Пловдивски университет "Паисий Хилендарски"
Факултет по математика и информатика

Катедра "Математически анализ"

ИВАНКА АНДРЕЕВА НИКОЛОВА

Теореми за съществуване и апроксимиране на неподвижни точки в *K*-метрични пространства

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертационен труд
за присъждане на образователната и научна степен
"ДОКТОР"
по област на висше образование
4. Природни науки, математика и информатика;
професионално направление 4.5. Математика;
докторска програма Математически анализ

Научен ръководител:
проф. д-р Петко Димитров Пройнов

Пловдив – 2015

Дисертационният труд е обсъден и насрочен за защита на катедрен съвет на катедра “Математически анализ” при Факултет по математика и информатика на Пловдивски университет “Паисий Хилендарски”, проведен на 12.12.2014 г.

Дисертационният труд “Теореми за за съществуване и апроксимиране на неподвижни точки в K-метрични пространства”

се състои от увод, три глави, заключение и библиография. Библиографията съдържа 92 заглавия. Общият обем на дисертационния труд е 108 страници. Списъкът на авторските публикации включва 3 заглавия.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на 17.04.2015 г. от 11 ч. в Заседателната зала на Нова сграда на Пловдивски университет “Паисий Хилендарски”, гр. Пловдив.

Материалите по защитата са на разположение за интересуващите се в деканата на ФМИ, Нова сграда на ПУ “Паисий Хилендарски”, бул. “България” № 236, каб. 330, всеки работен ден от 8:30 до 17:00 часа.

Научно жури

Председател:
проф. д.м.н. Степан Костадинов (ПУ „П. Хилендарски“ – Пловдив).

Членове:
проф. д.т.н. Васил Ангелов (МГУ „Св. Иван Рилски“ – София, рецензент);
проф. д-р Михаил Константинов (УАСГ – София, рецензент);
проф. д-р Петко Пройнов (ПУ „П. Хилендарски“ – Пловдив);
доц. д-р Тодор Стоянов (Икономически университет – Варна).

Номерацията на теоремите, лемите, следствията и дефинициите в автореферата съвпада с тяхната номерация в дисертационния труд.

Съдържание

Актуалност и цел на дисертационния труд

Актуалност на дисертационния труд

Дисертационният труд е посветен на някои проблеми от метричната теория на неподвижните точки. Тази проблематика се развива изключително интензивно през последните 45 години. Нека да споменем някои монографии по неподвижни точки, издадени през 21 век: Агарвал, Мейхан и О'Рейган [3] (2001), Кирк и Симс [53] (2001), Камзи и Кирк [52] (2001), Чирич [23] (2003), Райх и Шойкет [75] (2005), Рус [79] (2006), Бериндe [15] (2007), Рус, Петрусел и Петрусел [80] (2008), Ангелов [5] (2009) и други.

Теореми за съществуване на неподвижни точки.

Най-известната теорема в метричната теория на неподвижните точки е Принципа на Банах за свиващите изображения, която е доказана от полския математик Стефан Банах [13] през 1922 година. Ще припомним, че едно изображение $T\colon X \to X$ на метрично пространство (X, d) се нарича *свиващо изображение*, ако удовлетворява условие на Липшиц

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda\, d(x, y) \quad \text{за всички } \ x, y \in X,$$

с константа $\lambda \in [0, 1)$. Теоремата на Банах гласи, че всяко свиващо изображение T на пълно метрично пространство X притежава единствена неподвижна точка ξ и за всяка точка $x \in X$ итерационната редица на Пикар $(T^n x)$ е сходяща към ξ с оценка на грешката

$$d(T^n x, \xi) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda}\, d(x, Tx). \tag{1}$$

През 1971 година сръбският математик Любомир Чирич [21] доказва, че теоремата на Банах е в сила за всяко *обобщено свиващо изображение*, т.е. за всяко изображение, удовлетворяващо условието

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda \max\left\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2}\right\},$$

където $\lambda \in [0, 1)$ е константа.

През 1974 година Чирич [22] разширява класа на обобщено свиващите изображения, като въвежда класа на квазисвиващите изображения. Едно изображение $T\colon X \to X$ на метрично пространство (X, d) се нарича *квазисвиващо*, ако удовлетворява условието

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}, \tag{2}$$

където $\lambda \in [0,1)$ е константа. Принципът на Чирич за квазисвиващите изображения гласи, че всяко квазисвиващо изображение T на пълно метрично пространство X притежава единствена неподвижна точка ξ и за всяка точка $x \in X$ редицата на Пикар $(T^n x)$ е сходяща към ξ с оценка на грешката (1)

Ще отбележим, че двете теореми на Чирич, след тяхното публикуване, предизвикват множество изследвания в това направление. От една страна теоремите на Чирич са теореми за съществуване и единственост на неподвижни точки, а от друга страна те са теореми за сходимост на итерационната редица на Пикар с априори оценка на грешката и, следователно, могат да се разглеждат и като теореми за апроксимиране на неподвижни точки.

Метричните пространства имат различни обобщения, едно от които са *K-метричните пространства*, при които стойностите на метриката са вектори в наредено реално векторно пространство. K-метричните пространства са известни още като *конусно метрични пространства*. Едно непразно множество X се нарича *K-метрично пространство* над наредено векторно пространство със сходимост $(Y, \preceq)$, ако X е снабдено с *K-метрика* със стойности в Y, т.е. с функция $d\colon X \times X \to Y$, която удовлетворява следните аксиоми:

- $d(x,y) \succeq 0$ за всички $x, y \in X$ и $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- $d(x,y) = d(y,x)$ за всички $x, y \in X$;
- $d(x,y) \preceq d(x,z) + d(z,y)$ за всички $x, y, z \in X$.

За пространството Y винаги ще предполагаме, че е телесно векторно пространство. Ще припомним, че едно наредено векторно пространство със сходимост $(Y, \preceq)$ се нарича:

- *телесно векторно пространство*, ако в него може да бъде въведена строга векторна наредба $(\prec)$;
- *нормално векторно пространство*, ако сходимостта в него притежава свойството на сандвича.

Настоящият дисертационен труд е посветен на проблема за обобщаване на Принципа на Чирич за квазисвиващите изображения и Принципа на Чирич за обобщено свиващите изображения в K-метричните пространства (над произволно телесно векторно пространство). Първите резултати в това направление са получени през 2009 година.

Редица автори изследват проблема в частния случай, когато векторното пространство $(Y, \preceq)$ е нормално телесно пространство (вж. например Абас и Роудс [2], Азам и Аршад [8], Илич и Ракочевич [41], Чен и Чанг [24, 25], Чудури и Метия [27], Дешпанд [31] (2010), Син, Димри и Бат [83], Жанг [91] и други).

Оказва се, че в повечето резултати за съществуване на неподвижни точки в K-метрично пространство условието за нормалност на пространството Y може да се премахне. Обаче доказателствата в K-метрични пространства над произволно телесно векторно пространство Y се усложняват, най-вече поради следните причини:

• K-метриката d в произволно K-метрично пространство X над телесно векторно пространство Y не е (секвенциално) непрекъсната функция, т.е. $x_n \to x$ в X не винаги е еквивалентно на $d(x_n, x) \to 0$ в Y;

• В телесно векторно пространството Y, което не е нормално, не винаги е в сила теоремата на сандвича, т.е. от $a_n \preceq b_n$, $a_n \to a$ и $b_n \to b$ в Y не винаги следва, че $a \preceq b$.

През последните пет години резултати за съществуване на неподвижни точки на изображения на K-метрично пространство X над произволно телесно векторно пространството Y са получени от Каделбург, Раденович и Ракочевич [48], Азам, Бег и Аршад [11], Резапур, Хадхи и Шахзад [76]), Каделбург, Раденович и Ракочевич [49], Динг, Йованович, Каделбург и Раденович [33] и други.

Теореми за съществуване на общи неподвижни точки и точки на съвпадане на две изображения.

При две изображения $f, g\colon X \to X$ възниква проблемът за съществуване на общи неподвижни точки на f и g, а също така и проблемът за съществуване на точки на съвпадане на f и g. Ще припомним, че точка $\xi \in X$ се нарича *точка на съвпадане* на f и g, ако съществува точка $x \in X$, такава че $\xi = fx = gx$.

