Пловдивски университет "Паисий Хилендарски"
Факултет по математика и информатика

Катедра "Математически анализ"

ЛОЗАНКА СПИРИДОНОВА ТРЕНКОВА

Абстрактни уравнения от волтеров тип и приложения

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертационен труд
за присъждане на образователната и научна степен
"ДОКТОР"
по област на висше образование:
4. Природни науки, математика и информатика;
професионално направление: 4.5. Математика;
докторска програма: Диференциални уравнения

Научен ръководител:
доц. д-р Атанаска Тенчева Георгиева

Пловдив – 2015

Дисертационният труд е обсъден и насрочен за защита на разширен катедрен съвет на катедра “Математически анализ” при Факултет по математика и информатика на Пловдивски университет “Паисий Хилендарски”, проведен на 20.02.2015 г.

Дисертационният труд “Абстрактни уравнения от волтеров тип и приложения” се състои от увод, пет глави, заключение и библиография. Библиографията съдържа 70 заглавия. Общият обем на дисертационния труд е 100 страници. Списъкът на авторските публикации включва 3 заглавия.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на 22.05.2015 г. от 12 ч. в Заседателната зала на Нова сграда на Пловдивски университет “Паисий Хилендарски”, гр. Пловдив.

Материалите по защитата са на разположение за интересуващите се в секретариата на ФМИ, Нова сграда на ПУ “Паисий Хилендарски”, бул. “България” № 236, каб. 330, всеки работен ден от 8:30 до 17:00 часа.

Научно жури

Председател:
доц. д-р Атанаска Георгиева (ПУ „П. Хилендарски“, Пловдив).

Членове:
проф. д-р Михаил Константионов (УАСГ, София; рецензент);
проф. д-р Ангел Дишлиев (ХТМУ, София; рецензент);
проф. дмн Степан Костадинов (ПУ „П. Хилендарски“, Пловдив);
доц. д-р Светослав Ненов (ХТМУ, София).

Номерацията на теоремите, лемите, следствията и дефинициите в автореферата съвпада с тяхната номерация в дисертационния труд.

Съдържание

Увод

Актуалност на дисертационния труд

Теорията на интегралните уравнения и неравенства възниква в началото на XX век във връзка с изследването на проблеми от математическата физика.

Волтера започва да се занимава с интегрални уравнения през 1884, а по- детайлното им изучаване започва през 1896 година. Поради класическата работа на Волтера, теорията на линейните и нелинейните уравнения от Волтеров тип играят важна роля в приложението на математиката в различни дисциплини. Много интересни феномени не могат да бъдат описани с диференциални уравнения, но се наблюдават в конкретни примери на уравнения от тип на Волтера, стимулиращи научните изследвания за подобряване на математическия апарат в тази област. През последните две десетилетия теорията на абстрактните уравнения на Волтера е претърпяла бързо развитие [6], [8], [11], [19], [45], [52], [53]. До голяма степен това се дължи на приложението на тази теория в проблемите на математическата физика като вискоеластичност, топлинна проводимост в материали с памет, електродинамика с памет, както и необходимостта от инструменти за справяне с проблемите, възникващи в тези области [5], [18], [26], [66]. Терминът "абстрактно"означава, че се прави обобщение на класическото уравнение в едно от направленията: функцията приема стойности в банахово пространство [14], [25], [27], [56], [63], [70]; разглежда се общото операторно уравнение, при което се предполага, че операторът има определени типично волтерови свойства [28], [30], [42], [48].

Към първия вид уравнения спадат общите диференциални или интегрални уравнения в банахово пространство. От работите на М.А. Красноселски, С.Г. Крейн и Г. Дарбу става ясно, че топологичните методи могат успешно да се използват при изследване на този вид уравнения [4], [16].

Към втория вид спадат главно функционални диференциални уравнения.Тук основна роля играе уравнението на Uch при конструирането на математически модели за реални феномени във физиката, билогията и други дисциплини [56].

Освен това, интегралните уравнения са доказали, че са от огромна полза в няколко приложни области, като например: динамиката на населението, разпространението на епидемии, теория за автоматично управление, теория на мрежите и динамиката на ядрените реактори [6], [11], [17], [34], [44]. Основното приложение на интегралните неравенства е, че те предоставят априорни оценки на неизвестните функции, които са много полезни и са важно средство в изследването на много качествени и количествени свойства на решенията на нелинейните диференциални уравнения. В теорията на интегралните неравенства огромно количество усилия са посветени на изглаждането на класическите подходи в доказване на неравенствата. Техниките в тези доказателства, базирани на класическия математически анализ, водят до виртуозност и значимост, зависеща от броя на независимите променливи, както и от геометрията на областта на интегриране [3], [49], [20], [58]. Математическата литература ни дава добра информация за интегралните уравнения и неравенства и отлични резултати могат да бъдат намерени в монографиите [9], [13], [14], [25], [26], [29], [42], [54], [56],[64], както и в цялостния списък на посочената литература. Няколко различни направления и подходи в тази област на проучване могат да се намерят в [12], [11] и [16]. Всички споменати по-горе монографии са предложени поради това, че авторите имат съществен принос към теорията, представена в техните книги.

През последните години се появиха няколко добри книги за уравненията на Волтера [26], [42], [56], [54], [64].

Трябва да отбележим, че различните видове резултати, използвани в концептуалния план на подхода ни са представени в [20], [21], [41].

Цели и задачи на дисертационния труд

Основните обекти на изследване в дисертационния труд са специален вид абстрактни интегрални уравнения от волтеров тип, когато търсената функция приема стойности в банахови пространства.

Във връзка с горния вид интегрални уравнения в дисертационния труд са разгледани и породените от тях абстракни интегрални неравенства на Волтера.

Основните цели на дисертационния труд могат да се обединят в две групи:

1) да се разшири математическият апарат на абстрактните интегрални уравнения от волтеров тип, необходим при изследване съществуването и единствеността на решенията им, принадлежащи на пространства от непрекъснати и интегруеми функции;

2) да се намерят примери от математическата физика, които да илюстрират получените резултати.

Целите на настоящия дисертационнен труд са постигнати чрез решаването на следните задачи:

а) намиране на достатъчни условия за съществуване и единственост на непрекъснато решение на нелинейното абстрактно интегрално уравнение на Волтера от втори вид, в случая когато независимата променлива лежи в метрично пространство;

б) намиране на достатъчни условия за съществуване на непрекъснато решение на нелинейното абстрактно интегрално уравнение на Волтера от втори вид, в случая когато независимата променлива лежи в хаусдорфово пространство;

в) намиране на достатъчни условия за съществуване и единственост на локално интегруемо решение на нелинейното абстрактно интегрално уравнение на Волтера от втори вид в случая, когато независимата променлива лежи в хаусдорфово пространство;

г) прилагане на получените резултати към конкретни интегрални уравнения от волтеров тип;

д) свеждане на диференциални уравнения от математическата физика до интегрални уравнения от волтеров тип и намирането на достатъчни условия за съществуване на непрекъснато, както и на локално интегруемо решение.

Структура на дисертационния труд

Настоящият дисертационен труд е посветен на изследването на абстрактни интегрални уравнения и неравенства от волтеров тип в случаите, когато независимата променлива принадлежи към метрично или хаусдорфово топологично пространство. Дисертационният труд съдържа 100 страници и се състои от увод, пет глави, заключение и библиография.

Заключението съдържа: резюме на получените резултати, списък на публикациите по дисертационния труд, апробация на получените резултати и декларация за оригиналност.

Кратък обзор на дисертационния труд

Глава 1. Кратък обзор

Първа глава е обзорна и в нея са дадени основни дефиниции и теореми, които ще се използват в дисертационния труд. Тя се състои от два параграфа.

В **Параграф 1.1** са дадени дефиниции и твърдения за силна и слаба сходимост.

В **Параграф 1.2** са дадени дефиниции и твърдения за интеграл на Бохнер.

