ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ “ПАИСИЙ ХИЛЕНДАРСКИ”
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
КАТЕДРА „АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ”

ЙОРДАН ЙОРДАНОВ ЕПИТРОПОВ

ИЗОМОРФИЗМИ НА АЛГЕБРИ И
ПОЛУЛИНЕЙНИ ИЗОБРАЖЕНИЯ НА ГРУПОВИ ПРЪСТЕНИ

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертационен труд

за присъждане на образователна и научна степен „доктор”

в област на висше образование 4. *Природни науки, математика и информатика*

професионално направление 4.5. *Математика*

докторска програма *Алгебра и теория на числата*

научни ръководители:
проф. дмн Тодор Желязков Моллов, проф. дмн Нако Ангелов Начев

Пловдив, 2015

Дисертационният труд е обсъден и насрочен за защита на от Катедрения съвет в разширен състав на катедра „Алгебра и геометрия” при Факултет по математика и информатика на Пловдивския университет „Паисий Хилендарски”, проведен на 2.7.2015 г.

Дисертационният труд съдържа 92 страници и включва Увод, Цели на дисертационния труд, две основни Глави, състоящи се от 10 параграфа, Публикации на докторанта по дисертационния труд (включващ 4 заглавия), Доклади на докторанта по дисертационния труд, Приноси, Заключение, Декларация за оригиналност и достоверност, Библиография (състояща се от 95 източника) и Означения.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на …………….............. 2015 г. в Заседателната зала на Новата сграда на Пловдивски университет „Паисий Хилендарски” на открито заседание на научното жури.

Наименованията на главите и параграфите, номерациите на твърденията и формулите, както и цитиранията в автореферата съвпадат със съответните наименования, номерации и цитирания в дисертационния труд.

Материалите по защитата са на разположение в секратариата на ФМИ, каб. 330, всеки работен ден от 8:30 до 17:00 часа.

СЪДЪРЖАНИЕ

УВОД

Във **Увода** е направена кратка историческа справка на възникването и развитието на теория на груповите пръстени.

Съвременното определение на понятието групов пръстен може да се въведе по следния начин [Karpilovsky, 1989]:

Нека G е мултипликативна група и R е пръстен. *Групов пръстен RG на G над R* е свободен R-модул с базис G и с умножение, индуцирано от умножението в G.

По такъв начин груповият пръстен RG се състои от всички крайни линейни комбинации $x = \sum_{g \in G} x_g.g$, $x_g \in R$. Неговите елементи $x = \sum_{g \in G} x_g.g$ и $y = \sum_{g \in G} y_g.g$, $x_g, y_g \in R$, са равни точно тогава, когато $x_g = y_g$ за всеки елемент $g \in G$. Операциите събиране и умножение на елементи от RG, както и умножение на елементи от RG с елементи от R се определят по естествен начин, т.е.

$$x + y = \sum_{g \in G} x_g.g + \sum_{g \in G} y_g.g = \sum_{g \in G} (x_g + y_g).g,$$

$$xy = \left(\sum_{g \in G} x_g.g \right) . \left(\sum_{h \in G} y_h.h \right) = \sum_{g \in G} \sum_{h \in G} x_g y_h.gh = \sum_{g \in G} \left(\sum_{h \in G} x_h y_{h^{-1}g} \right) .g,$$

$$ux = u \sum_{g \in G} x_g.g = \sum_{g \in G} (ux_g).g, \ u \in R.$$

От даденото определение следва, че груповият пръстен RG е пръстен. В частния случай, когато R е комутативен пръстен с единица, RG е асоциативна R-алгебра, която се нарича *групова алгебра на* G *над* R.

Обобщавайки възгледите на редица автори (например [Бовди, 1974]), отбелязваме (без да имаме претенции за пълнота) като основни следните направления в теория на груповите пръстени:

1) проблем за изоморфизма на груповите алгебри;

2) структура на мултипликативната група на групов пръстен;

3) теоретико-групови свойства на груповите пръстени;

4) теоретико-пръстенови свойства на груповите пръстени.

В дисертационния труд е направен преглед на актуалното състояние на основни резултати за комутативни групови алгебри, които са свързани с тематиката на дисертационния труд.

ЦЕЛИ НА ДИСЕРТАЦИОННИЯ ТРУД

Основните цели на дисертационния труд са:

1. Да се опише с точност до изоморфизъм структурата на:

1.1. крайномерна комутативна полупроста алгебра над алгебрично затворено поле и над полето $\mathbb{R}$ на реалните числа;

1.2. крайномерна комутативна полупроста p-циклотомична алгебра над поле с характеристика, различна от p.

2. Да се намерят необходими и достатъчни условия:

2.1. две реални крайномерни комутативни полупрости алгебри да са изоморфни като $\mathbb{R}$-алгебри и една реална крайномерна комутативна алгебра да е изоморфна като $\mathbb{R}$-алгебра на някоя реална групова алгебра;

2.2. една крайномерна комутативна полупроста алгебра над поле F да е изоморфна като F-алгебра на групова алгебра FG на крайна абелева група G, когато F е алгебрически затворено поле или полето $\mathbb{R}$ на реалните числа;

2.3. една произволна алгебра над поле F с характеристика, различна от простото число p, да е изоморфна като F-алгебра на комутативна крайномерна полупроста p-циклотомична алгебра над F;

2.4. една произволна алгебра над поле F с характеристика, различна от простото число p, да е изоморфна като F-алгебра на групова алгебра FG за някоя крайна абелева p-група G.

3. Ако R е пръстен, а G и H са групи, да се намерят необходими и достатъчни условия груповите пръстени RG и RH да са полулинейно изоморфни.

Глава I. СТРУКТУРА И ИЗОМОРФИЗЪМ НА НЯКОИ КЛАСОВЕ КРАЙНОМЕРНИ КОМУТАТИВНИ ПОЛУПРОСТИ АЛГЕБРИ

В първите два параграфа на тази глава: **§ 1. *Характери на крайни абелеви групи*** и **§ 2. *Идемпотенти на полупрости групови алгебри на крайни абелеви групи***, в дисертационния труд са изложени някои предварителни сведения. Резултатите на докторанта са представени от § 3 до § 8 включително.

§ 3. *Структура и изоморфизъм на крайномерни комутативни полупрости алгебри над алгебрически затворено поле и над полето $\mathbb{R}$ на реалните числа*

В този параграф се представят резултати, докладвани на конференцията с международно участие Jubilee national scientific conference with international participation “Tradition, directions, challenges”, Смолян, 19-21.10.2012, и публикувани в [Epitropov, 2012]. Изследването е частично финансирано от Проект НИ11-ФМИ004 към НПД на ПУ „Паисий Хилендарски”.

Най-напред ние даваме критерий кога една крайномерна комутативна полупроста алгебра над алгебрически затворено поле F е изоморфна като F-

алгебра на групова алгебра FG на крайна абелева група G. Второ, разглеждаме структурата на крайномерните комутативни полупрости алгебри над полето $\mathbb{R}$ на реалните числа като я описваме с точност до изоморфизъм. Дефинираме понятието реална мощност на комутативна полупроста алгебра над $\mathbb{R}$ и даваме необходими и достатъчни условия една такава алгебра да е изоморфна като $\mathbb{R}$-алгебра на групова алгебра $\mathbb{R}G$ на крайна абелева група G. Освен това извеждаме необходими и достатъчни условия една крайномерна комутативна алгебра над $\mathbb{R}$ да е изоморфна като $\mathbb{R}$-алгебра на някоя групова алгебра над полето $\mathbb{R}$ на реалните числа.