През 1976 година Джунг [42] обобщава Принципа на Банах за свиващите изображения като го разпространява за неподвижни точки на две комутиращи изображения. Той доказва своя резултат, въвеждайки нов итерационен процес, който е обобщение на итерацията на Пикар. Да припомним дефиницията на итерацията на Джунг за две изображения. Нека $T, f\colon X \to X$ са изображения на множество X и $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ е редица X, такава че

$$fx_{n+1} = Tx_n \qquad n = 0, 1, 2, \dots. \tag{3}$$

Тогава редицата (fx_n) се нарича T-f-редица или *итерация на Джунг.*

През 1979 година Дас и Наик [30], използвайки итерационния процес на Джунг, получават теорема за съществуване на общи неподвижни точки на две изображения, която обобщава Принципа на Чирич за квазисвиващите изображения. Те доказват, че ако $T, f\colon X \to X$ са две изображения на пълно метрично пространство (X, d), такива че $T(X) \subset f(X)$, T комутира с f, f е непрекъснато изображение и ако съществува $\lambda \in [0, 1)$, такова че за всички $x, y \in X$ е изпълнено условието

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda \max\{d(fx, fy), d(fx, Tx), d(fy, Ty), d(fx, Ty), d(fy, Tx)\},$$

то T и f притежават единствена обща неподвижна точка в X.

По-нататък изследванията тръгват главно в три направления – отслабване на условието за комутативност на T и f, премахване на условието за непрекъснатост на изображението f и обобщаване на квазисвиващите изображения в K-метрични пространства. Например, работейки по първото направление, Джунг [43] през 1996 година въвежда понятието *слабо комутатиращи изображения*, което се оказва важен инструмент при изследване на общи неподвижни точки на няколко изображения. Две изображения $f, g\colon X \to X$ се наричат *слабо комутатиращи*, ако те комутират в точките, в които стойностите на f и g съвпадат. Ще отбележим, че итерацията на Джунг и дефиницията на Джунг за слабо комутиращи изображения оказват съществено влияние на по-нататъшното развитие на тази област от теорията на неподвижните точки.

През 2007 година Ветро [86] получава първия резултат за съществуване на общи неподвижни точки на две изображения в K-метрично пространство (X, d) над нормално телесно банахово пространство $(Y, \preceq)$. Той доказва съществуване и единственост на обща неподвижна точка на две изображения $T, f\colon X \to X$, удовлетворяващи условие

$$d(Tx, Ty) \preceq \alpha\, d(fx, fy) + \beta\, d(fx, Tx) + \gamma\, d(fy, Ty),$$

където α, β, γ са неотрицателни константи, такива че $\alpha + \beta + \gamma < 1$. Също така Ветро доказва и сходимост на T-f-итерационните редици на Джунг към общата точка.

Следващите резултати в това направление принадлежат на Джунг, Раденович, Радожевич и Ракочевич [44], Олалеру [59], Беринде [16], Каделбург, Раденович и Ракочевич [47], Каделбург и Раденович [46], Сонг, Сън, Ванг и Жао [85], Олалеру [60], Чо и Бае [26] и други.

Теореми за съществуване на общи неподвижни точки и точки на съвпадане на три изображения.

Итерационният процес на Джунг за три изображения се дефинира по следния начин. Нека $T, S, f\colon X \to X$ и $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ е редица в X, такава че

$$fx_{n+1} = \begin{cases} Tx_n & \text{ако } n \text{ е четно,} \\ Sx_n & \text{ако } n \text{ е нечетно.} \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{4}$$

Тогава редицата $(fx_n)_{n=0}^{\infty}$ се нарича (T, S)-f-*редица* или *итерация Джунг.*

През 2009 година Азам, Аршад и Бег [10], като използват (T, S)-f-итерационни редици на Джунг, доказват първата теорема за съществуване на общи неподвижни точки на три изображения T, S, f на K-метрично пространство. Тази теорема се отнася за изображения, удовлетворяващи условието

$$d(Tx, Sy) \preceq \lambda d(fx, fy),$$

където $\lambda \in [0, 1)$ е константа. Следващи резултати за съществуване на на общи неподвижни точки на три изображения на K-метрично пространство са получени от Джунг, Раденович, Радойевич и Ракочевич [44], Олалеру [59], Каделбург, Раденович и Ракочевич [47], Олалеру [61], Чо и Бае [26] и други.

Цел на дисертационния труд

Настоящият дисертационен труд е посветен основно на апроксимиране на неподвижни точки на изображения на K-метрични пространства, както и на апроксимиране на общи неподвижни точки и точки на съвпадане на две и три изображения на K-метрични пространства. Както споменахме по-горе много автори получават теореми за съществуване на неподвижни точки на изображения на метрични и K-метрични пространства, както и теореми за съществуване на общи неподвижни точки и на точки на съвпадане на няколко изображения. Някои от тях (Ветро [86], Ди Бари и Ветро [32], Илич и Ракочевич [40], Райа и Ваезпур [73], Илич и Ракочевич [41], Олалеру [59], Беринде [16], Жанг [91], Олалеру [60], Раденович и Каделбург [72] и други.) получават и теореми за сходимост на итерацията на Пикар или на итерацията на Джунг. Обаче единствено Чирич получава теорема за сходимост на итерационния процес на Пикар с оценка на грешката (в метрично пространство). За итерационния процес на Джунг не са известни резултати за оценки на грешката дори в метрични пространства.

Целта на дисертационния труд е да се получат теореми за сходимост с оценки на грешката на итерационната редица на Пикар за апроксимиране на неподвижни точки на квазисвиващи изображения в K-метрични пространства, както и теореми за сходимост с оценки на грешката на итерационните редици на Джунг за апроксимиране на общи неподвижни точки и точки на съвпадане на две и три изображения на K-метрични пространства.

Преди да формулираме по конкретно проблемите, които произлизат от поставената цел, първо ще разгледаме някои от последните резултати в научната литература в направлението на поставената цел. За целта ще ни бъде необходима една полезна бинарна релация между наредено векторно пространство Y и множеството от всички негови подмножества, въведена от Жанг [91] през 2011 година.

Дефиниция ([91])**.** *Нека $(Y, \preceq)$ е наредено векторно пространство, $x \in Y$ и $A \subset Y$. Казваме, че*

$$x \preceq A,$$

ако съществува поне един вектор $y \in A$, такъв че $x \preceq y$.

През 2009 година Илич и Ракочевич [41] дават първата дефиниция за квазисвиващи изображения на K-метрични пространства, според която едно изображение $T\colon X \to X$ на K-метрично пространство (X, d) над телесно векторно пространство $(Y, \preceq)$ е квазисвиващо, ако съществува $\lambda \in [0, 1)$, такова че

$$d(Tx, Ty) \preceq \lambda \{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\} \tag{5}$$

за всички $x, y \in X$.

През 2011 година Жанг [91]] дава по-обща дефиниция за квазисвиващи изображения в K-метрични пространства, като използва изпъкналата обвивка co$A$ на множество A във векторното пространство Y. В по-изчистен вид дефиницията на Жанг е формулирана в [69] както следва:

Дефиниция ([91])**.** *Нека (X, d) е K-метрично пространство над наредено векторно пространство $(Y, \preceq)$. Изображение $T\colon X \to X$ се нарича* квазисвиващо *(с коефициент на свиване λ), ако съществува $\lambda \in [0, 1)$, такова че*

$$d(Tx, Ty) \preceq \lambda \ co\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\} \tag{6}$$

за всички $x, y \in X$.

Ще отбележим, че ако (X, d) е метрично пространство, то трите дефиниции за квазисвиващи изображения, базиращи се съответно на квазисвиващите условия (2), (5) и (6), са еквивалентни.

През 2013 година Динг, Йованович, Каделбург и Раденович [33] получават следната теорема за съществуване на неподвижни точки на квазисвиващи изображения на K-метрични пространства. Тази теорема разпространява Принципа на Чирич за квазисвиващите изображения в K-метрични пространства, но без оценката на грешката.