Глава 2. Съществуване на непрекъснати решения на интегрални уравнения на Волтера в метрично пространство

Втора глава се състои от четири параграфа. В тази глава са разгледани нелинейни интегрални уравнения на Волтера от втори вид, когато независимата променлива принадлежи към метрично пространство. Получени са достатъчни условия за съществуване и единственост на непрекъснато решение. Получените резултати са приложени за интегрални неравенства с максимум. Резултатите от тази глава са публикувани в [69].

В **Параграф 2.1** се въвежда един абстрактен нелинеен аналог на уравнението на Волтера и съответното му неравенство. Направена е постановка на задачата за намиране на достатъчни условия за съществуване и единственост на непрекъснато решение на интегралното уравнение на Волтера в метрично пространство.

Нека $(\Omega,\ \rho)$ е пълно метрично пространство. С $B_\Omega \subset 2^\Omega$ означаваме σ-алгебрата от борелевите подмножества на Ω и $\mu\colon B_\Omega \to [0,\infty]$ е нетривиална σ-крайна борелева мярка.

Нека B е реално банахово пространство с норма $\|.\|_B$.

С $U(x,\varepsilon) = \{y \in \Omega\ :\ \rho(x,y) < \varepsilon\}$ означаваме отворените кълба с център точката $x \in \Omega$ и радиус $\varepsilon > 0$.
Ако G е произволно подмножество на Ω, то $U(G,\varepsilon) = \{y \in \Omega : \rho(G,y) < \varepsilon\}$.

Въвеждаме изображението $M\colon \Omega \to 2^\Omega$, което на всяка точка $x \in \Omega$ съпоставя подмножество $M_x \subset \Omega$.

Нека $KerM = \{x \in \Omega\ :\ \mu(M_x) = 0\}$ и $\mathfrak{M} = \{M_x : x \in \Omega\}$.

Следвайки [20] ще казваме, че условията (A) са в сила за изображението $M\colon \Omega \to 2^\Omega$, ако са изпълнени следните условия:

A1. За всяка точка $x \in \Omega$ множеството M_x е компактно.

A2. За всяко $\varepsilon > 0$ и всяко $x \in \Omega$ съществува $\delta > 0$, такова че за всяко $y \in \Omega$ и $\rho(y,x) < \delta$ е изпълнено $\mu(M_x \Delta M_y) < \varepsilon$, където

$$\mu(M_x \Delta M_y) = (M_x \setminus M_y) \cup (M_y \setminus M_x).$$

A3. За всяко $x \in \Omega$ и за всяко $y \in M_x$ е изпълнено $M_y \subseteq M_x$.

A4. Съществува $x_0 \in \Omega$, такова че $\mu(M_{x_0}) = 0$.

Дефиниция 2.2.5. Казваме, че множеството $G \in B_\Omega$ е μ-плътно, ако всяка точка $x \in G$ е съществена точка за множеството G.

AM. За всяко $x \in \Omega$, множеството M_x е μ-плътно.

Дефиниция 2.1.1. Казваме, че множеството $G \subseteq \Omega$ е M-звездно множество, ако за всяко $x \in G$ е изпълнено $M_x \subseteq G$.

Нека въведем пространствата:

1. $C(\Omega, B) = \{f : \Omega \to B, f \;\; \textit{е} \;\; \textit{непрекъсната}\}$ е линейно топологично пространство с топология, породена от поточковата сходимост.

2. $C(G, B)$ е банахово пространство с норма $\|f\|_G = \sup\limits_{y \in G} \|f(y)\|_B$, където G е компактно подмножество на Ω.

Нека за изображението $M : \Omega \to 2^{\Omega}$ са изпълнени условията (A).

Ще казваме, че операторът $Q : \Omega \times \Omega \times B \to B$ удовлетворява условията (S), ако са изпълнени следните условия:

S1. За всяко M-звездно компактно множество $\Omega_* \subset \Omega$ операторът Q е непрекъснат в множеството $\Omega_* \times \Omega_* \times B$.

S2. За всяко $x \in \Omega$ и всяко $f \in C(M_x, B)$ съществува число $\delta(M_x, f) > 0$ и $L(M_x, f, \delta) > 0$, такива че за всички функции $g \in C(M_x, B)$, за които $\|f - g\|_{M_x} < \delta$, е в сила неравенството

$$\sup_{(s,y) \in M_x \times M_x} \|Q(s, y, f(y)) - Q(s, y, g(y))\|_B \leq L(M_x, f, \delta) \|f - g\|_{M_x}.$$

S3. За всяко $x \in \Omega$ и произволно $r > 0$ съществува $L(M_x, r) > 0$, такава че за всеки две функции $f, g \in \overline{U}_x(r) = \{f \in C(M_x, B) \mid \|f\|_{M_x} \leq r\}$ е изпълнено неравенството

$$\sup_{(s,y) \in M_x \times M_x} \|Q(s, y, f(y)) - Q(s, y, g(y))\|_B \leq L(M_x, r) \|f - g\|_{M_x}.$$

S4. За всеки M-звезден континуум $\Omega_* \subset \Omega$ съществува число $L(\Omega_*) > 0$, такова че за всеки две функции $f_1, f_2 \in C(\Omega_*, B)$ и за всяко $x, y \in \Omega_*$ е изпълнено неравенството

$$\|Q(x, y, f_1(y)) - Q(x, y, f_2(y))\|_B \leq L(\Omega_*) \|f_1(y) - f_2(y)\|_B.$$

Разглеждаме уравнението

$$f(x) = p(x) + \int_{M_x} Q(x, y, f(y)) d\mu_y \tag{1}$$

и неравенството

$$g(x) \leq p(x) + \int_{M_x} Q(x, y, g(y)) d\mu_y, \tag{2}$$

където операторът $Q : \Omega \times \Omega \times B \to B$, $f, g, p \in C(M_x, B)$, $x \in \Omega$.

Ако операторът Q е непрекъснат в множеството $M_x \times M_x \times B$ за всяко $x \in \Omega$ или удовлетворява условие (S1) и изображение $M\colon \Omega \to 2^{\Omega}$ удовлетворява условията (A), то интегралите в (1) и (2) съществуват ([32],[43]).

В **Параграф 2.2** се обсъжда възможността да се замени, без ограничение на общността, една компактна област на интегриране с друга, която е близка до нея по мярка и в метричен смисъл, но има по-добри свойства.

Добре известно е, че две компактни подмножества даже и в крайномерни метрични пространства с дефинирана мярка на Лебег могат да бъдат много близки по мярка (имайки равни мерки) и в същото време - много далечни в метричен смисъл (имайки различни диаметри). От този факт следва, че използването на произволни компактни множества като области на интегриране не е достатъчно удобно в много от случаите. Целта на този раздел е да се намери друго множество $\mathbf{M}^{\mu} \subset \mathbf{2}^{\Omega}$, чийто елементи имат по-добри свойства. Тъй като всички тези множества ще бъдат използвани като области на интегриране, то най-добър резултат ще имаме, ако за всеки елемент $M_x \in \mathfrak{M}$ можем да намерим друг елемент $M_x^{\mu} \in \mathbf{M}^{\mu}$, такъв че $\mu(M_x^{\mu} \Delta M_x) = 0$ и двете множества да са близки в метричен смисъл.

В **Параграф 2.3** са намерени достатъчни условия за съществуване и единственост на непрекъснато решение на нехомогенното интегрално уравнение на Волтера. Показано е, че всяко решение на интегралното неравенство на Волтера се мажорира от единственото решение на интегралното уравнение на Волтера.

Разглеждаме оператора K, дефиниран чрез равенството

$$Kf(x) = p(x) + \int\limits_{M_x} Q(x, y, f(y))d\mu_y, \tag{3}$$

където операторът $Q : \Omega \times \Omega \times B \to B$, функциите $f, p \in C(M_x, B)$ и $x \in \Omega$.

Лема 2.3.1. *Нека за произволна точка $x \in \Omega$ са в сила следните условия:*

(i) *Условията (A), (AM), $(S1)$ и $(S2)$.*

(ii) *Ω е свързано метрично пространство и $0 < \mu(\Omega) \leq \infty$.*

Тогава операторът K, дефиниран с равенство (3), изобразява $C(M_x, B)$ в $C(M_x, B)$ непрекъснато за всяко $p \in C(M_x, B)$.

