на авторските публикации включва 6 заглавия, от които 4 на български език и 2 на английски език.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на г. в Заседателна зала на Нова сграда на Пловдивски университет „Паисий Хилендарски” на открито заседание на научно.

Номерацията на формулите, цитиранията, примерите, таблиците и фигурите съвпада с тяхната номерация в дисертационния труд.

Материалите по защитата са на разположение на интересуващите се в секретариат на ФМИ, нова сграда на ПУ, каб. 330, всеки ден от 8:30 до 17:00 часа.

Автор на дисертационния труд: Стефан Илиев Божков

Заглавие: Математични методи за изследване на електромагнитни взаимодействия между тела, имащи център на симетрия

Съдържание

Обща характеристика на дисертационния труд	4
Актуалност на дисертационния труд	4
Цели и задачи на дисертационния труд	4
Структура и обем на дисертационния труд	4
Кратко съдържание на дисертационния труд	6
§1. Електростатично взаимодействие между две заредени проводящи сфери	6
§2. Допълване на кулоновата сила и кулоновия потенциал при ненулеви заряди	8
§4. Оценка на коефициентите, коригиращи кулоновата сила и кулоновия потенциал	10
§5. Приблизени формули за намиране на електростатичната сила на взаимодействие между две проводящи сфери	14
§6. Отклонение на кулоновата сила и енергия от силата и енергията на взаимодействие между две сфери с равни радиуси	16
§9. Приложение на резултатите за електростатичното взаимодействие между две сфери	17
Заклучение и изводи	24
Декларация за оригиналност и достоверност на дисертационния труд	26
Публикации по дисертационния труд	27
Библиография	28

ОБЩА ХАРАКТЕРИСТИКА НА ДИСЕРТАЦИОННИЯ ТРУД

Актуалност на дисертационния труд

Дисертационния труд е посветен на използването на алгебрични методи за изследване на електростатичните взаимодействия между тела с център на симетрия. В последните години се забелязва значително повишаване на научния интерес към електростатичните взаимодействия между проводящи тела. Нека споменем част от статиите, резглеждащи различни случаи в тази област: [Khair 2013], [Lekner 2012], [Munirov et al 2013], [de Oliveira et al 2012], [Murovec et al 2013], [Polyakov et al 2014], [Saranin 2013a], [Saranin 2013b].

Цели и задачи на дисертационния труд

Основната цел на дисертационния труд е да се приложат алгебрични методи в изследването на електромагнитни взаимодействия между тела с център на симетрия.

Задачи:

- 1) Извеждане на точни формули за силата и потенциалната енергия на електростатичното взаимодействие между сфери с произволни радиуси и заряди.
- 2) Извеждане на приближени формули за силата на електростатичното взаимодействие между сфери с произволни радиуси и заряди.
- 3) Намиране отклоненията на кулоновата сила, на кулоновия потенциал и на приближените формули спрямо силата и потенциалната енергия на електростатичното взаимодействие между две сфери.
- 4) Прилагане на получените резултати за намиране на електростатичните взаимодействия между торове.

Структура и обем на дисертационния труд

В §1, използвайки метода на зарядовите образи и някои алгебрични преобразувания, намираме точни формули за силата и енергията на електростатично взаимодействие между проводящи сфери с произволни радиуси и заряди. Намираме още и формула за потенциал в произволна точка от полето, индуцирано от сферите.

В §2 представяме формулите, изведени в §1, като произведение на взаимодействията на точкови заряди и коригиращи (допълващи) коефициенти.

В §3 представяме три по-интересни частни случая и извеждаме опростени формули за всеки един от тях. Показваме, че вече изведените формули за някои частни случаи могат да се получат и от нашите резултати.

В §4 докзваме сходимостта на коригиращите коефициенти L и H в частния случай на две сфери с равни радиуси и заряди. В този параграф показваме и как може да се заместят безкрайните с парциални суми на коригиращите коефициенти за да получим резултат с предварително избрана произволна точност.

В §5 извеждаме някои приближени формули за намиране силата на електростатично взаимодействие между сфери с произволни радиуси и заряди.

В §6 изследваме отклонението на кулоновата сила и кулоновият потенциал от силата и потенциална на електростатично взаимодействие между сфери с равни радиуси. Показваме в кои случаи за улеснение може да се използва закона на Кулон и в кои случаи това е невъзможно.

В §7 се изследва неточността на приближените формули спрямо точната формула за силата на електростатично взаимодействие между две заредени проводящи сфери.

В §8 се дава оценка на отклонението на кулоновият потенциал от потенциалната енергия на електростатично взаимодействие между две сфери.

В §9 прилагаме получените резултати за намиране на електростатичното взаимодействие на протоните и неутроните в атомните ядра като ги моделираме със сфери и торове.

Дисертационния труд е структуриран в увод, девет параграфа, заключение и библиография с общ обем 90 страници.

Библиографията включва 46 източника

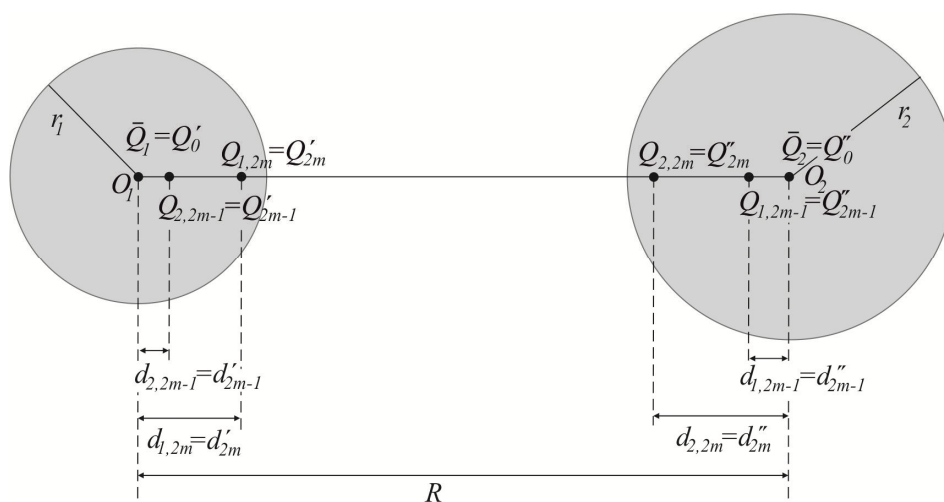
Дисертационният труд е разработен към катедра “Алгебра и геометрия” на Факултета по математика и информатика на Пловдивския университет “Паисий Хилендарски” в периода 2012-2015 година.

КРАТКО СЪДЪРЖАНИЕ НА ДИСЕРТАЦИОННИЯ ТРУД

§1. Електростатично взаимодействие между две заредени проводящи сфери

В [Kolikov et al 2012a] и отчасти в [Коликов и др. 2014] е разгледано взаимодействието между две непресичащи се сфери с различни радиуси и заряди, отстоящи на произволно разстояние помежду си.

Нека S_1 и S_2 са две незаземени наелектризирани проводящи сфери, съответно, със заряди Q_1 , Q_2 и радиуси r_1 , r_2 , а R е разстоянието между центровете им O_1 , O_2 в инерциална система J (Фиг. 1.1).



Фиг. 1.1. Електростатично взаимодействие между две проводящи сфери

В резултат на електростатичното взаимодействие между S_1 и S_2 , по техните повърхнини се появяват съответно индуцирани заряди \tilde{Q}_1 и \tilde{Q}_2 , които са свързани помежду си. Тогава по повърхнините на S_1 и S_2 остават равномерно разпределени заряди \bar{Q}_1 и \bar{Q}_2 , като от закона за съхранение на електричния заряд следва, че са в сила равенствата

$$(1.1) \quad \bar{Q}_1 = Q_1 - \tilde{Q}_1 \text{ и } \bar{Q}_2 = Q_2 - \tilde{Q}_2.$$

Формално можем да приемем, че \tilde{Q}_1 и \tilde{Q}_2 са разположени върху отсечката O_1O_2 , а \bar{Q}_1 и \bar{Q}_2 са съсредоточени в центровете O_1 и O_2 на сферите.