Първа теорема на Динг-Йованович-Каделбург-Раденович. *Нека (X, d) е пълно K-метрично пространство над телесно топологично векторно пространство $(Y, \preceq)$. Ако $T\colon X \to X$ е квазисвиващо изображение, то T притежава единствена неподвижна точка $\xi \in X$ и за всяка точка $x \in X$ итерационната редица на Пикар $(T^n x)$ е сходяща към ξ.*

Тъй като теоремата на Динг, Йованович, Каделбург и Раденович не дава оценки за грешката, възниква следната задача:

Задача 1. *Да се получи теорема за сходимост за итерационния процес на Пикар за апроксимиране на неподвижни точки на квазисвиващи изображения на K-метрични пространства, която да допълни първата теорема на Динг-Йованович-Каделбург-Раденович с оценки на грешката.*

През 2013 година Динг, Йованович, Каделбург и Раденович [33] получават също следната теорема за съществуване на общи неподвижни точки на две изображения T и f, които изобразяват K-метрично пространство X в себе си. Тази теорема разпространява Принципа на Чирич за квазисвиващите изображения за две изображения в K-метрични пространства.

Втора теорема на Динг-Йованович-Каделбург-Раденович. *Нека (X, d) е пълно K-метрично пространство над телесно хаусдорфово тополологично векторно пространство $(Y, \preceq)$. Ако $T, f\colon X \to X$ са две изображения, такива че $T(X) \subset f(X)$ и $f(X)$ е пълно подпространство на X и ако съществува $\lambda \in [0, 1)$, такова че за всички $x, y \in X$ е изпълнено условието*

$$d(Tx, Ty) \preceq \lambda\, co\{d(fx, fy), d(fx, Tx), d(fy, Ty), d(fx, Ty), d(fy, Tx)\}, \qquad (7)$$

то T и f притежават единствена точка на съвпадане. Нещо повече, ако T и f са слабо комутиращи, то T и f притежават единствена обща неподвижна точка $\xi \in X$ и за всяко $x_0 \in X$ съответната T-f-редица на Джунг е сходяща към ξ.

Тази теорема също не съдържа оценки на грешката. Така възниква следният проблем:

Задача 2. *Да се получи теорема за сходимост на T-f-итерационния процес на Джунг за апроксимиране на точки на съвпадане и общи неподвижни точки на две изображения T и f на K-метрично пространство X, удовлетворяващи квазисвиващо условие от типа (7), която да допълни втората теорема на Динг-Йованович-Каделбург-Раденович с оценки на грешката.*

През 2009 година Азам, Аршад и Ветро [6] получават следната теорема за съществуване точки на съвпадане и общи неподвижни точки на три изображения T, S и f, които изобразяват K-метричното пространство X в себе си.

Теорема на Азам-Аршад-Ветро. *Нека (X, d) е K-метрично пространство над телесно банахово пространство $(Y, \preceq)$ и $T, S, f\colon X \to X$ са изображения, такива че $T(X) \cup S(X) \subset f(X)$ и $f(X)$ или $T(X) \cup S(X)$ е пълно подпространство на X. Нека са изпълнени следните условия:*

(а) *Съществуват неотрицателни числа α, β, γ, такива че $\alpha + \beta + \gamma < 1$ и за всички $x, y \in X$, за които $x \neq y$, е в сила неравенството*

$$d(Tx, Sy) \preceq \alpha\, d(fx, fy) + \beta\, d(fx, Tx) + \gamma\, d(fy, Sy). \qquad (8)$$

(b) $d(Tx, Sx) \neq d(fx, Tx) + d(fx, Sx)$ *за всяка точка* $x \in X$, *за която* $Tx \neq Sx$.

Тогава T, S *и* f *притежават единствена точка на съвпадане. Нещо повече, ако* (S, f) *и* (T, f) *са слабо комутиращи, то* T, S *и* f *притежават единствена обща неподвижна точка.*

През 2010 година Беринде [16] публикува следната теорема за съществуване на точки на съвпадане и общи неподвижни точки на две изображения T и f, изобразяващи K-метричното пространство X в себе си.

Теорема на Беринде. *Нека* (X, d) *е* K*-метрично пространство над телесно банахово пространство* $(Y, \preceq)$ *и нека* $T, f\colon X \to X$ *са изображения, за които* $T(X) \subset f(X)$ *и* $f(X)$ *е пълно подпространство* X. *Ако съществуват* $a \in [0, 1)$ *и* $b, c \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, *такива че за всички* $x, y \in X$ *е изпълнено неравенството*

$$d(Tx, Ty) \preceq \{a\, d(fx, fy), b\,[d(fx, Tx) + d(fy, Ty)], c\,[d(fx, Ty) + d(fy, Tx)]\}. \tag{9}$$

Тогава T *и* f *притежават единствена точка на съвпадане в* X. *Нещо повече, ако* T *и* f *са слабо комутиращи изображения, то* T *и* f *притежават единствена обща неподвижна точка в* X. *И в двата случая, всяка* T*-*f*-редица* (fx_n) *е сходяща към единствената (точка на съвпадане) обща неподвижна точка на* T *и* f.

През 2013 година Динг, Йованович, Каделбург и Раденович [33] получават също следната теорема за съществуване на общи неподвижни точки на две изображения T и S, изобразяващи K-метрично пространство в себе си. Тази теорема разпространява Принципа на Чирич за обобщено свиващите изображения в K-метрични пространства, но без да третира проблема за апроксимиране на общата неподвижна точка на изображенията T и S.

Трета теорема на Динг-Йованович-Каделбург-Раденович. *Нека* (X, d) *е пълно* K*-метрично пространство над телесно хаусдорфово топологично пространство* $(Y, \preceq)$. *Ако* $T, S\colon X \to X$ *са две изображения, такива че съществува* $\lambda \in [0, 1)$, *такова че за всички* $x, y \in X$ *е изпълнено неравенството*

$$d(Tx, Sy) \preceq \lambda\, co \left\{ d(x, y), d(x, Tx), d(y, Sy), \frac{d(x, Sy) + d(y, Tx)}{2} \right\}, \tag{10}$$

то T *и* S *притежават единствена обща неподвижна точка в* X.

Да отбележим, че условията (8), (9) и (10) на трите последни теореми са частен случай на обобщено свиващо условие от следният вид:

$$d(Tx, Sy) \preceq \lambda \operatorname{co} \left\{ d(fx, fy), d(fx, Tx), d(fy, Sy), \frac{d(fx, Sy) + d(fy, Tx)}{2} \right\}. \tag{11}$$

Така възниква следната задача:

Задача 3. *Да се получи теорема за сходимост с оценки на грешката за (T, S)-f-итерационния процес на Джунг за апроксимиране на общи неподвижни точки на три изображения T, S и f на K-метрично пространство X, удовлетворяващи условие от типа* (11)*, която да подобрява и допълва формулираните по-горе теореми на Азам-Аршад-Ветро, на Беринде, както и третата теорема на Динг-Йованович-Каделбург-Раденович.*

В заключение ще отбележим, че поставените в Задача 2 и Задача 3 проблеми за получаване на оценки на грешката за итерацията на Джунг при апроксимиране на общи неподвижни точки на две или три изображения, не са решени дори в случая на класическите метрични пространства.

Кратък обзор на дисертационния труд

Дисертационният труд се състои от увод, три глави, заключение и библиография. Заключението съдържа: резюме на получените резултати, списък на публикациите по дисертационния труд, апробация на получените резултати и декларация за оригиналност.

Глава 1. Апроксимиране на неподвижни точки на квазисвиващи изображения

Първа глава е разделена на шест параграфа. В тази глава получаваме пълна формулировка на Принципа на Чирич в K-метрични пространства. По-точно, получаваме теорема за сходимост с априори и апостериори оценки на грешката за итерационния процес на Пикар за апроксимиране на неподвижни точки на квазисвиващи изображения на K-метрични пространства. Полученият резултат допълва резултатите на Жанг [91] Динг, Йованович,Каделбург и Раденович [33] и други.

В **Параграф 1.1** въвеждаме някои основни понятия и теореми от теорията на K-метричните пространства над телесно векторно пространство.