Нека $\Omega_* \subset \Omega$ е M-звездно множество.

Дефиниция 2.3.3. Казваме, че $f \in C(\Omega_*, B)$ е решение на (1) в $\Omega_* \subset \Omega$, ако f удовлетворява уравнение (1) за всяко $x \in \Omega_*$ и $f \in C(\Omega_*, B)$.

Основният резултат в Глава 2 е следващата теорема и резултатите след нея (Теорема 2.3.3, Теорема 2.3.4 и Следствие 2.3.2).

Теорема 2.3.2. *[69] Нека множеството $\Omega_* \subset \Omega$ е произволен M-звезден континуум, $\mu(\Omega_*) < +\infty$ и са изпълнени следните условия:*

(i) *Ω е свързано метрично пространство и $0 < \mu(\Omega) \leq \infty$;*

(ii) *Условията (A), (S1), (S4) и (AM);*

(iii) *За всяко $x \in \Omega_*$ множествата M_x са свързани.*

Тогава за всяко $p \in C(\Omega_*, B)$ уравнението (1) има точно едно решение $f \in C(\Omega_*, B)$.

За нашите разсъждения по нататък ще приемем, че $B = \mathbb{R}$ и дефинираме конуса $V^+ = \{f \in C(\Omega, \mathbb{R}) \,:\, f(x) \geq 0,\, x \in \Omega\}$.

Теорема 2.3.3. *[69] Нека са изпълнени следните условия:*

(i) *Ω е свързано метрично пространство и $0 < \mu(\Omega) \leq \infty$;*

(ii) *Условията (A), (AM), $(S1)$ и $(S4)$;*

(iii) *за всяко $x \in \Omega$ множеството M_x е свързано;*

(iv) *За всяко $x \in \Omega$ съществува M-звезден континуум $\Omega_x \subset \Omega$, за който $\mu(\Omega_x) < \infty$, такъв че $M_x \subset \Omega_x$.*

(v) *За произволни $x, y \in \Omega$ операторът Q е монотонен и положителен относно конуса V^+.*

Тогава за всяко $p \in C(\Omega_x, \mathbb{R})$ и всяко $x \in \Omega$ уравнението (1) има единствено решение $f \in C(\Omega_x, \mathbb{R})$.

Теорема 2.3.4. *[69] Нека са изпълнени следните условия:*

(i) *Ω е свързано метрично пространство и $0 < \mu(\Omega) \leq \infty$.*

(ii) *За всяко $x \in \Omega$ множествата M_x са свързани.*

(iii) *Условията (A) са изпълнени.*

(iv) *Функцията $Q\colon \Omega \times \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е монотонно нарастваща функция относно третия аргумент за всеки два фиксирани елемента $x \in \Omega$ и $y \in M_x$.*

Тогава, ако за функциите $f, g \in C(\Omega, \mathbb{R})$ и за всяко $x \in \Omega$ е изпълнено неравенството

$$g(x) - Kg(x) < f(x) - Kf(x), \tag{4}$$

то $g(x) < f(x)$ за $x \in \Omega$.

Следствие 2.3.2. *[69] Нека са изпълнени следните условия:*

(i) *В сила са условията на Теорема 2.3.3.*

(ii) *В сила е условието 4 на Теорема 2.3.4.*

Тогава за всяко решение $g \in C(\Omega, \mathbb{R})$ на неравенство (2) и за всяко $x \in \Omega$ е в сила неравенството $g(x) \leq f(x)$, където $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$ е единственото решение на уравнение (1).

В **параграф 2.4** е даден математически пример, илюстриращ Следствие 2.3.2.

Нека $B = \mathbb{R}$, $\Omega = \mathbb{R}^2_+$ и $c, a, b > 0$ са произволни константи; ρ е евклидова метрика, μ е мярка на Лебег. Дефинираме изображение $M\colon \Omega \to 2^\Omega$, което на всяка точка $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ съпоставя множеството $M_x = [0, x_1] \times [0, x_2]$.

Нека $T_x = [x_1 - a, x_1] \times [x_2 - b, x_2]$, $I(a, b) = \{[-a, \infty) \times [-b, \infty)\} \setminus \mathbb{R}^2_+$ и $\mathbb{R}^2_+ \cap T_x$ се седържа в M_x за $x \in \Omega$. Нека функцията $k\colon \mathbb{R}^2_+ \to [0, \infty)$ е непрекъсната. Тогава всяко решение на неравенството

$$g(x) \leq c + \int\limits_{M_x} k(x, y) \max_{s \in T_y} g(s) d\mu_y, \tag{5}$$

се мажорира от единственото решение на уравнението

$$f(x) = c + \int\limits_{M_x} k(x, y) \max_{s \in T_y} f(s) d\mu_y, \tag{6}$$

т.е $g(x) \leq f(x) \leq c$ за $x \in I(a, b)$.

Глава 3. Съществуване на непрекъснати решения на интегрални уравнения на Волтера в хаусдорфово пространство

Трета глава се състои от три параграфа. В тази глава е разгледано едно обобщение на нелинейното интегрално уравнение на Волтера от първи и втори вид в случая, когато независимата променлива принадлежи на произволно хаусдорфово пространство с първа аксиома за изброимост. Получени са достатъчни условия за съществуване и единственост на тривиалното решение на интегралното уравнение на Волтера от първи вид и съществуване на непрекъснато решение на интегралното уравнение на Волтера от втори вид.

В **Параграф 3.1** са въведени основни понятия, необходими за намирането на достатъчни условия за съществуване на единствено и непрекъснато решение на интегралното уравнение на Волтера от втори вид и е направена постановка на задачата.

Нека Ω е топологично пространство и с $O(x)$ означаваме околност на точката $x \in \Omega$.

Дефиниция 3.1.1. Казваме, че Ω е хаусдорфово пространство, ако всеки две различни точки $x, y \in \Omega$ имат непресичащи се околности $O(x)$ и $O(y)$.

Дефиниция 3.1.2. Казваме, че в точката $x \in \Omega$ е изпълнена първа аксиома за изброимост, ако тя има изброима база от околности.

Ако за всяка точка от пространството Ω е изпълнена първа аксиома за изброимост, то пространството Ω се нарича пространство с първа аксиома за изброимост.

Нека Ω е хаусдорфово пространство с първа аксиома за изброимост. С $B_\Omega \subset 2^\Omega$ означаваме σ-алгебрата на борелевите подмножества на Ω и $\mu : B_\Omega \to [0, \infty]$ е нетривиална σ - адитивна борелева мярка.

Нека B е реално банахово пространство с норма $||.||_B$.

Както в [20], въвеждаме изображението $M : \Omega \to 2^\Omega$, което на всяка точка $x \in \Omega$ съпоставя затворено подмножество $M_x \subset \Omega$.
Нека $KerM = \{x \in \Omega : \, \mu(M_x) = 0\}$, $M_\Omega = \bigcup\limits_{x\in\Omega} M_x$ и $\mathfrak{M} = \{M_x : \, x \in \Omega\}$.

Ще казваме, че условията (A) са в сила за изображението $M : \Omega \to 2^\Omega$, ако са изпълнени следните условия:

A1. За всяка точка $x \in \Omega$ множеството M_x е компактно.

A2. За всяко $\varepsilon > 0$ и всяка точка $x \in \Omega$ съществува отворена околност $O_\varepsilon(x)$ на x, такава че за всяко $y \in O_\varepsilon(x)$ е изпълнено $\mu(M_x \Delta M_y) < \varepsilon$, където $M_x \Delta M_y = (M_x \setminus M_y) \cup (M_y \setminus M_x)$.

A3. За всяко $x \in \Omega$ и за всяко $y \in M_x$ е изпълнено $M_y \subseteq M_x$.

A4. Съществува $x_0 \in \Omega$, такова че $\mu(M_{x_0}) = 0$.

Дефиниция 3.1.6. [41] Казваме, че множеството $G \subseteq \Omega$ е M-звездно множество, ако за всяка точка $x \in G$ е изпълнено $M_x \subseteq G$.