За $i=1,2$ и $j=1,2,3,\dots$ въвеждаме функцията $f(i+j)=1$ при нечетно $i+j$, а $f(i+j)=2$ при четно $i+j$.

Да означим с $d_{1,j}$ разстоянието от заряда $Q_{1,j}$ до центъра $O_{f(1+j)}$, а с $d_{2,j}$ разстоянието от заряда $Q_{2,j}$ до центъра $O_{f(2+j)}$. Нека $\delta_1 = \frac{r_1}{R}$, $\delta_2 = \frac{r_2}{R}$.

Приемаме, че биномният коефициент $\binom{n}{0} = 1$ за всяко цяло число n и въвеждаме за $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ следните означения:

$$\begin{aligned}
 A_{1,j} &= 1 + \sum_{k=1}^j (-1)^k \sum_{s=0}^k \binom{j-1-s}{k-s} \binom{j-k+s}{s} \delta_1^{2(k-s)} \delta_2^{2s}, \\
 A_{2,j} &= 1 + \sum_{k=1}^j (-1)^k \sum_{s=0}^k \binom{j-1-s}{k-s} \binom{j-k+s}{s} \delta_1^{2s} \delta_2^{2(k-s)}, \\
 B_{1,j} &= 1 + \sum_{k=1}^j (-1)^k \sum_{s=0}^k \binom{j-s}{k-s} \binom{j-k+s}{s} \delta_1^{2(k-s)} \delta_2^{2s}, \\
 B_{2,j} &= 1 + \sum_{k=1}^j (-1)^k \sum_{s=0}^k \binom{j-s}{k-s} \binom{j-k+s}{s} \delta_1^{2s} \delta_2^{2(k-s)}.
 \end{aligned}
 \tag{1.4}$$

Въз основа на (1.3), използвайки равенствата (1.4), допускаме, че

$$\begin{aligned}
 d_{1,2m-1} &= \delta_2^2 R \frac{A_{1,m-1}}{B_{1,m-1}}, \quad d_{1,2m} = \delta_1^2 R \frac{B_{1,m-1}}{A_{1,m}}, \\
 d_{2,2m-1} &= \delta_1^2 R \frac{A_{2,m-1}}{B_{2,m-1}}, \quad d_{2,2m} = \delta_2^2 R \frac{B_{2,m-1}}{A_{2,m}}.
 \end{aligned}
 \tag{1.5}$$

Теорема 1.1. В сила са формули (1.5).

От формула (1.5) намираме разстоянията $d_{1,j}$ и $d_{2,j}$, съответно, от местоположенията на зарядите-образи $Q_{1,j}$ и $Q_{2,j}$ върху отсечката O_1O_2 до центровете на сферите, в които те лежат.

Ще определим зарядите-образи $Q_{1,j}$ и $Q_{2,j}$. Установяваме, че:

$$\begin{aligned}
 Q_{1,2m-1} &= -\frac{\delta_1^{m-1} \delta_2^m}{B_{1,m-1}} \overline{Q_1}, \quad Q_{1,2m} = \frac{\delta_1^m \delta_2^m}{A_{1,m}} \overline{Q_1}, \\
 Q_{2,2m-1} &= -\frac{\delta_1^m \delta_2^{m-1}}{B_{2,m-1}} \overline{Q_2}, \quad Q_{2,2m} = \frac{\delta_1^m \delta_2^m}{A_{2,m}} \overline{Q_2}.
 \end{aligned}
 \tag{1.11}$$

Нека

$$X_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta_1^m \delta_2^m}{A_{1,m}}, \quad X_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta_1^m \delta_2^m}{A_{2,m}}, \quad Y_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta_1^{m-1} \delta_2^m}{B_{1,m-1}}, \quad Y_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta_1^m \delta_2^{m-1}}{B_{2,m-1}},
 \tag{1.12}$$

където $\delta_i^0 = 1$ при $\delta_i = 0$ ($i = 1, 2$).

Получаваме, че

$$(1.13) \quad \bar{Q}_1 = \frac{Q_1(1+X_2)+Q_2Y_2}{(1+X_1)(1+X_2)-Y_1Y_2}, \quad \bar{Q}_2 = \frac{Q_2(1+X_1)+Q_1Y_1}{(1+X_1)(1+X_2)-Y_1Y_2}.$$

Въз основа на формули (1.11–1.13) намираме зарядите-образи $Q_{i,j}$ ($i=1,2$; $j=1,2,3,\dots$).

Нека да означим зарядите от формула (1.11), които са разположени в сферата S_1 с Q'_j , а тези, които са разположени в сферата S_2 с Q''_j ($j=0,1,2,\dots$) (Фиг. 1.1). Така $Q_{1,0} = \bar{Q}_1 = Q'_0$ и $Q_{2,0} = \bar{Q}_2 = Q''_0$, а за $m=1,2,3,\dots$ имаме $Q_{2,2m-1} = Q'_{2m-1}$, $Q_{1,2m} = Q'_{2m}$ и $Q_{1,2m-1} = Q''_{2m-1}$, $Q_{2,2m} = Q''_{2m}$ (Фиг. 1.1). Съответните им разстояния от формула (1.5) да означим с d'_j и d''_j за ($j=0,1,2,\dots$) (Фиг. 1.1).

Ако $\delta'_j = \frac{d'_j}{R}$, а $\delta''_j = \frac{d''_j}{R}$, то съгласно закона на Кулон, за големината F на проекцията върху O_1O_2 на силата на взаимодействие, действаща на сфери S_1 и S_2 , получаваме

$$(1.14) \quad F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{Q'_j Q''_i}{(1 - \delta'_j - \delta''_i)^2},$$

където с ϵ_0 бележим електричната константа.

Потенциалната енергия W на взаимодействие между двете сфери S_1 и S_2 , съгласно [Halliday et al 2010], е

$$(1.15) \quad W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{Q'_j Q''_i}{1 - \delta'_j - \delta''_i}.$$

Да отбележим, че в (1.14) и (1.15) не отчитаме взаимодействията между зарядите вътре в сферите S_1 и S_2 , тъй като взаимодействието е външно – между зарядите по повърхнините на S_1 и S_2 .

§2. Коригиране на кулоновата сила и кулоновия потенциал при ненулеви заряди

Законът на Кулон (кулоновата сила) и кулоновият потенциал се записват съответно

$$F_C = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad \text{и} \quad W_C = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R},$$

където q_1 и q_2 са два точкови заряда, намиращи се на разстояние R един от друг, а ϵ_0 е електричната константа.

Да допуснем, че двете сфери са с ненулеви заряди $Q_1 \neq 0$ и $Q_2 \neq 0$. Тогава, ако $\frac{Q_2}{Q_1} = k$, то от (1.13) следва, че

$$(2.1) \quad \bar{Q}_1 = Q_1 \bar{L}_1, \quad \bar{Q}_2 = Q_2 \bar{L}_2,$$

където

$$(2.2) \quad \bar{L}_1 = \frac{1 + X_2 + kY_2}{(1 + X_1)(1 + X_2) - Y_1 Y_2}, \quad \bar{L}_2 = \frac{1 + X_1 + k^{-1}Y_1}{(1 + X_1)(1 + X_2) - Y_1 Y_2}.$$

От равенствата (2.1) и (1.11) следва, че $Q_{i,j} = Q_i L_{i,j}$ за $i=1,2$, $j=1,2,3,\dots$, където за $m=1,2,3,\dots$ имаме

$$(2.3) \quad \begin{aligned} L_{1,2m-1} &= -\frac{\delta_1^{m-1} \delta_2^m}{B_{1,m-1}} \bar{L}_1, \quad L_{1,2m} = \frac{\delta_1^m \delta_2^m}{A_{1,m}} \bar{L}_1, \\ L_{2,2m-1} &= -\frac{\delta_1^m \delta_2^{m-1}}{B_{2,m-1}} \bar{L}_2, \quad L_{2,2m} = \frac{\delta_1^m \delta_2^m}{A_{2,m}} \bar{L}_2. \end{aligned}$$

Да означим

$$(2.4) \quad L'_0 = \bar{L}_1, \quad L'_{2m-1} = L_{2,2m-1}, \quad L'_{2m} = L_{1,2m} \quad \text{и} \quad L''_0 = \bar{L}_2, \quad L''_{2m-1} = L_{1,2m-1}, \quad L''_{2m} = L_{2,2m}.$$

Тогава формула (1.14) можем да запишем във вида

$$(2.5) \quad F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{L'_j L''_i}{(1 - \delta'_j - \delta''_i)^2}, \quad \text{т.е.} \quad F = F_C L,$$

а формула (1.15) приема вида

$$(2.6) \quad W = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{L'_j L''_i}{1 - \delta'_j - \delta''_i}, \quad \text{т.е.} \quad W = W_C H.$$

Формули (2.5) и (2.6) представят съответно силата и енергията на електростатично взаимодействие между две сфери.

