РЕЦЕНЗИЯ

от д-р Ангел Борисов Дишлиев, професор в ХТМУ-София
на дисертационен труд за присъждане на
образователната и научна степен **„доктор“**

Област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика;
Професионално направление: 4.5. Математика;
Докторска програма: Диференциални уравнения;
Автор на дисертационния труд: Лозанка Спиридонова Тренкова, редовна докторантка към катедра Математически анализ на Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“ (ПУ);
Тема: Абстрактни уравнения от волтеров тип и приложения;
Научен ръководител: доц. д-р Атанаска Тенчева Георгиева

При изготвяне на моята рецензия ще се придържам към образеца, представен на страницата на ПУ.

1. Общо представяне на процедурата

Със заповед № Р33-1189 от 30.03. 2015 г. на Ректора на Пловдивския университет “Паисий Хилендарски” съм определен за външен член на научното жури за осигуряване на процедура за защита на описания по-горе дисертационен труд. На първото заседание на журито бях избран да изготвя рецензия за качествата на дисертационния труд.

Представеният от Лозанка Тренкова комплект материали на хартиен и електронен носител е в съответствие със Закона за развитие на академичния състав в Република България (ЗРАСРБ), както и с Правилника за развитие на академичния състав на Пловдивския университет „Паисий Хилендарски“ (ПРАСПУПХ) – виж чл. 36 (1). Докторантката е приложила 3 броя публикации по темата на дисертационния труд. Ще изразя своята благодарност към кандидатката за придобиване на образователната и научна степен „доктор“ за акуратната подготовка на документите, което в значителна степен облекчава работата на членовете на научното жури.

2. Кратки биографични данни за докторантката

Докторантката придобива бакалавърска степен по математика във Факултета по математика и информатика (ФМИ) на ПУ през 2005 г. Две години по-късно тя завършва с отличие магистърска програма по специалността Приложна математика в същия факултет. За кратък период тя е била хон. асистент във ФМИ на ПУ. Научната дейност (а от там и научното творчество) на кандидатката за придобиване на научната и образователна степен „доктор“ са свързани предимно с нейната редовната докторантура по научната специалност Диференциални уравнения през периода от 01.03. 2010 г. до 01.03. 2014 г. Обучението е проведено последователно в две катедри: Приложна математика и моделиране и Математически анализ. Докторантката е участвала в два научноизследователски проекта към Фонд „Научни изследвания“ при ПУ.

3. Актуалност на тематиката и целесъобразност на поставените цели и задачи

Изследванията в дисертационния труд са посветени на вечно актуалните и класически проблеми:

- Съществуване на непрекъснати решения на интегрални уравнения на Волтера в метрични пространства;
- Съществуване на непрекъснати решения на интегрални уравнения на Волтера в хаусдорфови пространства;
- Съществуване на локално интегруеми решения на интегрални уравнения на Волтера в хаусдорфови пространства;
- Конкретни реализации на получените резултати и др.

Ролята и значимостта на интегралните уравнения може да се търси в две основни направления. Първото от тях се отнася за развитието на математическата теория и нейното обогатяване с разнообразни идеи и подходи. Второто направление е свързано с необходимостта от математическия апарат на интегралните уравнения при изучаването на важни проблеми в редица природни науки, както и в практиката. Терминът „интегрално уравнение“ е въведен от Дюбоа-Реймон през 1988 г., въпреки че този тип уравнения са се използвали значително по-рано. Една от първите задачи, свързани с интегралните уравнения, е така наречената задача за „обръщане на интеграла“, решена от Фурие през 1811 г. За важността на тези уравнения говори фактът, че към интегрални уравнения се свежда (взаимно еднозначно) задачата на Коши за обикновени диференциални уравнения. Решаването на началната задача за линейни диференциални уравнения от втори ред се свежда към линейно интегрално уравнение на Волтера от втори ред. От този факт се е възползвал Лиувил в своите изследвания още през 1837 г.. Исторически (може би) знаменитата задача на Абел, огласена през 1823 г., поражда необходимостта от детайлно и пълно изучаване на интегралните уравнения. Задачата се състои в следното: Материална точка под действие на силата на тежестта се движи по някаква крива, разположена във „вертикална“ равнина, в която е зададена координатна система Oxy. Трябва да се намери тази крива, така че материалната точка, стартирайки без начална скорост от точка, принадлежаща на търсената крива с ордината $y > 0$, да достига „хоризонталната“ ос Ox за време $t = f(x)$. Тук функцията f е известна предварително.