Твърдение 3.1. *Нека F е алгебрически затворено поле, A е комутативна полупроста алгебра над F и $\dim_F A = n$ ($n \in \mathbb{N}$). Тогава A е изоморфна като F-алгебра на груповата алгебра FG на някоя абелева група G от ред n.*

Теорема 3.2. *Нека A е реална крайномерна комутативна полупроста алгебра. Тогава*

$$A \cong \mathbb{R} \oplus \ldots \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{C} \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}. \tag{3.1}$$

Определение 3.1. Нека A е реална крайномерна комутативна полупроста алгебра. Броят r_A на директните събираеми $\mathbb{R}$ в разлагането (3.1) наричаме *реална мощност на* A.

Теорема 3.3. *Ако A е реална крайномерна комутативна полупроста алгебра и $\dim_{\mathbb{R}} A = n$ ($n \in \mathbb{N}$), то реалната крайномерна комутативна полупроста алгебра B е изоморфна на A като $\mathbb{R}$-алгебра точно тогава, когато $\dim_{\mathbb{R}} B = n$ и $r_A = r_B$.*

Теорема 3.4. *Нека A е реална крайномерна комутативна полупроста алгебра и G е крайна абелева група. Алгебрата A е изоморфна като $\mathbb{R}$-алгебра на груповата алгебра $\mathbb{R}G$ точно тогава, когато $\dim_{\mathbb{R}} A = |G|$ и реалната мощност r_A на A е равна на $|G[2]|$.*

Теорема 3.5. *Нека A е реална крайномерна комутативна алгебра. Тогава A е изоморфна като $\mathbb{R}$-алгебра на някоя реална групова алгебра точно тогава, когато са изпълнени следните условия:*

(i) A *е полупроста алгебра;*

(ii) $r_A = 2^t$*, където* t *е неотрицателно цяло число;*

(iii) r_A *дели* $\dim_{\mathbb{R}} A$.

§ 4. *Структура и изоморфизъм на крайномерни комутативни полупрости p-циклотомични алгебри*

В този параграф се представят резултати, докладвани на Научната сесия на СУБ, Пловдив, 30-31.10.2013, и отпечатани в [Epitropov, 2013]. Това изследване е финансирано по Проект НИ13-ФМИ-002 от Фонд „Научни изследвания” при ПУ „Паисий Хилендарски”. Друга част от резултатите са публикувани в [Epitropov, Mollov and Nachev].

Нека p е просто число и F е поле с характеристика, различна от p. Тук ние даваме определение на понятието p-циклотомична алгебра над поле F с характеристика, различна от p. Изучаваме, с точност до изоморфизъм, структурата на комутативните крайномерни полупрости p-циклотомични алгебри над F. Даваме необходими и достатъчни условия една алгебра над F да е изоморфна като F-алгебра на дадена комутативна крайномерна p-циклотомична алгебра над F.

Нека p е просто число, F е поле с характеристика, различна от p, а ε_j е примитивен p^j-ти корен на единицата в алгебрически затворената обвивка на F, където j е неотрицателно цяло число. С $F(\varepsilon_i)$ означаваме разширението на полето F с ε_i. Тогава е изпълнено условието $F \subseteq F(\varepsilon_1) \subseteq \ldots \subseteq F(\varepsilon_n) \subseteq \ldots$.

Следвайки [Берман, 1967б], полето F наричаме *поле от втори род спрямо простото число* p, ако степента на разширението $F(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$ на F е крайна, т.е. ако $(F(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots) : F) < \infty$. В противен случай F наричаме *поле от първи род спрямо простото число* p. В [Karpilovsky, 1989] е показано, че ако F е поле от втори род спрямо p и (i) p е нечетно, то $F(\varepsilon_j) = F(\varepsilon_1)$ за всяко естествено число j; (ii) ако

$p=2$, то $F(\varepsilon_j)=F(\varepsilon_2)$ за всяко естествено число $j\geq 2$.

Ако F е поле от първи род спрямо p, то съществува такова естествено m, което се нарича *константа на полето F спрямо p* [Берман, 1967б], че е изпълнено $F(\varepsilon_q)=F(\varepsilon_{q+1})=\ldots=F(\varepsilon_m)\subset F(\varepsilon_{m+1})\subset\ldots$, където $q=1$ при $p\neq 2$ и $q=2$ при $p=2$. Очевидно, ако F е поле от първи род спрямо p с константа m, то $F(\varepsilon_i)$ е поле от първи род спрямо p с константа i при $i\geq m$ и с константа m при $i<m$ спрямо p.

За поле от втори род полагаме константата $m=\infty$.

Ако F е поле с характеристика, различна от простото число p, то в [Моллов, 1986в] е въведено понятието спектър на полето F спрямо p, а именно той дава следното определение: Ако F е поле и p е просто число, то множеството $s_p(F)=\left\{i\in\mathbb{N}_0 \,\middle|\, F(\varepsilon_i)\neq F(\varepsilon_{i+1})\right\}$ се нарича *спектър на полето F спрямо p*.

Когато F е поле от първи род спрямо p с константа f спрямо p, за спектърът му е в сила [Моллов, 1986в]: 1) ако $p\neq 2$ и $F\neq F(\varepsilon_1)$, то $s_p(F)=\{0,m,m+1,\ldots\}$; 2) ако $p\neq 2$ и $F=F(\varepsilon_1)$ или ако $p=2$ и $F=F(\varepsilon_2)$, то $s_p(F)=\{m,m+1,\ldots\}$; 3) ако $p=2$ и $F\neq F(\varepsilon_2)$, то $s_p(F)=\{1,m,m+1,\ldots\}$.

Когато F е поле от втори род спрямо p, то имаме $F\subseteq F(\varepsilon_1)=F(\varepsilon_2)=\ldots$ при $p\neq 2$ и $F=F(\varepsilon_1)\subseteq F(\varepsilon_2)=F(\varepsilon_3)=\ldots$ при $p=2$. Така спектърът на поле F от втори род е: 1) $s_p(F)=\varnothing$ при 1.1) $p\neq 2$ и $F=F(\varepsilon_1)$ или при 1.2) $p=2$ и $F=F(\varepsilon_2)$; 2) $s_p(F)=\{\,0\,\}$ при $p\neq 2$ и $F\neq F(\varepsilon_1)$; 3) $s_p(F)=\{\,1\,\}$ при $p=2$ и $F\neq F(\varepsilon_2)$.

Определение 4.1. Нека p е просто число, F е поле с характеристика, различна от p, а L е разширение на F. Полето L се нарича *p-циклотомично разширение на полето F*, ако то се получава от F чрез присъединяване само на p^i-ти корени на единицата, ($i\in\mathbb{N}$).

Определение 4.2. Нека p е просто число, F е поле с характеристика, различна от p, а A е алгебра над F. Алгебрата A се нарича *p-циклотомична алгебра над полето F*, ако всяко поле, което се съдържа в A, е p-циклотомично разширение на полето F.

Теорема 4.1 (структура). *Нека p е просто число, F е поле с характеристика, различна от p, и F е поле от втори род спрямо простото число p. Нека A е крайномерна комутативна полупроста p-циклотомична алгебра над полето F. Тогава*

$$A \cong F \oplus \ldots \oplus F \oplus F(\varepsilon_2) \oplus \ldots \oplus F(\varepsilon_2), \tag{4.1}$$

където ε_2 е примитивен p^2-ти корен на 1.