Тук коефициентите

$$(2.7) \quad L = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{L'_j L''_i}{(1 - \delta'_j - \delta''_i)^2} \quad \text{и} \quad H = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{L'_j L''_i}{1 - \delta'_j - \delta''_i}$$

се дължат на геометрията на двете сфери и коригират съответно F_C и W_C . Така, ако $L=1$, то $F=F_C$ и ако $H=1$, то $W=W_C$.

В (2.5) и (2.6) L'_j и L''_i определяме от формули (2.2–2.4).

§4. Оценка на коефициентите, които коригират кулоновата сила и кулоновия потенциал

От физически съображения редовете (2.7) са сходящи за две сфери с произволни радиуси и заряди, но поради естеството на тези функции засега не можем да го докажем. Математически ще докажем сходимостта в случая на сфери с равни радиуси и заряди [Bozhkov et al 2015].

Нека за простота да въведем следните означения:

$$f = f(\delta) = \sqrt{1-4\delta^2}, \quad g = g(\delta) = \frac{1-f}{1+f}, \quad h = h(\delta) = \left(1 - \frac{4\delta^2}{1+f}\right)^{-1},$$

$$p = p(\delta) = \frac{2\delta}{1+f}, \quad C_j = C_j(\delta) = \frac{(1+f)^{j+1} - (1-f)^{j+1}}{2^{j+1}f},$$

$$\delta_j = \delta_j(\delta) = \delta^2 \frac{C_{j-1}}{C_j}, \quad \Phi_{i,j} = \Phi_{i,j}(\delta) = \frac{1}{1-\delta_i-\delta_j},$$

$$\bar{L} = \bar{L}(\delta) = \frac{1}{1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta^{2m}}{C_{2m}} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta^{2m-1}}{C_{2m-1}}}, \quad L_j = L_j(\delta) = \frac{(-\delta)^j}{C_j} \bar{L},$$

и

$$(4.1) \quad L = L(\delta) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} L_i L_j \Phi_{i,j}^2, \quad H = H(\delta) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} L_i L_j \Phi_{i,j}.$$

Тези функции са дефинирани за $\delta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, а индексът $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Ще използваме функцията *Lambert* $W(x)$, която се означава още с $W(x)$. Тази функция се определя от уравнението $y = W(x)e^{W(x)}$ и е дефинирана за всяко комплексно число x . Ние обаче ще се ограничим само до клон с реални стойности на $W: \left[-\frac{1}{e}, \infty\right) \rightarrow \mathbb{R}$.

Нека $A = (a_{i,j})$, $i, j = 0, 1, 2, \dots$ е безкрайна матрица от реални числа. Означаваме с $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ произволно представяне на матрицата A , където всяко u_k е сума от елементи на A .

Съгласно [Fihntengolts 1962, p. 362] е в сила следната теорема.

Теорема 4.1. Ако двойният ред $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} |a_{i,j}|$ е сходящ, тогава редът $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ е сходящ за всяко представяне $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ на матрицата A и

$$(4.2) \quad \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_{i,j} = \sum_{k=0}^{\infty} u_k.$$

Тук ще използваме диагонално представяне $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k a_{i,k-i}$ на двойната сума (4.2), т.е. $u_k = \sum_{i=0}^k a_{i,k-i}$. Отново ще използваме означението $[x]$ за представяне на цялата част на числото x .

За да изведем основните резултати в този параграф е необходимо да докажем няколко предварителни резултата.

Предложение 4.1. За всяко $\delta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ и за всяко $j = 0, 1, 2, \dots$ е изпълнено неравенството $\frac{\delta C_j}{C_{j+1}} \leq 1$.

Предложение 4.2. За всяко $\delta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ и за всяко $j = 1, 2, \dots$ е в сила неравенството $\frac{\delta^j}{C_j} \leq p^j$.

Лема 4.1. За всяко $\delta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ редовете

$$(4.6) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta^{2j}}{C_{2j}}$$

и

$$(4.7) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta^{2j-1}}{C_{2j-1}}$$

са сходящи.

Лема 4.2. За всяко $\delta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ и всяко $0 < \varepsilon < 1$ съществуват $N_1 = N_1(\delta, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ и $M_1 = M_1(\delta, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ такива, че при $n \geq N_1$ е изпълнено неравенството $\frac{\delta^n}{C_n} < \varepsilon$, а за всяко $m \geq M_1$ е изпълнено $\frac{(2+m)p^{m+1}}{(1-p)^2} < \varepsilon$.

Лема 4.3. За всяко $\delta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ и всяко $\varepsilon > 0$ съществува $N_2 \in \mathbb{N}$, такава че неравенството $\left| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-\delta)^j}{C_j} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-\delta)^j}{C_j} \right| < \varepsilon$ е в сила за всяко $n \geq N_2$.

Лема 4.4. За всяко $\delta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ и за всяко $j = 0, 1, 2, \dots$ е в сила неравенството

$$(4.9) \quad \delta_j \leq \delta_{j+1}.$$

Лема 4.5. За всяко $\delta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ е в сила $\lim_{j \rightarrow \infty} \delta_j = \frac{2\delta^2}{1+f}$.

Лема 4.6. За всяко $\delta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, $k = 1, 2, \dots$ и всяко $i, j = 0, 1, 2, \dots$ е в сила неравенството $\Phi_{i,j}^k \leq h^k$.

Лема 4.7. За всяко $\delta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ и всяко $k = 1, 2, \dots$ двойният ред

$$(4.10) \quad \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-\delta)^{i+j} \Phi_{i,j}^k}{C_j C_i}$$

е абсолютно сходящ.

Лема 4.8. За всяко $\delta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ и всяко $k = 1, 2, \dots$ е в сила неравенството

$$(4.11) \quad \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \left| \frac{(-\delta)^{i+j} \Phi_{i,j}^k}{C_j C_i} \right| \leq \frac{h^k}{(1-p)^2}.$$

Лема 4.9. За всяко $\delta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, $k = 1, 2, \dots$ и всяко $\varepsilon > 0$ съществува $M_2 \in \mathbb{N}$ такава, че при $m \geq M_2$ е в сила неравенството

$$J_m = J_m(\delta) = \left| \sum_{j=m+1}^{\infty} \sum_{i=0}^j \frac{(-\delta)^j \Phi_{i,j-i}^k}{C_i C_{j-i}} \right| < \varepsilon.$$

Лема 4.10. За всяко $\delta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, $k = 1, 2, \dots$ и всяко $\varepsilon > 0$ съществува $M_2 \in \mathbb{N}$ такава, че при $m \geq M_2$ е в сила неравенството

$$\left| \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-\delta)^{j+i} \Phi_{i,j}^k}{C_j C_i} - \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^j \frac{(-\delta)^{j+i} \Phi_{i,j-i}^k}{C_i C_{j-i}} \right| < \varepsilon.$$

Лема 4.11. За всяко $\delta \in \left(0, \frac{2}{5}\right]$ и $j, i = 1, 2, \dots$, при $k = 1, 2$ са в сила неравенствата:

$$(4.14) \quad \frac{\delta^{j-1}}{C_{j-1}} (\Phi_{i,j-1}^k - 1) > \frac{\delta^j}{C_j} (\Phi_{i,j}^k - 1),$$

$$(4.15) \quad \frac{\delta^{j-1}}{C_{j-1}} (\Phi_{0,j-1}^k - 1) > \frac{2\delta^j}{C_j} (\Phi_{0,j}^k - 1).$$

Въз основа на доказаните лема, доказваме следните теореми.