Трудно е да се обхванат приложенията на интегралните уравнения в съвременността. Ще си позволя да спомена само един съвременен пример, пряко свързан с изледванията на български математици. Ще ви припомня различните обобщения на интегралните неравенства от типа на Бихари и Гронуол, които се отнасят за частично непрекъснати функции (решения) и които имат съществено значение за развитието на фундаменталната и качествената теория на импулсните диференциални уравнения. За мен е още по-приятен фактът, че сред учените, които имат принос в развитието на споменатите класове интегрални неравенства, мога да спомена имената на проф. С. Христова, проф. А. Захариев, проф. С. Костадинов и гл ас. К. Стефанова (всичките от ПУ).

Целите на дисертационния труд са са формулирани ясно:

1. Да се намери и адаптира подходящ математически апарат, необходим при формулиране на общи условия за съществуване на единствени решения на разглеждания тип интегрални уравнения;
2. Да се потвърди полезността на установените методи за намиране на решенията при конкретни задачи, възникващи в природните науки и по-специално в математическата физика.

Представен е списък от последователните задачи, реализирани в дисертационния труд, чрез които се постигат поставените цели. По-подробно на тези задачи ще се спра в една от следващите точки на рецензията.

4. Познаване на проблема

Авторката на дисертационния труд е запозната в детайли с научните достижения по изследвания проблем. Това твърдение подкрепям със следните факти:

1. Литературните източници, използвани при реализиране на задачите в дисертацията, са 70 на брой, от които по-голямата част са монографични трудове. Макар, че представеният списък далеч не е пълен (дори и тематично), то представените трудове показват, че Лозанка Тренкова е добре запозната със съвременното състояние на теорията на интегралните уравнения;
2. Направените бележки в първа глава на дисертацията, която представлява въведение в използваната терминология и преглед на основните методи за изучаване на интегралните уравнения, подсказва за широките познания на докторантката, които са необходими в изследователската й дейност по набелязаната тема. Така например, дефинирани са редица понятия, като: σ -адитивно семейство от подмножества на предварително зададено множество; σ -адитивна мярка на множество; проста функция; μ -интегруема функция (тук μ е мярката, използвана в дефиниционното множество на функцията); силна сходимост; силно и слабо измеримо изображение; интеграл на Бохнер и много други. Дадени са няколко важни характеристики на въведените понятия. Отново, като пример, ще посоча необходимото и достатъчно условие за интегруемост по Бохнер и теоремата на Фату-Лебег, отнасяща се за връзката между μ -интеграла и горната и долната граница на редици от интегруеми функции.

Част от горните твърдения са доказани, което на пръв поглед е излишно. Приемам присъствието в дисертационния труд на доказателствата на посочените известни изходни твърдения, поради две съображения: Първо, да не забравяме, че желаната степен от докторантката е освен научна и **образователна**, т.е. присъствието на известни факти в писмената дейност на кандидатката за придобиване на степента „доктор“ е естествено и дори бих казал – желателно. Второ, ако в научните планове на Лозанка Тренкова се включва издаване на нейните изследвания от дисертацията под формата на монография, то включването на посочените предварителни помощни твърдения би улеснило работата на читателя.

5. Характеристика и оценка на дисертационния труд

Дисертацията се състои от увод, пет глави, заключение и библиография. Общият обем на дисертационния труд е 100 стандартни страници. Изследванията са посветени на съществуването на непрекъснати решения на абстрактни интегрални уравнения и неравенства от волтеров тип и техните приложения. Основно са разгледани случаите, когато независимата променлива принадлежи на метрично или хаусдорфово пространство.