Аналогично на Определение 3.1, тук даваме следното

Определение 4.3. Нека p е просто число, F е поле с характеристика, различна от p, и е поле от втори род спрямо простото число p. Нека A е крайномерна комутативна полупроста p-циклотомична алгебра над полето F. Броят r_A на директните събираеми F в разлагането (4.1) наричаме *реална мощност на A*.

Ако F е поле от втори род спрямо простото число p и A е комутативна крайномерна полупроста p-циклотомична алгебра над F, то формула (4.1) можем да се видоизмени по следния начин.

1) Ако $p \neq 2$ и $F = F(\varepsilon_1)$ или ако $p = 2$ и $F = F(\varepsilon_2)$, то $A \cong \lambda_0 F$, $\lambda_0 \in \mathbb{N}_0$.

2) Ако $p \neq 2$ и $F \neq F(\varepsilon_1)$, то $A \cong \lambda_0 F \oplus \lambda_1 F(\varepsilon_1)$, $\lambda_i \in \mathbb{N}_0$.

3) Ако $p = 2$ и $F \neq F(\varepsilon_2)$, то $A \cong \lambda_0 F \oplus \lambda_2 F(\varepsilon_2)$, $\lambda_i \in \mathbb{N}_0$.

Определение 4.4. *Характеристична система* на комутативната крайномерна полупроста p-циклотомична алгебра A над поле F от втори род спрямо простото число p наричаме системата $\{\lambda_0\}$ в случая 1); $\{\lambda_0, \lambda_1\}$ в случая 2); $\{\lambda_0, \lambda_2\}$ в случая 3).

Твърдение 4.2 (изоморфизъм). *Ако A е комутативна крайномерна* *полупроста* p*-циклотомична алгебра над поле* F *с характеристика, различна от простото число* p, F *е от втори род спрямо* p *и* B *е произволна* F*-алгебра, то* $B \cong A$ *като* F*-алгебри точно тогава, когато* B *е крайномерна комутативна полупроста* p*-циклотомична алгебра над* F *и характеристичните системи на* A *и* B *съвпадат.*

Твърдение 4.2. може да се запише и в следната еквивалентна форма:

Твърдение 4.3 (изоморфизъм). *Ако* A *е комутативна крайномерна полупроста* p*-циклотомична алгебра над поле* F *от втори род спрямо простото число* p *и* B *е произволна* F*-алгебра, то* $B \cong A$ *като* F*-алгебри точно тогава, когато са изпълнени следните условия:*

(i) B *е крайномерна комутативна полупроста* p*-циклотомична алгебра над* F*;*

(ii) $\dim_F B = \dim_F A$*;*

(iii) $r_B = r_A$.

Теорема 4.4 (структура). *Нека* F *е поле с характеристика, различна от простото число* p, *и* F *е от първи род спрямо* p, *а* A *е комутативна крайномерна полупроста* p*-циклотомична алгебра над* F. *Тогава важи следното директно разлагане*

$$A \cong \dot{\sum_{i \in s_p(F)}} \lambda_i F(\varepsilon_i), \ \lambda_i \in \mathbb{N}_0, \tag{4.2}$$

където само краен брой числа λ_i *са различни от 0.*

Определение 4.5. Системата $\{\lambda_i \mid i \in s_p(F)\}$, където λ_i са числата от (4.2), наричаме *характеристична система* на комутативната крайномерна полупроста p-циклотомична алгебра A над поле F от първи род спрямо простото число p.

Твърдение 4.5 (изоморфизъм). *Ако* A *е комутативна крайномерна полупроста* p*-циклотомична алгебра над поле* F *с характеристика, различна от* *простото число* p*, и* F *е от първи род спрямо* p*, а* B *е произволна* F*-алгебра, то* $B \cong A$ *като* F*-алгебри точно тогава, когато* B *е комутативна крайномерна полупроста* p*-циклотомична алгебра над* F *и характеристичните системи на* A *и* B *съвпадат.*

Тъй като разглежданото поле F с характеристика, различна от простото число p, е или от първи, или втори род спрямо p, то Теорема 4.2 и Теорема 4.5 ни дават следния общ резултат:

Теорема 4.6 (изоморфизъм). *Ако* A *е комутативна крайномерна полупроста* p*-циклотомична алгебра над поле* F *с характеристика, различна от простото число* p*, и* B *е произволна* F*-алгебра, то* $B \cong A$ *като* F*-алгебри точно тогава, когато* B *е комутативна крайномерна полупроста* p*-циклотомична алгебра над* F *и характеристичните системи на* A *и* B *съвпадат.*

Лема 1 от [Моллов, 1986б] е структурна теорема за групова алгебра на крайна абелева p-група и може да се формулира като такава по следния начин:

Теорема 4.7 (структура). *Ако* G *е крайна абелева* p*-група и* F *е поле от първи род спрямо* p*, то*

$$FG \cong \dot{\sum_{i \in s_p(F)}} \lambda_i F(\varepsilon_i),$$

където

$$\lambda_i = \begin{cases} \dfrac{|G[p^i]| - |G[p^j]|}{(F(\varepsilon_i):F)} & \text{при } i \neq i_0, \\ |G[p^{i_0}]| & \text{при } i = i_0, \end{cases} \qquad (4.3)$$

i_0 *е минималното число от* $s_p(F)$*, а* j *е максималното число от* $s_p(F)$*, което е по-малко от* i*.*

§ 5. *Някои теоретико-групови резултати*

Резултатите от този параграф са публикувани в [Epitropov, Mollov and Nachev]. Тук доказваме някои теоретико-групови резултати за крайни абелеви p-групи, където p е просто число.

Ако G е абелева p-група, то $G^{p^i} = \{g^{p^i} | g \in G\}$ и $G[p^i] = \{g \in G | g^{p^i} = 1\}$ са подгрупи на групата G за всяко $i \in \mathbb{N}_0$. За тези подгрупи имаме

(5.1) $$G^{p^{i+1}} \leq G^{p^i} \text{ и } G[p^i] \leq G[p^{i+1}].$$

Ако G е крайна, то съществува такова k, че $G^{p^k} = 1$. Нека k е най-малкото такова число. Тогава числото p^k наричаме *показател на групата* G и го означаваме с $\exp G$. Включванията в (5.1) са строги точно тогава, когато $p^i < \exp G$. Да образуваме фактор-групите $G^{p^{i-1}}[p]/G^{p^i}[p]$ за всяко $i \in \mathbb{N}$. Тези фактор-групи са елементарни абелеви p-групи и следователно те са линейни пространства над полето на Галоа $GF(p)$. Да положим $\alpha_i = \dim_{GF(p)}\left(G^{p^{i-1}}[p]/G^{p^i}[p]\right)$, $i \in \mathbb{N}$.

Числото α_i се нарича *i-ти инвариант на Ulm-Kaplansky на групата* G и се означава още с $f_i(G)$. Нека $r(G)$ е рангът на абелевата p-група G [Fuchs]. Тогава по [Fuchs] имаме $f_i(G) = r\left(G^{p^{i-1}}[p]/G^{p^i}[p]\right)$, $i \in \mathbb{N}$. За крайна абелева p-група G инвариантите на Ulm-Kaplansky образуват пълна система инварианти и следователно те определят групата еднозначно с точност до изоморфизъм.