В **Параграф 1.2** е направен исторически обзор на обобщенията на Принципа на Банах за свиващото изображение. Специално внимание е отделено на Принципа на Чирич за обобщено свиващите изображения (Чирич [21]) и Принципа на Чирич за квазисвиващите изображения (Чирич [22]).

В **Параграф 1.3** са дадени исторически сведения за обобщенията на Принципа на Чирич в K-метрични пространства.

В **Параграф 1.4** доказваме шест леми, които са използвани в доказателството на основния резултат на Глава 1. Ще формулираме три от тях.

Лема 1.6. *Нека (X, d) е K-метрично пространство над наредено векторно пространство $(Y, \preceq)$, $T\colon X \to X$ е квазисвиващо изображение със коефициент на свиване $\lambda \in [0, 1)$, и нека $x \in X$. Тогава за всяко $m \in \mathbb{N}$ е в сила неравенството*

$$d(T^i x, T^m x) \preceq \lambda^i \; co\{d(x, Tx), \dots, d(x, T^m x)\} \quad \text{за } \; i = 1, \dots, m.$$

Лема 1.7. *Нека (X, d) е K-метрично пространство над наредено векторно пространство $(Y, \preceq)$, $T\colon X \to X$ е квазисвиващо изображение със коефициент на свиване $\lambda \in [0, 1)$, и нека $x \in X$. Тогава за всяко $m \in \mathbb{N}$ е изпълнено неравенството*

$$d(x, T^m x) \preceq \frac{1}{1-\lambda}\, d(x, Tx).$$

Лема 1.8. *Нека (X, d) е K-метрично пространство над наредено векторно пространство $(Y, \preceq)$, и нека $T\colon X \to X$ е квазисвиващо изображение със коефициент на свиване $\lambda \in [0, 1)$. Тогава за всички $x, y \in X$ е изпълнено*

$$d(x, Tx) \preceq \alpha\, d(x, y) + \beta\, d(x, Ty),$$

където $\alpha = \lambda/(1-\lambda)$ и $\beta = (1+\lambda)/(1-\lambda)$.

В **Параграф 1.5** е формулиран и доказан основния резултат в тази глава.

Теорема 1.17. *Нека (X, d) е K-метрично пространство над телесно векторно пространство $(Y, \preceq)$ и нека $T\colon X \to X$ е квазисвиващо изображение с коефициент на свиване $\lambda \in [0, 1)$. Тогава:*

(i) Съществуване, единственост и локализация. *Изображението T има единствена неподвижна точка ξ, която принадлежи на затвореното кълбо $\overline{U}(x, r)$ с радиус $r = \frac{1}{1-\lambda}\, d(x, Tx)$, където x е произволна точка от X.*

(ii) Сходимост на итерацията на Пикар. *За всяка начална точка $x \in X$, редицата на Пикар $(T^n x)$ принадлежи на затвореното кълбо $\overline{U}(x, r)$ и е сходяща към ξ.*

(iii) Априори оценка за грешката. *За всяка точка $x \in X$ е в сила следната априори оценка на грешката:*

$$d(T^n x, \xi) \preceq \frac{\lambda^n}{1-\lambda}\, d(x, Tx) \quad \text{за всички } n \geq 0.$$

(iv) Апостериори оценки за грешката. *За всяка точка $x \in X$ са в сила следните апостериори оценки на грешката:*

$$d(T^n x, \xi) \preceq \frac{1}{1-\lambda}\, d(T^n x, T^{n+1} x) \quad \text{за всички } n \geq 0,$$

$$d(T^n x, \xi) \preceq \frac{\lambda}{1-\lambda}\, d(T^n x, T^{n-1} x) \quad \text{за всички } n \geq 1.$$

В **Параграф 1.6** е даден пример, с който се показва, че класа $\mathcal{B}$ от квазисвиващите изображения от типа на Илич и Ракочевич (5) е собствено подмножество на класът $\mathcal{C}$ от квазисвиващите изображения от вида на Жанг (6). В този параграф конструираме фамилия от примери, които показват че $\mathcal{B}$ е собствено подмножество на $\mathcal{C}$. В частност тази фамилия съдържа дадените по-рано примери от Жанг [91] и от Динг, Йованович, Каделбург и Раденович [33].

Глава 2. Апроксимиране на общи неподвижни точки на две изображения

Втора глава се състои от пет параграфа. В нея получаваме теорема за сходимост с с априори и апостериори оценки на грешката на T-f-итерационния процес на Джунг за апроксимиране на точки на съвпадане и общи неподвижни точки на две изображения T и f на K-метрично пространство X, удовлетворяващи квазисвиващо условие от типа (7). Получената теорема допълва резултата на Динг, Йованович, Каделбург и Раденович (2013) и други. Основният резултат е нов дори и в случая на класически метрични пространства.

В **Параграф 2.1** е дадена дефиницията на интерационната редица на Джунг за две изображения. Въведени са и основните понятия: обща неподвижна точка, точка на съвпадане и слабо комутатиращи изображения.

В **Параграф 2.2** са дадени кратки исторически сведения за резултатите за съществуване на общи неподвижни точки на две изображения в K-метрични пространства.

В **Параграф 2.3** доказваме шест леми, който се използват в доказателството на основния резултат. Ще формулираме пет от тях.

Лема 2.1. *Нека (X, d) е K-метрично пространство над телесно векторно пространство $(Y, \preceq)$ и нека $T, f\colon X \to X$ са такива изображения, че*

$$d(fx, Tx) \preceq a\, d(fx, fy) + b\, d(fx, Ty) \quad \text{за всички } x, y \in X, \tag{12}$$

където a и b са неотрицателни константи. Ако съществува T-f-редица в X, която е сходяща към точка $\xi \in f(X)$, тогава ξ е точка на съвпадане на T и f.

Лема 2.3. *Нека (X, d) е K-метрично пространство над наредено векторно пространство $(Y, \preceq)$ и нека изображенията $T, f : X \to X$ удовлетворяват условие (7). Ако (fx_n) е T-f-редица в X, то за всяко $m \in \mathbb{N}$ са в сила неравенствата*

$$d(fx_i, fx_m) \preceq \lambda^i \operatorname{co}\{d(fx_0, fx_1), \ldots, d(fx_0, fx_m)\}$$

за всички $i = 1, \ldots, m$.

Лема 2.4. *Нека (X, d) е K-метрично пространство над наредено векторно пространство $(Y, \preceq)$, и нека $T, f\colon X \to X$ са изображения удовлетворяващи условие (7). Ако (fx_n) е T-f-редица в X, то за всички $m \in \mathbb{N}$ е в сила неравенството*

$$d(fx_0, fx_m) \preceq \frac{1}{1-\lambda}\, d(fx_0, fx_1). \tag{13}$$

Лема 2.5. *Нека (X, d) е K-метрично пространство над наредено векторно пространство $(Y, \preceq)$ и нека $T, f : X \to X$ са изображения, удовлетворяващи условието (7). Тогава неравенството (12) се изпълнява при $a = (1+\lambda)/(1-\lambda)$ and $b = \lambda/(1-\lambda)$.*

Лема 2.6. *Нека (X, d) е K-метрично пространство над телесно векторно пространство $(Y, \preceq)$ и нека $T, f : X \to X$ са изображения удовлетворяващи условие (7). Тогава T и f притежават най-много една точка на съвпадане.*

В **Параграф 2.4** формулираме и доказваме основния резултат в тази глава.

