Пловдивски университет "Паисий Хилендарски"
Факултет по математика и информатика

Катедра "Математически анализ"

МИЛЕНА ДИМОВА ПЕТКОВА

Локална и полулокална сходимост на едноточковия и двуточковия метод на Вайерщрас за апроксимация на нули на полиноми

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертационен труд
за присъждане на образователната и научна степен
"ДОКТОР"
по област на висше образование:
4. Природни науки, математика и информатика;
професионално направление: 4.5. Математика;
докторска програма: Математически анализ

Научен ръководител:
проф. д-р Петко Димитров Пройнов

Пловдив – 2014

Дисертационният труд е обсъден и насрочен за защита на разширен катедрен съвет на катедра “Математически анализ” при Факултет по математика и информатика на Пловдивски университет “Паисий Хилендарски”, проведен на 17.02.2014 г.

Дисертационният труд “Локална и полулокална сходимост на едноточковия и двуточковия метод на Вайерщрас за апроксимация на нули на полиноми” се състои от увод, три глави, заключение и библиография. Библиографията съдържа 79 заглавия. Общият обем на дисертационния труд е 104 страници. Списъкът на авторските публикации включва 3 заглавия.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на 09.05.2014 г. от 11 ч. в Заседателната зала на Нова сграда на Пловдивски университет “Паисий Хилендарски”, гр. Пловдив.

Материалите по защитата са на разположение за интересуващите се в секретариата на ФМИ, Нова сграда на ПУ “Паисий Хилендарски”, бул. “България” № 236, каб. 330, всеки работен ден от 8:30 до 17:00 часа.

Научно жури:
проф. д-р Петко Пройнов (ПУ „П. Хилендарски“, Пловдив, председател);
проф. д.т.н. Васил Ангелов (МГУ „Св. Иван Рилски“, София);
проф. д-р Николай Кюркчиев (ПУ „П. Хилендарски“, Пловдив, рецензент);
доц. д-р Андрей Андреев (ИМИ при БАН, София);
доц. д-р Гюрхан Неджибов (ШУ „Еп. К. Преславски“, Шумен, рецензент).

Номерацията на теоремите, лемите, следствията и дефинициите в автореферата съвпада с тяхната номерация в дисертационния труд.

Съдържание

Актуалност и цел на дисертационния труд

Актуалност

Метод на Вайерщрас. През 1891 година Вайерщрас [73] публикува първия итерационен метод за едновременно намиране на всичките нули на даден полином $f \in \mathbb{C}[z]$. "Едновременно" означава, че нулите на полинома f се търсят като вектор в $\mathbb{C}^n$. Вектор $\xi \in \mathbb{C}^n$ се нарича *вектор-корен* на f, ако $f(z) = a_0 \prod_{i=1}^{n}(z - \xi_i)$ за всяко $z \in \mathbb{C}$, където $a_0 \in \mathbb{C}$.

Методът на Вайерщрас се задава чрез итерацията

$$x^{k+1} = x^k - W(x^k) \qquad (\textit{метод на Вайерщрас}), \tag{1}$$

където операторът $W \colon \mathscr{D} \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ се дефинира чрез

$$W(x) = (W_1(x), \ldots, W_n(x)) \quad \text{като} \quad W_i(x) = \frac{f(x_i)}{a_0 \prod\limits_{j \neq i} (x_i - x_j)}\,, \tag{2}$$

където a_0 е старшият коефициент на f, а $\mathscr{D}$ е множеството от всички вектори в $\mathbb{C}^n$ с различни координати. Методът на Вайерщрас има квадратична сходимост при полином f с прости нули и линейна сходимост при кратни нули. В своята знаменита работа Вайерщрас прави следното:

- Извежда итерационния метод (1).
- Доказва, че при определени начални условия за всеки полином f с ненулева дискриминанта итерационният метод (1) е сходящ към вектор-корен на f. Нещо повече, Вайерщрас не предполага предварително, че f притежава нули. Така той доказва полулокална теорема за сходимост на метода (1), но не я формулира в явен вид.
- Доказва (изхождайки от полето на алгебричните числа), че за всеки полином f с ненулева дискриминанта съществува начално приближение $x^0 \in \mathbb{C}$, което удовлетворява началните условия, при които методът е сходящ.