Теорема 4.2. За всяко $\delta \in \left(0, \frac{2}{5}\right]$ са изпълнени неравенствата $L(\delta) < 1$ и $H(\delta) < 1$.

Теорема 4.3. Нека $\delta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, $k = 1, 2$ и $\varepsilon > 0$. Ако

$$N_k = \left\lceil \frac{\ln \left(\frac{\varepsilon (1-p)^2 (1-\delta)^4}{4h^k} \right)}{\ln p} \right\rceil + 1$$

и

$$M_k = \left\lceil \frac{\text{Lambert } W \left(\frac{\varepsilon (1-\delta)^2}{2h^k} p(1-p)^2 \ln p \right)}{\ln p} \right\rceil - 1,$$

то за всяко $n_k \geq N_k$ и $m_k \geq M_k$ са изпълнени неравенствата

$$\left| L - \frac{\sum_{j=0}^{m_2} \sum_{i=0}^j \frac{(-\delta)^j \Phi_{i,j-i}^2}{C_i C_{j-i}}}{\left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{(-\delta)^i}{C_i}\right)^2} \right| < \varepsilon \quad \text{и} \quad \left| H - \frac{\sum_{j=0}^{m_1} \sum_{i=0}^j \frac{(-\delta)^j \Phi_{i,j-i}}{C_i C_{j-i}}}{\left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{(-\delta)^i}{C_i}\right)^2} \right| < \varepsilon.$$

Следствие 4.1. Коригиращите коефициенти L и H са непрекъснати функции във всеки затворен интервал $[0, a] \subset [0, 1/2)$.

Формули (2.5) и (2.6) представят съответно силата и енергията на електростатично взаимодействие между две сфери. Затова е интересно да се знаят стойностите на коефициентите L и H от формули (4.1) при различни стойности на $\delta = \frac{r}{R}$, където r е стойността на радиусите на сферите, а R е разстоянието между техните центрове. Функциите, дефиниращи редовете $L(\delta)$ и $H(\delta)$ са сложни и поради това не можем да пресметнем точните им стойности за всяко $\delta \in (0, 1/2)$. Въпреки това Теорема 4.3 ни дава възможност да пресметнем $L(\delta)$ и $H(\delta)$ с произволна точност $\varepsilon > 0$, използвайки парциалните суми

$$(4.19) \quad \frac{\sum_{j=0}^{M_k} \sum_{i=0}^j \frac{(-\delta)^j \Phi_{i,j-i}^k}{C_i C_{j-i}}}{\left(1 + \sum_{i=1}^{N_k} \frac{(-\delta)^i}{C_i}\right)^2}$$

за всяко $\delta \in [0, 1/2)$, като съответно $k = 2$ за $L(\delta)$ и $k = 1$ за $H(\delta)$.

От Таблица 4.1 и Таблица 4.2 се вижда, че когато δ е сравнително малко (т.е. разстоянието между сферите е сравнително голямо), горните граници на сумационните индекси в парциалните суми (4.19) също са малки. Ако обаче двете сфери се намират на относително малко разстояние, горните граници на сумационните индекси в парциалните суми (4.19) рязко нарастват. Подобни наблюдения, постигнати с други методи, са получени и в [Slisko et al 1998].

От Таблица 4.4 и Теорема 4.2 следва, че законът на Кулон дава сравнително точни резултати в случаите, когато радиуса r на сферите е поне с един порядък по-малък, отколкото разстоянието R между центровете им.

§5. Приблизени формули за намиране на електростатичната сила на взаимодействие между две проводящи сфери

Както казахме поради физични съображения редовете (2.7) са сходящи. Това ни дава право да разгледаме следните случаи [Иванов и др. 2013]:

5.1. Нека сферите S_1 и S_2 са зарядени съответно със заряди $Q_1 \neq 0$ и $Q_2 \neq 0$, т.е. $k = \frac{Q_2}{Q_1} \neq 0$.

Да разгледаме случая, когато $r_1 \neq 0$ и $r_2 \neq 0$. Да въведем следните означения: $l = \frac{r_2}{r_1}$, $\delta = \delta_1 = \frac{r_1}{R}$ и $\delta_2 = \frac{r_2}{R}$. Тогава $\delta_2 = l\delta$. Така коефициентът L от формула (2.7)

можем да развием в ред по степените на δ . Получава се степенният ред

$$(5.1) \quad L = \frac{1}{k} \left[k - 2(k^2 + l^3)\delta^3 - 3(k^2 + l^5)\delta^5 + 14kl^3\delta^6 - 4(k^2 + l^7)\delta^7 + \right. \\ \left. + 27kl^3(1 + l^2)\delta^8 - 5(k^2 + 4k^2l^3 + 4l^6 + l^9)\delta^9 + \right. \\ \left. + 22kl^3(2 + 3l^2 + 2l^4)\delta^{10} + \dots \right].$$

В зависимост от предварително зададената необходима точност, е възможно L да се изчисли до определен краен брой членове от реда (5.1), като останалите членове

не се отчитат. Това е целесъобразно, особено когато влиянието на тези безброй много членове е пренебрежимо малко върху крайния резултат.

Нека L_a е приближената стойност на коефициента L , изчислена до предварително определения член δ^a , $a \neq 1, 2, 4$. Тогава за приближената стойност F_a на силата F на електростатичното взаимодействие от формула (2.5) получаваме

$$(5.2) \quad F_a = F_C L_a.$$

При $a = 0$, получаваме, че $L_0 = 1$. В този случай ще считаме, че си взаимодействат само зарядите Q_1 и Q_2 , съсредоточени в центровете на сферите S_1 и S_2 , т.е. че $F_0 = F_C$.

Резултатът, изчислен по приближената формула за F_a , може да се направи произволно близък до точната стойност на F , като се вземе необходимия брой членове от безкрайния ред (5.1). Добре е да отбележим, че в [Slisko et al 1998] тези членове в частния случай $k = l = 1$ са получени по друг начин.

5.2. Интересен за практиката е случаят, когато силата на електростатичното взаимодействие е между заредена и незаредена проводящи сфери ($Q_1 = 0$ и $Q_2 = Q \neq 0$), т.е. когато взаимодействието се дължи само на електростатична индукция. От формула (1.14) уравнението на тази сила може да се запише във вида

$$(5.6) \quad F = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} M.$$

Нека $l = \frac{r_2}{r_1}$ и $\delta = \delta_1 = \frac{r_1}{R}$. Коефициентът M развиваме в степенен ред по степените на δ и получаваме

$$(5.7) \quad M = -2l^3 \delta^3 - 3l^5 \delta^5 - 2(l^4(5 + 2l^3))\delta^7 - l^4(18 + 4l^2 + 5l^5)\delta^9 - \dots$$

В зависимост от предварително зададената необходима точност, коефициентът M може да се изчислява до определен краен брой членове от реда (5.7), като останалите членове не се отчитат, ако е пренебрежимо малкото влиянието им върху крайния резултат. Тогава от формула (5.6) за силата на електростатичната индукция получаваме приближението

$$(5.8) \quad F_a = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} M_a,$$

където M_a е приближената стойност на коефициента M , изчислена до предварително определения член δ^a .

§6. Отклонение на кулоновата сила и енергия от силата и енергията на взаимодействие между две сфери с равни радиуси

Нека установим отклоненията на кулоновата сила F_C и потенциалната енергия W_C от електростатичните сила F и потенциална енергия W между две проводящи сфери с равни радиуси по метода представен в [Kolikov 2015]. За целта ще разгледаме възможните стойности, които приемат, съгласно формули (2.7) и (3.4), съответните коефициенти на отклонение L_k и H_k при различни стойности на реалните числа $k = \frac{Q_2}{Q_1}$.

6.1. Отклонение на кулоновата сила F_C от електростатичната сила F между две проводящи сфери с равни радиуси.