Теорема 2.7. *Нека (X, d) е K-метрично пространство над телесно векторно пространство $(Y, \preceq)$, и нека $T, f \colon X \to X$ са изображения, такива че $T(X) \subset f(X)$ и $T(X)$ или $f(X)$ е пълно подпространство на X. Нека съществува $\lambda \in [0, 1)$, такава че за всички $x, y \in X$ е изпълнено следното квазисвиващо условие*

$$d(Tx, Ty) \preceq \lambda\, co\{d(fx, fy), d(fx, Tx), d(fy, Ty), d(fx, Ty), d(fy, Tx)\}. \tag{14}$$

Тогава са изпълнени следните твърдения:

(i) Съществуване, единственост и локализация на точката на съвпадане. *Изображенията T и f притежават единствена точка на съвпадане ξ, която принадлежи на затвореното кълбо $\overline{U}(fx_0, r)$ с радиус $r = \frac{1}{1-\lambda}\, d(fx_0, Tx_0)$, където x_0 е произволна точка от X.*

(ii) Сходимост на итерацията на Джунг. *Всяка T-f-редица (fx_n) в X лежи в затвореното кълбо $\overline{U}(fx_0, r)$ и е сходяща към ξ.*

(iii) Априори оценка на грешката. *В сила е следната оценка на грешката:*

$$d(fx_n, \xi) \preceq \frac{\lambda^n}{1-\lambda}\, d(fx_0, Tx_0) \quad \text{за всички } n \geq 0. \tag{15}$$

(iv) Апостериори оценки на грешката. *В сила са следните оценки на грешката:*

$$d(fx_n, \xi) \preceq \frac{1}{1-\lambda}\, d(fx_n, fx_{n+1}) \quad \text{за всички } n \geq 0; \tag{16}$$

$$d(fx_n, \xi) \preceq \frac{\lambda}{1-\lambda}\, d(fx_n, fx_{n-1}) \quad \text{за всички } n \geq 1. \tag{17}$$

(v) Съществуване и единственост на обща неподвижна точка. *Ако T и f са слабо комутиращи, то ξ е единствена обща неподвижна точка на T и f.*

В **Параграф 2.5** са дадени два примера. Първият показва, че заключението на основния резултат не е вярно, ако премахнем изискването за пълнота на $T(X)$ или $f(X)$.

През 2013 година Динг, Йованович, Каделбург и Раденович [33] доказват, че множеството $\mathcal{B}$ от всички изображения T и f от вида

$$d(Tx, Ty) \preceq \lambda \{d(fx, fy), d(fx, Tx), d(fy, Ty), d(fx, Ty), d(fy, Tx)\},$$

е собствено подмножество на множеството $\mathcal{C}$ от всички изображения T и f от вида (7). За целта те конструират пример в K-метрично пространство над нормално телесно банахово пространство Y.

Във втория пример построяваме фамилия от примери в K-метрично пространство над произволно телесно банахово пространство Y, които показват, че $\mathcal{B}$ е собствено подмножество на $\mathcal{C}$.

Глава 3. Апроксимиране на общи неподвижни точки на три изображения

Трета глава се състои от пет параграфа. Основният резултат в тази глава е теорема за сходимост с априори и апостериори оценки на грешката на (T,S)-f-итерационния процес на Джунг за апроксимиране на общи неподвижни точки на три изображения T, S и f на K-метрично пространство X, удовлетворяващи условие от типа (11). Полученият основен резултат подобрява и допълва резултатите на Азам, Аршад и Ветро [6], Беринде [16], Олалеру (2011), Динг, Йованович, Каделбург и Раденович [33] и други. Основните резултати в тази глава също са нови дори и в метрични пространства.

В **Параграф 3.1** даваме кратки исторически сведения за теореми за съществуване на общи неподвижни точки на три изображения в K-метрични пространства.

В **Параграф 3.2** е дадена дефиницията на итерацията на Джунг за три изображения. Освен това са формулирани теоремите на Азам, Аршад и Ветро [6], Беринде [16], Олалеру (2011), Динг, Йованович, Каделбург и Раденович [33], които се подобряват и допълват в настоящата глава.

В **Параграф 3.3** са доказани пет леми, които се използват в доказателството на главния резултат. Ще формулираме три от тях.

Лема 3.2. *Нека (X,d) е K-метрично пространство над телесно векторно пространство $(Y,\preceq)$ и нека $T,S,f\colon X\to X$ са изображения, такива че:*

(a) $d(fx,Tx) \preceq a\,d(fx,fy)+b\,d(fx,Sy)$ *за всички $x,y\in X$, такива че $x\neq y$, където a и b са неотрицателни константи;*

(b) $d(fx,Sx) \preceq a\,d(fx,fy)+b\,d(fx,Ty)$ *за всички $x,y\in X$, такива че $x\neq y$.*

(c) $d(Tx,Sx)\neq d(fx,Tx)+d(fx,Sx)$ *за всяко $x\in X$, за което $Tx\neq Sx$.*

Ако съществува (T,S)-f-редица в X сходяща към точка $\xi\in f(X)$, то ξ е точка на съвпадане на T, S и f.

Лема 3.3. *Нека (X, d) е K-метрично пространство над телесно векторно пространство $(Y, \preceq)$ и нека $T, S, f\colon X \to X$. Нека съществува $\lambda \in [0, 1)$, такава че за всички $x, y \in X$, за които $x \neq y$, е изпълнено условието* (11) *Тогава за всички $x, y \in X$, за които $x \neq y$, са изпълнени следните неравенства:*

$$d(fx, Tx) \preceq a\, d(fx, fy) + b\, d(fx, Sy) \;\text{ и }\; d(fx, Sx) \preceq a\, d(fx, fy) + b\, d(fx, Ty),$$

където $a = \lambda/(1-\lambda)$ и $b = (1+\lambda)/(1-\lambda)$.

Лема 3.4. *Нека (X, d) е K-метрично пространство над телесно векторно пространство $(Y, \preceq)$ и $T, S, f\colon X \to X$ са три изображения, такива че*

$$d(Tx, Sy) \preceq \lambda\, co\{d(fx, fy), d(fx, Tx), d(fy, Sy), d(fx, Sy), d(fy, Tx)\} \quad (18)$$

за всички $x, y \in X$, такива че $x \neq y$, където $\lambda \in [0, 1)$ е константа. Тогава T, S и f притежават най-много една точка на съвпадане в X.

В **Параграф 3.4** формулираме и доказваме основните резултати в тази глава.

Теорема 3.4. *Нека (X, d) е K-метрично пространство над телесно векторно пространство $(Y, \preceq)$ и нека $T, S, f\colon X \to X$ са изображения удовлетворяващи $T(X) \cup S(X) \subset f(X)$. Нека са изпълнени следните условия:*

(a) *Съществува $\lambda \in [0, 1)$, такава че за всички $x, y \in X$, за които $x \neq y$ е изпълнено следното обобщено свиващо условие:*

$$d(Tx, Sy) \preceq \lambda\, co\left\{d(fx, fy), d(fx, Tx), d(fy, Sy), \frac{d(fx, Sy) + d(fy, Tx)}{2}\right\}.$$

(b) *$d(Tx, Sx) \neq d(fx, Tx) + d(fx, Sx)$ за всяко $x \in X$, за което $Tx \neq Sx$.*

(c) *$f(X)$ или $T(X) \cup S(X)$ е пълно подпространство на X. Тогава са изпълнени следните твърдения:*

(i) СЪЩЕСТВУВАНЕ И ЕДИНСТВЕНОСТ НА ТОЧКА НА СЪВПАДАНЕ. *Изображенията T, S и f притежават единствена точка на съвпадане ξ в X.*

(ii) СХОДИМОСТ. *Всяка (T, S)-f-редица (fx_n) в X е сходяща към ξ.*

(iii) АПРИОРИ ОЦЕНКА НА ГРЕШКАТА. *За всички $n \geq 0$ е в сила следната оценка на грешката:*

$$d(fx_n, \xi) \preceq \frac{\lambda^n}{1-\lambda}\, d(fx_0, Tx_0).$$

(iv) Първа апостериори оценка на грешката. *За всички $n \geq 0$ е в сила следната оценка на грешката:*

$$d(fx_n, \xi) \preceq \frac{1}{1-\lambda}\, d(fx_n, fx_{n+1}).$$

(v) Апостериори оценка на грешката. *За всички $n \geq 1$ е в силата оценка на грешката:*

$$d(fx_n, \xi) \preceq \frac{\lambda}{1-\lambda}\, d(fx_n, fx_{n-1}).$$

(vi) съществуване и единственост на обща неподвижна точка. *Ако (T, f) и (S, f) са слабо комутиращи, то ξ е единствена обща неподвижна точка на T, S и f.*

Теорема 3.4 подобрява и допълва резултати на Динг, Йованович, Каделбург и Раденович [33, Теорема 3.3], Азам и Роудс [12, Теорема 3] Джунг, Раденович, Радожевич и Ракочевич [44, Теореми 2.1 и 2.2] и други.