Като тривиално следствие от тези резултати на Вайерщрас се получава основната теорема на алгебрата, която гласи, че полето на комплексните числа е алгебрично затворено. Така Вайерщрас дава първото конструктивно доказателство на основната теорема на алгебрата. Много автори отнасят работата на Вайерщрас към алгебрата, а всъщност това е една прекрасна работа по анализ и числени методи.

През 1913 година Кюршак [30] посочва, че аргументите на Вайерщрас, с които той доказва основната теорема на алгебрата, са в сила за произволно алгебрично затворено нормирано поле, а не само за полето на алгебричните числа. Той доказва, че всяко нормирано поле може да бъде разширено до пълно алгебрично затворено нормирано поле.

В периода 1960–1966 година методът на Вайерщрас е преоткрит от Дюран [13] (1960), Дочев [11] (1962), Кернер [27] (1966) и Прешич [49] (1966) и затова е известен още като метод на Вайерщрас-Дочев, Дюран-Кернер и др.

През 1966 година Кернер [27] доказва, че итерационният метод на Вайерщрас се получава от n-мерния метод на Нютон

$$x^{k+1} = x^k - F'(x^k)^{-1} F(x^k).$$

През 1962 година Дочев [11] доказва първата теорема за локална сходимост на метода на Вайерщрас. По-късно други теореми за локална сходимост на метода на Вайерщрас са доказани от Сендов и Попов [66] (1976), Кюркчиев и Марков [29] (1983), Ванг и Чао [71] (1991), Хопкинс, Маршал, Шмид и Злобек [22] (1994), Тили [69] (1998), Хан [21] (2000), Ниел [34] (2001), Якобсон [75] (2002).

През 1980 година Прешич [51] публикува първата теорема за полулокална сходимост на метода на Вайерщрас (като изключим теоремата на Вайерщрас, която, както споменахме, не е формулирана в явен вид). През следващите три десетилетия редица автори получават теореми за полулокална сходимост на метода при различни начални условия: Ченг [78, 79] (1982, 1987), Ванг и Чао [77, 72] (1993, 1995), Петкович, Карстенсен и Трайкович [43] (1995), Петкович [41] (1996), Петкович, Херцег и Илич [47] (1998), Батра [4] (1998), Хан [21] (2000), Петкович и Херцег [45] (2001). Всички тези резултати са подобрени от Пройнов [52, 53] през 2006 година.

Съществува хипотеза, че методът на Вайерщрас е глобално сходящ, т.е. множеството от началните приближения $x^0 \in \mathbb{C}^n$, при които итерационната редица на Вайерщрас не е коректно дефинирана[1] или е разходяща, има лебегова мярка нула. Тази хипотеза е доказана за полиноми от степен $n = 2$ през 1976 година от Грийн, Корсак и Пийс [20] и за полинома $f(z) = z^3$ през 1996 година от Ямагиши [76]. В общия случай проблемът остава нерешен.

Двуточков метод на Вайерщрас. През 1996 година Канно, Кюркчиев и Ямамото [26] публикуват двуточков вариант на метода на Вайер-

[1] Ще наричаме една итерационна редица *коректно дефинирана*, ако тя е безкрайна. С други думи, итерационната редица е коректно дефинирана, ако итерационният процес не прекъсва.

щрас, който се дефинира чрез итерацията

$$x^{k+1} = x^k - \widetilde{W}(x^k, x^{k-1}) \qquad (\textit{двуточков метод на Вайерщрас}),$$

където $\widetilde{W}\colon D \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ се дефинира чрез

$$\widetilde{W}(x,y) = (\widetilde{W}_1(x,y), \ldots, \widetilde{W}_n(x,y)) \quad \text{като} \quad \widetilde{W}_i(x,y) = \frac{f(x_i)}{a_0 \prod_{j \neq i} (x_i - y_j)},$$

а D е множеството от всички двойки вектори в $\mathbb{C}^n$, такива че $x_i \neq y_j$ при $i \neq j$. Редът на сходимост на двуточковия метод на Вайерщрас е $(1+\sqrt{5})/2$. В статията [26] Канно, Кюркчиев и Ямамото отбелязват също, че този метод е много ефективен при полиноми с кратни нули. По-общи двуточкови итерационни методи от този тип са изучавани в статията на Кюркчиев и Иванов [28].