Така, нека S_1 и S_2 са две проводящи сфери с равни радиуси $r_1 = r_2 = r \neq 0$ и произволни заряди Q_1 и Q_2 . Тогава, от Фиг. 6.1, Фиг. 6.2 и Таблици 1, 2, с точност до втория знак, могат да се направят следните важни заключения за отклонението L на F_C от F при изменение на разстоянието R между центровете на S_1 и S_2 .

Изводи:

(i) При произволни стойности на Q_1 и Q_2 е в сила $F \leq F_C$ като за R намаляващо към $2r$, отклонението на F_C от F расте. При това:

- За $Q_1 Q_2 < 0$ (за $F_C < 0$) е в сила $L > 0$. Следователно $|F| > |F_C| > 0$.
- За $Q_1 Q_2 > 0$ (за $F_C > 0$):
 - при $Q_2 < 0.58Q_1$ важи $L > 0$, $L = 0$ или $L < 0$, т.е. F може да сменя знака си;
 - при $Q_2 = 0.58Q_1$ е в сила $L = 0$, т.е. $F \approx 0$;
 - при $Q_2 > 0.58Q_1$ е в сила $0 < L < 1$, т.е. $F > 0$.

Следователно, ако $L \leq -1$, то $|F| \geq F_C > 0$, а ако $-1 < L \leq 1$, то

$$F_C \geq |F| \geq 0.$$

- За $Q_1 \neq 0$, $Q_2 = 0$ (за $F_C = 0$):
 - при $R \geq 8r$ важи $F \approx 0$, т.е. F е късодействаща сила;
 - при $R < 8r$ е в сила $F < 0$.

Следователно $|F| \geq F_C = 0$.

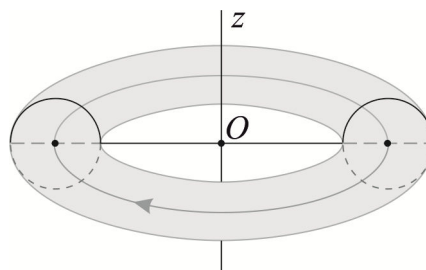
- (ii) При увеличаване отношението между ненулеви стойности на Q_1 и Q_2 , растат и стойностите на R относно $2r$, при които $L=1$, т.е. $F_C \approx F$. Следователно за $Q_1 = Q_2$ отклонението на F_C от $F > 0$ е най-малко.
- (iii) При фиксирани ненулеви стойности на $|Q_1|$ и $|Q_2|$, за всички стойности на $R > 2r$, силата на привличане $F < 0$ е по-голяма по абсолютна стойност от силата на отблъскване $-F > 0$, докато $|F_C|$ е една и съща за всяко $R > 2r$.

6.2. Отклонение на потенциалната енергия W_C от електростатичната потенциална енергия W между две проводящи сфери с равни радиуси.

От представените графики на Фиг. 6.4, Фиг. 6.5 и данни от Таблица 6.4 и Таблица 6.5, с *точност до втория знак* могат да се направят изводи за отклонението на W_C от W , аналогични на (i), (ii) и (iii).

§9. Приложение на резултатите за електростатичното взаимодействие между две сфери

В [Kolikov et al 2012b] се разглеждат нуклоните като торове, които се въртят с постоянна ъглова скорост около права z , минаваща през масовия (геометричния) им център O и перпендикулярна на равнината им на въртене. Идеята нуклоните да се моделират с торове се среща и в [Miller 2008].



Фиг. 9.1. Тороиден модел на нуклон

По-нататък, използвайки резултатите от §1, се намират взаимодействията между нуклоните в общоприетия стандартен модел и в тороидния модел.

За да се определи взаимодействието между нуклоните те се разглеждат като размерни обекти, в които зарядът може да се преразпределя. При това зарядът на протона е $p = 1.602176487 \times 10^{-19}$, а общият заряд на неутрона е $n = 0$ [Mohr et al 2008].

Потенциалната енергия на взаимодействие в ядрата на атомите се изчислява, вследствие дефекта на масите в ядрата, по следната формула [Krane 1999]

$$(9.1) \quad W_K = (N_p m_p + N_n m_n - m_K) c^2 .$$

Тук N_p е броят на протоните, N_n – броят на неутроните; $m_p = 1.6726 \times 10^{-27}$ kg и $m_n = 1.6749 \times 10^{-27}$ kg са съответно масите на протона и неутрона [Mohr et al 2008], а m_K е масата на разглежданото ядро; $c = 2,99792458 \times 10^8$ ms⁻¹ е скоростта на светлината във вакуум [Mohr et al 2008]. Намират се стойностите на W_K по посочения метод чрез формула (1.15), сравнявайки ги със стойностите, получени чрез формула (9.1).

9.2. Намиране взаимодействието между нуклони в тороидния модел

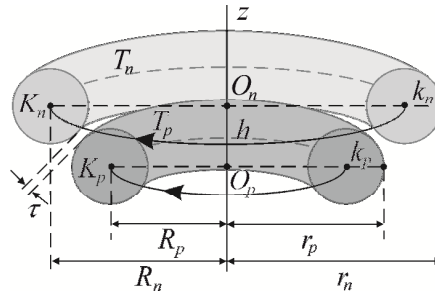
Разглеждаме нуклоните като торове (Фиг. 9.1).

Нека *протон* и *неутрон* са два тора, съответно T_p и T_n , като T_p е със заряд p , а T_n е със заряд 0 . Центровете на торовете означаваме с O_p и O_n . При това приемаме, че централните окръжности на T_p и T_n лежат в успоредни или съвпадащи равнини и се въртят в една и съща или в различни посоки с постоянни ъглови скорости $\vec{\omega}$ около права z , минаваща през O_p и O_n и перпендикулярна на равнината им на въртене. Тогава, ако $O_p O_n = h$, то $h \geq 0$.

Означаваме с K_p и K_n центровете на образувачите кръгове на торовете T_p и T_n , а с $R_p = O_p K_p$ и $R_n = O_n K_n$ – радиусите на централните окръжности на T_p и T_n . Допускаме, че T_p и T_n отстоят на разстояние $0 < \tau < 10^{-15}$ m един от друг.

Тъй като $m_p = 1.6726 \times 10^{-27}$ kg $<$ $m_n = 1.6749 \times 10^{-27}$ kg и торовете се въртят с постоянна ъглова скорост $\vec{\omega}$, то вследствие на центробежните сили радиусът на протона r_p ще е по-малък от радиуса на неутрона r_n .

За определеност ще използваме експерименталните данни за $r_p = 0.84184 \times 10^{-15}$ m [Sick 2003] и за $r_n = 1.1 \times 10^{-15}$ m [Sardin 1999]. От $r_p < r_n$ следва $R_p < R_n$ (Фиг. 9.3).



Фиг. 9.3. Напречно сечение на система протон и неутрон

Нека k_p и k_n са радиусите на образуващите кръгове K_p и K_n . Ясно е, че $k_p < R_p$ и $k_n < R_n$. Освен това

$$(9.2) \quad R_p + k_p = r_p \text{ и } R_n + k_n = r_n.$$

Да означим с $q > 0$ радиусът на окръжността на празната част на кръга с радиус R_p . Тогава

$$(9.3) \quad q = r_p - 2k_p.$$

Приемаме, че обемните масови плътности на протона и неутрона са равни, т.е. $\rho_p = \rho_n$. Обемите на торозите T_p и T_n , съгласно [Gellert et al 1983], са съответно

$$V_p = 2\pi^2 k_p^2 R_p \text{ и } V_n = 2\pi^2 k_n^2 R_n. \text{ Тогава от } \frac{m_p}{V_p} = \frac{m_n}{V_n} \text{ следва, че}$$

$$(9.4) \quad k_n = k_p \sqrt{\frac{m_n R_p}{m_p R_n}}.$$

В (9.4) ще заместим с експериментално установените маси на протона и неутрона, без да отчитаме дефекта на масите, защото не разглеждаме конкретно ядро.