Следващите две теореми могат да бъдат изведени от Теорема 3.4, но с по-слаби оценки на грешката.

Теорема 3.8. *Нека (X, d) е K-метрично пространство над телесно векторно пространство $(Y, \preceq)$ и нека $T, S, f\colon X \to X$ са изображения, удовлетворяващи $T(X) \cup S(X) \subset f(X)$. Нека са изпълнени следните условия:*

(a) *Съществуват числа $\alpha, \beta, \gamma, \mu \geq 0$ и $\alpha + \beta + \gamma + 2\mu < 1$, такива че за за всички $x, y \in X$, за които $x \neq y$, е изпълнено следното неравенство*

$$d(Tx, Sy) \preceq \alpha\, d(fx, fy) + \beta\, d(fx, Tx) + \gamma\, d(fy, Sy) + \mu[d(fx, Ty) + d(fy, Tx)].$$

(b) *$f(X)$ или $T(X)$ е пълно подпространство на X.*

Тогава изображенията T и f притежават единствена точка на съвпадане ξ в X и всяка T-f-редица (fx_n) е сходяща към ξ с оценки на грешката, дадени в Теорема 3.4 с $\lambda = (\alpha + \beta + \mu)/(1 - \gamma - \mu)$. Освен това, ако T и f са слабо комутиращи изображения, то ξ е единствена обща неподвижна точка на T и f.

Теорема 3.8 подобрява и допълва резултати на Аршад, Азам и Ветро [6] Ветро [86], Абас и Джунг [1], Азам, Аршад и Бег [9] Абас и Роудс [2], Бег, Азам и Аршад [14], Азам и Аршад [8], Азам, Аршад и Бег [10], Джунг, Раденович, Радожевич и Ракочевич [44], Олалеру [59], Каделбург, Раденович и Ракочевич [47], Сонг, Сън, Жао и Ванг [85], Олалеру [61], Чо и Бае [26] и други.

Теорема 3.9. *Нека (X,d) е K-метрично пространство над телесно векторно пространство $(Y,\preceq)$, и нека $T,S,f\colon X\to X$ са изображения, удовлетворяващи $T(X)\cup S(X)\subset f(X)$. Нека са изпълнени следните условия:*

(a) *Съществува $\lambda\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$, такова че за всички $x,y\in X$, такива че $x\neq y$ е изпълнено квазисвиващото условие* (18).

(b) *$d(Tx,Sx)\neq d(fx,Tx)+d(fx,Sx)$ за всяка точка $x\in X$, за която $Tx\neq Sx$.*

(c) *$f(X)$ или $T(X)\cup S(X)$ е пълно подпространство на X.*

Тогава са изпълнени следните твърдения:

(i) Съществуване и единственост на точка на съвпадане. *T, S и f притежават единствена точка на съвпадане ξ в X.*

(ii) Сходимост. *Всяка (T,S)-f-редица (fx_n) е сходяща към ξ.*

(iii) Априори оценка на грешката. *За всички $n\geq 0$ е в сила оценката*

$$d(fx_n,\xi)\preceq\frac{\theta^n}{1-\theta}\,d(fx_0,Tx_0),$$

където $\theta=\lambda/(1-\lambda)$.

(iv) Първа апостериори оценка. *За всички $n\geq 0$ е в сила оценката*

$$d(fx_n,\xi)\preceq\frac{1}{1-\theta}\,d(fx_n,fx_{n+1}).$$

(v) Втора апостериори оценка. *За всички $n\geq 1$ е изпълнена следната оценка*

$$d(fx_n,\xi)\preceq\frac{\theta}{1-\theta}\,d(fx_n,fx_{n-1}).$$

(vi) Съществуване и единственост на обща неподвижна точка. *Ако (T,f) и (S,f) са слабо комутиращи, то ξ е единствена обща неподвижна точка на T, S и f.*

Теорема 3.9 подобрява и допълва резултат на Каделбург, Раденович и Ракочевич [47, Теорема 4.2].

В **Параграф 3.5** показваме, че Теорема 3.4 е реално обобщение на резултатите на Азам, Аршад и Ветро [6] , Беринде [16] и Динг, Йованович, Каделбург и Раденович [33], т.е. има случаи в които Теорема 3.4 може да се приложи, а другите три теореми не могат.

Заключение

Резюме на получените резултати

По мнение на автора основните приноси в дисертационния труд са:

1. Получена е теорема за сходимост с априори и апостериори оценки на грешката на итерационния процес на Пикар за апроксимиране на неподвижни точки на квазисвиващи изображения на K-метрични пространства (Теорема 1.17). Получената теорема допълва резултати на Жанг [91] и Динг, Йованович, Каделбург и Раденович [33].

2. Получена е теорема за сходимост с априори и апостериори оценки на грешката на T-f-итерационния процес на Джунг за апроксимиране на точки на съвпадане и общи неподвижни точки на две изображения T и f на K-метрично пространство X, удовлетворяващи квазисвиващо условие (Теорема 2.7). Новата теорема допълва резултата на Динг, Йованович, Каделбург и Раденович [33].

3. Получена е теорема за сходимост с априори и апостериори оценки на грешката на (T, S)-f-итерационния процес на Джунг за апроксимиране на общи неподвижни точки на три изображения T, S и f на K-метрично пространство X, удовлетворяващи обобщено свиващо условие (Теорема 3.4). Получената теорема подобрява и допълва резултати на Азам-Аршад-Ветро [6], Беринде [16], Олалеру (2011), Динг-Йованович-Каделбург-Раденович [33] и други.

4. Получена е теорема за сходимост с априори и апостериори оценки на грешката на (T, S)-f-итерационния процес на Джунг за апроксимиране на общи неподвижни точки на три изображения T, S и f на K-метрично пространство X, удовлетворяващи квазисвиващо условие, при условие че коефициентът на свиване $\lambda \leq \frac{1}{2}$ (Теорема 3.9). Получената теорема подобрява и допълва резултата на Каделбург, Раденович и Ракочевич [47].

5. Получените оценки на грешката на итерационния процес на Джунг за апроксимиране на точки на съвпадане и общи неподвижни точки са нови дори в случая на класическите метрични пространства.

Списък на публикациите по дисертационния труд

Основните резултати от настоящия дисертационен труд са публикувани в следните научни статии:

1. Petko D. Proinov, Ivanka A. Nikolova, Iterative approximation of fixed points of quasi-contraction mappings in cone metric spaces, Journal of Inequalities and Applications, 2014 (2014), Art. ID 226, 14 pp. http://dx.doi.org/10.1186/1029-242X-2014-226, ISSN: 1029-242X
(Impact factor: 0.768)

2. Petko D. Proinov, Ivanka A. Nikolova, On the convergence of the Jungck iteration scheme for approximating common fixed points, Indian Journal of Applied Research, 5 (2015), No.2. http://www.theglobaljournals.com/ijar/, ISSN: 2249-555X

3. Ivanka A. Nikolova, Approximation of common fixed points of three quasi-contraction mappings, International Journal of Scientific Research, 4 (2015), No. 2. http://theglobaljournals.com/ijsr/, ISSN: 2277-8179

Връзките между приносите, целите, задачите, мястото на описание в дисертационния труд и направените публикации по темата са следните:

Приноси	Цел	Задачи	Параграфи	Публикации
1	1	Задача 1	1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6	1
2	1	Задача 2	2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5	–
3	1	Задача 3	3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5	2
4	1	–	3.4	3
5	–	–	2.4, 3.4	2, 3

Апробация на получените резултати

А) Доклади на семинари и конференции

- On a theorem for existence and approximation of fixed points in cone metric spaces, Научна сесия на съюза на учените в България "Дни на науката 2011", Пловдив, 10-11 ноември 2011.
- Обобщени квазисвиващи изображения в K-метрични пространства, Юбилейна национална научна конференция с международно участие "Традиции, посоки, предизвикателства", Смолян, 19-21 октомври 2012. http://old.uni-plovdiv.bg/smolyan/GetResource?id=3214
- Апроксимация на неподвижни точки на квазисвиващи изображения в K-метрични пространства, Научен семинар "Итерационни методи и неподвижни точки", ПУ "Паисий Хилендарски", 17 януари 2014. http://fmi-plovdiv.org/GetResource?id=1623
- Сходимост на итерационния процес на Джунг за апроксимиране на общи неподвижни точки, Научен семинар "Итерационни методи и неподвижни точки", ПУ "Паисий Хилендарски", 11 юли 2014. http://www.fmi-plovdiv.org/GetResource?id=1775

Б) Участие в проекти

- Научен проект НИ11-ФМИ-004 към НПД на ПУ на тема: "Разработка и приложение на иновативни ИКТ за провеждане на качествени конкурентноспособни научни изследвания и цялостно осъвременяване процеса на обучение във ФМИ", 2011-2012.
- Научен проект НИ13-ФМИ-002 към НПД на ПУ на тема: "Интеграция на ИТ в научните изследвания по математика, информатика и педагогика на обучението", 2013-2014.