Въвеждаме пространството $C(G, B) = \{f : \, G \to B : \, f$ е непрекъсната$\}$, където $G \subset \Omega$. Когато G е компактно множество, то $C(G, B)$ е банахово пространство с норма $\|f\|_G = \sup\limits_{y\in G} \|f(y)\|_G$.

Ще казваме, че операторът $Q : \Omega \times \Omega \times B \to B$ удовлетворява условията (S), ако са изпълнени следните условия:

S1. Операторът $Q : \Omega \times \Omega \times B \to B$ е непрекъснат в $\Omega \times M_\Omega \times B$.

S2. За всеки M- звезден континуум $\Omega_* \subset M_\Omega$, за който $\mu(\Omega_*) < \infty$, съществува константа $L(\Omega_*) > 0$, такава че за всяка функция $f \in C(\Omega_*, B)$ е изпълнено неравенството

$$\sup_{x \in \Omega_*,\, y \in M_x} ||Q(x, y, f(y))||_B \leq L(\Omega_*)||f||_{\Omega_*}. \tag{7}$$

S3. За всяко $(x, y, u) \in M_\Omega \times M_\Omega \times B$ и за всяко $t > 0$ са изпълнени равенствата $Q(x, y, -u) = -Q(x, y, u)$ и $Q(x, y, tu) = tQ(x, y, u)$.

Разглеждаме уравненията

$$f(x) = p(x) + \lambda \int\limits_{M_x} Q(x, y, f(y)) \mathrm{d}\mu_y \tag{8}$$

$$f(x) = \lambda \int\limits_{M_x} Q(x, y, f(y)) \mathrm{d}\mu_y, \tag{9}$$

където операторът $Q : \Omega \times \Omega \times B \to B$, $\lambda \in R$ и $f, p \in C(M_\Omega, B)$.

Забележка 3.1.4. *Ако операторът Q удовлетворява условието $(S1)$ и изображението $M : \Omega \to 2^\Omega$ удовлетворява условията (A), то интегралът в уравненията (8) и (9) съществува (виж. [43], Глава 3).*

В **Параграф 3.2** е доказано съществуване и единственост на тривиалното решение на хомогенното интегрално уравнение на Волтера и съществуване на непрекъснато решение на нехомогенното интегрално уравнение на Волтера.

Разглеждаме оператора K, дефиниран чрез

$$Kf(x) = \int\limits_{M_x} Q(x, y, f(y))\, d\mu_y, \tag{10}$$

където операторът $Q : \Omega \times \Omega \times B \to B$ и функцията $f \in C(M_\Omega, B)$.

Лема 3.2.1. *Нека са изпълнени следните условия:*

1. Условията (A) и $(S1)$.

2. Ω е свързано пространство и $0 < \mu(\Omega) \leq \infty$.

3. За всяко $x \in \Omega$ множествата M_x са свързани и съществува M - звезден континуум F_x, за който $\mu(F_x) < \infty$ и за $x \in intF_x$ е изпълнено $M_x \subset intF_x$.

Тогава операторът K, дефиниран чрез уравнението (10), изобразява $C(M_\Omega, B)$ в $C(M_\Omega, B)$.

Нека $\Omega_* \subset \Omega$ е M - звездно множество.

Дефиниция 3.2.1. Казваме, че $f \in C(\Omega_*, B)$ е решение на уравнението (8) в $\Omega_* \subset \Omega$, ако f удовлетворява уравнение (8) за всяко $x \in \Omega_*$ и $p \in C(\Omega_*, B)$.

Теорема 3.2.1. *[38] Нека са изпълнени следните условия:*

1. Условията на Лема 3.2.1.

2. Условието $(S2)$.

Тогава уравнението (9) има точно едно решение $f \in C(M_\Omega, B)$ за всяко $\lambda \in R$.

Следствие 3.2.1. *Нека са изпълнени условията на Теорема 3.2.1.*

Тогава уравнение (9) има само тривиалното решение за всяко $\lambda \in R$.

Теорема 3.2.2. *[36] Нека X и Y са реални банахови пространства и са изпълнени следните условия:*

1. Операторът $T : X \to Y$ е нечетен хомеоморфизъм и съществуват константи $a, K, L > 0$, такива че за всяко $x \in X$ е изпълнено

$$K||x||_X^a \leq ||Tx||_Y \leq L||x||_X^a.$$

2. Нечетните оператори $S, W : X \to Y$ са компактни и $S(tx) = t^a S(x)$ е в сила за всяко $x \in X$ и $t > 0$.

3. $\lim\limits_{||x||_X \to \infty} \frac{||W(x)||_Y}{||x||_X^a} = 0$

Тогава, ако за всяко $\lambda \in R, \lambda \neq 0$ уравнението $T(x) - \lambda S(x) = 0$ има само тривиалното решение, то уравнението $T(x) - \lambda S(x) - W(x) = y$ има поне едно решение за всяко $y \in Y$.

Теорема 3.2.3. *[38] Нека са изпълнени следните условия:*

1. В сила са условията на Теорема 3.2.1.

2. В сила е условие $(S3)$.

3. Операторът K, дефиниран чрез (10), е компактен в $C(\Omega_*, B)$, където $\Omega_* \subset M_\Omega$ е някой M-звезден континуум, за който $\mu(\Omega_*) < \infty$.

Тогава уравнението (8) има поне едно решение за всяко $p \in C(\Omega_*, B)$.

В **Параграф 3.3** е даден математически пример, илюстриращ Теорема 3.2.3.

Нека $\Omega = \mathbb{R}_+^2$, $B = \mathbb{R}$, μ е мярка на Лебег.
Дефинираме изображението $M\colon \Omega \to 2^{\Omega}$, което на всяка точка $x = (x_1, x_2)$ от Ω съпоставя множество $M_x = [0, x_1] \times [0, x_2]$.
Нека функцията $k\colon \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ е непрекъсната и операторът $Q\colon \Omega \times \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е дефиниран чрез следното равенство

$$Q(x, y, u) = k(x, y)u.$$

Тогава уравнението

$$f(x) = p(x) + \lambda \int\limits_{M_x} k(x, y) f(y) \mathrm{d}\mu_y \tag{11}$$

има поне едно решение $f \in C(\Omega_*, B)$ за всяко $p \in C(\Omega_*, B)$.

Глава 4. Съществуване на локално интегруеми решения на уравненията на Волтера в хаусдорфово пространство

Четвърта глава се състои от три параграфа. В тази глава са разгледани нелинейни интегрални уравнения на Волтера от първи и втори вид, когато независимата променлива принадлежи на хаусдорфово пространство. Дадени са достатъчни условия за съществуване и единственост на тривиалното решение на хомогенното уравнение и достатъчни условия за съществуване и единственост на локално интегруемо решение на нехомогенното уравнение. Даден е пример, който илюстрира основния резултат.

В **Параграф 4.1** са въведени основни понятия, необходими за намирането на достатъчни условия за съществуване на единствено локално интегруемо решение на интегралното уравнение на Волтера от втори вид и е направена постановка на задачата.

Нека Ω е хаусдорфово пространство с първа аксиома за изброимост. С $B_{\Omega} \subset 2^{\Omega}$ означаваме σ-алгебрата от борелевите подмножества на Ω и нека $\mu\colon B_{\Omega} \to [0, \infty)$ е нетривиална σ-крайна борелева мярка.
С $O(x)$ означаваме околност на точката $x \in \Omega$.

Въвеждаме изображението $M\colon \Omega \to 2^{\Omega}$, което на всяка точка $x \in \Omega$ съпоставя затворено подмножество $M_x \subset \Omega$ и нека $\mathfrak{M} = \{M_x \colon x \in \Omega\}$.

Ще казваме, че условието (A) е в сила за изображението $M\colon \Omega \to 2^{\Omega}$, ако са изпълнени следните условия:

A1. За всяко $M_x \in \mathfrak{M}$ е в сила $\omega = \sup\limits_{x\in\Omega} \mu(M_x) < +\infty$.