През 1996 година Канно, Кюркчиев и Ямамото [26] доказват теорема за локална сходимост на двуточковия метод на Вайерщрас. До момента не е известна теорема за полулокална сходимост на двуточковия метод.

Методи за едновременна апроксимация на нули на полиноми. През 1989 година Петкович [40] публикува първата монография, посветена на итерационните методи за едновременна апроксимация на нули на полиноми, макар че две години по-рано българският математик Любомир Илиев посвещава една глава от своята монография [24, гл. 5] на тези методи. Следващите монографии, посветени на итерационните методи за едновременна апроксимация на всичките нули на даден полином, принадлежат на Сендов, Андреев и Кюркчиев [65, гл. 4] (1994), Петкович, Херцег и Илич [46] (1997), Кюркчиев [31, гл. 1, 2, 3, 6] (1998), Петков и Кюркчиев [38] (2000), МакНаме [32, гл. 4] (2007), Петкович [42] (2008), Илиев и Кюркчиев [25, гл. 6] (2010), Чира [10] (2012) и Петкович, Нета, Петкович и Джунич [48, гл. 7] (2013).

Цел на дисертационния труд

Дисертационният труд е посветен на изследване на локалната и полулокалната сходимост както на класическия метод на Вайерщрас (Вайерщрас [73]), така и на двуточковия вариант на метода на Вайерщрас (Канно, Кюркчиев и Ямамото [26]). Получени са нови теореми за локална и полулокална сходимост на двата метода с априори и апостериори оценки на грешката.

Целта на дисертационния труд е да се решат няколко проблема, свързани със сходимостта на едноточковия и двуточковия метод на Вайерщрас, които формулираме по-долу под формата на четири проблемни задачи.

Нека $\mathbb{K}$ е произволно нормирано поле и $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$. Ако f притежава n прости нули в $\mathbb{K}$, то със $\operatorname{sep}(f)$ ще означаваме *числото на отделимост* на полинома f, което се дефинира като минималното разстояние измежду всички разстояния между две нули на f, т.е.

$$\operatorname{sep}(f) = \min_{i \neq j} |\xi_i - \xi_j|,$$

където $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{K}$ са нулите на f.

Както отбелязахме, първата теорема за локална сходимост на метода на Вайерщрас е публикувана през 1962 година от Дочев [11]. Съществената част от теоремата на Дочев се съдържа в следната теорема, в която е намерено кълбо на сходимост за метода на Вайерщрас (в $\mathbb{C}^n$) с център ξ и радиус $R = (\sqrt[n-1]{2} - 1) \operatorname{sep}(f)/(2\sqrt[n-1]{2} - 1)$. По-нататък ще наричаме тази теорема *Кратка теорема на Дочев.*

Теорема 1.2 (Кратка теорема на Дочев [12]). *Нека $f \in \mathbb{C}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, който притежава само прости нули и нека $\xi \in \mathbb{C}^n$ е вектор-корен на f. Ако началното приближение x^0 удовлетворява условието*

$$\|x^0 - \xi\|_\infty < \frac{\sqrt[n-1]{2} - 1}{2\sqrt[n-1]{2} - 1} \operatorname{sep}(f),$$

то итерацията[2] *на Вайерщрас е коректно дефинирана и сходяща квадратично към ξ.*

Следващият известен резултат за локална сходимост на метода на Вайерщрас е следната теорема на Кюркчиев и Марков [29], публикувана през 1983 година.