От геометрични съображения за $O_p O_n = h$ ще е изпълнено равенството

$$(9.5) \quad h^2 = (k_n + k_p + \tau)^2 - (R_n - R_p)^2.$$

Поради централната симетричност на заряда на протона [Sardin 1999] можем да считаме, че целият му заряд p е съсредоточен в геометричния център O_p на тора T_p .

За да приложим резултатите от §1 за сфери, ще премоделираме торозите. Особено ще подчертаем, че потенциалната енергия и силата на взаимодействие между две сфери зависят от разстоянието между зарядите-образи, т.е. от дължините на отсечките $d_{i,j}$ ($i=1,2; j=1,2,3,\dots$) от формула (1.5). Тези дължини в (1.5) се определят чрез квадратите на радиусите r_1 или r_2 на сферите и чрез дължината на

централата им $R = r_1 + r_2 + \tau$, където τ е най-малкото разстояние между повърхнините им. За квадрата на радиусите на всяка от двете сфери е изпълнено $r_i^2 = \frac{L_i}{4\pi}$, $i = 1, 2$, където L_i е лицето на повърхнината на съответната сфера. Следователно, при премоделирането на торове трябва да запазваме, както лицата L_p и L_n на повърхнините им, така и разстоянието τ между тях.

*Премоделираме протона със сфера S_p , с радиус \bar{r}_p и център \bar{O}_p върху правата z , еквивалентна по лице на неговата повърхнина, т.е. имаща лице равно на лицето на повърхнината на тора T_p . (Според заключението в **A**) не можем да разглеждаме T_p като точка, защото протонът и неутронът отстоят един от друг на разстояние $\tau < 10^{-16}$ m.)*

Лицето на повърхнината L_p на тора T_p според [Gellert et al 1983] е

$$(9.6) \quad L_p = 4\pi^2 k_p R_p.$$

Тогава, щом лицата на повърхнините на тора T_p и на сферата S_p са равни, то от (9.6) следва, че радиусът на S_p е

$$(9.7) \quad \bar{r}_p = \sqrt{\pi k_p R_p}.$$

По-нататък ще премоделираме и *неутрона*, при което ще разгледаме два случая.

(i) *Премоделираме неутрона T_n със сфера S_n с радиус \bar{r}_n и център \bar{O}_n върху правата z , еквивалентна по лице на неговата повърхнина. При това сферите S_p и S_n отстоят на разстояние $\tau < 10^{-16}$ m помежду си.*

За избрани стойности на q , от формули (9.2–9.4) намираме k_p , R_p , k_n и R_n . Отгук и от формула (9.7) получаваме радиусът \bar{r}_p на S_p и аналогично радиусът $\bar{r}_n = \sqrt{\pi k_n R_n}$ на сферата S_n .

Тогава, при различни стойности на q и τ , от формули (1.14) и (1.15), намираме следните резултати, представени в Таблица 9.6.

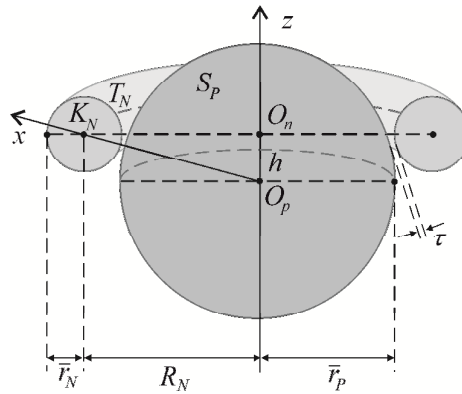
Таблица 9.6. Енергия на връзката и сила на взаимодействието между торове T_p и T_n , премоделирани като еквивалентни по повърхнини сфери S_p и S_n

q	τ [m]	$\bar{R} = \bar{r}_p + \bar{r}_n + \tau$ $\times 10^{-15}$ [m]	$W(T_p, T_n)$ $\times 10^{-13}$ [J]	$F(T_p, T_n)$ [N]
0.4 r_p	10 ⁻¹⁹	1.4431	-5.4318	-6 797.05
	10 ⁻¹⁸	1.4440	-4.5234	-3 995.97
	10 ⁻¹⁷	1.4530	-1.9577	-854.360
0.5 r_p	10 ⁻¹⁹	1.3575	-6.0657	-7 278.07
	10 ⁻¹⁸	1.3074	-4.8314	-5 160.21
	10 ⁻¹⁷	1.3164	-2.0293	-945.862
0.6 r_p	10 ⁻¹⁹	1.2491	-6.3281	-10 327.56
	10 ⁻¹⁸	1.2500	-5.0239	-5 751.24
	10 ⁻¹⁷	1.1805	-2.1239	-1 065.66

Данните в Таблица 9.6 показват, че стойностите за енергията на връзката в ядрата на атомите могат да се получават чрез електромагнитни взаимодействия между нуклоните им, при вариране на q и τ ! За $q > 0.6r_p$, както и при приближаване стойностите на r_n към r_p , тези стойности нарастват. При това премоделирането на двата тора T_p и T_n със сфери S_p и S_n намалява стойностите на $W(T_p, T_n)$ и $F(T_p, T_n)$, тъй като намаляват лицата на повърхнините, с които те си взаимодействат и се увеличават разстоянията между зарядовите образи в S_p и S_n .

Затова ще приложим един по-адекватен на реалността подход за намиране на $W(T_p, T_n)$ и $F(T_p, T_n)$.

(ii) Премоделираме неутрона T_n с тор T_N , еквивалентен по лице на повърхнината му. При това S_p и T_N имат същите центрове O_p и O_n и отстоят на същото разстояние τ помежду си – както T_p и T_n (Фиг. 9.4).



Фиг. 9.4. Напречно сечение на редуциран модел на системата протон-неутрон

Нека S_N е образуваща окръжност на тора T_N с център K_N , при което $O_nK_N = R_N$. Означаваме с \bar{r}_N радиусът на образуващата сфера S_N . От равенството на повърхнините L_N и L_n на торовете T_N и T_n , както във формула (9.6), следва, че

$$(9.8) \quad \bar{r}_N = k_n \frac{R_n}{R_N}.$$

Ако $O_pK_N = \bar{R}$, то $\bar{R} = \bar{r}_p + \bar{r}_N + \tau$. Тогава от $O_pO_n = h$ се получава, че $R_N^2 = \bar{R}^2 - h^2$, т.е.

$$(9.9) \quad R_N = \sqrt{(\bar{r}_p + \bar{r}_N + \tau)^2 - h^2}.$$

За броят l на сферите S_N , които сумарно имат лице на повърхнината, равно на лицето на повърхнината на тора T_N , е изпълнено $l \cdot 4\pi \bar{r}_N^2 = 4\pi^2 R_N \bar{r}_N$. Следователно

$$(9.10) \quad l = \pi \frac{R_N}{\bar{r}_N}.$$

Приемаме, че центърът O_p е неподвижен относно инерциалната отправна система J . Въвеждаме твърда неинерциална отправна система G , която се върти с постоянната ъглова скорост $\bar{\omega}$ на въртенето на тора T_N относно J . При това точката O е център на координатна система $Oxyz$, свързана неподвижно с G и относно която сферите S_p и S_N са разположени неподвижно една спрямо друга (Фиг. 9.4).

Задавайки стойности на q и τ , от формули (9.2–9.5), изчисляваме k_p , R_p , k_n , R_n и h . Оттук и от формули (9.7–9.9), намираме радиуса \bar{r}_p на сферата S_p и радиуса \bar{r}_N на образуващата сфера S_N .

Така при $\bar{R} = \bar{r}_p + \bar{r}_N + \tau$, чрез формули (1.14) и (1.15), намираме енергията $W(S_p, S_N)$ на връзката и силата $F(S_p, S_N)$ на взаимодействие. Според (9.10),

енергията $W(T_p, T_n)$ на връзката и силата $F(T_p, T_n)$ на взаимодействие между протона и неутрона ще бъдат

$$(9.11) \quad W(T_p, T_n) = \pi \frac{R_N}{r_N} W(S_p, S_N) \quad \text{и} \quad F(T_p, T_n) = \pi \frac{R_N}{r_N} F(S_p, S_N).$$

Равенствата (9.11) са в сила, защото образуващите сфери на тора T_N са разположени симетрично спрямо центъра на сферата S_p .