A2. За всяко $x \in \Omega$ и всяко $y \in M_x$ е в сила $M_y \subseteq M_x$.

A3. За всяко $x \in \Omega$ и за всяко непразно относително отворено подмножество $O(x)$ на M_x съществува околност $W(x) = W(x, O(x))$, такава че за всяко $y \in W$ е в сила $M_y \cap O(x) \neq \oslash$.

A4. Съществува $x_0 \in \Omega$, такова че $\mu(M_{x_0}) = 0$.

Нека B е реално банахово прстранство с норма $\|.\|_B$.

Разглеждаме линейното пространство L^1_{loc}, където

$$L^1_{loc} = L^1_{loc}(\Omega, B) = \{f\colon \Omega \to B, f \textit{ е строго измерима и } \int\limits_{M_x} \|f(y)\|_B \, d\mu_y < \infty \textit{ за всяко } x \in \Omega\ \}$$

Въвеждаме топологията $\mathfrak{F}^1_{loc}$ с помощта на фамилията от полунорми

$$\|f\|_{M_x} = \int\limits_{M_x} \|f(y)\|_B \, d\mu_y$$

за $x \in \Omega$ и $f \in L^1_{loc}$.
Тогава от тоерема 3.5.4 [43] и теорема 1(гл.VII, п. 1) [46] следва, че L^1_{loc} е пълно локално изпъкнало топологично пространство.

Лема 4.1.1. *[33] Редицата $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1_{loc}$ клони към $f_0 \in L^1_{loc}$ в топологията $\mathfrak{F}^1_{loc}$ тогава и само тогава, когато $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f_0\|_{M_x} = 0$ за всяко $x \in \Omega$.*

Дефиниция 4.1.1. Казваме, че функцията $f \in L^1_{loc}$ е $\mathfrak{M}$ - почти сепарабелна, ако за всяко $x \in \Omega$ и $M_x \in \mathfrak{M}$ съществува множество $E_x \subseteq M_x$, $\mu(E_x) = 0$, такова че $f(M_x \setminus E_x)$ е сепарабелна в B.

Ще казваме, че оператрът $Q\colon \Omega \times \Omega \times L^1_{loc} \to L^1_{loc}$ е непрекъснат и удовлетворява условие (B), ако са изпълнени следните условия:

B1. За всяко $x, y \in \Omega$ и $f_1, f_2 \in L^1_{loc}$ е в сила равенството

$$Q(x, y, f_1(y) + f_2(y)) = Q(x, y, f_1(y)) + Q(x, y, f_2(y)).$$

B1*. За всяко $x, y \in \Omega$ и $f_1, f_2 \in L^1_{loc}$ съществува константа $L_x > 0$, такава че

$$\int\limits_{M_x} \|Q(x,y,f_1(y)) - Q(x,y,f_2(y))\|_B \, d\mu_y \leq L_x \int\limits_{M_x} \|f_1(y) - f_2(y)\|_B \, d\mu_y.$$

B2. За всяко $x \in \Omega$ съществува константа $A_x > 0$, такава че за всяко $f \in L^1_{loc}$ и $y \in \Omega$ е в сила неравенството

$$\int\limits_{M_x} \|Q(x,y,f(y))\|_B \, d\mu_y \leq A_x \int\limits_{M_x} \|f(y)\|_B \, d\mu_y.$$

B3. За всяко $\varepsilon > 0$, $x \in \Omega$ и $f \in L^1_{loc}$ съществува околност $W(x) = W(x,f,\varepsilon)$ на точката x, такава че за всяко $y \in W(x)$ е в сила неравенството

$$\int\limits_{M_x \bigcap M_y} \|Q(x,z,f(z)) - Q(y,z,f(z))\|_B \, d\mu_z \leq \varepsilon \int\limits_{M_x \bigcap M_y} \|f(z)\|_B \, d\mu_z.$$

B4. За всяко $\varepsilon > 0$, $x \in \Omega$ и $f \in L^1_{loc}$ съществува околност $V(x) = V(x,f,\varepsilon)$ на точката x, такава че за всяко $y \in V(x)$ е в сила неравенството

$$\int\limits_{M_x \Delta M_y} \|f(z)\|_B \, d\mu_z < \varepsilon,$$

където $M_x \Delta M_y = (M_x \setminus M_y) \bigcup (M_y \setminus M_x)$.

B5. За всеки фиксиран елемент $x \in \Omega$ и за всяка фиксирана функция $f \in L^1_{loc}$ функцията $\varphi_f(y) = Q(x,y,f(y)$ е $\mathfrak{M}$ - почти сепарабелна и слабо измерима относно M_x за $x \in \Omega$.

В **Параграф 4.2** е доказано съществуване и единственост на тривиалното решение на интегрално уравнение на Волтера от първи вид и съществуване и единственост на локално интегруемо решение на интегралното уравнение на Волтера от втори вид.

Разглеждаме уравненията

$$f(x) = \lambda(Kf)(x) \tag{12}$$

и

$$f(x) = \varphi(x) + \lambda(Kf)(x), \tag{13}$$

където функциите $f, \varphi \in L^1_{loc}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ и операторът $K\colon L^1_{loc} \to L^1_{loc}$ е дефиниран чрез равенството

$$(Kf)(x) = \int\limits_{M_x} Q(x, y, f(y)) d\mu_y \tag{14}$$

за $M_x \in \mathfrak{M}$.

Тъй като за всеки линеен и непрекъснат функционал $\varphi*$, дефиниран в B, изображението $\langle \varphi*, \varphi_f \rangle : \Omega \to \mathbb{R}$ е измеримо за всяко $M_x \in \mathfrak{M}$, то съществуването на интеграла в уравнение (14) се гарантира от условие (B), теорема 3.4.7, стр.94 [43] и теорема 3.5.3, стр.86 [43].

Теорема 4.2.1. *[39] Нека са в сила условията $(A1)$, $(B2)$, $(B3)$, $(B4)$ и $(B5)$. Тогава за всяко $f \in L^1_{loc}$ функцията $Kf(x)$ е непрекъсната в Ω.*

Теорема 4.2.2. *[39] Нека са изпълнени следните условия:*

1. В сила са условията (A1), (B1), (B2) и (B5).

2. Съществува константа $\tilde{A}_2 = \sup\limits_{x \in M_z} A_x$ за $z \in \Omega$.

Тогава операторът K изобразява L^1_{loc} в L^1_{loc} непрекъснато.

Теорема 4.2.3. *[39] Нека са изпълнени следните условия:*

1. Условията (A) и (B).

2. Изпълнено е условие 2 на Теорема 4.2.2.

3. Ω е свързано пространство и множествата M_x са свързани за всяко $x \in \Omega$.

Тогава уравнение (12) има само тривиалното решение $f \equiv 0$ за $\lambda \in \mathbb{R}$.

Теорема 4.2.4. *[39] Нека са изпълнени следните условия:*

1. Изпълнени са условията на Теорема 4.2.3.

2. Операторът K е компактен.

Тогава уравнение (13) има точно едно решение за всяко $\varphi \in L^1_{loc}$ и за всяко $\lambda \in \mathbb{R}$.

В **Параграф 4.3** е даден математически пример, илюстриращ Теорема 4.2.4.

Нека $\Omega = \mathbb{R}^2_+$, $B = \mathbb{R}$, μ е мярка на Лебег.

Дефинираме изображение $M\colon \Omega \to 2^\Omega$, което на всяка точка $x = (x_1, x_2)$ от Ω съпоставя множество $M_x = [0, x_1] \times [0, x_2]$.

Нека функцията $k\colon \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ е непрекъсната и нека операторът $Q\colon \Omega \times \Omega \times L^1_{loc} \to L^1_{loc}$ е дефиниран чрез

$$Q(x, y, f(y)) = k(x, y)\frac{f^2(y)}{1 + f^2(y)}. \tag{15}$$

Тогава уравнението

$$f(x) = p(x) + \int\limits_{M_x} k(x, y)\frac{f^2(y)}{1 + f^2(y)} d\mu_y \tag{16}$$

има точно едно решение $f \in L^1_{loc}$ за всяко $p \in L^1_{loc}$.