За крайните абелеви p-групи инвариантите на Ulm-Kaplansky не само че образуват пълна система инварианти, но те са и независими помежду си. Това означава, че ако изберем редицата $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, 0, 0, \ldots\}$, където $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ са произволни цели неотрицателни числа, то съществува крайна абелева p-група G, за която избраните числа са инвариантите на Ulm-Kaplansky на G. Тази група е единствена с точност до изоморфизъм и при $\alpha_n \neq 0$ имаме $\exp G = p^n$.

Да положим

(5.2) $$\left|G\left[p^{i}\right]\right| = p^{\beta_i}.$$

Лема 5.1. *При означенията от (5.2) ако* $p^i \le \exp G$*, то* $\beta_i \ge i$*. Равенство се достига точно тогава, когато* G *е циклична.*

В следващите твърдения с p^n означаваме показателя на крайната абелева p-група G. В **Лема 5.2** е показано как числата β_i от (5.2) се определят от инвариантите $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ за всяко $i = 1, 2, \ldots, n$, където $n = \log_p(\exp G)$. Обратното изразяване е изведено в **Лема 5.3**. С **Лема 5.4** установяваме какви условия трябва да удовлетворяват числата β_i, за да съществува крайна абелева p-група G, за която $\left|G\left[p^{i}\right]\right| = p^{\beta_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n = \log_p|G|$.

Определение 5.1. Нека $m < n$ са естествени числа и нека $\beta_m, \beta_{m+1}, \ldots, \beta_n$ е система от естествени числа. Тази система наричаме *нормална от първи тип*, ако тя удовлетворява следните неравенства

(5.6) $$\frac{1}{m}\beta_m \ge \beta_{m+1} - \beta_m \ge \beta_{m+2} - \beta_{m+1} \ge \ldots \ge \beta_n - \beta_{n-1} > 0.$$

Определение 5.2. Нека $m < n$ са естествени числа и нека $\beta_1, \beta_m, \beta_{m+1}, \ldots, \beta_n$ е система от естествени числа. Тази система наричаме *нормална от втори тип*, ако тя удовлетворява следните неравенства

(5.7) $$\beta_1 \ge \frac{1}{m}\beta_m \ge \beta_{m+1} - \beta_m \ge \beta_{m+2} - \beta_{m+1} \ge \ldots \ge \beta_n - \beta_{n-1} > 0.$$

Теорема 5.5. *Нека* $m < n$ *са естествени числа и нека е дадена нормална система от първи или втори тип. Тогава съществува такава крайна абелева* p*-група* G*, че* $\left|G\left[p^{i}\right]\right| = p^{\beta_i}$*, където* β_i *обхожда числата от дадената нормална система.*

Забележка. Групата G, определена в доказателството на Теорема 5.5, не е единствена.

§ 6. *Алгебри от първи и втори род спрямо просто число*

В този параграф се представят резултати, публикувани в [Epitropov, Mollov and Nachev]. Въвеждаме следните понятия, отнасящи се за крайномерни полупрости комутативни p-циклотомични алгебри над поле F.

Определение 6.1. Крайномерната полупроста комутативна p-циклотомична F-алгебра A се нарича *алгебра от първи род спрямо* p, ако полето F е от първи род спрямо p и в директното разлагане на F-алгебрата A в директна сума на полета $F(\varepsilon_i)$ участва поне едно поле $F(\varepsilon_n)$, за което $\lambda_n \neq 0$ и $n > m$, където m е константата на полето F спрямо p. В противен случай F-алгебрата A се нарича *алгебра от втори род спрямо* p. Ако A е алгебра от първи род спрямо p, то най-голямото число n с посочените по-горе свойства се нарича *показател на* A.

Ако A е алгебра от втори род спрямо p над полето F, то F може да бъде както от първи, така и от втори род спрямо p. Освен това, в директното разлагане на алгебра от втори род при $p \neq 2$ участват само полета от вида F и $F(\varepsilon_1)$, а при $p = 2$ – само полета от вида F и $F(\varepsilon_2)$.

При $p \neq 2$ полагаме $d = (F(\varepsilon_1) : F)$, а при $p = 2$ нека $d = (F(\varepsilon_2) : F)$. При $p \neq 2$ имаме $d / (p-1)$, а при $p = 2$ имаме $d / 2$. Ако $p \neq 2$, то $d = 1$ точно тогава, когато $F = F(\varepsilon_1)$. Ако $p = 2$, то $d = 1$ точно тогава, когато $F = F(\varepsilon_2)$ и $d = 2$ точно тогава, когато $F \neq F(\varepsilon_2)$. Ако F е от първи род спрямо p и $i \geq m$, то $(F(\varepsilon_i) : F) = dp^{i-m}$.

Следните директни разлагания на алгебрата A наричаме *канонични*:

1) Ако алгебрата A е от първи род спрямо p, с показател n, то нейното разлагане е

$$A \cong \lambda_0 F \oplus \lambda_m F(\varepsilon_m) \oplus \ldots \oplus \lambda_n F(\varepsilon_n). \tag{6.1}$$

2) Ако A е от втори род спрямо p, то

(6.2) $$A \cong \lambda_0 F,$$

ако $d=1$,

(6.3) $$A \cong \lambda_0 F \oplus \lambda_1 F(\varepsilon_1),$$

ако $p \neq 2$ и $d>1$,

(6.4) $$A \cong \lambda_0 F \oplus \lambda_2 F(\varepsilon_2),$$

ако $p=d=2$.

Числата λ_i, определени съответно в (6.1), (6.2), (6.3) или (6.4), наричаме *характеристични числа на* A и казваме, че те образуват *характеристична система на* A. Тези числа образуват пълна система инварианти на A и я определят с точност до F-изоморфизъм.

За алгебра от първи род спрямо p при $\lambda_m \neq 0$ въвеждаме още една система от числови инварианти. За тази цел нека означим

(6.5) $$\beta_i = \log_p\left(\lambda_0 + d\lambda_m + pd\lambda_{m+1} + \ldots + p^{i-m} d\lambda_i\right),\ i = m, m+1, \ldots, n.$$

При $p=d=2$ и $\lambda_0 \neq 0$ да положим

(6.6.) $$\beta_1 = \log_2 \lambda_0.$$

При $p \neq 2$ или $p=2=d+1$ казваме, че числата от (6.5) образуват *приведена характеристична система на алгебрата* A от първи род спрямо простото число p.

С помощта на формулите (6.5) и (6.6) числата β_i се определят чрез $\lambda_0, \lambda_m, \lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n$.

Обратно, може чрез числата β_i да се определят числата λ_i, а именно

(6.7) $$\lambda_m = \frac{p^{\beta_m} - \lambda_0}{d},$$

(6.8) $$\lambda_i = \frac{p^{\beta_i} - p^{\beta_{i-1}}}{dp^{i-m}} \text{ за } i = m+1, m+2, \ldots, n,$$

а при $p = d = 2$ имаме $\lambda_0 = 2^{\beta_1}$. Това показва, че приведената характеристична система заедно с числото λ_0 образува пълна система инварианти на алгебрата A от първи род спрямо p.

За алгебра от втори род спрямо p не определяме приведена характеристична система.

§ 7. *Представяне на една F-алгебра като групова алгебра*

Основният резултат тук е публикуван в [Epitropov, Mollov and Nachev]. В този параграф изясняваме въпроса кога една алгебра над поле F с характеристика, различна от простото число p, може да се представи като групова алгебра на крайна абелева p-група над това поле.