Първата глава, озаглавена „Кратък обзор“, коментирах в предходната точка на рецензията.

В глава 2, която според мен е основна, се изучава следното абстрактно нелинейно интегрално уравнение на Волтера от втори род:

$$f(x) = p(x) + \int_{M_x} Q\left(x, y, f(y)\right) d\mu_y \, . \tag{*}$$

Тук се търси непрекъсната функция $f = f(x)$, дефинирана в пълно метрично пространство Ω и приемаща стойности в банахово пространство B. В Ω е дефинирано изображение M, определящо интеграционното множество M_x в интегралното уравнение. Конкретно, всяка точка $x \in \Omega$ чрез трансформацията M се изобразява в множество M_x, $M_x \subset \Omega$. С други думи $M : \Omega \to 2^{\Omega}$. Всяко интеграционно множество M_x удовлетворява следните изисквания:

- M_x е съответно на аргумента x на търсената функция, $x \in \Omega$. По друг начин казано, (разбира се в общия случай) с изменението на аргумента x се изменя и интеграционното множество M_x;
- M_x е компактно;
- то е измеримо със σ-адитивна мярка μ;
- фамилията $\{M_x, x \in \Omega\}$ се състои от М-звездни множества, т.е.

$$(\forall x \in \Omega)(\forall y \in M_x) \Rightarrow (M_y \subset M_x) \, .$$

Интегралът в уравнението (*) е в смисъл на Бохнер. Функцията p (определяща нехомогенността) е от класа на функцията f. Операторът $Q : \Omega \times \Omega \times B \to B$ притежава редица свойства, които най-общо можем да кажем, че са от типа на условията на Липшиц относно последния аргумент. Този аргумент се явява функционна стойност на търсената функция и следователно принадлежи на банаховото пространство B.

Основната задача в тази глава е представянето на достатъчни условия, които гарантират съществуване на единствено непрекъснато решение на абстрактното интегрално уравнение (*). Този резултат се постига с помощта на множество предварителни леми. Като пример ще посоча Лема 2.3.1, където се доказва, че дясната страна на интегралното уравнение (*), разгледана като оператор в множеството на непрекъснатите функции, дефинирани в M_x и приемащи стойности в банаховото пространство B, е затворен (приема стойности) в същото функционно множество. Освен това се показва, че този оператор е непрекъснат. Ще обърна внимание на една от основните трудности при доказателството, както на споменатата по-горе лема, така и на други твърдения в дисертацията. По-точно, при промяна на аргументите на участващите функции се променят и множествата на интегриране в интегралното уравнение, което предизвиква допълнителни изследвания и предизвиква „стиковка“ на съответните оценки. Самостоятелен интерес има Лема 2.3.2, отнасяща се за съществуване на средно продължение за непрекъсната функция, дефинирана в измеримо подмножество на разглежданото пълно метрично пространство Ω . Бих „полюбопитствал“, кога това разширение е единствено. По-точно, дали само константните функции имат единствено средно продължение? Теоремата за единственост на решението на изследваното интегрално уравнение до голяма степен се базирара на резултати на А. Захариев, Д. Байнов и А. Мишкис, отнасящи се за спектралния радиус на помощен оператор от вида

$$Lf(s) = L(\Omega_x)\int_{M_s} f(y)\,d\mu_y .$$

(Тук между впрочем се вижда неудачното означение на този оператор, дублиращо други означения). Интерес представлява Теорема 2.3.4, в която са дадени (солиден брой) ограничителни условия, с помощта на които се установява връзка между решенията на разглежданото интегрално уравнение и решенията на съответните интегрални неравенства. Конкретно, в дисертационния труд е отговорено на въпроса, кога решението на уравнението мажорира решенията на съответните (породени от него) интегрални неравенства.