Глава 5. Приложение

Пета глава се състои от три параграфа.

В тази глава диференциални уравнения от математическата физика са сведени до интегрални уравнения на Волтера и за тях са приложени основните резултати, получени в глава 2 и глава 4.

В **Параграф 5.1** е разгледан проблемът на Дарбу, като диференциалното уравнение е сведено до интегрално уравнение от волтеров тип и за него е доказано съществуване и единственост на непрекъснато решение, както и единствено локално интегруемо решение.

Нека $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, $B = \mathbb{R}$, μ - мярка на Лебег.

Разглеждаме проблема на Дарбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = H(x, t, u) \tag{17}$$

с начални условия

$$u(x, 0) = f_1(x), \;\; u(0, t) = f_2(t), \;\; (x, t) \in \Omega \tag{18}$$

където f_1 и f_2 са непрекъснати функции в Ω с $f_1(0) = f_2(0)$ и $H : \Omega \times C^2(\Omega) \to C(\Omega)$.

Като се интегрира уравнението (17) с начални условия (18) относно x, t се получава двумерно интегрално уравнение от волтеров тип.

$$u(x, t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^x H(y, s, u(y, s))dyds + R(x, t), \tag{19}$$

където $R(x,t) = f_1(x) + f_2(t) - f_1(0)$.

Дефинираме изображение $M\colon \Omega \to 2^{\Omega}$, което на всяка точка $(x,t) \in \Omega$ съпоставя множество $M_{(x,t)} = [0,x] \times [0,t]$.

Нека операторът $H : \Omega \times C(\Omega) \to C(\Omega)$ е непрекъснат и удовлетворява условията $(S1)$ - $(S4)$, глава 2.

Тогава, за всяко решение $u_1 \in C(\Omega)$ на неравенството

$$u_1(x,t) \leq \int\limits_0^t \int\limits_0^x H(y,s,u_1(y,s))dyds + R(x,t), \tag{20}$$

е в сила неравенството

$$u_1(x,t) \leq u(x,t),$$

където $u \in C(\Omega)$ е единственото решение на уравнението (19) за всяко $R \in C(\Omega)$ и за всяко $(x,t) \in \Omega$.

Дефинираме изображение $M\colon \Omega \to 2^{\Omega}$, което на всяка точка $(x,t) \in \Omega$ съпоставя множество $M_{(x,t)} = [0,x] \times [0,t]$. Нека операторът $H\colon \Omega \times L^1_{loc} \to L^1_{loc}$ е непрекъснат и удовлетворява условията $(B1)$ - $(B5)$, глава 4.

Тогава интегралното уравнение на Волтера

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^x H(y,s,u(y,s))dyds + R(x,t), \tag{21}$$

където $R(x,t) = f_1(x) + f_2(t) - f_1(0)$ има единствено локално интегруемо решение.

В **Параграф 5.2** е разгледана задачата на Коши за телеграфното уравнение, което е сведено до интегрално уравнение от волтеров тип и е показано, че при определени условия притежава единствено непрекъснато решение, както и единствено локално интегруемо решение.

Разглеждаме нелинейната задача на Коши

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}(f(x,t,w)) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}(g(x,t,w)) + h(x,t,w) \tag{22}$$

с начални условия

$$w(x,x) = \alpha(x) \text{ и } w(t,-t) = \beta(t), \tag{23}$$

където $(x,t) \in W := \{(x,t) : x - t \geq 0 \text{ и } x + t \geq 0\}$, функците $f, g : W \times C^2(W) \to \mathbb{R}$ имат непрекъснати първи частни производни.

В случая, когато $f(x,t,w) \equiv w$ и $g(x,t,w) \equiv 0$, то получаваме телеграфното уравнение, което възниква от електромагнитни вълни в провеждащата се среда и може да се получи директно от уравнението на Максуел.

Чрез смяна на променливите $x' = x + t$, $t' = x - t$ получаваме

$$4\frac{\partial^2 U}{\partial x' \partial t'} - \frac{\partial F}{\partial x'} - \frac{\partial G}{\partial t'} = H, \tag{24}$$

където

$$\begin{aligned}
&U(x',t') := (w((x'+t')/2,(x'-t')/2))/4,\\
&F(x',t',U) := (f(x',t',U) - g(x',t',U))/4,\\
&G(x',t',U) := -(f(x',t',U) + g(x',t',U))/4,\\
&H(x',t',U) := -h(x',t',U)/4.
\end{aligned}$$

Като се интегрира уравнение (24) относно x' и t', то получаваме следното двумерно интегрално уравнение на Волтера

$$\begin{aligned}
U(X,T) = &\int_0^T \int_0^X H(x',t',U(x',t'))dx'\,dt' + \\
&+ \int_0^X G(x',T,U(x',T)dx' + \int_0^T F(X,t',U(X,t')dt' + R(X,T).
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
R(X,T) \quad &= -\int_0^X G(x',0,U(x',0))dx' - \int_0^T F(0,t',U(0,t'))dt' + \\
&\quad +U(X,0) + U(0,T) - U(0,0).
\end{aligned}$$

Нека $\Omega = \mathbb{R}^2_+$, $B = \mathbb{R}$ и μ - е мярка на Лебег. Дефинираме изображение $M\colon \Omega \to 2^\Omega$, което на всяка точка $(X,T) \in \Omega$ съпоставя множество $M_{(X,T)} = [0,X] \times [0,T]$.
Нека операторът $H : \Omega \times C(\Omega) \to C(\Omega)$ е непрекъснат и удовлетворява условията $(S1)$ - $(S4)$, глава 2.
Тогава за всяко решение $U_1 \in C(\Omega)$ на неравенството

$$\begin{aligned}
U_1(X,T) \leq &\int_0^T \int_0^X H(x',t',U_1(x',t'))dx'\,dt' + G_1(X,T) + \\
&+ F_1(X,T) + R(X,T).
\end{aligned} \tag{26}$$

е в сила неравенството $U_1(X,T) \leq U(X,T)$, където $U \in C(\Omega)$ е единственото решение на уравнението (25) за всяко $(X,T) \in \Omega$ и $F_1 + G_1 + R \in C(\Omega)$.

Дефинираме изображение $M\colon \Omega \to 2^{\Omega}$, което на всяка точка $(X,T) \in \Omega$ съпоставя множество $M_{(X,T)} = [0,X] \times [0,T]$.
Нека операторът $H : \Omega \times L^1_{loc} \to L^1_{loc}$ е непрекъснат и удовлетворява условията $(B1)$ - $(B5)$, глава 4.
Тогава интегралното уравнение

$$U(X,T) = \int\limits_0^T \int\limits_0^X H(x',t',U(x',t'))dx'\,dt' + \int\limits_0^X G(x',T,U(x',T)dx' + \\ + \int\limits_0^T F(X,t',U(X,t')dt' + R(X,T).$$

има единствено локално интегруемо решение.

В **Параграф 5.3** е разгледано едномерното уравнение на Шрьодингер в стационарния случай. Диференциалното уравнение е сведено до интегрално уравнение от волтеров тип, за което е доказано съществуването на единствено локално интегруемо решение.

Разглеждаме едномерното стационарно уравнение на Шрьодингер

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (E - U(x))\psi = 0, \tag{27}$$

за непрекъснатата функция $U : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ с начални условия

$$\psi(0) = \psi'(0) = 0, \tag{28}$$

което свеждаме до интегрално уравнение на Волтера:

$$f(x) = \int\limits_0^x K(x,y)f(y)dy \tag{29}$$

където $K(x,y) = (U(x) - E)(x - y)$.
При $\Omega = \mathbb{R}_+$, $B = \mathbb{R}$, μ - мярка на Лебег и $M_x = [0,x]$ интегралното уравнение има единствено локално интегруемо решение.

Заключение

Резюме на получените резултати

По мнение на автора основните приноси в настоящия дисертационен труд са:

1. Намерени са достатъчни условия за съществуване и единственост на непрекъснато решение на нехомогенното уравнение, когато независимата променлива е в метрично пространство, като получените резултати са приложени към интегрални неравенства с максимум.