Теорема 7.1. *Една алгебра A над поле F с характеристика, различна от простото число p, е изоморфна на груповата алгебра FG на някоя крайна абелева p-група G точно тогава, когато са изпълнени следните условия:*

1) алгебрата A е крайномерна, полупроста, комутативна и p-циклотомична над F;

2) ако A е от първи род спрямо p с показател n и константата на полето F спрямо p е m, то при $p \neq 2$ или $p = 2 = d+1$ имаме $\lambda_m \neq 0$, приведената характеристична система на A се състои от цели положителни числа и е нормална от първи тип и

(7.1) $$\lambda_0 = \begin{cases} 0, \text{ако } d = 1, \\ 1, \text{ако } p \neq 2, d > 1 \end{cases}.$$

При $p = d = 2$ имаме $\lambda_0 \neq 0$, приведената характеристична система на A се състои от цели положителни числа и е нормална от втори тип;

3) ако A е от втори род спрямо p, то

(7.2) $$\lambda_0 = p^s,\ s \geq 0 \text{ е цяло, ако } d = 1;$$

(7.3) $$\lambda_0 = 1,\ \lambda_1 = \frac{p^s - 1}{d},\ s \geq 0 \text{ е цяло, ако } p \neq 2 \text{ и } d > 1;$$

(7.4) $\lambda_0 = 2^t$, $\lambda_2 = 2^{s-1} - 2^{t-1}$, *ако* $p = d = 2$ *и ако* F *е от първи род, то* $0 \leq t \leq s \leq mt$, *а ако* F *е от втори род спрямо 2, то* $0 < t \leq s$ *или* $s = t = 0$.

§ 8. *Примери за представяне на една F-алгебра като групова алгебра*

В този параграф се разглеждат някои примери като приложение на резултатите от § 5, § 6 и основната Теорема 7.1.

Глава II. ПОЛУЛИНЕЙНИ ИЗОМОРФИЗМИ НА ГРУПОВИ ПРЪСТЕНИ

В **§ 9. *Фундаментален идеал на групов пръстен*** се дават някои предварителни свойства, които се използват в §10.

§ 10. *Полулинейни изоморфизми на групови пръстени*

В този параграф се представят резултати, публикувани в [Epitropov, 2000], както и резултати, докладвани на Юбилейната научна конференция „125 години математика и природни науки в Софийския университет „Св. Климент Охридски”, 5-7 декември 2014, София.

Нека F е произволно поле. Тук се въвеждат определения на слабо полулинеен F-хомоморфизъм и полулинеен F-хомоморфизъм на групови алгебри над F. Те са естествени обобщения на F-хомоморфизма на групови алгебри. Доказва се, че слабо полулинейният F-хомоморфизъм на груповите алгебри FG и FH на абелевите групи G и H над поле F е полулинеен F-хомоморфизъм на тези алгебри. Показва се, че съществува полулинеен F-изоморфизъм на групови алгебри на абелеви групи над поле F, който не е F-изоморфизъм на тези алгебри. Въпреки че в комутативния случай всеки слабо полулинеен F-изоморфизъм на групови алгебри не винаги е техен F-изоморфизъм, се доказва, че всеки слабо полулинеен F-изоморфизъм на групови алгебри поражда някакъв F-изоморфизъм на тези алгебри.

Нека G и H са произволни групи, а R – пръстен. Ние показваме как: (a) от даден автоморфизъм на R може да се конструира полулинеен автоморфизъм на груповия пръстен RH; (b) от даден полулинеен изоморфизъм на груповите пръстени RG и RH може да се конструира линеен изоморфизъм между тях.

Доказва се, че груповите пръстени RG и RH са полулинейно изоморфни тогава и само тогава, когато RG и RH са линейно изоморфни. Освен това, ако R е прост пръстен с единица, се доказва, че следните твърдения са еквивалентни:

(i) RG и RH са слабо полулинейно изоморфни;

(ii) RG и RH са полулинейно изоморфни;

(iii) RG и RH са линейно изоморфни.

Определение 10.1. Нека G и H са произволни групи, а R и S са пръстени. Изображението $\varphi : RG \to SH$ на груповия пръстен RG върху груповия пръстен SH се нарича *слабо полулинейно*, ако $\varphi(R) \subseteq S$. Ако $\varphi(R) = S$, то изображението φ се нарича *полулинейно*. В частния случай, когато $R = S$ и $\varphi(\alpha) = \alpha$ за всяко $\alpha \in R$, изображението φ се нарича *линейно*.

Определение 10.2. Нека G и H са групи, а F е поле. Пръстеновият хомоморфизъм (изоморфизъм) $\varphi : FG \to FH$ се нарича *слабо полулинеен F-хомоморфизъм* (*F-изоморфизъм*), ако $\varphi(\alpha) \in F$ за всяко $\alpha \in F$, т.е. ако $\varphi(F) \subseteq F$. Ако $\varphi(F) = F$, то пръстеновият хомоморфизъм (изоморфизъм) φ се нарича *полулинеен F-хомоморфизъм* (*F-изоморфизъм*).

Твърдение 10.1. *Нека* G *е абелева група,* H *е група, а* F *е поле. Сюрективният пръстенов хомоморфизъм* $\varphi : FG \to FH$ *е слабо полулинеен* F*-хомоморфизъм тогава и само тогава, когато* φ *е полулинеен* F*-хомоморфизъм.*

Теорема 10.2. *Нека* G *е абелева група,* H *е група и* F *е поле. Груповата алгебра* FG *е слабо полулинейно* F*-изоморфна на груповата алгебра* FH *тогава и само тогава, когато* FG *и* FH *са изоморфни като* F*-алгебри. Ако* $\varphi : FG \to FH$ *е слабо полулинеен* F*-изоморфизъм на* FG *върху* FH*, то изображението* $\psi : FH \to FH$*, определено чрез*

$$\psi\left(\sum_{h\in H}\alpha_h h\right) = \sum_{h\in H}\varphi^{-1}(\alpha_h)h,\ \alpha_h \in F, \tag{10.1}$$

е слабо полулинеен F*-изоморфизъм на* FH *върху* FH *и произведението* $\psi\varphi$ *е изоморфизъм на* FG *и* FH *като* F*-алгебри.*

Лема 10.3. *Нека* R *е произволен пръстен, а* H *е произволна група. Ако изображението* $\varphi : R \to R$ *е автоморфизъм на пръстена* R*, то изображението* $\psi : RH \to RH$*, определено чрез условието* $\psi\left(\sum_{h\in H}\alpha_h h\right) = \sum_{h\in H}\varphi^{-1}(\alpha_h)h$*,* $\alpha_h \in R$*, където* φ^{-1} *е обратният автоморфизъм на* φ*, е полулинеен автоморфизъм на груповия пръстен* RH.

Лема 10.4. *Нека* R *е произволен пръстен, а* G *и* H *– произволни групи. Ако изображението* $\varphi : RG \to RH$ *е полулинеен изоморфизъм и* ψ *е определеното в Лема 10.3 изображение, то изображението* $\Phi = \psi\varphi$ *е линеен изоморфизъм между груповите пръстени* RG *и* RH.

Теорема 10.5. *Нека* R *е произволен пръстен, а* G *и* H *– произволни групи. Груповите пръстени* RG *и* RH *са полулинейно изоморфни тогава и само тогава, когато* RG *и* RH *са линейно изоморфни.*

Теорема 10.6. *Нека* R *и* S *са произволни пръстени, а* G *и* H *– произволни групи. Ако* S *е прост пръстен с единица, то сюрективното изображение*

$\varphi: RG \to SH$ е слабо полулинеен изоморфизъм тогава и само тогава, когато φ е полулинеен изоморфизъм.

