Пловдивски университет "Паисий Хилендарски"
Факултет по математика и информатика

Катедра "Математически анализ"

СЛАВ ИВАНОВ ЧОЛАКОВ

Сходимост на итерационни методи от типа на Чебишов за едновременна апроксимация на нули на полиноми

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертационен труд
за присъждане на образователната и научна степен
"ДОКТОР"
по област на висше образование:
4. Природни науки, математика и информатика;
професионално направление: 4.5. Математика;
докторска програма: Математически анализ

Научен ръководител:
проф. д-р Петко Димитров Пройнов

Пловдив – 2014

Дисертационният труд е обсъден и насрочен за защита на разширен катедрен съвет на катедра "Математически анализ" при Факултет по математика и информатика на Пловдивски университет "Паисий Хилендарски", проведен на 25.06.2014 г.

Дисертационният труд "Сходимост на итерационни методи от типа на Чебишов за едновременна апроксимация на нули на полиноми" се състои от увод, три глави, заключение и библиография. Библиографията съдържа 65 заглавия. Общият обем на дисертационния труд е 107 страници. Списъкът на авторските публикации включва 4 заглавия.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на 26.09.2014 г. от 10 ч. в Заседателната зала на Нова сграда на Пловдивски университет "Паисий Хилендарски", гр. Пловдив.

Материалите по защитата са на разположение за интересуващите се в секретариата на ФМИ, Нова сграда на ПУ "Паисий Хилендарски", бул. "България" № 236, каб. 330, всеки работен ден от 8:30 до 17:00 часа.

Научно жури

Председател:
проф. д-р Антон Илиев (ПУ „П. Хилендарски", Пловдив; рецензент).

Членове:
проф. д.т.н. Васил Ангелов (МГУ „Св. Иван Рилски", София);
проф. д-р Петко Пройнов (ПУ „П. Хилендарски", Пловдив);
доц. д-р Андрей Андреев (ИМИ при БАН, София);
доц. д-р Гюрхан Неджибов (ШУ „Еп. К. Преславски", Шумен; рецензент).

Номерацията на теоремите, лемите, следствията и дефинициите в автореферата съвпада с тяхната номерация в дисертационния труд.

Съдържание

Актуалност и цел на дисертационния труд

Актуалност на дисертационния труд

През последните няколко десетилетия немалко публикации и монографии (или глави от монографии) са посветени на проблеми от теорията на итерационните методи за едновременна апроксимация на нули на полиноми. Вж. например монографиите на Л. Илиев [18] (1987), Петкович [33] (1989), Сендов, Андреев и Кюркчиев [61] (1994), Петкович, Херцег и Илич [35] (1997), Кюркчиев [20] (1998), Петков и Кюркчиев [36] (2000), МакНаме [26] (2007), Петкович [34] (2008), Илиев и Кюркчиев [16] (2010), Чира [6] (2012), Петкович, Нета, Петкович и Джунич [37] (2013), МакНаме и Пан [27] (2013) и цитираната в тях литература.

За изграждане на теорията на итерационните методи за едновременна апроксимация на нули на полиноми съществен принос имат и българските математици. Ще споменем имената на някои от тях: Кирил Дочев [7, 8], Благовест Сендов [60, 61], Васил Попов [22, 60], Николай Кюркчиев [16, 20, 22, 36, 61], Андрей Андреев [22, 61], Христо Семерджиев [17, 58, 59] Илия Макрелов [24, 25], Антон Илиев [14, 15, 16, 17], Гюрхан Неджибов [28, 29], Петко Пройнов [41, 42, 44, 45] [1] и други. В работите [44, 45], Пройнов разработва обща теория за сходимост на широк клас от итерационни методи в метрични пространства, която включва и итерационните методи за едновременно апроксимиране на нули на полиноми. Методът на Пройнов за изследване сходимостта на итерационни методи може да се нарече метод на функциите на началните условия, тъй като началните приближения се задават чрез избраната функция. В последните години Пройнов и Петкова [54, 55, 56] и Пройнов и Иванов [49, 50, 51, 52], като използват метода на функциите на началните условия, получават теореми за сходимост на някои итерационни методи за корени на полиноми.

Методи за едновременна апроксимация на нули на полиноми. Съществуват много итерационни методи за едновременна апроксимация на нули на полиноми. Измежду най-известните от тях са следните итерационни методи: метод на Вайерщрас [64], метод на Дочев-Бърнев [8], метод на Ерлих [10], метод на Нурейн [30], метод на Танабе [62] и други.

Ще припомним само метода на Вайерщрас, който е въведен от Вайерщрас [64] през 1891 година. По-късно, през 1960 година методът на Вайерщрас е преоткрит от френския математик Дюран [9]. През 1962 година

[1] Тук цитираме само тези работи на българските математици, които са свързани с настоящия дисертационен труд.

методът на Вайерщрас отново е преоткрит от българския математик Кирил Дочев [7], който доказва първата теорема за локална квадратична сходимост на метода с оценка на грешката. През 1966 година методът е преоткрит от Прешич [40] и Кернер [19], като Кернер доказва, че методът на Вайерщрас е частен случай на многомерния метод на Нютон. Методът на Вайерщрас е известен още като метод на Дюран–Кернер, метод на Вайерщрас–Дочев и други.

Нека f е полином с коефициенти в произволно нормирано поле $\mathbb{K}$. Методът на Вайерщрас се дефинира във векторното пространство $\mathbb{K}^n$ чрез следната итерация:

$$x^{k+1} = x^k - W(x^k) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

където операторът $W \colon \mathcal{D} \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ се дефинира чрез

$$W(x) = (W_1(x), \ldots, W_n(x)), \quad \text{като} \quad W_i(x) = \frac{f(x_i)}{a_0 \prod\limits_{j \neq i} (x_i - x_j)}\,,$$

където $a_0 \in \mathbb{K}$ е старшия коефициент на полинома f, а $\mathcal{D}$ е множеството от всички вектори в $\mathbb{K}^n$ с различни координати.

Операторът на Вайерщрас W се нарича още *корекция на Вайерщрас*. Ще отбележим, че корекцията на Вайерщрас заема важна роля в изследването на полулокалната сходимост на итерационни методи за едновременно намиране корените на полиноми. Понякога пишем W_f вместо W за да подчертаем, че операторът W е породен от полинома f.

Методи за едновременна апроксимация на кратни нули на полиноми (с известни кратности). Всички споменати по-горе методи имат ред на сходимост не по-малък от 2 при условие, че всичките n нули на полинома са прости. В противен случай всеки от тези методи е сходящ линейно. Възниква проблемът за построяване на модификации на тези методи, които да запазват реда на сходимост на оригиналния метод. През 1972 година сръбският математик Секулоски [57] (1972) построява първия итерационен метод за едновременно намиране на кратни нули на полиноми. Този метод представлява обобщение на метода на Вайерщрас. По-късно други методи за едновременна апроксимация на кратни нули на полиноми са въведени от Фармер и Лоазу [12] (1977), Гаргантини [13] (1978), Семерджиев [58] (1982) и други. През последните 45 години са построени и изследвани още много други методи за кратни нули (вж. например Петкович[33], Сендов, Андреев и Кюркчиев [61], Семерджиев[59], Петкович, Херцег и Илич [35], Кюркчиев [20], МакНаме [26], Петкович [34], Илиев и Кюркчиев [16] и цитираната в тях литература).

Настоящият дисертационен труд е посветен изцяло на изследване сходимостта на два итерационни метода за едновременна апроксимация нули на полиноми, които ще формулираме по-долу.

Метод от типа на Чебишов.

През 1838 година знаменитият руски математик Пафнутий Чебишов [3], още като студент, написва своята първа научна работа, озаглавена "Вычисление корней уравнения". С тази работа той участва в конкурс, обявен от Философския факултет на Императорския Московски университет и получава сребърен медал. От отчета за дейността на университета за 1840/41 академична година става ясно, че журито на конкурса не е оценило изключително високото ниво на студентската работа на Чебишов. Тя е посветена на числено намиране на корени на нелинейни уравнения от вида $f(x) = 0$, където f е реална функция на реална променлива. Знаменитият *метод на Чебишов* [3] се дефинира чрез итерацията:

$$\hat{x} = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{f(x)}{f'(x)} \frac{f''(x)}{f'(x)} \right),$$

където $\hat{x}$ и x са две последователни приближения на корен на уравнението $f(x) = 0$. Ще отбележим, че тази формула може да се разгледа в произволно нормирано поле.