Декларация за оригиналност

от **Иванка Андреева Николова**,
редовен докторант към катедра "Математически анализ"
при Факултет по математика и информатика
на Пловдивски университет "Паисий Хилендарски"

Във връзка с провеждането на процедура за придобиване на образователната и научна степен "доктор" в Пловдивски университет "Паисий Хилендарски" и защита на представения от мен дисертационен труд, декларирам:

Резултатите и приносите на проведеното дисертационно изследване, представени в дисертационния ми труд на тема "Теореми за съществуване и апроксимиране на неподвижни точки в K-метрични пространства", са оригинални и не са заимствани от изследвания и публикации, в които нямам участие.

17.11.2014 г. ДЕКЛАРАТОР:
гр.Пловдив /Иванка Андреева Николова/

Библиография

[1] Abbas M., G. Jungck, Common fixed point theorem results for noncommuting mappings without continuity in cone metric spaces, J. Math. Anal. Appl. 341 (2008) 416–420.

[2] Abbas M., B.E. Rhoades, Fixed and periodic point results in cone metric spaces, Appl. Math. Lett. 22 (2009) 511–515.

[3] Agarwal R.P., M. Meehan, D. O'Regan, Fixed Point Theory and Applications, Cambridge tracts in mathematics, Vol. 141, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[4] Amini-Harandi A., M. Fakhar, Fixed point theory in cone metric space obtained via the scalarization method, Comput. Math. Appl. 59 (2011) 370–374.

[5] Angelov V.G., Fixed Points in Uniform Spaces and Applications, Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2009.

[6] Arshad M., A. Azam, P. Vetro, Some common fixed point results in cone metric spaces, Fixed Point Theory Appl. 2009 (2009), Art. ID 493965, 11 pp.

[7] Asadi M., B.E. Rhoades, H. Soleimani, Some notes on the paper "The equivalence of cone metric spaces and metric spaces", Fixed Point Theory Appl. 2012 (2012), Art. ID 87, 4 pp.

[8] Azam A., M. Arshad, Common fixed points of generalized contractive maps in cone metric spaces, Bull. Iranian Math. Soc. 35 (2009) 255–264.

[9] Azam A., M. Arshad, I. Beg, Common fixed points of two maps in cone metric spaces, Rend. Circ. Mat. Palermo 57 (2008) 433–441.

[10] Azam A., M. Arshad, I. Beg, Common fixed point theorems in cone metric spaces, J. Nonlinear Sci. Appl. 2 (2009) 204–213.

[11] Azam A., I. Beg, M. Arshad, Fixed point in topological vector space-valued cone metric spaces, Fixed Point Theory Appl. 2010 (2010), Art. ID 604084, 9 pp.

[12] Azam A., B.E. Rhoades, Common fixed point theorems in tvs-valued cone metric spaces, in: Lecture Notes in Engineering and Computer Science, Vol. 2197 (2012), No. 1, 30–34.

[13] Banach S., Sur les operations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux equations integrals, Fund. Math. 3 (2009) 133–181.

[14] Beg I., A. Azam, M. Arshad, Common fixed points for maps on topological vector space valued cone metric spaces, Int. J. Math. Math. Sci. 2009 (2009), Art. ID 560264, 8 pp.

[15] Berinde V., Iterative Approximation of Fixed Points, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1912, Springer, Berlin, 2007.

[16] Berinde. V, Common fixed points of noncommuting discontinuous weakly contractive mappings in cone metric spaces, Taiwanese J. Math. 14 (2010) 1763–1776.

[17] Biancini R.M.T., Su un problema di S. Reich riguardante la teoria dei punti fissi, Boll. Unione. Mat. Ital. 5 (1972), No. 4, 103–108.

[18] Boyd D.W., J.S.W Wong, On nonlinear contractions, Proc. Am. Math. Soc. 20 (1969) 458–464.

[19] Browder F.E., On the convergence of successive approximations for nonlinear functional equations, Indag. Math. 30 (1968) 27–35.

[20] Chatterjea S.K., Fixed point theorems, C. R. Acad. Bulg. Sci. 25 (1972) 727–730.

[21] Ćirić L.B., Generalized contractions and fixed point theorems, Publ. Inst. Math. 12 (1971) 19–26.

[22] Ćirić L.B., A generalization of Banach's contraction principle, Proc. Amer. Math. Soc. 45 (1974) 267–273.

[23] Ćirić L.B., Fixed Point Theory, University of Belgrade Beograd 2003.

[24] Chen C.-M., T.-H. Chang, Common fixed point theorems for a weaker Meir-Keeler type function in cone metric spaces, Appl. Math. Lett. 23 (2010) 1336–1341.

[25] Chen C.-M., T.-H. Chang, A common fixed point theorem for the ϕ-contractive mapping, Tamkang Journal of Math. 41 (2010) 25–30.

[26] Cho S.H., J.S. Bae, Common fixed point theorems for mappings satisfying property (E.A) on cone metric spaces, Math. Computer Modelling 53 (2011) 945–951.

[27] Choudhury B.S., N. Metiya, The point of coincidence and common fixed point for a pair of mappings in cone metric spaces, Comput. Math. Appl. 60 (2010) 1686–1695.

[28] Collaco P., J.C.E. Silva, A complete comparison of 25 contraction conditions, Nonlinear anal. 30 (1997) 471–476.

[29] Collatz L., Functional Analysis and Numerical Mathematics, Academic Press, New York, 1966.

[30] Das K.M., K.V. Naik, Common fixed point theorems for commuting maps on metric spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 77 (1979) 369–373.

[31] Deshpande B., Common fixed point results for six maps on cone metric spaces with some weaker conditions, Fasciculi Mathematici 43 (2010) 33–43.

[32] Di Bari C., P. Vetro, φ-pairs and common fixed points in cone metric spaces, Rend. Circ. Mat. Palermo 57 (2008) 279–285.

[33] Ding H.-S., M. Jovanović, Z. Kadelburg, S. Radenović, Common fixed point results for generalized quasicontractions in tvs-cone metric spaces, J. Comput. Anal. Appl. 15 (2013) 463–470.

[34] Du W.-S., A note on cone metric fixed point theory and its equivalence, Nonlinear Anal. 72 (2010) 2259–2261.

[35] Ercan Z., On the end of cone metric spaces, Topol. Appl. 166 (2014) 10–14.

[36] Feng Y.,W. Mao, The equivalence of cone metric spaces and metric spaces, Fixed Point Theory 11 (2010) 259–263.

[37] Gajič L., V. Rakočevič, Quasi-contractions on a nonnormal cone metric spaces, Funct. Anal. Appl. 46 (2012) 62–65.

[38] Gelman A., A certain fixed-point principle, Soviet Math. Dokl. 12 (1971) 813–816.

[39] Hardy G.-E., T.D. Rogers, A generalization of a fixed point theorem of Reich, Canad. Math. Bull. 16 (1973) 201–206.

[40] Ilić D., V. Rakočević, Common fixed points for maps on cone metric space, J. Math. Anal. Appl. 341 (2008) 876–882.

[41] Ilić D., V. Rakočević, Quasi-contraction on a cone metric space, Appl. Math. Lett. 22 (2009) 728–731.

[42] Jungck G., Commuting mappings and fixed points, Amer. Math. Mon. 83 (1976) 261–263.

[43] Jungck G., Common fixed points for noncontinuous nonself maps on nonmetric spaces, Far East J. Math. Sci. 4 (1996) 199–215.