Следствие 10.7. *Нека R е прост пръстен с единица, G и H са произволни групи и $\varphi: RG \to RH$ е изображение на груповия пръстен RG върху груповия пръстен RH. Тогава следните твърдения са еквивалентни:*

(i) *RG и RH са слабо полулинейно изоморфни;*

(ii) *RG и RH са полулинейно изоморфни;*

(iii) *RG и RH са линейно изоморфни.*

ПУБЛИКАЦИИ НА ДОКТОРАНТА ПО ДИСЕРТАЦИОННИЯ ТРУД

Резултатите, включени в настоящата дисертация, са публикувани в:

1. **Epitropov**, J. Semilinear isomorphism of group algebras. *CR Acad Bulg Sci*, 2000, v. 53, 9-10. ISSN 1310–1331.

2. **Epitropov**, Y. On the structure of the finite-dimensional commutative semisimple algebras. Proceedings of the Jubilee scientific conference with international participation “Tradition, directions, challenges”, Smolyan, October 19-21, 2012, p. 27-31. ISBN 978-954-8767-43-9.

3. **Epitropov**, Y. Structure and isomorphism of finite dimensional commutative semisimple p-cyclotomic algebras over field of second kind. Scientific research of the Union of Scientists in Bulgaria – Plovdiv, series B. Natural Sciences and Humanities, Vol. XVI, 30-31 October 2013, p. 112-117. ISSN 1311-9192.

4. **Epitropov**, Y., Mollov, T., Nachev, N. Structure and isomorphism of some classes finite dimensional commutative semisimple algebras. (приета за печат в Годишника на Шуменския университет „Епископ Константин Преславски“, ISSN 13-834X).

ДОКЛАДИ НА ДОКТОРАНТА ПО ДИСЕРТАЦИОННИЯ ТРУД

Част от резултатите са докладвани на научни семинари на катедра „Алгебра и геометрия” при ФМИ, ПУ „Паисий Хилендарски”, както и на конференциите:

1. Smolyan, Jubilee national scientific conference with international participation “Tradition, directions, challenges”, 19-21 October, 2012.

2. Пловдив, Научна сесия на СУБ, 30-31.10.2013.

3. София, Юбилейна научна конференция „125 години математика и природни науки в Софийския университет „Св. Климент Охридски”, 5-7 декември 2014.

ПРИНОСИ НА ДОКТОРАНТА

Според автора, основните му приноси в дисертационния труд са:

1. Описва с точност до изоморфизъм структурата на:

1.1. крайномерна комутативна полупроста алгебра над (i) алгебрично затворено поле; (ii) над полето $\mathbb{R}$ на реалните числа;

1.2. крайномерна комутативна полупроста p-циклотомична алгебра над поле F с характеристика, различна от простото число p.

2. Дава необходими и достатъчни условия:

2.1. (i) две реални крайномерни комутативни полупрости алгебри да са изоморфни като $\mathbb{R}$-алгебри; (ii) една реална крайномерна комутативна алгебра да е изоморфна като $\mathbb{R}$-алгебра на някоя реална групова алгебра;

2.2. една крайномерна комутативна полупроста алгебра над поле F да е изоморфна като F-алгебра на групова алгебра FG на крайна абелева група G, когато F е: (i) алгебрически затворено поле; (ii) полето $\mathbb{R}$ на реалните числа;

2.3. една произволна алгебра над поле F с характеристика, различна от простото число p, да е изоморфна като F-алгебра на комутативна крайномерна полупроста

p-циклотомична алгебра над F;

2.4. една произволна алгебра над поле F с характеристика, различна от простото число p, да е изоморфна като F-алгебра на групова алгебра FG за някоя крайна абелева p-група G.

3. Доказва, че ако R е пръстен, а G и H са групи:

3.1. груповите пръстени RG и RH са полулинейно изоморфни тогава и само тогава, когато RG и RH са линейно изоморфни;

3.2. ако R е прост пръстен с единица, следните твърдения са еквивалентни:

(i) RG и RH са слабо полулинейно изоморфни;

(ii) RG и RH са полулинейно изоморфни;

(iii) RG и RH са линейно изоморфни.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Целите, заложени при подготовката на дисертационния труд, са постигнати. Връзката между поставените цели, приносите на докторанта и публикациите му по дисертационния труд са дадени в следната таблица.

Цел	**Принос**	**Твърдение**	**Публикация**
1.1.	1.1.(i), 1.1.(ii)	3.1., 3.2.	[Epitropov, 2012]
1.2	1.2	4.1., 4.4.	[Epitropov, Mollov and Nachev]
2.1.	2.1.(i), 2.1.(ii)	3.3., 3.5.	[Epitropov, 2012]
2.2.	2.2.(i), 2.2.(ii)	3.1., 3.4.	[Epitropov, 2012]
2.3.	2.3.	4.2., 4.3., 4.5., 4.6.	[Epitropov, Mollov and Nachev]
2.4.	2.4.	7.1.	[Epitropov, Mollov and Nachev]
3.	3.1., 3.2.	10.5., 10.7.	[Епитропов]

ДЕКЛАРАЦИЯ ЗА ОРИГИНАЛНОСТ И ДОСТОВЕРНОСТ

от Йордан Йорданов Епитропов,

задочен докторант към катедра „Алгебра и геометрия“,

Факултет по математика и информатика, ПУ „Паисий Хилендарски“

Във връзка с провеждането на процедура за придобиване на образователната и научна степен “доктор“ в Пловдивския университет “Паисий Хилендарски“ и защита на представения от мен дисертационен труд, декларирам:

Резултатите и приносите на проведеното дисертационно изследване, представени в дисертационния ми труд на тема „Изоморфизми на алгебри и полулинейни изображения на групови пръстени“, са оригинални и не са заимствани от изследвания и публикации, в които нямам участия.

ДЕКЛАРАТОР:

ЙОРДАН ЕПИТРОПОВ

03.07.2015 г.

гр. Пловдив

БЛАГОДАРНОСТИ

Считам за свой отговорен дълг да благодаря на научните си ръководители проф. дмн Тодор Моллов и проф. дмн Нако Начев, които ме въведоха в тематиката на груповите алгебри. При подготовката на дисертационния труд те ме подкрепяха търпеливо, даваха ми ценни идеи и полезни съвети, учеха ме на стил и прецизност.

Благодарен съм на всички колеги от катедра „Алгебра и геометрия” при ФМИ, ПУ „Паисий Хилендарски”, и особено на проф. д-р С. Миховски, за взаимността и положителното отношение.

Статията [Epitropov, 2012] е частично финансирана по Проект НИ11-ФМИ-004 от Фонд „Научни изследвания”, ПУ „Паисий Хилендарски”. Статията [Epitropov, 2013] е финансирана по Проект НИ13-ФМИ-002 от Фонд „Научни изследвания”, ПУ „Паисий Хилендарски”.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. [Берман, 1967а] **Берман**, С. Групповые алгебры счетных абелевых p-групп. *Докл Акад Наук СССР*. 1967, v. 175, 514-516.

2. [Берман, 1967б] **Берман**, С. Групповые алгебры счетных абелевых p-групп. *Publ Math – Debrecen*. 1967, v. 14, 365-405.

3. [Берман и др., 1969] **Берман**, С., Моллов, Т. О групповых кольцах абелевых p-групп любой мощности. *Мат Заметки*. 1969, v. 6, 381-392.