Нека сега f е полином с коефициенти в нормирано поле $\mathbb{K}$ и нека f притежава n нули $\xi_1, \ldots, \xi_n$ в $\mathbb{K}$. Прилагаме метода на Чебишов към всяка от нулите ξ_i и получаваме

$$\hat{x}_i = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \frac{f''(x_i)}{f'(x_i)} \right) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

като $\hat{x}_i$ и x_i са две последователни приближения към нула ξ_i на полинома. Известно е, че ако началните приближения $x_1, \ldots, x_n$ са достатъчно близо до нулите $\xi_1, \ldots, \xi_n$ на полином f, то е в сила следното приближение:

$$\frac{f''(x_i)}{f'(x_i)} \approx 2 \sum_{j \neq i} \frac{1}{x_i - x_j}.$$

Като заместим $\dfrac{f''(x_i)}{f'(x_i)}$ в метода на Чебишов с горното приближение получаваме следния итерационен метод за едновременна апроксимация на нули на полиноми:

$$\hat{x}_i = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \left(1 + \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \sum_{j \neq i} \frac{1}{x_i - x_j} \right) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Този метод притежава кубична сходимомост, ако всичките нули на полинома f са прости. В противен случай сходимостта на метода е само линейна. Поради тази причина методът се прилага предимно към полиноми с прости нули. В дисертационния труд наричаме този метод *метод от типа на Чебишов*. За удобство при изследванията представяме метода от типа на Чебишов като итерационен метод във векторното пространство $\mathbb{K}^n$ чрез следната итерационна формула:

$$x^{k+1} = Tx^k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

където операторът $T\colon D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ се дефинира чрез

$$T(x) = (T_1(x), \ldots, T_n(x)), \tag{2}$$

като

$$T_i(x) = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \left(1 + \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \sum_{j \neq i} \frac{1}{x_i - x_j} \right) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{3}$$

а дефиниционната област D на T се дефинира чрез

$$D = \{x \in \mathbb{K}^n : f'(x_i) \neq 0 \, \forall i \text{ и } x_i \neq x_j \, \forall i \neq j\}.$$

Методът от типа на Чебишов е въведен през 1990 година от Илия Макрелов [24, 25] и преоткрит през 2001 година от Миодраг Петкович и Лиляна Петкович [38]. Макрелов [24] получава теорема за локална сходимост на метода с априори оценка на грешката, която е в стила на съответната теорема на Сендов и Попов [60]. Петкович и Петкович [38] получават теорема за полулокална сходимост на метода, т.е. теорема с компютърно проверяеми начални условия.

Метод от типа на Чебишов за кратни нули.

През 1963 година Обрешков [31] обобщава метода на Чебишов, като извежда метод за апроксимиране на кратни корени на уравнението $f(x) = 0$. Този метод се нарича *метод на Чебишов за кратни нули* и се дефинира чрез итерацията:

$$\hat{x} = x - \frac{m}{2} \frac{f(x)}{f'(x)} \left(3 - m + m \frac{f(x)}{f'(x)} \frac{f''(x)}{f'(x)} \right),$$

където m е кратността на търсения корен на уравнението $f(x) = 0$.

През 1999 година Антон Илиев и Христо Семерджиев [17] обобщават метода от типа на Чебишов за полиноми с известни кратности на нулите му. Нека сега f е полином с коефициенти в произволно нормирано поле $\mathbb{K}$ и нека f притежава s различни нули в $\mathbb{K}$ с кратности съответно $m_1, \ldots, m_s$, като $\sum_{i=1}^{s} m_i = n$. Илиев и Семерджиев [17] обобщават метода от типа на Чебишов, като въвеждат следната итерация:

$$\hat{x_i} = x_i - m_i \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \left(1 + \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{x_i - x_j} \right) \qquad (i = 1, \ldots, s).$$

В дисертационния труд наричаме този метод *метод от типа на Чебишов за кратни нули*. Илиев и Семерджиев [17] получават теорема за локална сходимост на метода с оценка на грешката. За удобство при изследванията представяме метода от типа на Чебишов за кратни нули като итерационен метод във векторното пространство $\mathbb{K}^n$ чрез следната итерационна формула:

$$x^{k+1} = \Phi x^k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

където итерационната функция $\Phi \colon \mathscr{D} \subset \mathbb{K}^s \to \mathbb{K}^s$ се дефинира чрез

$$\Phi(x) = (\Phi_1(x), \ldots, \Phi_s(x)), \tag{5}$$

като

$$\Phi_i(x) = \begin{cases} x_i - m_i \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)} \left(1 + \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)} \displaystyle\sum_{j \neq i} \frac{m_j}{x_i - x_j} \right) & \text{при } f(x_i) \neq 0, \\ x_i & \text{при } f(x_i) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Очевидно, дефиниционната област $\mathscr{D}$ на оператора Φ е множеството

$$\mathscr{D} = \{x \in \mathbb{K}^s : f(x_i) \neq 0 \;\Rightarrow\; f'(x_i) \neq 0 \text{ и } x_i \neq x_j \text{ за } j \neq i\}.$$

Цел на дисертационния труд

Целта на дисертационният труд е да се изследват детайлно локалната и полулокалната сходимост на метода от типа на Чебишов, както и на метода от типа на Чебишов за кратни нули. За постигане на целта са поставени пет проблемни задачи, които формулираме по-долу.

Нека векторното пространство $\mathbb{K}^s$ е снабдено с p-норма, дефинирана чрез

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{s} |x_i|^p \right)^{1/p} \qquad (1 \leq p \leq \infty).$$

Нека $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ е произволно нормирано поле и $\mathbb{K}[z]$ е пръстенът на полиномите над $\mathbb{K}$. Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, който се разлага на линейни множители в $\mathbb{K}$ и нека $\xi_1, \ldots, \xi_s$ са всичките различни нули на f с кратности съответно $m_1, \ldots, m_s$.

Със $\operatorname{sep}(f)$ означаваме *числото на отделимост* на f, което се дефинира като минималното разстояние измежду всички разстояния между две различни нули на f, т.е.

$$\operatorname{sep}(f) = \min_{i \neq j} |\xi_i - \xi_j|.$$

Вектор $\xi \in \mathbb{K}^s$ се нарича *вектор-корен* на f (в $\mathbb{K}^s$), ако

$$f(z) = a_0 \prod_{i=1}^{s} (z - \xi_i)$$

за всяко $z \in \mathbb{K}$, където $a_0 \in \mathbb{K}$.

За всеки два вектора $x \in \mathbb{K}^s$ и $y \in \mathbb{R}^s$, означаваме с $\dfrac{x}{y}$ вектор от $\mathbb{R}^s$, дефиниран чрез

$$\frac{x}{y} = \left(\frac{|x_1|}{y_1}, \cdots, \frac{|x_s|}{y_s} \right),$$

при условие, че y има само ненулеви координати.

Дефиниране функцията $d \colon \mathbb{K}^s \to \mathbb{R}^s$ чрез

$$d(x) = (d_1(x), \ldots, d_s(x)), \quad \text{където} \quad d_i(x) = \min_{j \neq i} |x_i - x_j|.$$

Също така дефинираме функцията $\delta \colon \mathbb{K}^s \to \mathbb{R}_+$ чрез

$$\delta(x) = \min_{1 \leq i \leq s} d_i(x).$$

През 1990 година Макрелов публикува следната теорема:

Теорема 1.1 (Макрелов [24]). *Нека $f \in \mathbb{C}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$ с прости нули и нека $\xi \in \mathbb{C}^n$ е вектор-корен на f. Нека c и h са реални числа, такива че*

$$0 < c < \frac{\delta}{n+1}, \quad \frac{n(n-1)c^2}{(\delta - (n+1)c)^2} < 1, \quad 0 < h < 1,$$

където $\delta = \operatorname{sep}(f)$. Нека $x^0 \in \mathbb{C}^n$ е начално приближение, което удовлетворява условието

$$\left\| x^0 - \xi \right\|_\infty \leq c\, h.$$

Тогава итерацията от типа на Чебишов е сходяща кубично към ξ с оценка на грешката

$$\left\|x^k - \xi\right\|_\infty \leq c\, h^{3^k} \quad \text{за всяко } k \geq 0.$$