2. Намерени са достатъчни условия за съществуване и единственост на тривиалното решение на хомогенното уравнение и съществуване на непрекъснато решение на нехомогенното уравнение, когато независимата променлива е в хаусдорфово пространство.

3. Намерени са достатъчни условия за съществуване и единственост на тривиалното решение на хомогенното уравнение и съществуване и единственост на локално интегруемо решение на нехомогенното уравнение, когато независимата променлива е в хаусдорфово пространство.

4. Намерени са достатъчни условия за съществуване и единственост на непрекъснато, както и на локално интегруемо решение на интегралните уравнения на Волтера, получени от диференциалните уравнения описващи проблема на Дарбу и задачата на Коши за телеграфното уравнение.

5. За интегралното уравнение на Волтера, получаващо се от едномерното стационарно уравнение на Шрьодингер с начални нулеви условия и за всяка стойност на енергията на частицата, е доказано съществуване и единственост на локално интегруемо решение при предположението за непрекъснатост на потенциала на частицата.

Списък на публикациите по дисертационния труд

Основните резултати от дисертационния труд са публикувани в следните научни статии:

1. A. I. Zahariev, A. T. Georgieva, L. S. Trenkova, On Volterra Type Integral Equations in Noncompact Metric Space, Journal of Inequalities and Applications (2014), 2014:260, doi:10.1186/1029-242X-2014-260 **(Impact factor: 0.77)**

2. A. T. Georgieva, L. S. Trenkova, S. I. Cholakov, On Volterra type integral equations in Hausdorff spaces, International Journal of Differential Eqeations and Applications, Volume 14, No. 1 (2015), doi: 10.12732/ijdea.v14i1.2034

3. A. T. Georgieva, L. S. Trenkova, On local integrable solutions of abstract Volterra integral equations, IOSR Journal of Mathematics, e-ISSN: 2278-5728, p-ISSN: 2319-765X. Volume 11, Issue 1 Ver. III (Jan - Feb. 2015), PP 25-32, doi: 10.9790/5728-11132532

Връзките между приносите, целите, задачите, мястото на описание в дисертационния труд и направените публикации по темата са следните:

Приноси	Цел	Задачи	Параграфи	Публикации
1	1	а, г	2.3, 2.4	1
2	1	б, г	3.2, 3.3	2
3	1	в, г	4.2, 4.3	3
4	2	д	5.1, 5.2	
5	2	д	5.3	

Апробация на получените резултати

А) Доклади на семинари и конференции

- Zahariev A., Georgieva A., Trenkova L., On Volterra Type Integral Equations in Noncompact Metric Space, International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAAMM2013), Istanbul, Turkey, 2-5 June 2013.

Б) Участие в проекти

- Научен проект НИ11-ФМИ-004 към НПД на ПУ на тема: "Разработка и приложение на иновативни ИКТ за провеждане на качествени конкурентноспособни научни изследвания и цялостно осъвременяване процеса на обучение във ФМИ", 2011-2012.
- Научен проект НИ13-ФМИ-002 към НПД на ПУ на тема: "Интеграция на ИТ в научните изследвания по математика, информатика и педагогика на обучението", 2013-2014.

Декларация за оригиналност

от **Лозанка Спиридонова Тренкова**,
редовен докторант към кат. “Математически анализ”
при Факултет по математика и информатика
на Пловдивски университет “Паисий Хилендарски”

Във връзка с провеждането на процедура за придобиване на образователната и научна степен “доктор” в Пловдивски университет “Паисий Хилендарски” и защита на представения от мен дисертационен труд, декларирам:

Резултатите и приносите на проведеното дисертационно изследване, представени в дисертационния ми труд на тема “Абстрактни уравнения от волтеров тип и приложения”, са оригинални и не са заимствани от изследвания и публикации, в които нямам участие.

27.02.2015 г. ДЕКЛАРАТОР:
гр.Пловдив /Лозанка Спиридонова Тренкова/

Библиография

[1] Антоневич А.Б., Радыно Я.В.; *Функциональный анализ и интегральные уравнения* , Минск: Вышэйшая школа, 1984. – 351.

[2] Васильева А. Б., Тихонов Н.А. , *Интегральные уравнения*, Физматлит, (2002), 160.

[3] Жуковский Е. С., *Неравенства Вольтерра в функциональных пространствах*, Матем. сб., (2004), том 195, номер 9, 3-18

[4] Красноселский М. А., *Топологические методы в теории нелинейных интегралных уравнений*, Государственное издательство технико - теоретической литературы, Москва, (1956), 393.

[5] Михлин С. Г., *Приложения интегралных уравнений к некаторым проблемам механики, математической физики и техники*, Государственное издательство технико - теоретической литературы, Москва, (1947), 304.

[6] Смирнов С., *Введение в теорию нелинейных интегралных интегралных уравнений*, Главная редакция общетехнической литературы, Ленинград, Москва,(1936), 124.

[7] Трикоми Ф., *Интегралные уравнения*, Иностранной литературы, Москва, 1960, 299.

[8] Abdou M.A., Badr A.A., El-Kojok M.M.; *On the solution of a mixed nonlinear integral equation*, Appl. Math. Comput. 217 (2011) 5466-5475.

[9] Agarwal R. P., *Difference Equations and Inequalities: Theory, Methods and Applications (Pure and Applied Mathematics 228)*, Second Edition, Revised and Expanded, Marcel Dekker, New York, 996 (2000).

[10] Agarwal R.P., Banas J., Dhage B.C., Sarkate S.D.; *Attractivity results for a nonlinear functional integral equation*, Georgian Math. J. 18 (2011) 1-19.

[11] Agarwal R. P., Ding S., Nolder C., *Inequalities for Differential Forms*, Springer Science+Business Media, LLC, NY, 2009.

[12] Agarwal R. P., O'Regan D., *Infinite interval problems for differential, difference, and integral equations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, 350 (2001).

[13] Agarwal R. P., O'Regan D., Wong P.J.Y., *Constant-Sign Solutions of Systems of Integral Equations*, Springer, 648 (2013).

[14] Aizicovici S., *On an abstract Volterra Integral Equations*, Springer, Verlag, (1979).

[15] Angelov V.,Kiskinov H.,Zahariev A.,Georgiev L.,; *On a fixed point theorem in uniform spaces and its applications in nonlinear Volterra type operator*, Fixed point theory (to appear).

[16] Appell J. M., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P., *Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, Inc., NY, 569 (2000).

[17] Arfken G., Weber H.; *Mathematical Methods for Physicists*, Harcourt Academic Press, 2000.

[18] Avsyankin O.G., Karapetyants N.K.; *On the algebra of multidimentsional integral operators with homogeneous kernels with variable coefficients*, Izv.Vyssh. Uchebn. Zaved.Mat., (2001), Number 1,3,10

[19] Azis I., Islam S., Khan F.; *A new method based on Haar wavelet for the numerical solution of two -dimensional nonlinear integral equations*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 272, (2014), 70-80.

[20] Bainov D. D., Myshkis A. D., Zahariev A. I., *On an Abstract Analog of the Bellman-Gronwall Inequality*, Publ. RIMS, Kyoto University, Vol. 20, No.5 (1984), 903–911 .

[21] Bainov D. D., Kostadinov S. I., Zahariev A. I., *Abstract Volterra Type Integral Equations*, Bull. of the Institute of Math. Academia Sinica, Vol. 16, No. 1 March (1988), 93–104.

[22] Bainov D. D., Zahariev A. I., Kostadinov S. I. *On an application of Fredholm's alternative for nonlinear abstract integral equations*, Kyoto University, Vol. 20, No.5 (1984).

[23] Banas J. , Chlebowicz A.; *On integrable solutions of a nonlinear Volterra integral equation under Caratheodory conditions*, Bull. Lond. Math. Soc. 41 (6)(2009) 1073-1084.

[24] Bongsoo J., *Solving a class of two-dimensional linear and nonlinear Volterra integral equations by the differential transform method*, Journal of Computational and Applied Mathematics 233 (2009) 224-230

[25] Corduneau C.; *Abstract Volterra Equations:A Survey* , Math. and Comp. Modeling 32, (2000), 1503-1528.