4. [Берман и др., 1975] **Берман**, С., Росса, А. Силовская p-подгруппа групповой алгебры счетной абелевой p-группы. Докл XXIX Науч Конф Ужгор Унив, 1975, 158-176.

5. [Берман и др., 1977] **Берман**, С., Богдан, В. Об изоморфизме вещественных групповых алгебр абелевых групп. *Мат заметки*. 1977, v. 21, 229-238.

6. [Берман и др., 1986] **Берман**, С., Моллов, Т. Изоморфизм полупростых групповых алгебр абелевых групп. *Pliska*. 1986, v. 8, 107-121.

7. [Бовди, 1974] **Бовди**, А. Групповые кольца. Ужгород, 1974.

8. [Бовди, 1987] **Бовди**, А. Мультипликативная группа целочисленного группового кольца. Ужгород, 1987.

9. [Бовди и др.] **Бовди**, А., Патай, З. О строении центра мультипликативной группы группового кольца p-группы над кольцом характеристики p. *Изв Акад Наук БССР*. 1978, v. 1, 5-11.

10. [Джекобсон] **Джекобсон**, Н. Теория колец. Издательство иностранной литературы, Москва, 1947.

11. [Залесский и др.] **Залесский**, А., Михалев, А. Групповые кольца. Итоги науки и техники, Москва, 1973.

12. [Моллов, 1971] **Моллов**, Т. О мультипликативных группах модулярных групповых алгебр примарных абелевых групп произвольной мощности, I. *Publ Math – Debrecen*. 1971, v. 18, 9-21.

13. [Моллов, 1977] **Моллов**, Т. Ульмовские инварианты силовских p-подгрупп групповых алгебр абелевых групп над полем характеристики p. Шести конгрес на българските математици, Варна, 3-9 юни 1977, стр. 2.

14. [Моллов, 1981] **Моллов**, Т. Ульмовские инварианты силовских p-подгрупп групповых алгебр абелевых групп над полем характеристики p. *Плиска.* 1981, v. 2, 77-82.

15. [Моллов, 1982] **Моллов**, Т. О мультипликативных группах полупростых групповых алгебр абелевых p-групп. *CR Acad Bulg Sci*. 1982, v. 35, 1619-1622.

16. [Моллов, 1984] **Моллов**, Т. О мультипликативных группах вещественных и рациональных групповых алгебр абелевых p-групп. *CR Acad Bulg Sci*. 1984, v. 37, 1151-1153.

17. [Моллов, 1986а] **Моллов**, Т. Инварианты Ульма-Капланского силовских p-подгрупп групп нормированных единиц полупростых групповых алгебр бесконечных сепарабельных абелевых p-групп. *Pliska*. 1986, v. 8, 101-106.

18. [Моллов, 1986б] **Моллов**, Т. Мультипликативные группы полупростых групповых алгебр. *Pliska*. 1986, v. 8, 54-64.

19. [Моллов, 1986в] **Моллов**, Т. Силовские p-подгруппы групп нормированных единиц полупростых групповых алгебр несчетных абелевых p-групп. *Pliska*. 1986, v. 8, 34-46.

20. [Начев, 1980] **Начев**, Н. Инварианты Ульма-Капланского группы нормированных единиц групповых алгебр абелевых p-групп над коммутативным кольцом, в которым p обратим елемент. *CR Acad Bulg Sci*. 1980, v. 33, 1585-1587.

21. [Начев, 1986] **Начев**, Н. Инварианты Ульма-Капланского группы нормированных единиц групповых алгебр абелевых p-групп над коммутативным кольцом, в которым p обратим елемент. *Плиска*. 1986, v. 8, 21-33.

22. [Начев и др.] **Начев**, Н., Моллов, Т. Инварианты Ульма-Капланского группы нормированных единиц модулярного группового кольца примарной абелевой группы. *Сердика*. 1980, v. 6, 258-263.

23. [Пирс] **Пирс**, Р. Ассоциативные алгебры. Москва, Мир, 1986.

24. [Bautista] **Bautista**, R. Some results on algebras of finite Abelian groups. *An Inst Mat Univ Nac Auton Mex*. 1967, v. 7, 1-25. (in Spanish)

25. [Berman and al.] **Berman**, S., Rossa, A. On the group algebras of a countable torsion Abelian group. *Dopovidi Akad Nauk Ukrain, RSR Ser A*. 1968, 870-872. (in Ukrainian)

26. [Bovdi] **Bovdi**, A. Modular group rings. Debrecen, 2005.

27. [Brauer] **Brauer**, R. Representations of finite groups. John Wiley, 1963.

28. [Carlson] **Carlson**, J. Modules and group algebras. Birkhaeuser, 1996.

29. [Cayley] **Cayley**, A. On the theory of groups as depending on the symbolic equation $\theta^n = 1$. *Phil Mag*. 1854, v. 7, 40-47.

30. [Chatzidakis and al.] **Chatzidakis**, Z., Pappas, P. Units in Abelian group rings. *J Lond Math Soc*. 1991, v. 44, 9-23.

31. [Cohen] **Cohen**, D. On Abelian group algebras. *Math Z*. 1968, v. 105, 267-268.

32. [Coleman] **Coleman**, D. On the modular group ring of a p-group. *P Am Math Soc*. 1964, v. 15, 511-514.

33. [Connell] **Connell**, I. On the group ring. *Canad J Math*. 1963, v. 15, 650-685.

34. [Curtis and al.] **Curtis**, C., Reiner, I. Representation theory of finite groups and associative algebras. AMS Chelsea Publishing, 2006.

35. [Deskins] **Deskins**, W. Finite Abelian groups with isomorphic group algebras. *Duke Math J*. 1956, v. 23, 35-40.

36. [Emmanouil] **Emmanouil**, I. Idempotent matrices over complex group algebras, Springer, 2006.

37. [Epitropov, 2000] **Epitropov**, J. Semilinear isomorphism of group algebras. *CR Acad Bulg Sci*. 2000, v. 53, 9-10.

38. [Epitropov, 2012] **Epitropov**, Y. On the structure of the finite-dimensional commutative semisimple algebras. Proceedings of the Jubilee scientific conference with international participation "Tradition, directions, challenges", Smolyan, October 19-21, 2012, p. 27-31.

39. [Epitropov, 2013] **Epitropov**, Y. Structure and isomorphism of finite dimensional commutative semisimple p-cyclotomic algebras over field of second kind. Scientific research of the Union of Scientists in Bulgaria – Plovdiv, series B. Natural Sciences and Humanities, Vol. XVI, 30-31 October 2013, p. 112-117.

40. [Epitropov, Mollov and Nachev] Epitropov, Y., Mollov, T., Nachev, N. Structure and isomorphism of some classes finite dimensional commutative semisimple algebras. (приета за печат в Годишника на Шуменския университет „Епископ Константин Преславски“, ISSN 13-834X)

41. [Farkash] **Farkash**, D. Group rings an annotated questionnaire. *Commun Algebra*. 1980, v. 8, 585-602.

42. [Fuchs] **Fuchs**, L. Infinite Abelian groups. Academic Press, vol. I (1970) and II (1973).

43. [Hall] **Hall**, M. The Theory of Groups. AMS Chelsea Publishing, 1999.

44. [Hamilton] **Hamilton**, W. On Quaternions. *Proc Royal Irish Acad*. 1847, v. 3, 1-16.