[44] Jungck G., S. Radenović, S. Radojević, V. Rakočević, Common fixed point theorems for weakly compatible pairs on cone metric spaces, Fixed Point Theory Appl. 2009 (2009), Art. ID 643840, 13 pp.

[45] Jungck G., B.E. Rhoades, Fixed point theorems for occasionally weakly compatible mappings. Fixed Point Theory 7 (2006) 287–296.

[46] Kadelburg Z., S. Radenović, Some common fixed point results in non-normal cone metric spaces, J. Nonlinear Sci. Appl. 3 (2010) 193–202.

[47] Kadelburg Z., S. Radenović, V. Rakočević, Topological vector space-valued cone metric spaces and fixed point theorems, Fixed Point Theory Appl. 2010 (2010), Art. ID 170253, 17 pp.

[48] Kadelburg Z., S. Radenović, V. Rakočević, Remarks on “Quasi-contraction on a cone metric space”. Appl. Math. Lett. 22 (2009) 1674–1679.

[49] Kadelburg Z., S. Radenović, V. Rakočević, A note on the equivalence of some metric and cone metric fixed point results, Appl. Math. Lett. 24 (2011) 370–374.

[50] Kannan R., Some results on fixed points, Bull. Calcutta Math. Soc. 60 (1968) 71–76.

[51] Kannan R., Some results on fixed points II, Amer. Math. Monthly 76 (1969) 405–408.

[52] Khamsi M.A., W.A. Kirk, An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory, Wiley-Interscence, New York, 2001.

[53] Kirk W.A., B. Sims (Eds.), Handbook of Metric Fixed Point Theory, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.

[54] Lim T.C., On characterization of Meir-Keeler contractive maps, Nonlinear Anal. 46 (2001) 113–120.

[55] Matkowski J., Integrable Solutions for Functional Equations, Dissertationes Math., Vol. 127, Polish Acad. Sci., Warsaw, 1975.

[56] Matkowski J., Fixed point theorems for contractive mappings in metric spaces, Cas. Pest. Mat. 105 (1980) 341–344.

[57] Meir A., E. Keeler, A theorem on contraction mappings, J. Math. Anal. Appl. 28 (1969) 326–329.

[58] Nikolova I.A. Approximation of common fixed points of three quasi-contraction mappings, Int. J. Sci. Res. 4 (2015), No. 2.

[59] Olaleru J.O., Some generalizations of fixed point theorems in cone metric spaces, Fixed Point Theory Appl. 2009 (2009), Art. ID 657914, 10 pp.

[60] Olaleru J.O., Approximation of common fixed points of weakly compatible pairs using the Jungck iteration, Appl. Math. Comput. 217 (2011) 8425–8431.

[61] Olaleru J.O., Common fixed points of three self-mappings in cone metric spaces, Appl. Math. E-Notes 11 (2011) 41–49.

[62] Park S., A unified approach to fixed points of contractive maps, J. Korean Math. Soc. 16 (1980) 95–105.

[63] Proinov P.D., Fixed point theorems in metric spaces, Nonlinear Anal. 64 (2006) 546–557.

[64] Proinov P.D., A generalization of the Banach contraction principle with high order of convergence of successive approximations, Nonlinear Anal. 67 (2007) 2361–2369.

[65] Proinov P.D., New general convergence theory for iterative processes and its applications to Newton-Kantorovich type theorems, J. Complexity 26 (2010) 3–42.

[66] Proinov P.D., A unified theory of cone metric spaces and its applications to the fixed point theory, Fixed Point Theory Appl. 2013 (2013), Art. ID 103, 38 pp.

[67] Proinov P.D., S.I. Cholakov, Semilocal convergence of Chebyshev-like root-finding method for simultaneous approximation of polynomial zeros, Appl. Math. Comput. 236 (2014) 669–682.

[68] Proinov P.D., S.I. Cholakov, Convergence of Chebyshev-like method for simul-taneous computation of multiple polynomial zeros, C. R. Acad. Bulg. Sci. 67 (2014) 907–918.

[69] Proinov P.D., I.A. Nikolova, Iterative approximation of fixed points of quasi-contraction mappings in cone metric spaces, J. Inequal. Appl. 2014 (2014), Art. ID 226, 14 pp.

[70] Proinov P.D., I.A. Nikolova, On the convergence of Jungck iteration scheme for approximating common fixed points, Indian J. Appl. Res. 5 (2015), No. 2.

[71] Pant R.P., R.K. Bisht, Common fixed point theorems under a new continuity condition, Ann. Univ. Ferrara 58 (2012) 127–141.

[72] Radenović S., Z. Kadelburg, Quasi-contractions on symmetric and cone symmetric spaces, Banach J. Math. Anal. 5 (2011) 38–50.

[73] Raja P., S.M. Vaezpour, Some Extensions of Banach's Contraction Principle in Complete Cone Metric Spaces, Fixed Point Theory Appl. Art. 2008 (2008), ID 768294, 11 pp.

[74] Reich S., Some remarks concerning contraction mappings, Canad. Math. Bull. 14 (1971) 121–124.

[75] Reich S., D. Shoiykhet, Nonlinear Semigroups, Fixed Points and Geometry of Domains in Banach Spaces, World Scientific, London, 2005.

[76] Rezapour S., R.H. Haghi, N. Shahzad, Some notes on fixed points of quasi-contraction maps, Appl. Math. Lett. 23 (2010) 498–502.

[77] Rhoades B.E., A comparison of various definitions of contractive mappings, Trans. Amer. Math. Soc. 226 (1977) 257–290.

[78] Rus I.A., Some fixed point theorems in metric spaces, Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste 3 (1971) 169–172.

[79] Rus I.A., Fixed Point Structure Theory, Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2006.

[80] Rus I.A., A. Petrusel, G. Petrusel, Fixed Point Theory, Cluj university Press, Cluj-Napoca, 2008.

[81] Shröder J., Das Iterationsverfahren bei allgemeinerem Abstadsbegriff, Math. Z. 66 (1956) 111–116.

[82] Shröder J., Nichtlineare Majoranten beim Verfahren der schrittweisen Naherung, Arch. Math. 7 (1956) 471-484.

[83] Singh A., R.C. Dimri, S. Bhatt A Unique Common Fixed Point Theorem for Four Maps in Cone Metric Spaces, Int. J. Math. Anal. 31 (2010) 1511–1517

[84] Singh S.P., B. A. Meade, On common fixed point theorems, Bull. Austral. Math. Soc. 16 (1977) 49–53.

[85] Song G., X. Sun, Y. Zhao, G. Wang, New common fixed point theorems for maps on cone metric spaces, Appl. Math. Lett. 23 (2010) 1033–1037.

[86] Vetro P., Common fixed points in cone metric spaces, Rend. Circ. Mat. Palermo 56 (2007) 464–468.

[87] Yeh C.C., On common fixed-point theorems of continuous mappings, Indian J. Pure Appl. Math. 10 (1979) 415–420.

[88] Yeh C.C., Common fixed point of continuous mappings in metric spaces, Publ. Inst. Math. 27 (1980) 21–25.

[89] Zabrejko P.P., K-metric and K-normed linear spaces: survey, Collect. Math. 48 (1997) 825–859.

[90] Zamfiresku T., Fixed point theorems in metric spaces, Arch. Math. 23 (1972) 292–298.

[91] Zhang X., Fixed point theorem of generalized quasi-contractive mapping in cone metric space, Comput. Math. Appl. 62 (2011) 1627–1633.

[92] Zitarosa A., Una generalizzazione del teorema di Banach sulle contrazioni, Matematiche 23 (1968) 417–424.

Благодарности

Изказвам своята най-сърдечна и дълбока благодарност към научния ми ръководител проф. д-р Петко Димитров Пройнов за получените знания, умения, както и неоценимата подкрепа и търпение, които ми оказа при разработването и оформянето на дисертационния труд.

Изказвам благодарности към всички колеги, които винаги ме подкрепяха творчески и житейски.

Благодаря и на всички мои близки и приятели и най-вече на семейството ми, Дамян Митев и Веселин Бекирски за това, че изтърпяха целия творчески процес, свързан с написването на настоящия дисертационен труд.