[26] Corduneau C.; *Volterra Equations and Applications*, Gordon and Breach Science Publisher, (2000).

[27] Dajun G.,Lakshmikantham V., Xinzhi L.; *Nonlinear Integral Equations in Abstract Spaces*, Kluwer Academic Publishers, (1996).

[28] Dobner H.J.; *Bounds for the solutions of hyperbolic problems*, Comput. 38 (1987) 209-218.

[29] Dragomir S. S., *Some Gronwall Inequalities and Application*, Nova, 197 (2003).

[30] Drakhlin M. E., Litsyn E., *Volterra operator: Back to the future*, J. Nonlinear Convex Anal. **6** (3) (2005), 375–391.

[31] Dugundji J., *An Extension of Tietze's Theorem*, Pacific J. Math. **1** (1951), 353–367.

[32] Edwards R. E., *Functional analysis*, Holt, Rinehart and Winston, 1965.

[33] Engelking, R., *General Topology*, Heldermann,Berlin (1989).

[34] Frank F., Mizes R., *Диференциальные и интегральные уравнения математияеской физики*, Главная редакция общетехнической литературы, Ленинград (1937).

[35] Feshbach H., Morse P.; *Methods of theoretical physics*, Mc Gran-Hill Book Company, Inc, (1953), 930.

[36] Fucik Svatopluk; *Spectral analysis of nonlinear operators*, Casopis Pest. Mat. 100, (1975), No. 2, 179–192(Russian).

[37] Fucik S., Necas J., Soucek J., Soucek V.; *Spectral analysis of nonlinear operators*, L. Notes in Mathematics No 346, Springer Verlag , Berlin, Heidelberg, (1973).

[38] Georgieva A. T., Trenkova L. S., Cholakov S. I., *On Volterra type integral equations in Hausdorff spaces*, International Journal of Differential Eqeations and Applications, IJDEA Volume 14, No. 1 (2015), doi: 10.12732/ijdea.v14i1.2034,http://ijpam.eu/en/index.php/ijdea/index

[39] Georgieva A. T., Trenkova L. S., *On local integrable solutions of abstract Volterra integral equations*, IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM), e-ISSN: 2278-5728, p-ISSN: 2319-765X. Volume 11, Issue 1 Ver. III (Jan - Feb. 2015), PP 25-32

[40] Gonzales-Lopez A., Kamran N., Olver P.J., *Real Lie algebras of diferential operators and quasi-exactly solvable potentials*, UCM/ FT-05, (1995).

[41] Guryanova I. E., Myshkis A. D., *Non extendable solutions of abstract Volterra type integral equations*, Differential Equations, Vol. 22, No. 10 (1986), 1786–1789. (in Russian)

[42] Hermann B., *Colocation methods for Volterra integral and related functional equation* Cambridge University Press, (2004).

[43] Hille E., Phillips R., *Functional analysis and semi-groups* American Mathematical Society, Colloquium Providence, 1957.

[44] Hutson V. C. L., Pym J. S., *Application of Functional Analysis and Operator Theory*, Academic Press, London, 432 (1980).

[45] Jung-Chan Chang, Cheng-Lien Lang, Chun-Liang Shih, Chien-Ning Yeh, *Local existence of some nonlinear Volterra integrodifferential equations with infinite delay*, Taiwanese J. Math. 14 (2010) 131-152.

[46] Kolmogorov A.N., Fomin S.,V., *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, Dover Publications,INC, Mineola, New York, 1999.

[47] Liang J., Yan S., Agarwal R., Huang T.; *Integral solution of a class nonlinear integral equations*, Applied Mathematics and Computation, 219, (2013), 4950-4957.

[48] Litsyn E., *Representation formula for solution of a functional equation with Volterra operator*, J. Math. Anal. Appl. 336 (2007), 1073–1089.

[49] Magnucka-Blandzi E., Popenda J., Agarwal R. P., *Best Possible Gronwall Inequalities*, Math. Comput. Modelling, Vol. 26, No. 3 (1997), 1-8.

[50] Maurin K., *Methods of Hilbert spaces*, Polish Scientific Publisher, Warsaw, 1972.

[51] Mirzall F., Hoseini A.; *A computational method based on hybrid of block-pulse functions and Taylor series for solving two-dimensional nonlinear integral equations*, Alexandria Engineering Journal, 53, (2014), 185-190.

[52] McKee S., Tang T., Diogo T. *An Euler-type method for two-dimentional Volterra integral equations of the first kind*, IMA Journal of Numerical Analysis, (2000) 20, 423- 440.

[53] Nemati S., Lima P. M., Ordokhani Y. *Numerical solution of a class of two-dimentional nonlinear Volterra integral equations using Legendre polynomials*, Journal of Computational and Applied Mathematics, (2013) 242, 53- 69.

[54] Pachpatte B. G., *Multidimensional Integral Equations and Inequalities*, Atlantis Studies in Mathematics for Engineering and Science Vol. 9, Atlantis Press, Amsterdam - Paris, 256 (2011).

[55] Pogorzelski W.; *Integral equations and their applications*, Pergamon Press, PWN -Warszawa, (1966), 713.

[56] Pruss A.; *Evolutionary Integral Equations and Applications*, Birkhauser Besel, (2012), 366.

[57] Robertson A., Robertson W.; *Topological Vector Spaces*, CUP, Cambridge University Press, 1964.

[58] Ronkov A., Bainov D., *Integral Equations and Inequalities of Volterra Type for Functions Defined in Partially Ordered Spaces*, J. Math. Anal. Appl. 125,(1987), 483–507.

[59] Ronkov A., Bainov D., *Nonlinear integral inequalities for functions defined in partially ordered topological spaces*, Nonlinear Analysis TMA, Vol. 11, No. 3 (1987), 297–304.

[60] Tari A., Rahimi M.Y., Shahmorad S., Talati F., *Solving a class of two-dimensional linear and nonlinear Volterra integral equations by the differential transform method*, Journal of Computational and Applied Mathematics ,228 (2009) 70-76.

[61] Turbiner A. V., *Quasi-exactly-solvable problems and SL(2) group*, ITEP, No. 197 (1987).

[62] Turbiner A. V., *Quasi-exactly-solvable problems and SL(2) algebras*, Commun.Math.Phys. 118,(1987), 467-474.

[63] Vath M.; *Abstract Volterra equations of the second kind*, Journal of integral equations and applications, Vol.10,N3,(1998), 319-362.

[64] Wazwaz A.- M.; *Linear and nonlinear integral equations*, Springer, (2011), 639.

[65] Yosida K., *Functional analysis*, Springer-Verlag, (1980).

[66] Zabrejko, P.P., Koshelev, A.I., Krasnoselskii, M.A., *Integral Equations*, Noordhoff, Leyden(1975).

[67] Zahariev A. I., Bainov D. D., *A note on Bellman-Gronwall' s inequality*, J. Math. Anal. Appl. **1** (1981), 147–149.

[68] Zahariev A. I., Bainov D., Kostadinov S., *On an application of Fredholms alternative for nonlinear abstract integral equations*, Analete Stiintifice ale Univ.Al. I. Cuza din Jasi, Mathematica, Vol.34, (1988), No.1, 25–30.

[69] Zahariev A., Georgieva A., Trenkova L., *On Volterra Type Integral Equaions in Noncompact Metric Space*, Journal of Inequalities and Applications (2014), 2014:260.

[70] Zhukovskii E. S., *A nonlinear Volterra equation in a Banach function space*, Izv.Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., (2005), Number 10, 17-28

Благодарности

Изказвам своята най-сърдечна и дълбока благодарност към научния ми ръководител доц. д-р Атанаска Георгиева за получените знания, умения, както и неоценимата подкрепа и търпение, които ми оказа при разработването и оформянето на дисертационния труд.

Изказвам специална благодарност на проф. д-р Андрей Захариев и на проф. дмн Степан Костадинов за компетентната им помощ.

Изказвам благодарности към всички колеги, които винаги ме подкрепяха творчески и житейски.