45. [Higman] **Higman**, G. The units of group-rings. *P Lond Math Soc*. 1940, v. 46, 231–248.

46. [Hill and al.] **Hill**, P., Ullery, W. On commutative group algebras of mixed groups. *Commun Algebra*. 1997, v. 25, 4029-4038.

47. [Jennings] **Jennings**, S. The structure of the group ring of a p-group over a modular field. *T Am Math Soc*. 1941, v. 50, 175-185.

48. [Kaplansky, 1957] **Kaplansky**, I. Problems in the theory of rings. Conference on linear algebras, NAS-NRC Publ. 502, Washington, 1957.

49. [Kaplansky, 1970] **Kaplansky**, I. Problems in the theory of rings: revisited. *Am Math Mon*. 1970, v. 77, 445-454.

50. [Karpilovsky, 1983] **Karpilovsky**, G. Commutative group algebras. Marcel Dekker, 1983.

51. [Karpilovsky, 1984] **Karpilovsky**, G. On the isomorphism of commutative group algebras. *Period Math Hung*. 1984, v. 15, 259-265.

52. [Karpilovsky, 1987a] **Karpilovsky**, G. Structure of blocks of group algebras. Longman Higher Education, 1987.

53. [Karpilovsky, 1987b] **Karpilovsky**, G. The Jacobson radical of group algebras. North Holland, 1987.

54. [Karpilovsky, 1989] **Karpilovsky**, G. Unit groups of group rings. Longman, 1989.

55. [Karpilovsky, 1990] **Karpilovsky**, G. Induced modules over group algebras. North Holland, 1990.

56. [Kurdachenko and al.] **Kurdachenko**, L., Otal, J., Subbotin, I. Artinian modules over group rings. Birkhaeuser Basel, 2006.

57. [Lam] **Lam**, T.-Y. A first course in noncommutative rings. Berlin, Springer, 2001.

58. [Lambek] **Lambek**, J. Lectures on rings and modules. AMS Chelsea Publishing, 2009.

59. [Landrock] **Landrock**, P. Finite group algebras and their modules. Cambridge University Press, 2013.

60. [Lang] **Lang**, S. Algebra. Springer, 2002.

61. [Lee] **Lee**, G. Group identities on units and symmetric units of group rings. Springer, 2010.

62. [May, 1969] **May**, W. Commutative group algebras. *T Am Math Soc*, 1969, v. 136, 139-149.

63. [May, 1971] **May**, W. Invariants of commutative group algebras, III. *J Math*. 1971, v. 15, 525-531.

64. [May, 1976] **May**, W. Group algebras over finitely generated rings. *J Algebra*. 1976, v. 39, 483-511.

65. [May, 1988] **May**, W. Modular group algebras of simply presented Abelian groups. *P Am Math Soc*. 1988, v. 104, 403-409.

66. [May and al.] **May**, W., Mollov, T., Nachev, N. Isomorphism of modular group algebras of p-mixed Abelian groups. *Commun Algebra*. 2010, v. 38, 1988-1999.

67. [Mihovski] **Mihovski**, S. Group rings with descending chain condition for principal left ideals. *Sci Works Uni Plovdiv*. 1972, v. 10, 15-22.

68. [Milies and al.] **Milies**, C., Sehgal, S. An introduction to group rings. Springer, 2008.

69. [Molien, 1893] **Molien**, T. Ueber Systeme, hoeherer complexer Zahlen. *Math Ann*. 1893, XLI, 83-156.

70. [Molien, 1897] **Molien**, T. Ueber die Invarianten der linear Substitutiongruppen. *Sitzungber Koenig Preuss Akad Wiss*. 1897, 1152-1156.

71. [Mollov] **Mollov**, T. On the semisimple group algebras of unbounded separable abelian p-groups. *CR Acad Bulg Sci*. 2004, v. 58, 5-6.

72. [Mollov and al., 2006] **Mollov**, T., Nachev, N. Unit groups of commutative group rings. *Commun Algebra*. 2006, v. 34, 3835-3857.

73. [Mollov and al., 2010a] **Mollov**, T., Nachev, N. Group of normalized units of commutative modular group rings. *Annales des Sciences Mathematiques du Quebec*. 2010, v. 33, 30-44.

74. [Mollov and al., 2010b] **Mollov**, T., Nachev, N. Unit groups of commutative group algebras. *International Electronic Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2010, v. 1, 163-175.

75. [Nachev, 1990] **Nachev**, N. Isomorphism of the group algebras of the Abelian p-groups over the ring $Z[1/p]$. *CR Acad Bulg Sci*. 1990, v. 43, 17-18.

76. [Nachev, 1995a] **Nachev**, N. Invariants of the Sylow p-subgroup of the unit group of a commutative group ring of characteristic p. *Commun Algebra*. 1995, v. 23, 2469-2489.

77. [Nachev, 1995b] **Nachev**, N. Isomorphism of group algebras of Abelian groups over a primarily neat field. *Commun Algebra*. 1995, v. 23, 5049-5056.

78. [Nachev, 2001] **Nachev**, N. Isomorphism of semisimple group algebras of abelian groups over a field of second kind. *CR Acad Bulgar Sci*. 2001, v. 54, 15-18.

79. [Nachev and al., 1993] **Nachev**, N., Mollov, T. Unit groups of semisimple group algebras of Abelian p-groups over field. *CR Acad Bulg Sci*, 1993, v. 46, 17-19.

80. [Nachev and al., 1997a] **Nachev**, N., Mollov, T. On the isomorphism of semisimple group algebras. *Houston J Math*. 1997, v. 23, 13-20.

81. [Nachev and al., 1997b] **Nachev**, N., Mollov, T. Unit groups of semisimple group algebras of Abelian p-groups over field. *J Algebra*. 1997, v. 188, 580-589.

82. [Passman, 1971] **Passman**, D. Infinite group rings. Marcel Dekker, 1971.

83. [Passman, 2011] **Passman**, D. The algebraic structure of group rings. Dover Publications, 2011.

84. [Perlis and al.] **Perlis**, S., Walker, G. Abelian group algebras of finite order. *T Am Math Soc*. 1950, v. 68, 420-426.

85. [Pontryagin] **Pontryagin**, L. Topological groups. CRC Press, 1987.

86. [Ribenboim] **Ribenboim**, P. Rings and modules. Interscience, 1969.

87. [Sandling, 1972] **Sandling**, R. The dimension subgroup problem. *J Algebra*. 1972, v. 21, 216-231.

88. [Sandling, 1985] **Sandling**, R. The isomorphism problem for group rings: a survey. *Lect Notes Math*. 1985, v. 142, 258-288.

89. [Sehgal, 1970] **Sehgal**, S. Isomorphism of p-adic group rings. *J Number Theory*. 1970, v. 2, 500-508.

90. [Sehgal, 1978] **Sehgal**, S. Topics in group rings. Marcel Dekker Inc, 1978.

91. [Sehgal, 1993] **Sehgal**, S. Units in integral group rings. Longman Essex, 1993.

92. [Sehgal, 2003] **Sehgal**, S. Group rings. *Handbook of algebra*. 2003, v. 3, 455-541.

93. [Ullery] **Ullery**, W. Isomorphism of group algebras. *Commun Algebra*. 1986, v. 14, 767-785.

94. [Waerden] **van der Waerden**, B. Algebra, vol. I. Springer, 2003.

95. [Woods] **Woods**, S. On perfect group rings. *Proc Am Math Soc*. 1971, v. 27, 49-52.