Не е трудно да се съобрази, че теоремата на Макрелов може да се получи като се използва коя да е от следните две функции на началните условия:

$$E(x) = \|x - \xi\|_\infty \quad \text{или} \quad E(x) = \frac{\|x - \xi\|_\infty}{\operatorname{sep}(f)}\,.$$

Изследванията [4, 5, 49, 55, 56] показват, че при локално изследване на итерационни методи за едновременна апроксимация на нули на полиноми са по-подходящи следните две функции на началните условия. Първата функция на началните условия $E\colon \mathbb{K}^s \to \mathbb{R}_+$ дефинираме чрез

$$E(x) = E_f(x) = \left\|\frac{x - \xi}{d(\xi)}\right\|_p \qquad (1 \leq p \leq \infty), \tag{7}$$

а втората функция на началните условия $E\colon \mathcal{D} \subset \mathbb{K}^s \to \mathbb{R}_+$ дефинираме чрез

$$E(x) = E_f(x) = \left\|\frac{x - \xi}{d(x)}\right\|_p \qquad (1 \leq p \leq \infty), \tag{8}$$

където $\mathcal{D}$ е множеството от всички вектори в $\mathbb{K}^s$ с различни координати. Теореми за локална сходимост на итерационни методи за едновременна апроксимация, в които началните условия се задават с една от тези функции, ще наричаме съответно *теорема за локална сходимост от първи тип* и *теорема за локална сходимост от втори тип.*

Така възникват следните два проблема:

Задача 1. *Да се получи теорема за локална сходимост от първи тип за метода от типа на Чебишов, която да обобщава и подобрява резултата на* Макрелов [24].

Задача 2. *Да се получи теорема за локална сходимост от втори тип за метода от типа на Чебишов.*

Единственият известен до момента резултат за полулокална сходимост на метода от типа на Чебишов е получен от Петкович и Петкович [38] през 2001 година.

Теорема 2.1 (Петкович–Петкович [38]). *Нека $f \in \mathbb{C}[z]$ е полином от степен $n \ge 3$ с прости нули. Нека $x^0 \in \mathbb{C}^n$ е начално приближение с различни координати, което удовлетворява условието:*

$$\left\| W_f(x^0) \right\|_\infty < \frac{\delta(x^0)}{5n} \,,$$

където W_f е операторът на Вайерщрас на полинома f. Тогава методът от типа на Чебишов е сходящ кубично към вектор-корен на f.

Естествено възниква следният проблем:

Задача 3. *Да се получи теорема за полулокална сходимост на метода от типа на Чебишов, която да обобщава и подобрява резултата на* Петкович и Петкович [38].

През 1999 година Илиев и Семерджиев [17] получават следния резултат за локална сходимост на метода от типа на Чебишов за кратни нули:

Теорема 3.1 (Илиев–Семерджиев [17]). *Нека $f \in \mathbb{C}[z]$ е полином от степен $n \ge 2$ и $\xi_1, \ldots, \xi_s$ са всичките различни нули на f с кратности съответно $m_1, \ldots, m_s$. Нека h и c са реални числа, такива че $0 < h < 1$ и за всяко $i = 1, \ldots, s$ са изпълнени неравенствата*

$$0 < c < \frac{\delta}{2}, \; c(n - m_i) < m_i(\delta - 2c), \; c^2(n - m_i) < (m_i\delta - 2nc)(\delta - 2c),$$

където $\delta = \operatorname{sep}(f)$. Нека $x^0 \in \mathbb{C}^s$ е начално приближение, което удовлетворява следното условие:

$$\|x^0 - \xi\|_\infty \le c\, h,$$

където $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_s)$. Тогава итерацията от типа на Чебишов за кратни нули е сходяща кубично към ξ с оценка на грешката

$$\|x^k - \xi\|_\infty \le c\, h^{3^k} \quad \text{за всяко } k \ge 0.$$

Така възникват следните два проблема:

Задача 4. *Да се получи теорема за локална сходимост от първи тип за метода от типа на Чебишов за кратни нули, която да обобщава и подобрява резултата на* Илиев и Семерджиев [17].

Задача 5. *Да се получи теорема за локална сходимост от втори тип за метода от типа на Чебишов за кратни нули.*

Кратък обзор на дисертационния труд

Дисертационият труд се състои от увод, три глави, заключение и библиография. Заключението съдържа: резюме на получените резултати, списък на публикациите по дисертационният труд, апробация на получените резултати и декларация за оригиналност.

Глава 1. Локална сходимост на метода за прости нули

Първа глава е разделена на шест параграфа. В нея са получени две нови теореми за локална сходимост на метода от типа на Чебишов (Теорема 1.4 и Теорема 1.5). Първият резултат (Теорема 1.4) обобщава и подобрява теоремата на Макрелов (Теорема 1.1).

В **Параграф 1.1** са дадени някои исторически сведения за метода от типа на Чебишов за прости нули. Въведени са някои основни означения и понятия, които използваме в целия дисертационен труд. Формулирана е теоремата на Макрелов [24].

Параграф 1.2 е помощен. В него са дадени някои основни понятия от теорията на нормираните полета и от теорията на K-метричните пространства.

В **Параграф 1.3** са формулирани общи теореми за локална сходимост на итерационни методи (Теорема 1.3 и Следствие 1.1). Да припомним, че през 2009–2010 година Пройнов [44, 45] публикува обща теория за сходимост на итерационни методи от типа

$$x_{k+1} = Tx_k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

където операторът $T \colon D \subset X \to X$ е произволна итерационна функция в метрично пространство X. Теорията на Пройнов за локална сходимост се основава на две основни понятия: *функция на началните условия* на T и *начална точка* на T.

В тази теория сходимостта на всеки итерационен процес винаги се изучава относно предварително избрана функция на началните условия и функция на сходимост. В този параграф е дадена дефиницията за функция на началните условия.

Дефиниция 1.12 ([44]). Нека $T \colon D \subset X \to X$ е изображение в произволно множество X. Функция $E \colon D \to \mathbb{R}_+$ се нарича *функция на началните условия* на T (с контролна функция φ в J), ако съществува функция $\varphi \colon J \to J$, такава че

$$E(Tx) \le \varphi(E(x)) \quad \text{за всяко } x \in D,\, Tx \in D \text{ и } E(x) \in J.$$

В **Параграф 1.4** са дадени някои понятия и неравенства в $\mathbb{K}^n$ необходими за доказване на основните резултати в Глава 1.

В **Параграф 1.5** изследваме сходимостта на метода от типа на Чебишов относно функцията на началните условия (7).

Нека банаховото пространство $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ е снабдено с покоординатна наредба $\preceq$, дефинирана чрез

$$x \preceq y \quad \Leftrightarrow \quad x_i \leq y_i \text{ за всички } i = 1, \dots, n, \tag{9}$$

за $x, y \in \mathbb{R}^n$. Дефинираме K-норма $\|\cdot\| \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^n$ чрез равенството

$$\|x\| = (|x_1|, \dots, |x_n|).$$

Нека $n \geq 2$ и $1 \leq p \leq \infty$. За краткост въвеждаме следните означения:

$$a = (n-1)^{1/q}, \quad b = 2^{1/q} \quad \text{и} \quad c = (n-1)^{1/p},$$

където $1 \leq q \leq \infty$ е спрегнатото на p, т.е. $1/p + 1/q = 1$. Дефинираме реалната функция ϕ по следния начин:

$$\phi(t) = \frac{(n-1)^2(1 - b\,t) + a\,(1-t)}{(1-b\,t)(1-n\,t)^2}\, t^2. \tag{10}$$

Доказателството на първият основен резултат в Глава 1 се базира на следната основна лема:

Лема 1.4. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, който има n прости нули в $\mathbb{K}$, $\xi \in \mathbb{K}^n$ е вектор-корен на f и $1 \leq p \leq \infty$. Нека вектор $x \in \mathbb{K}^n$ удовлетворява условието*

$$E(x) < R = \frac{2}{2n - 1 + b + \sqrt{(2n-1-b)^2 + 4a}}\,,$$

където функцията $E \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$ се дефинира чрез (7). Тогава:

(i) $x \in D$;

(ii) $\|Tx - \xi\| \preceq \phi(E(x))\,\|x - \xi\|$, *където ϕ се дефинира чрез (10);*

(iii) $E(Tx) \leq \varphi(E(x))$, *където φ се дефинира чрез $\varphi(t) = t\,\phi(t)$;*

(iv) $Tx \in D$.