В третата глава освен уравнението (*) се разглежда и съответното хомогенно интегрално уравнение

$$f(x) = \int_{M_x} Q\big(x, y, f(y)\big)\,d\mu_y . \qquad (**)$$

Дефиниционното множество Ω на неизвестната функция представлява хаусдорфово пространство, т.е. топологично пространство, за което всеки две различни негови точки притежават непресичащи се околности. Както и в предходната глава, за всяко $x \in \Omega$ се въвеждат интеграционните множества M_x, които по същество притежават същите свойства. Най-важното от тези качества (според мен) е, че те са М-звездни. Изискването фамилията от интеграционни множества $\{M_x,\ x \in \Omega\}$ да се състои от М-звездни множества може да се разглежда като обобщение на класическия случай на интегрални уравнения от типа на Волтера в едномерни реални пространства, при които дефиниционното множество на търсените решения е интервал от вида $\Omega \equiv [x_0, x_1) \subset R$. Тогава, за всяко $x \in [x_0, x_1)$ интеграционният интервал се представя както следва: $M_x \equiv [x_0, x)$. Ясно е, че за всяка точка $y \in M_x$ имаме $M_y \subset M_x$, т.е. интеграционният интервал е М-звездно множество. Въпреки това, на мен ми се струва, че е възможно да се разгледат и изследват други варианти на интеграционните множества, участващи във формулировката на абстрактните интегрални уравнения. Бих предпочел (като читател) и препоръчал (като рецензент) в тази глава да се използват същите означения, които са въведени в предходните глави. Така например, означението за ε -околност на точката $x \in \Omega$ в тази глава е $O_\varepsilon(x)$, а в предходната втора глава е $U(x, \varepsilon)$.

В дискутираната глава са получени редица интересни топологични свойства на фамилията от интеграционните множества. Така например е показано, че при определени естествени условия мярката на сечението $M_x \cap M_y$ е „близка“ до мярката на M_x , ако точките x и y са „достатъчно близки“ помежду си. Друг такъв пример е, че за всяка точка $x \in \Omega$ е валидно неравенството $M_x \cap KerM \neq \varnothing$ и т.н. Основните резултати в главата можем да формулираме накратко както следва:

- Тривиалното решение е единствено решение на хомогенното уравнение (**);
- Съществува решение на нехомогенното уравнение (*).

Следващата глава разглежда интегрални уравнения от същия вид (хомогенно и нехомогенно), както в предходната глава. Отново независимата променлива принадлежи на хаусдорфово пространство. Неизвестните функции са елементи на подходящо избрано линейно пълно, локално изпъкнало топологично пространство:

$$L_{loc} = \left\{ f : \Omega \to B,\ \ (\forall x \in \Omega) \Rightarrow \int_{M_x} \left\| f(y) \right\| d\mu_y < \infty \right\}.$$

Предварително са установени няколко необходими факти за следващите изследвания. Например:

- Непрекъснатост на оператора $(Kf)(x) = \int_{M_x} Q\left(x, y, f(y)\right) d\mu_y$;

- Затвореност на оператора Kf в пространството L_{loc} и др.

Най-силният резултат в главата е намирането на достатъчни условия за единственост на тривиалното решения на хомогенното уравнение. Като следствие е получен резултат за съществуване на единствено локално интегруемо решение на съответното нехомогенно уравнение.

Последната глава илюстрира резултатите, получени в дисертационния труд. Няколко диференциални уравнения от математическата физика са сведени до интегрални уравнения от разглеждания в дисертацията тип, за които е установено съществуването на единствени непрекъснати решения.

За мене няма съмнение в достоверността на получените резултати. Доказателствата са извършени прецизно, макар че на няколко места те са прекалено пестеливи и заставят заинтересования читател самостоятелно да извършва някои пропуснати разсъждения, което обстоятелство го поддържа постоянно бодър.