При различни стойности на q и τ намираме следните данни, представени в Таблица 9.7.

Таблица 9.7. Енергия на връзката и сила на взаимодействието между торовете T_p и T_n , пре моделирани съответно като еквивалентни по повърхнини сфера S_p и тор T_N

q	τ [m]	$\bar{R} = \bar{r}_p + \bar{r}_N + \tau$ $\times 10^{-15}$ [m]	$W(T_p, T_n)$ $\times 10^{-13}$ [J]	$F(T_p, T_n)$ [N]
0.4 r_p	10 ⁻¹⁸	0.9041	-31.0435	-87 236
	10 ⁻¹⁷	0.9121	-7.7951	-6 486.05
0.5 r_p	10 ⁻¹⁸	0.8462	-33.473	-80 885.6
	10 ⁻¹⁷	0.8542	-7.9408	-7 120.7
0.6 r_p	10 ⁻¹⁸	0.7748	-36.1534	-72 133.79
	10 ⁻¹⁷	0.7828	-8.1286	-7 741.09

От получените огромни стойности за потенциалната енергия на връзката и за силата на взаимодействие между протона и неутрона следва, че *силните взаимодействия са електромагнитни!*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ИЗВОДИ

Главният извод, който можем да направим е, че целта на настоящия дисертационен труд и поставените задачи са постигнати. Връзката между основните получени резултати, поставената цел и задачи, приносите и публикациите на дисертационния труд са дадени в следната таблица.

Таблица. Връзка на основните резултати с целите и публикациите.

Принос	Цел	Задача	Параграф	Публикации
1	1	1	1,2,3,4	[Kolikov et al 2012a], [Bozhkov et al. 2015]
2	1	2	5	[Иванов и др. 2013]
3	1	3	6,7,8	[Коликов и др. 2012], [Kolikov et al. 2015]
4	1	4	9	[Kolikov et al 2012b]

Перспективност за бъдеща работа

Във връзка с резултатите на дисертацията възникват следните въпроси за решаване:

- 1) За случая на електростатично взаимодействие между две проводящи сфери да се докаже: че за всяко $\delta \in [0, 1/2)$, коригиращите коефициенти $L(\delta) < 1$ и $H(\delta) < 1$; в интервала $[0, 1/2)$ функциите $L(\delta)$ и $H(\delta)$ са намаляващи и границите $\lim_{\delta \rightarrow 1/2} L(\delta)$, $\lim_{\delta \rightarrow 1/2} H(\delta)$ съществуват и са по-малки от 1.
- 2) Да се разгледа освен електростатичното взаимодействие между сфери и неговото приложение за торове и за други тела с център на симетрия.
- 3) Да се приложат тези изследвания при взаимодействията между молекули с висока степен на симетрия.

Апробация

Част от резултатите са докладвани на следните семинари и конференции:

- Научен семинар по Алгебра и геометрия на Факултета по математика и информатика на ПУ „Паисий Хилендарски“, 16.2.2012г.;

- Четиридесет и първата пролетна конференция на СМБ, 9-12 април 2012г.;
- Двадесет и втората международна научна конференция 7-8 юни 2012г. на СУБ, гр. Стара Загора;
- Юбилейна национална научна конференция с международно участие, Смолян, 19-21 октомври 2012 г.;
- II Студентска научна конференция "От атома до космоса" 2014г. 15-16 май 2014г. гр. Шумен.

Преглед на основните резултати

- 1) С прилагане на пълна индукция върху двойно сумиране на полиноми с биномни коефициенти (и свойства на безкрайни редове) се извеждат точни формули за силата и потенциалната енергия на електростатичното взаимодействие между сфери с произволни радиуси и заряди.
- 2) Извеждане на приближени формули за силата на електростатичното взаимодействие между сфери с произволни радиуси и заряди.
- 3) Намиране на отклоненията на кулоновата сила, на кулоновия потенциал и на приближените формули спрямо силата и потенциалната енергия на електростатичното взаимодействие между две сфери.
- 4) Прилагане на получените резултати за намиране на електростатичните взаимодействия между торове за получаване на резултати в ядрената физика.

Благодарности

Считам като свой дълг да изкажа сърдечна благодарност на научния си ръководител доц. д-р Кирил Коликов, който ме въведе в тематиката и през цялото време напътстваше работата ми, за моралната подкрепа и полезните съвети.

Искрена благодарност изказвам и на проф. д-р Драгия Иванов, доц. д-р Боян Златанов и ас. Йордан Епитропов за ползотворната ни съвместна работа в научните ни изследвания.

Изказвам благодарност на всички преподаватели от катедра „Алгебра и геометрия“ на ФМИ при ПУ „Паисий Хилендарски“ за положителното отношение към мен и моят дисертационен труд. Сърдечно благодаря и на всички, които в една или друга степен ми помогнаха!

ДЕКЛАРАЦИЯ

за оригиналност и достоверност на дисертационния труд

От Стефан Илиев Божков, редовен докторант към Катедра „Алгебра и геометрия“ на Факултет по математика и информатика.

Във връзка с провеждането на процедура за придобиване на образователната и научна степен “доктор” в Пловдивския университет ”Паисий Хилендарски” и защита на представения от мен дисертационен труд, декларирам:

Резултатите и приносите на проведеното дисертационно изследване, представени в дисертационния ми труд на тема: „МАТЕМАТИЧНИ МЕТОДИ ЗА ИЗСЛЕДВАНЕ НА ЕЛЕКТРОМАГНИТНИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕЖДУ ТЕЛА, ИМАЩИ ЦЕНТЪР НА СИМЕТРИЯ” са оригинални и не са заимствани от изследвания и публикации, в които нямам участия.

Декларатор:

СТЕФАН БОЖКОВ

докторант

06.07.2015 г.

гр. Пловдив

Публикации по дисертационния труд

1. Kolikov K., Ivanov D., Krastev G., Epitropov Y., **Bozhkov S.**, Electrostatic interaction between two conductive spheres. *Journal of Electrostatics*, Vol. 70, pp. 91-96, 2012. ISSN: 0304-3886. **Impact factor: 1.000 (за 2012)**
2. **Bozhkov S.**, Kolikov K., Zlatanov B., Estimates of the correction coefficient in Coulomb's law for electrostatic interaction between two charged conducting spheres, *Bulletin of the Transilvania University of Brasov*, Vol 8(57), No. 1, pp. 1-14, 2015. ISSN 2065-2151.
3. **Bozhkov S.**, Connection between Coulomb's potential and the potential energy of interaction between two charged conducting spheres, *Journal of Technical University – Sofia, Plovdiv branch, Bulgaria "Fundamental Science and Applications"*, Vol.21, Book 1, pp.163-168, 2015. ISSN: 1310-8271.
4. Коликов К., Иванов Д., **Божков С.**, Епитропов Й., Отклонение на кулоновата сила от силата на електростатичното взаимодействие между две проводящи сфери, *Международно научно on-line списание „Наука и технологии“, Съюз на учените – Стара Загора*, Том II, Част 3, с. 91-95, 2012. ISSN: 1314-4111.
5. Коликов К., Иванов Д., **Божков С.**, Епитропов Й., Кръстев Г., Електростатично взаимодействие между две проводящи сфери (Обзор), *Трудове на II Студентска научна конференция "От атома до космоса"*, с. 13-16, ISSN 2367-5586.
6. Иванов Д., **Божков С.**, Коликов К., Формули с произволни приближения за намиране силата на електростатичното взаимодействие между две заредени проводящи сфери, *Сборник с доклади на юбилейна научна конференция с международно участие „Традиции, посоки, предизвикателства“*, Том II, Част II „Природни науки, математика и информатика“, Издателство ПУ „Паисий Хилендарски“, филиал – Смолян, с. 33-39, 2013, ISBN 978-954-8767-43-9.

БИБЛИОГРАФИЯ

[Батыгин и др. 1970] **Батыгин В.**, Топтыгин И., Сборник задач по электродинамике, Наука, Москва, 1970.

[Будак и др. 1980] **Будак Б.**, Самарский А., Тихонов А., Сборник задач по математической физике, Наука, Москва, 1980.