Първият основен резултат в Глава 1 е следващата теорема. Тази теорема обобщава и подобрява резултата на Макрелов [24] от 1990 година. Началното условие е в сила за всяка p-норма ($1 \le p \le \infty$) в $\mathbb{R}^n$, като в частния си случай $p = \infty$ дава по-широка област на сходимост и по-добра оценка на грешката от предния резултат в това направление.

Теорема 1.4. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \ge 2$, който има n прости нули в $\mathbb{K}$, $\xi \in \mathbb{K}^n$ е вектор-корен на f и $1 \le p \le \infty$. Нека $x^0 \in \mathbb{K}^n$ е начално приближение, което удовлетворява следното условие*

$$E(x^0) < R = \frac{2}{2n - 1 + b + \sqrt{(2n-1-b)^2 + 4a}}\,,$$

където функцията $E\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$ се дефинира чрез (7). Тогава итерацията от типа на Чебишов (1) е коректно дефинирана и сходяща кубично към ξ с оценка на грешката

$$\|x^k - \xi\| \preceq \lambda^{(3^k-1)/2}\, \|x^0 - \xi\| \quad \text{за всяко } k \ge 0,$$

където $\lambda = \phi(E(x^0))$ и ϕ е реална функция, дефинирана чрез (10).

Следващото следствие ни дава възможност да направим сравнение на Теорема 1.4 с Теорема 1.1 (Макрелов [24]).

Следствие 1.2. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \ge 2$, който има n прости нули в $\mathbb{K}$, $\xi \in \mathbb{K}^n$ е вектор-корен на f и $1 \le p \le \infty$. Нека реалните числа h и c са такива, че*

$$0 < h < 1, \qquad 0 < c \le R\,\mathrm{sep}(f).$$

Нека $x^0 \in \mathbb{K}^n$ е начално приближение, което удовлетворява условието

$$\|x^0 - \xi\|_p \le c\,h.$$

Тогава итерацията от типа на Чебишов (1) е сходяща кубично към ξ с оценка на грешката

$$\|x^k - \xi\|_p \le c\,h^{3^k} \quad \text{за всяко } k \ge 0.$$

В **Параграф 1.6** изследваме сходимостта на метода от типа на Чебишов относно функцията на началните условия (8).

Дефинираме реалните функции β, ψ, ϕ и Ψ съответно чрез равенствата

$$\beta(t) = \frac{(n-1)^2 + a\,(1-t)}{(1-n\,t)^2}\,t^2,\ \psi(t) = 1 - b\,t\,(1+\beta(t)),\ \phi(t) = \frac{\beta(t)}{\psi(t)}, \qquad (11)$$

$$\Psi(t) = 1 - b\,t - (1 + b\,t)\,\beta(t). \tag{12}$$

За доказателството на вторият основен резултат в тази глава е получена следната основна лема:

Лема 1.5. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, който има n прости нули в $\mathbb{K}$, $\xi \in \mathbb{K}^n$ е вектор-корен на f и $1 \leq p \leq \infty$. Нека $x \in \mathcal{D}$ е вектор, който удовлетворява условията*

$$E(x) < 1/n \quad \text{ и } \quad \Psi(E(x)) \geq 0,$$

където функцията $E\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}_+$ се дефинира чрез (8) *и Ψ се дефинира чрез* (12). *Тогава:*

(i) $x \in D$;

(ii) $\|Tx - \xi\| \preceq \beta(E(x))\,\|x - \xi\|$, *където β се дефинира в* (11);

(iii) $E(Tx) \leq \varphi(E(x))$, *където реалната функция φ се дефинира чрез равенството $\varphi(t) = t\,\phi(t)$ и ϕ се дефинира в* (11);

(iv) $Tx \in D$.

Следващата теорема и двете следствия от нея са вторият основен резултат в Глава 1.

Теорема 1.5. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, който има n прости нули в $\mathbb{K}$, $\xi \in \mathbb{K}^n$ е вектор-корен на f и $1 \leq p \leq \infty$. Нека $x^0 \in \mathbb{K}^n$ е начално приближение с различни координати и удовлетворява следните условия:*

$$E(x^0) < 1/n \quad \text{ и } \quad \Psi(E(x^0)) \geq 0,$$

където функциите E и Ψ са дефинирани съответно чрез (8), *и* (12). *Тогава итерацията от типа на Чебишов* (1) *е коректно дефинирана и сходяща към ξ с оценка на грешката*

$$\|x^k - \xi\| \preceq \theta^k\,\lambda^{(3^k-1)/2}\,\|x^0 - \xi\| \quad \text{за всяко } k \geq 0,$$

където $\lambda = \phi(E(x^0))$, $\theta = \psi(E(x^0))$ и ϕ, ψ са дефинирани в (11). *Нещо повече: Ако $\Psi(E(x^0)) > 0$, то итерацията* (1) *е сходяща кубично към ξ.*

Следствие 1.3. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, който има n прости нули в $\mathbb{K}$ и $\xi \in \mathbb{K}^n$ е вектор-корен на f. Нека $x^0 \in \mathbb{K}^n$ е начално* *приближение с различни координати, което удовлетворява следното условие*

$$\left\| \frac{x^0 - \xi}{d(x^0)} \right\|_\infty \le \frac{9}{19n} \,.$$

Тогава итерацията от типа на Чебишов (1) *е коректно дефинирана и сходяща кубично към* ξ*.*

Следващият резултат е тривиално следствие от предното следствие. Ще отбележим, че за първи път резултат от този тип е получен от Ванг и Чао [63] през 1991 година. Те получават теорема за локална сходимост на метода на Вайерщрас с начално условие от вида

$$\|x^0 - \xi\|_\infty < C(n)\,\delta(x^0),$$

където константата C зависи само от степента n на полинома.

Следствие 1.4. *Нека* $f \in \mathbb{K}[z]$ *е полином от степен* $n \ge 2$*, който има* n *прости нули в* $\mathbb{K}$ *и* $\xi \in \mathbb{K}^n$ *е вектор-корен на* f*. Нека* $x^0 \in \mathbb{K}^n$ *е начално приближение с различни координати, което удовлетворява следното условие*

$$\|x^0 - \xi\|_\infty \le \frac{9}{19n}\,\delta(x^0).$$

Тогава итерацията от типа на Чебишов (1) *е коректно дефинирана и сходяща кубично към* ξ*.*

Глава 2. Полулокална сходимост на метода за прости нули

Втора глава се състои от пет параграфа. В тази глава получаваме нови теореми за полулокална сходимост на метода от типа на Чебишов (Теорема 2.3 и Следствие 2.1). Получените резултати обобщават, подобряват и допълват резултата на Л. Петкович и М. Петкович [38] от 2001 година. Тази глава завършва с числени примери, които показват някои практически приложения на получените резултати.

В **Параграф 2.1** са дадени някои исторически сведения за метода. Формулирана е теоремата на Петкович и Петкович [38]. Също така специално внимание е отделено на метода на Ваейрщрас, понеже корекцията W_f играе важна роля в много теореми за полулокална сходимост на методи за едновременна апроксимация на нули на полиноми (вж. например, Петкович [34], Батра [2], Пройнов [41, 42] и цитираната в тях литература).

В **Параграф 2.2** е формулирана една обща теорема на Пройнов [45] за полулокална сходимост на итерационни методи. Основните инструменти за изследване на полулокална сходимост са следните три понятия: *функция на началните условия*, *функция на сходимост* и *начални точки*. По-горе дефинирахме понятието “функция на началните условия”. Нека сега да припомним понятието “функция на сходимост”.