5. Приноси

Получените резултати са отбелязани коректно в заключението към дисертационния труд. Най-общо казано, приносите са както с теоретична насоченост, така и с приложен характер. Теоретичните приноси са свързани с изследванията на авторката за съществуване на единствени непрекъснати решения на абстрактни интегрални уравнения в няколко варианта на дефиниционното множество на неизвестните функции. Приложните аспекти на изследванията в дисертационния труд се отнасят за съществуване на решения на различни конкретни и същевременно достатъчно общи класове задачи, моделиращи динамични процеси от природните науки и практиката. Според мен основните и съществени характеристики на дисертацията са както следва:

- Създаден е подход за изследване на класове интегрални неравенства и уравнения (точно тези класове, които удовлетворяват представените достатъчни условия);
- Подсказана е възможност за изследване на други подобни класове абстрактни интегрални неравенства и уравнения, които могат да се получат на базата на определяне и обобщаване на съществените качества на конкретни представители на важни (моделни) интегрални неравенства и уравнения;

- Дава се възможност за потвърждаване (по нов начин) на известни факти за решенията на конкретни задачи от природните науки и практиката;
- Дава се възможност да се определят важните свойства на параметрите на изучаваните интегрални уравнения или на близки до тях, които гарантират съществуване и единственост на решенията им и др.

Накрая на тази точка, с цел да „разведря“ изложението ще вметна, че не са ми известни внедрявания на резултатите от дисертационния труд.

7. Преценка на публикациите и личния принос на докторантката

Както казах по-горе, публикациите, включени в дисертационния труд, са три на брой. Всичките са в съавторство с нейната научна ръководителка. В две от публикациите участва и трети съавтор. Съдържанието на тези публикации представлява съществена част на дисертационния труд (основните три глави, които са с номера 2, 3 и 4). Както се вижда основната статия:

Zahariev A., Georgieva A., Trenkova L., On Volterra type integral equations in noncompact metric space, J. of Inequalities and Applications (2014)

е публикувана в престижното списание *Journal of Inequalities and Applications*, което притежава импакт фактор 0,77. Това е безспорен успех на кандидатката за придобиване на желаната научна и образователна степен. Останалите две публикации са отпечатани в престижни международни списания.

Не разполагам с разпределителен протокол, отразяващ заслугите на всеки един от съавторите в изследователската дейност, както и за работата, извършена при издаването на коментираните три съвместни публикации. Поради това считам, че участието на Лозанка Тренкова е равностойно на останалите автори.

Резултатите от първата статия, която е цитирана по-горе, са докладвани на престижната „Международна конференция по приложен анализ и математическо моделиране“, проведена през 2013 г. в Инстанбул, Турция.

Не са ми известни цитирания от други автори на публикациите на докторантката. Ще отбележа, че публикациите са сравнително „нови“ (едната е публикувана през 2014 г., а другите две през 2015 г.), поради което, евентуалните цитирания може да се очакват по-нататък.

8. Автореферат

Авторефератът заедно с библиографията е поместен на 32 стандартни страници. Съдържа резюме и анализ на всички основни резултати, постигнати в дисертационния труд. Отразява точно и пълно приносите на докторантката. Отчетливо са формулирани поставените цели и конкретни задачи. Основните понятия и твърдения в дисертацията са представени съответно под формата на дефиниции и теореми (без доказателства). Посочени са няколко подходящи и съществени приложения на теоретичните изследвания. По този начин се илюстрират получените твърдения и се дава възможност за допълнително обмисляне на идеите в дисертационния труд.

В заключението се резюмират основните приноси. Посочени са връзките между постигнатото в дисертационния труд и съответните публикации на докторантката.

Ще отбележа, че авторефератът е изготвен съгласно изискванията. Бих добавил, че е подготвен във форма, която позволява на читателя, който не е запознат с дисертацията, да придобие пълна представа за постигнатото в нея.