[Иванов и др. 2013] **Иванов Д.**, Божков С., Коликов К., Формули с произволни приближения за намиране силата на електростатичното взаимодействие между две заредени проводящи сфери, *Сборник с доклади на юбилейна научна конференция с международно участие „Традиции, посоки, предизвикателства“*, Том II, Част II „Природни науки, математика и информатика“, Издателство ПУ „Паисий Хилендарски“, филиал – Смолян, с. 33-39, 2013, ISBN 978-954-8767-43-9.

[Коликов и др. 2008] **Коликов К.**, Кръстев Г., Иванов Д., Кулина Х., Върху електростатичното взаимодействие между два твърди проводника с повърхнини, имащи център на симетрия, *Scientific research of the Union of Scientists in Bulgaria – Plovdiv, series B. Technics and Technologies XII*, 238-245, 2008.

[Коликов и др. 2012] **Коликов К.**, Иванов Д., Божков С., Епитропов Й., Отклонение на кулоновата сила от силата на електростатичното взаимодействие между две проводящи сфери, *Международно научно online списание „Наука и технологии“*, Съюз на учените – Стара Загора, Том II, Част 3, с. 91-95, 2012. ISSN: 1314-4111.

[Коликов и др. 2014] **Коликов К.**, Иванов Д., Божков С., Епитропов Й., Кръстев Г., Електростатично взаимодействие между две проводящи сфери (Обзор), *Трудове на II Студентска научна конференция "От атома до космоса"*, с. 13-16, 2014, ISSN 2367-5586.

[Риордан 1982] **Риордан Д.**, Комбинаторные тождества, Наука, Москва, 1982.

[Шпольский 1984] **Шпольский Э.**, Атомная физика, т. 2., Наука, Москва, 1984.

[Allen 1918] **Allen H.**, *Proceedings of the Physical Society of London*, Vol. 31, N 1, p. 49, 1918.

[Bergman 1991] **Bergman D.**, *Galilean Electrodynamics* 2, 30, 1991.

[Bergman 2000] **Bergman D.**, *Foundations of Science* 3, 4, 2000.

[van den Bosch et al. 1995] **van den Bosch H.**, **Ptasinski K.**, **Kerkhof P.**, Two conducting spheres in a parallel electric field, *J. Appl. Phys.* 78, 6345-6352, 1995.

[Bozhkov 2015] **Bozhkov S.**, Connection between Coulomb's potential and the potential energy of interaction between two charged conducting spheres, *Journal of Technical University – Sofia, Plovdiv branch, Bulgaria "Fundamental Science and Applications"*, Vol.21, Book 1, pp.163-168, 2015. ISSN: 1310-8271.

[Bozhkov et al 2015] **Bozhkov S.**, **Kolikov K.**, **Zlatanov B.**, Estimates of the correction coefficient in Coulomb's law for electrostatic interaction between two charged conducting spheres, *Bulletin of the Transilvania University of Brasov*, Vol 8(57), No. 1, pp. 1-14, 2015. ISSN 2065-2151.

[Brown 1980] **Brown J.**, *The Physical Science Encyclopedia* (Cornell University Press, New York, 1980).

[Christensen 1990] **Christensen J.**, *The Structure of an Atom* (Wiley, London, 1990).

[Compton 1921] **Compton A.**, *Journal of the Franklin Institute* 192, 145 (1921).

[Djordjevic et al 1996] **Djordjevic B.**, **Hetherington J.**, **Thorpe M.**, Spectral function for a conducting sheet containing circular inclusions, *Phys. Rev. B.* 53, 14862-14871, 1996.

[Fihtengolts 1962] **Fihtengolts, G.**, *Course in Differential and Integral Calculus II*, State Publisher Physics – Mathematical Literature, Moskow, 1962, (in Russian).

[Gellert et al 1983] **Gellert** W., Kästner H., Neuber S., Mathematical Encyclopedic Dictionary (Science and Art, Sofia, 1983), p. 585. (in Bulgarian).

[Halliday et al 2010] **Halliday** D., Resnick R., Walker J., Fundamentals of physics, Wiley, 2010.

[Jackson 1998] **Jackson** J., Classical Electrodynamics, Wiley, 1998.

[Jiang 2003] **Jiang** Z., Electrostatic interaction of two unequal conducting spheres in uniform electric field, *J. Electrostat.* 58, 247-264, 2003.

[Jones et al 1988] **Jones** T., Rubin B., Forces and torques on conducting particle chains, *J. Electrostat.* 21, 121-134, 1988.

[Khair 2013] **Khair** A., Electrostatic forces on two almost touching nonspherical charged conductors, *J. Appl. Phys.* 114, 134906, 2013.

[Kolikov 2015] **Kolikov** K. Theoretical deviation assessment of electrostatic interactions between two point charges and two conductive spheres of equal radii. *Journal of Electrostatics*, 2015 (submitted).

[Kolikov et al 2012a] **Kolikov** K., Ivanov D., Krastev G., Epitropov Y., Bozhkov S., Electrostatic interaction between two conducting spheres, *Journal of Electrostatics*, 70, 91-96, 2012.

[Kolikov et al 2012b] **Kolikov** K., Ivanov D., Krustev G., Electromagnetic nature of the nuclear forces and a toroid model of nucleons in atomic nuclei. *Natural Science*, 4, 47-56, 2012.

[Korn et al 2000] **Korn** G., Korn T., Mathematical handbook for scientists and engineers – definitions, theorems, and formulas for reference and review, Dover Publications (2000).

[Krane 1999] **Krane** K., Introductory Nuclear Physics (Wiley-VCH, 1999).

[Larson et al 1970] **Larson** C., Goss E., A Coulomb's law balance suitable for physics majors and nonscience students, *Am. J. Phys.* 38, 1349–1352, 1970.

[Lekner 2012] **Lekner** J., Electrostatics of two charged conducting spheres, *Proc. R. Soc. A*, May 2012.

[Maxwell 1954] **Maxwell J.**, A Treatise on Electricity and Magnetism, vol. 1, Dover, 1954.

[Miller 2008] **Miller G.**, *Nucl. Phys. News* 18:12-16 (2008).

[Mohr et al 2008] **Mohr P.**, Taylor B., Newell D., *Rev Mod Phys*, 633, 2008.

[Munirov et al 2013] **Munirov V.**, Filippov A., Interaction of Two Dielectric Macroparticles, *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 2013, Vol. 117, No. 5, pp. 809–819.

[Murovec et al 2013] **Murovec T.**, Brosseau C., Electrostatics of two charged conducting ellipsoids, *Appl. Phys. Lett.* 102, 084105 (2013).

[de Oliveira et al 2012] **de Oliveira M.**, Pagan C., The Method of Images applied to the grounded sphere: The problem of the ground wire, *Journal of Electrostatics* 70 (2012) 292–299.

[Polyakov et al 2014] **Polyakov P.**, Rusakova N., Samukhina Yu., *Moscow University Physics Bulletin*, 2014, Vol. 69, No. 6, pp. 493–496.

[Saranin 2013a] **Saranin V.**, Energy, force and field strength in a system of two charged conducting balls, *Journal of Electrostatics* 71 (2013) 746–753.

[Saranin 2013b] **Saranin V.**, Force Exerted on a Conducting Spherical Particle Near the Plate of a Plane Capacitor, *Technical Physics*, 2013, Vol. 58, No. 4, pp. 471–474.

[Sardin 1999] **Sardin G.**, *Physics Essays* 12, 204 (1999).

[Sick 2003] **Sick I.**, *Phys. Lett. B* 576, 62–67 (2003).

[Slisko et al 1998] **Slisko J.**, Brito-Orta R., On approximate formulas for the electrostatic force between two conducting spheres, *Am. J. Phys.* 66 (1998) 352-355.

[Smythe 1986] **Smythe W.**, Static and Dynamic Electricity, McGraw-Hill, 1968.

[Soules 1990] **Soules J.**, Precise calculation of the electrostatic force between charged spheres including induction effects, *Am. J. Phys.* 58 (1990) 1195-1199.