Дефиниция 2.1 ([45]). Нека $(X, \|\cdot\|)$ е K-нормирано пространство над телесно векторно пространство $(Y, \preceq)$. Нека $T\colon D \subset X \to X$ е оператор на пространството X и $E\colon D \to \mathbb{R}_+$ е функция на началните условия на T с контролна функция φ в интервал J. Функция $F\colon D \to Y_+$ се нарича *функция на сходимост* на T (с контролни функции β и γ), ако са изпълнени следните две условия:

(i) $F(Tx) \preceq \beta(E(x))\, F(x)$ за всички $x \in D$, такива че $Tx \in D$ и $E(x) \in J$,

(ii) $\|x - Tx\| \preceq \gamma(E(x))\, F(x)$ за всички $x \in D$, такива че $E(x) \in J$,

където $\beta\colon J \to [0, 1)$ и $\gamma\colon J \to \mathbb{R}_+$ са растящи функции.

В **Параграф 2.3** са получени осем леми. Основният резултат от тях е Лема 2.8. Тя заема главна роля при доказателството на основната теорема в тази глава. В Глава 2 изследваме итерационния процес от типа на Чебишов относно функцията на началните условия $E\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}_+$, дефинирана чрез

$$E(x) = \left\| \frac{W(x)}{d(x)} \right\|_p \qquad (1 \le p \le \infty) \tag{13}$$

и относно функция на сходимост $F\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$, дефинирана чрез

$$F(x) = \|W(x)\|, \tag{14}$$

където $W\colon \mathcal{D} \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ е корекцията на Вайерщрас.

В **Параграф 2.4** формулираме и доказваме основния резултат в Глава 2 (Теорема 2.3). Също така от него получаваме две нови теореми (Теорема 2.4 и Следствие 2.1).

Дефинираме реалните функции γ, ψ, и β чрез равенствата

$$\gamma(t) = \frac{1 - at}{(1 - (n - 1 + a)t)^2}\,, \quad \psi(t) = 1 - bt\gamma(t), \tag{15}$$

$$\beta(t) = t^2 \left(\frac{a\,\gamma^2(t)}{1 - t\,\gamma(t)} + \frac{(n-1)^2}{(1 - (n - 1 + a)t)^2} \right) \left(1 + \frac{t\,\gamma(t)}{c\,\psi(t)} \right)^{n-1}. \tag{16}$$

Основният резултат в Глава 2 е следващата теорема и резултатите след нея (Теорема 2.4 и Следствие 2.1). Получените резултати обобщават, подобряват и допълват в няколко направления Теорема 2.1 (Л. Петкович и М. Петкович [38]).

Теорема 2.3. *Нека* $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ *е пълно нормирано поле,* $f \in \mathbb{K}[z]$ *е полином от степен* $n \geq 2$ *и* $1 \leq p \leq \infty$. *Нека* $x^0 \in \mathbb{K}^n$ *е начално приближение с различни координати, което удовлетворява следните условия:*

$$E(x^0) < \tau = \frac{2}{2(n-1+a)+b+\sqrt{b^2+4(n-1)b}} \quad \text{и} \quad \phi(E(x^0)) \leq 1,$$

където функцията $E\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}_+$ *се дефинира чрез* (13), *а реалната функция* ϕ *се дефинира чрез* $\phi(t) = \beta(t)/\psi(t)$, *където* ψ *и* β *са дефинирани съответно чрез* (15) *и* (16). *Тогава са в сила следните твърдения:*

(i) Сходимост. *Итерацията от типа на Чебишов* (1) *е коректно дефинирана и сходяща към вектор-корен* $\xi \in \mathbb{K}^n$ *на полинома* f. *Освен това, ако* $\phi(E(x^0)) < 1$, *то итерацията клони кубично към* ξ.

(ii) Априори оценка на грешката. *За всяко* $k \geq 0$ *е в сила следната оценка на грешката:*

$$\|x^k - \xi\| \preceq \gamma(E(x^0)) \, \frac{\theta^k \lambda^{(3^k-1)/2}}{1-\theta\lambda^{3^k}} \, \|W_f(x^0)\|, \tag{17}$$

където $\lambda = \phi(E(x^0))$ *и* $\theta = \psi(E(x^0))$.

(iii) Първа апостериори оценка на грешката. *За всяко* $k \geq 0$ *е в сила следната оценка на грешката:*

$$\|x^k - \xi\| \preceq \frac{\gamma(E(x^k))}{1-\beta(E(x^k))} \, \|W_f(x^k)\|, \tag{18}$$

където реалната функция γ *е дефинирана в* (15).

(iv) Втора апостериори оценка на грешката. *За всяко* $k \geq 0$ *е в сила следната оценка на грешката:*

$$\|x^{k+1} - \xi\| \preceq \gamma(E(x^{k+1})) \frac{\theta_k \lambda_k}{1-\theta_k(\lambda_k)^3} \, \|W_f(x^k)\|, \tag{19}$$

където $\lambda_k = \phi(E(x^k))$ *и* $\theta_k = \psi(E(x^k))$.

(v) Локализация. *Ако $\phi(E(x^0)) < 1$, то f притежава n прости нули в $\mathbb{K}$ и за всяко $k \geq 0$ затворените кръгове*

$$D_i^k = \{z \in \mathbb{K} : |z - x_i^k| \leq C_k \, |W_i(x^k)|\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{20}$$

където $C_k = \gamma(E(x^k))/(1 - \beta(E(x^k)))$, са взаимно непресичащи се и всеки от тях съдържа точно една нула на f.

Теорема 2.3 подобрява Теорема 2.1 в следните направления:

• теоремата е в сила за произволен полином $f \in \mathbb{K}[z]$ и произволно пълно нормирано поле $\mathbb{K}$;

• началните условия са в сила за всяка p-норма в $\mathbb{R}^n$ $(1 \leq p \leq \infty)$;

• не се изисква предварително полиномът f да притежава нули в $\mathbb{K}$;

• не се изисква, ако полиномът f притежава нули в $\mathbb{K}$, те да са прости;

• теоремата дава по-широка област на сходимост;

• теоремата дава компютърно проверяеми априори и апостери оценки на грешката;

• оценките на грешката са формулирани в K-норма;

• при всяка итерация теоремата дава локализация на нулите на полинома f;

• теоремата дава достатъчно условие полиномът f да се разлага на линейни множители в $\mathbb{K}$ и да притежава само прости нули.

Следващото следствие дава възможност за сравняване на горната теорема с Теорема 2.1 (Л. Петкович и М. Петкович [38]).

Следствие 2.1. *Нека $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ е пълно нормирано поле, $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$ и $x^0 \in \mathbb{K}^n$ е начално приближение с различни координати, което удовлетворява следното начално условие:*

$$\left\| \frac{W(x^0)}{d(x^0)} \right\|_\infty \leq \frac{1}{4n} \, .$$

Тогава са в сила следните твърдения:

(i) Съществуване на прости нули. *Полиномът f притежава n прости нули в $\mathbb{K}$.*

(ii) Локализация. *За всяко $k \geq 0$ затворените кръгове* (20) *са взаимно непресичащи се и всеки от тях съдържа точно една нула на f.*

(iii) Сходимост и оценки на грешките. *Итерацията от типа на Чебишов* (1) *е коректно дефинирана и клони кубично към вектор-корен $\xi \in \mathbb{K}^n$ на f с оценки на грешкита* (17), (18) *и* (19), *където E се дефинира чрез* (13) *при $p = \infty$.*

Параграф 2.5 съдържа четири числени примера. Те показват някои практически приложения на Теорема 2.3, а именно:

• числено доказване, че даден полином f притежава само прости нули;

• числено доказване, че итерацията от типа на Чебишов е коректно дефинирана и сходяща кубично към вектор-корен на полином f;

• гарантиране на необходимата точност при изчисляване на нулите на полином f чрез метода от типа на Чебишов.

Глава 3. Локална сходимост на метода за кратни нули

Трета глава се състои от три параграфа. В тази глава изследваме локалната сходимост на метода от типа на Чебишов за кратни нули при два вида начални условия. Получаваме две нови теореми (Теорема 3.2 и Теорема 3.3). Теорема 3.2 подобрява и обобщава резултата на Илиев и Семерджиев [17] от 1999 година. Тази теорема дава по-голяма област на сходимост и осигурява по-добра оценка на грешката в сравнение с резултата на Илиев и Семерджиев.

В **Параграф 3.1** са дадени някои исторически сведения за метода за кратни нули. Формулирана е теоремата на Илиев и Семерджиев [17].

В **Параграф 3.2** изследваме метода от типа на Чебишов за кратни нули относно функцията на началните условия $E\colon \mathbb{K}^s \to \mathbb{R}_+$, дефинирана чрез (7). За целта формулираме три леми, необходими за доказване на първия основен резултат в Глава 3.