9. Критични бележки и препоръки за бъдещо използване на получените резултати

Ще направя няколко бележки, за които предварително искам да заявя, че не са оказали влияние при формирането на моето мнение за качествата на дисертационния труд:

1. Стр. 15, Дефиниция 1.1.6: Струва ми се, че е по-удачно да се предполага, че мерките на всяко едно от множествата $B_1, B_2, \dots, B_n$, които са характеристични носители на простата функция, са крайни. Това по-просто и ясно предположение заменя неравенството
$$\sum_{j=1,2,\dots,n} \left|x_j\right| \mu\left(B_j\right) < \infty .$$
По този начин „генетично“ ясно се дефинира класът на μ-интегруемите прости функции.
2. Стр. 27, ред 10 отгоре: Не е ясен изразът „...то най-добър резултат ще имаме,...“. Например, в какъв смисъл този резултат е най-добър?
3. Стр. 36 (Лема 2.3.1): Не е ясно какво значи „непрекъснато за всяко p ...“. Може би трябва да се напише „за всяко p ... операторът K ... изобразява непрекъснато ...“.
4. Стр. 37, Дефиниция 2.3.1: Не е известно кое е множеството M_x, как се определя или по-точно – коя е точката x? Може би е по-добре, посочената дефиниция, както и следващата лема, да се формулират за произволно компактно подмножество на Ω.
5. Стр. 49, ред 7 отгоре: Би трябвало да се добави, че $M_x \in B_\Omega$. Същото се отнася и за стр. 24, ред 2 отдолу.
6. В условието на Теорема 2.3.1: Според мен, условие
(iii) $KerM \subset \Omega$
се нуждае от разяснение.
7. Стр. 62, условие А3: Условието е неясно (поне за мен). Например, от предходната 3 глава (а също така и от въведените означения в началото на първия параграф на 4 глава) следва, че $O(x)$ е околност на точката x и следователно $x \in O(x)$. От друга страна $O(x) \subset M_x$ и тъй като в общия случай е възможно $x \notin M_x$, то заключаваме, че е допустимо $x \notin O(x)$, което е противоречие. Също така, не е ясно множеството $W(x) = W(x, O(x))$ на кой „обект“ е околност. Нещо повече, колко са аргументите на оператора W (един или два)?
8. Стр. 52, ред 12 отгоре: $\left\|f(y)\right\|_G$ да се замени с $\left\|f(y)\right\|_\Omega$ и други подобни печатни грешки, на които по-нататък няма да се спирам.

Считам, че посочените по-горе неточности в някакъв смисъл са допустими. Предположението, че можем напълно да се освободим от тях е утопично, особено като се вземе под внимание обемът на дисертационния труд.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получените резултати в дисертационния труд и направените по-горе в рецензията коментари ми дават основание да направя следните изводи:

1. Дисертационният труд е посветен на теоретични изследвания върху фундаменталната и качествена теория на специален клас абстрактни интегрални уравнения от волтеров тип. Неизвестната функция приема стойности в банахови пространства. Част от тези изследвания са новост, а друга част развиват и обогатяват известни резултати. Изследванията представляват оригинален принос на докторантката и в близко бъдеще могат да предизвикат сериозен научен интерес;
2. Изучени са съответните абстрактни интегрални неравенства. Намерени са връзки между уравненията и съответните им неравенства.
3. Представените в дисертационния труд твърдения са полезни, както за учените, които се занимават с теоретични проблеми в теорията на интегралните уравнения, така и за учените, които прилагат съответни математически методи за решаване на разнообразни конкретни задачи (не само в математиката);
4. Достиженията в дисертационния труд отговарят на изискванията на:

- ЗРАСРБ;
- Правилника за прилагане на ЗРАСРБ;
- ПРАСПУПХ (виж по-конкретно чл. 30 (1) и чл. 32 (1) и (2));
- Специфичните изисквания на ФМИ при ПУ (тези изисквания са отразени в III т. 1).

Поради посочените по-горе факти оценявам **„положително”** изследванията в дисертационния труд.

Предлагам на научното жури **да присъди** образователната и научна степен “доктор” на Лозанка Спиридонова Тренкова в:
Област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика;
Професионално направление: 4.5. Математика;
Докторска програма: Диференциални уравнения.

01.05. 2015 г.

Изготвил рецензията: ....
(проф. Ангел Дишлиев)