Използваме следните означения:

$$a = \max_{1 \le i \le s} \frac{1}{m_i} \left(\sum_{j \ne i} m_j^q \right)^{1/q}, \qquad b = 2^{1/q}, \qquad m = \min_{1 \le i \le s} m_i,$$

където $1 \le q \le \infty$ е дефинирано чрез $1/p + 1/q = 1$. Реалните функции ϕ и φ са дефинирани чрез

$$\phi(t) = \frac{(n-m)^2(1-bt) + am^2(1-t)}{(1-bt)(m-nt)^2}\, t^2 \quad \text{и} \quad \varphi(t) = t\,\phi(t), \tag{21}$$

Първият основен резултат в Глава 3 е следната теорема за локална сходимост от първи тип. Тя обобщава и подобрява Теорема 3.1 (Илиев и Семерджиев [17]), като дава по-широка област на сходимост и по-добра оценка на грешката от предния резултат.

Теорема 3.2. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \ge 2$, който се разлага на линейни множители в $\mathbb{K}$, $\xi_1, \ldots, \xi_s$ са всичките различни нули на f*

с кратности съответно $m_1, \dots, m_s$ *и* $1 \le p \le \infty$. *Нека* $x^0 \in \mathbb{K}^s$ *е начално приближение, което удовлетворява условието*

$$E(x^0) < R = \frac{2}{b - 1 + 2n/m + \sqrt{(b + 1 - 2n/m)^2 + 4a}}\,,$$

където функцията $E\colon \mathbb{K}^s \to \mathbb{R}_+$ *се дефинира чрез* (7). *Тогава итерацията от типа на Чебишов за кратни нули* (4) *е коректно дефинирана и сходяща кубично към* ξ *с оценка на грешката*

$$\|x^k - \xi\| \preceq \lambda^{(3^k-1)/2} \|x^0 - \xi\| \quad \text{за всяко } k \ge 0, \tag{22}$$

където $\lambda = \phi(E(x^0))$ *и реалната функция* ϕ *е дефинирана чрез* (21).

Следващото следствие от Теорема 3.2 дава възможност тя да бъде сравнена с Теорема 3.1 (Илиев и Семерджиев [17]).

Следствие 3.1. *Нека* $f \in \mathbb{K}[z]$ *е полином от степен* $n \ge 2$, *който се разлага на линейни множители в* $\mathbb{K}$, $\xi_1, \dots, \xi_s$ *са всичките различни нули на* f *с кратности съответно* $m_1, \dots, m_s$ *и* $1 \le p \le \infty$. *Нека* h *и* c *са реални числа, такива че*

$$0 < h < 1 \quad \text{и} \quad 0 < c \le R\, \mathrm{sep}(f).$$

Ако началното приближение $x^0 \in \mathbb{K}^s$ *удовлетворява условието*

$$\|x^0 - \xi\|_p \le c\,h,$$

където $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_s)$, *то итерацията от типа на Чебишов* (4) *е коректно дефинирана и сходяща кубично към* ξ *с оценка на грешката*

$$\|x^k - \xi\|_p \le c\,h^{3^k} \quad \text{за всяко } k \ge 0.$$

В **Параграф 3.3** доказваме втория основен резултат в Глава 3, който се получава чрез изследване на метода от типа на Чебишов за кратни нули относно функцията на началните условия $E\colon \mathcal{D} \subset \mathbb{K}^s \to \mathbb{R}_+$, дефинирана чрез (8). Този резултат (Теорема 3.3) е исторически първият в това направление. В основата на доказателството лежат две леми, доказани в този параграф.

Дефинираме реалните функции β, ψ, ϕ и Ψ по следния начин:

$$\beta(t) = \frac{(n-m)^2 + am^2(1-t)}{(m-nt)^2}\, t^2, \quad \psi(t) = 1 - bt(1 + \beta(t)), \quad \phi(t) = \frac{\beta(t)}{\psi(t)}. \tag{23}$$

$$\Psi(t) = 1 - bt - (1 + bt)\beta(t), \tag{24}$$

Вторият основен резултат за Глава 3 е следната теорема за локална сходимост от втори тип:

Теорема 3.3. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, който се разлага на линейни множители в $\mathbb{K}$, $\xi_1, \ldots, \xi_s$ са всичките различни нули на f с кратности съответно $m_1, \ldots, m_s$ и $1 \leq p \leq \infty$. Нека $x^0 \in \mathbb{K}^s$ е начално приближение с различни координати и удовлетворява следните условия:*

$$E(x^0) < m/n \quad \text{и} \quad \Psi(E(x^0)) \geq 0,$$

където функциите E и Ψ са дефинирани съответно чрез (8) и (24). Тогава итерацията от типа на Чебишов за кратни нули (4) е коректно дефинирана и сходяща към ξ с оценка на грешката

$$\|x^k - \xi\| \preceq \theta^k \lambda^{(3^k-1)/2} \|x^0 - \xi\| \quad \text{за всяко } k \geq 0, \tag{25}$$

където $\lambda = \phi(E(x^0))$, $\theta = \psi(E(x^0))$ и ϕ, ψ са дефинирани чрез (23). При $\Psi(E(x^0)) > 0$ сходимостта е кубична.

От тази теорема получаваме и следните следствия:

Следствие 3.2. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, който се разлага на линейни множители в $\mathbb{K}$, $\xi_1, \ldots, \xi_s$ са всичките различни нули на f с кратности съответно $m_1, \ldots, m_s$ и $1 \leq p \leq \infty$. Нека $x^0 \in \mathbb{K}^s$ е начално приближение с различни координати и удовлетворява следното условие*

$$E(x^0) \leq \frac{m}{2n + bm}\,.$$

където функцията E се дефинира чрез (8). Тогава итерацията от типа на Чебишов за кратни нули (4) е коректно дефинирана и сходяща кубично към ξ с оценка на грешката (25).

Следствие 3.3. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, който се разлага на линейни множители в $\mathbb{K}$, $\xi_1, \ldots, \xi_s$ са всичките различни нули на f с кратности съответно $m_1, \ldots, m_s$ и $1 \leq p \leq \infty$. Нека $x^0 \in \mathbb{K}^s$ е начално приближение с различни координати и удовлетворява следното условие*

$$\|x^0 - \xi\|_p \leq \frac{m}{2n + bm}\, \delta(x^0).$$

където $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_s)$. Тогава итерацията от типа на Чебишов за кратни нули (4) е коректно дефинирана и сходяща кубично към ξ с оценка на грешката

$$\|x^k - \xi\| \preceq \lambda^{(3^k-1)/2} \|x^0 - \xi\| \quad \text{за всяко } k \geq 0, \tag{26}$$

където $\lambda = \phi(\|x^0 - \xi\|_p / \delta(x^0))$ и ϕ се дефинира в (23).

Заключение

Резюме на получените резултати

По мнение на автора основните приноси в настоящия дисертационен труд са:

1. Получена е теорема за локална сходимост от първи тип с априори оценка на грешката за метода от типа на Чебишов (Теорема 1.4). При $p = \infty$ тази теорема обобщава и подобрява теоремата на Макрелов (1990).

2. Получени са две теореми за локална сходимост от втори тип с априори оценка на грешката за метода от типа на Чебишов (Теорема 1.5 и Следствие 1.3).

3. Получени са две нови теореми за полулокална сходимост с априори и апостериори оценки на грешката за метода от типа на Чебишов (Теорема 2.3 и Следствие 2.1). Тези резултати обобщават, подобряват и допълват резултата на Л. Петкович и М. Петкович (2001).

4. Приведени са следните приложения на новите полулокални теореми за сходимост на метода от типа на Чебишов:

• Началните условия на теоремата се използват за числено доказване, че даден полином притежава само прости нули.

• Началните условия на теоремата се използват за числено доказване на кубичната сходимост на метода от типа на Чебишов.

• Оценките на грешката в теоремата се използват като стоп-критерий на итерационния процес.

5. Получена е теорема за локална сходимост от първи тип с априори оценка на грешката за метода от типа на Чебишов за кратни нули (Теорема 3.2). При $p = \infty$ тази теорема обобщава и подобрява теоремата на Илиев и Семерджиев (1999).

6. Получена е теорема за локална сходимост от втори тип с априори оценка на грешката за метода от типа на Чебишов за кратни нули (Теорема 3.3 и Следствие 3.2).

Списък на публикациите по дисертационния труд

Основните резултати от дисертационния труд са публикувани в следните научни статии:

1. Slav I. Cholakov, Local convergence of a Chebyshev-type method for finding polynomial zeros simultaneously, Scientific Researches of the Union of Scientists in Bulgaria–Plovdiv, Ser. B, 14 (2012) 197–200. ISSN: 1311–9192.

2. Slav I. Cholakov, Local convergence of Chebyshev-like method for simultaneous finding polynomial zeros, Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences 66 (2013), No. 8, 1081–1090. ISSN: 1310–1331, http://www.proceedings.bas.bg. **(Impact factor: 0.198)**

3. Petko D. Proinov, Slav I. Cholakov, Semilocal convergence of Chebyshev-like root-finding method for simultaneous approximation of polynomial zeros, Applied Mathematics and Computation 236 (2014), 669–682. ISSN 0096–3003, http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2014.03.092. **(Impact factor: 1.600)**

4. Petko D. Proinov, Slav I. Cholakov, Convergence of Chebyshev-like method for simultaneous computation of multiple polynomial zeros, Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences 67 (2014), No. 7, 907–918. ISSN: 1310–1331, http://www.proceedings.bas.bg. **(Impact factor: 0.198)**

Връзките между приносите, целите, задачите, мястото на описание в дисертационния труд и направените публикации по темата са следните:

Приноси	Цел	Задачи	Параграфи	Публикации
1	1	Задача 1	1.5	1, 2
2	1	Задача 2	1.6	2
3	1	Задача 3	2.3, 2.4	3
4	1	Задача 3	2.5	3
5	1	Задача 4	3.2	4
6	1	Задача 5	3.3	4

Апробация на получените резултати

А) Доклади на семинари и конференции

- Слав И. Чолаков, Сходимост на един метод от типа на Чебишов за едновременно намиране нулите на полиноми, Научен семинар “Итерационни методи и неподвижни точки”, ПУ “Паисий Хилендарски”, Пловдив, 19 ноември 2010. http://fmi-plovdiv.org/GetResource?id=1631

- Слав И. Чолаков, Локална сходимост на един метод от типа на Чебишов за едновременно намиране нулите на полиноми, Годишна сесия на Съюза на учените - клон Пловдив, Пловдив, 10–11 ноември 2011.

- Слав И. Чолаков, Нова теорема за локална сходимост на един метод от типа на Чебишов за нули на полиноми, Научен семинар “Итерационни методи и неподвижни точки”, ПУ “Паисий Хилендарски”, Пловдив, 1 юни 2012. http://fmi-plovdiv.org/GetResource?id=1629

- Слав И. Чолаков, Локална сходимост на един метод от типа на Чебишов за едновременно пресмятане на нули на полиноми, Юбилейна национална научна конференция с международно участие “Традиции, посоки, предизвикателства”, Смолян, 19–21 октомври 2012. http://old.uni-plovdiv.bg/smolyan/GetResource?id=3214

Б) Участие в проекти

- Научен проект НИ11-ФМИ-004 към НПД на ПУ на тема: “Разработка и приложение на иновативни ИКТ за провеждане на качествени конкурентноспособни научни изследвания и цялостно осъвременяване процеса на обучение във ФМИ”, 2011-2012.

- Научен проект НИ13-ФМИ-002 към НПД на ПУ на тема: “Интеграция на ИТ в научните изследвания по математика, информатика и педагогика на обучението”, 2013-2014.

Декларация за оригиналност

от **Слав Иванов Чолаков**,
докторант на самостоятелна подготовка към кат. "Математически анализ"
при Факултет по математика и информатика
на Пловдивски университет "Паисий Хилендарски"

Във връзка с провеждането на процедура за придобиване на образователната и научна степен "доктор" в Пловдивски университет "Паисий Хилендарски" и защита на представения от мен дисертационен труд, декларирам:

Резултатите и приносите на проведеното дисертационно изследване, представени в дисертационния ми труд на тема "Сходимост на итерационни методи от типа на Чебишов за едновременна апроксимация на нули на полиноми", са оригинални и не са заимствани от изследвания и публикации, в които нямам участие.

12.05.2014 г. ДЕКЛАРАТОР:
гр.Пловдив /Слав Иванов Чолаков/

Библиография

[1] Aberth O., Iteration methods for finding all zeros of a polynomial simultaneously, Math. Comp. 27 (1973) 339–344.

[2] Batra P., Improvement of a convergence condition for the Durand-Kerner iteration, J. Comput. Appl. Math. 96 (1998) 117–125.

[3] Chebychev P.L. Computation roots of an equation, in: Complete Works of P.L. Chebishev, Vol. 5, pp. 7–25. USSR Academy of Sciences, Moscow. (in Russian) http://books.e-heritage.ru/book/10079542

[4] Cholakov S.I., Local convergence of a Chebyshev-type method for finding polynomial zeros simultaneously, Scientific Researches of the Union of Scientists in Bulgaria–Plovdiv, Ser. B, 14 (2012) 197–200.

[5] Cholakov S.I., Local convergence of Chebyshev-like method for simultaneous finding polynomial zeros, C. R. Acad. Bulg. Sci. 66 (2013) 1081–1090.

[6] Cira O., The Convergence Simultaneous Inclusion Methods, Matrix Rom, Bucuresti, 2012.

[7] Dochev K., Modified Newton's method for simultaneous computation of all the roots of a given algebraic equation, Phys. Math. J. Bulg. Acad. Sci. 5 (1962) 136–139. (in Bulgarian)

[8] Dochev K., P. Byrnev, Certain modifications of Newton's method for the approximate solution of algebraic equations, USSR Comput. Math. Math. Phys. 4 (1964) 174–182.

[9] Durand E., Solution Numérique des Équations Algébriques, Tome I: Équations du type; Racines d'une polynôme, Masson et Compagnie, Paris, 1960.

[10] Ehrlich L. W., A modified Newton method for polynomials, Comm. Assoc. Comput. Mach. 10 (1967) 107–108.

[11] Engler A.J., A. Prestel, Valued Fields, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Berlin, 2005.

[12] Farmer M., G. Loizou, An algorithm for the total or partial factorization of a polynomial, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 82 (1977) 427–437.

[13] Gargantini I., Further applications of circular arithmetic: Schröder-like algorithms with error bounds for finding zeros of polynomials, SIAM J. Numer. Anal. 15 (1978) 497–510.

[14] Iliev A.I., On a generalization of Chebyshev method for simultaneous extraction of all roots of polynomials over arbitrary Chebyshev system, Math. Balkanica 17 (2003), No. 1–2, 63–69.

[15] Iliev A., I. Iliev, On a generalization of Weierstrass-Dochev method for simultaneous extraction of all roots of polynomials over an arbitrary Chebyshev system, C. R. Acad. Bulg. Sci. 54 (2001), No. 10, 31–36.

[16] Iliev A., N. Kyurkchiev, Nontrivial Methods in Numerical Analysis: Selected Topics in Numerical Analysis, Lambert Academic Publishing, 2010.

[17] Iliev A.I., Kh.I. Semerdzhiev, Some generalizations of the Chebyshev method for simultaneous determination of all roots of polynomial equations, Comput. Math. Math. Phys. 39 (1999) 1384–1391.

[18] Iliev L., Laguerre Entire Functions, Pub. House of the Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, 1987.

[19] Kerner I. O., Ein Gesamtschrittverfahren zur Berechnung der Nullstellen von Polynomen, Numer. Math. 8 (1966) 290–294.

[20] Kyurkchiev N.V., Initial Approximations and Root Finding Methods, Mathematical Research, Vol. 104, Berlin, Wiley, 1998.

[21] Kjurkchiev N., A. Andreev, On Halley-like algorithms with high order of convergence for simultaneous approximation of multiple roots of polynomials, C. R. Acad. Bulg. Sci. 43 (1990), No. 9, 29–32.

[22] Kjurkchiev N., A. Andreev, V. Popov, Iterative methods for calculating all multiple roots of an algebraic equation (in Russian), Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Mec. 78 (1984), No. 1, 179–185

[23] KÜRSCHÁK J., Über Limesbildung und allgemeine Körpertheorie, J. Reine Angew. Math. 142 (1913) 211–253.

[24] MAKRELOV I.V. On the simultaneous determination of the roots of polynomial equations (in Russian), C. R. Acad. Bulg. Sci. 43 (1990), No. 7, 23–25.

[25] MAKRELOV I., On a modification of Chebyshev's method, J. Comput. Appl. Math. 41 (1992) 373–375.

[26] MCNAMEE J.M., Numerical methods for roots of polynomials Part I, Studies in Computational Mathematics, Vol. 14, Elsevier, Amsterdam, 2007.

[27] MCNAMEE J.M., V. PAN, Numerical methods for roots of polynomials – Part II, Studies in Computational Mathematics, Vol. 16, Elsevier, Amsterdam, 2013.

[28] NEDZHIBOV G.H., A family of multi-point iterative methods for solving systems of nonlinear equations, J. Comput. Appl. Math. 222 (2008) 244–250.

[29] NEDZHIBOV G.H., M.G. PETKOV, On a family of iterative methods for simultaneous extraction of all roots of algebraic polynomial, Appl. Math. Comput. 162 (2005) 427–433.

[30] NOUREIN A., An iteration formula for the simultaneous determination of the zeros of a polynomial, J. Comput. Appl. Math. 4 (1975) 251–254.

[31] OBRESHKOV, N., On the numerical solution of equations (Bulgarian), Annuaire Univ. Sofia Fac. Sci. Phys. Math. 56 (1963) 73–83.

[32] PETKOVIĆ M.S., Generalised root iterations for the simultaneous determination of multiple complex zeros, Z. Angew. Math. Mech. 62 (1982) 627–630.

[33] PETKOVIĆ M., Iterative methods for simultaneous inclusion of polynomial zeros, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[34] PETKOVIĆ M., Point Estimation of Root Finding Methods, Lecture Notes in Mathe-matics, Vol. 1933, Berlin, Springer, 2008.

[35] PETKOVIĆ M., Đ. HERCEG, M. ILIĆ, Point Estimation Theory and its Applications, Institute of Mathematics, Novi Sad, 1997.

[36] Petkov M., N. Kyurkchiev, Numerical Methods for Solving Nonlinear equations, University of Sofia, Sofia, 2000. (in Bulgarian)

[37] Petković M.S., B. Neta, L.D. Petković, J. Džunić, Multipoint methods for solving nonlinear equations, Amsterdam, Elsevier, 2013.

[38] Petković L.D., M.S. Petković, Safe convergence of Chebyshev-like method, Novi Sad J. Math. 31 (2001), No. 1, 113–123.

[39] Petković M.S., L. Rančić, M.R. Milošević, On the new fourth-order methods for the simultaneous approximation of polynomial zeros, J. Comput. Appl. Math. 235 (2011) 4059–4075.

[40] Prešić S.B., Un procédé itératif pour la factorisation des polynômes, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A 262 (1966) 862–863.

[41] Proinov P.D., A new semilocal convergence theorem for the Weierstrass method from data at one point, C. R. Acad. Bulg. Sci. 59 (2006) 131–136.

[42] Proinov P.D., Semilocal convergence of two iterative methods for simultaneous computation of polynomial zeros, C. R. Acad. Bulg. Sci. 59 (2006) 705–712.

[43] Proinov P.D., A generalization of the Banach contraction principle with high order of convergence of successive approximations, Nonlinear Anal. 67 (2007) 2361–2369.

[44] Proinov P.D., General local convergence theory for a class of iterative processes and its applications to Newton's method, J. Complexity 25 (2009) 38–62.

[45] Proinov P.D., New general convergence theory for iterative processes and its applications to Newton-Kantorovich type theorems, J. Complexity 26 (2010) 3–42.

[46] Proinov P.D., A unified theory of cone metric spaces and its applications to the fixed-point theory, Fixed Point Theory Appl. 2013 (2013), Art. ID 103, 38 pp.

[47] Proinov P.D., S.I. Cholakov, Semilocal convergence of Chebyshev-like root-finding method for simultaneous approximation of polynomial zeros, Appl. Math. Comput. 236 (2014) 669–682.

[48] Proinov P.D., S.I. Cholakov, Convergence of Chebyshev-like method for simultaneous computation of multiple polynomial zeros, C. R. Acad. Bulg. Sci. 67 (2014) 907–918.

[49] Proinov P.D., S.I. Ivanov, A theorem for local convergence of Halley's method for finding polynomial zeros simultaneously, Scientific Researches of the Union of Scientists in Bulgaria–Plovdiv, Ser. B, 14 (2012) 173–176.

[50] Proinov P.D., S.I. Ivanov, On the convergence of Schröder's method for polynomial zeros of unknown multiplicity, C. R. Bulg. Acad. Sci. 66 (2013) 1073–1080.

[51] Proinov P. D., S. I. Ivanov, On the convergence of Halley's method for multiple polynomial zeros, Mediterranean J. Math. (2014), http://dx.doi.org/10.1007/s00009-014-0400-7.

[52] Proinov P.D., S.I. Ivanov, On the convergence of Halley's method for simultaneous computation of polynomial zeros, J. Numer. Math. (2014), accepted.

[53] Proinov P.D., I.A. Nikolova, Iterative approximation of fixed points of quasi-contraction mappings in cone metric spaces, J. Inequal. Appl. 2014 (2014), Art. ID 226, 14 pp.

[54] Proinov P.D., M.D. Petkova, Convergence of the Weierstrass method for simultaneous approximation of polynomial zeros, C. R. Bulg. Acad. Sci. 66 (2013) 809–818.

[55] Proinov P.D., M.D. Petkova, A new semilocal convergence theorem for the Weierstrass method for finding zeros of a polynomial simultaneously, J. Complexity 30 (2014) 366–380.

[56] Proinov P.D., M.D. Petkova, Convergence of the two-point Weierstrass root-finding method, Japan J. Indust. Appl. Math. 31 (2014) 279–292.

[57] Sekuloski R.M., Generalization of Prešić's iterative method for factorization of a polynomial (in Serbo-Croatian), Mat. Vesnik 9 (1972) 257–264.

[58] Semerdzhiev Kh., Method for simultaneous determination of all roots of an algebraic equation when their multiplicities are known (in Russian), C. R. Acad. Bulg. Sci. 35 (1982) 1057–1060.

[59] SEMERDZHIEV KH., Iteration methods for simultaneous finding all roots of generalized polynomial equations, Math. Balkanica 8 (1994), No. 4, 311–335.

[60] SENDOV BL., V. POPOV, Méthodes d'analyse numérique, Tome 1, Sofia, 1996. (The first edition is published in Bulgarian in 1976)

[61] SENDOV BL., A. ANDREEV, N. KJURKCHIEV, Numerical Solution of Polynomial Equations, in: Handbook of Numerical Analysis (eds. P. Ciarlet, J. Lions), Vol. III, pp. 625–778, Amsterdam, Elsevier, 1994.

[62] TANABE K., Behavior of the sequences around multiple zeros generated by some (in Japanese), Tech. Rep. Inf. Procces. Numer. Anal. 4–2 (1983) 1–6.

[63] WANG D., F. ZHAO, On the determination of a safe initial approximation for the Durand–Kerner algorithm, J. Comput. Appl. Math. 38 (1991) 447–456.

[64] WEIERSTRASS K., Neuer Beweis des Satzes, dass jede ganze rationale Function einer Veränderlichen dargestellt werden kann als ein Product aus linearen Functionen derselben Veränderlichen, Sitzungsber. Königl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (1891) 1085–1101.

[65] ZABREJKO P.P., K-metric and K-normed linear spaces: survey, Collect. Math. 48 (1997) 825–859.

Благодарности

Изказвам своята най-сърдечна и дълбока благодарност към научния ми ръководител проф. д-р Петко Димитров Пройнов за получените знания, умения, както и неоценимата подкрепа и търпение, които ми оказа при разработването и оформянето на дисертационния труд.

Изказвам благодарности към всички колеги, които винаги ме подкрепяха творчески и житейски.

Запазвам края, за да благодаря на приятелката си Велислава и всички близки, които изтърпяха целия творчески процес, свързан с написването на настоящия дисертационен труд.