Теорема 1.3 (Кюркчиев-Марков [29]). *Нека $f \in \mathbb{C}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, който притежава само прости нули и нека $\xi \in \mathbb{C}^n$ е вектор-корен на f. Нека*

$$0 < h < 1 \quad \text{и} \quad 0 < c \leq \frac{\operatorname{sep}(f)}{\alpha n + 1},$$

където $\alpha = 1.763\ldots$ е единственото решение на уравнението $t = e^{1/t}$. Ако началното приближение $x^0 \in \mathbb{C}^n$ удовлетворява неравенството

$$\|x^0 - \xi\|_\infty \leq c\,h,$$

[2]Терминът *итерация* в дисертационния труд има две значения: синоним на *итерационна редица*; синоним на *член на итерационна редица*.

то итерацията на Вайерщрас е коректно дефинирана и сходяща към ξ *с оценка на грешката*

$$\|x^k - \xi\|_\infty \leq c\, h^{2^k} \quad \text{\textit{за всяко}} \;\; k \geq 0.$$

По естествен път възниква следният проблем.

Задача 1. *Да се получи теорема за локална сходимост на метода на Вайерщрас с априори и апостериори оценки на грешката, която да обобщава и да подобрява формулираните по-горе теореми на* Дочев [12] *и* Кюркчиев и Марков [29].

През 2010 година Пройнов [55] публикува обща теория за сходимост на итерационни методи от типа на Пикар

$$x^{k+1} = Tx^k,$$

където $T\colon D \subset X \to X$ е итерационна функция в метрично пространство X. В тази теория сходимостта на един итерационен метод винаги се изследва относно дадена *функция на началните условия*. Функция $E\colon D \to \mathbb{R}_+$ се нарича *функция на началните условия* на оператора T, ако съществува функция $\varphi\colon J \to J$, такава че

$$E(Tx) \leq \varphi(E(x)) \quad \text{за всяко } x \in D, \text{ такова че } Tx \in D \text{ и } E(x) \in J,$$

където J е интервал в $\mathbb{R}_+$, съдържащ 0.

Съществуват различни функции на началните условия (Пройнов [52, 53, 54, 55], Пройнов и Иванов [57, 58, 59], Чолаков [8, 9]), които се използват за изследване на сходимостта на различни итерационни методи.

Вече споменахме, че по същество Вайерщрас получава първата теорема за полулокална сходимост на метода на Вайерщрас, която не формулира в явен вид. Тъй като неговите изследвания се различават съществено от останалите резултати за полулокална сходимост на метода, стигаме до идеята за получаване на теорема за полулокална сходимост с начални условия от "типа на Вайерщрас".

Задача 2. *Да се въведе подходяща функция на началните условия и да се получи теорема за полулокална сходимост на метода на Вайерщрас като се комбинират идеи на* Вайерщрас [73] *и* Пройнов [55].

През 1996 година Канно, Кюркчиев и Ямамото [26] доказват следната теорема за локална сходимост на двуточковия метод на Вайерщрас.

Теорема 3.1 (Канно - Кюркчиев - Ямамото [26]). *Нека $f \in \mathbb{C}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$ с прости нули и нека $\xi \in \mathbb{C}^n$ е вектор-корен на f. Нека*

$$0 < h < 1, \quad r = (1 + \sqrt{5})/2 \quad \textit{и} \quad 0 < c < \frac{\operatorname{sep}(f)}{\alpha(n-1)+2},$$

където $\alpha = 1.763\ldots$ е единственото решение на уравнението $t = e^{1/t}$. Ако началните приближения $x^0, x^1 \in \mathbb{C}^n$ удовлетворяват условията

$$\|x^0 - \xi\|_\infty \leq c\,h \quad \textit{и} \quad \|x^1 - \xi\|_\infty \leq c\,h^r,$$

то двуточковата итерация на Вайерщрас е коректно дефинирана и сходяща към ξ с оценка на грешката

$$\|x^k - \xi\|_\infty \leq c\,h^{r^k} \quad \textit{за всяко} \;\; k \geq 0.$$

Авторите на тази теорема отбелязват, че многоточковите методи за едновременна апроксимация на нулите на полиноми са много ефективни при полиноми с кратни нули. Представлява интерес да се получи теорема за локална сходимост на двуточковия метод на Вайерщрас, аналогична на Кратката теорема на Дочев.

Задача 3. *Да се получи теорема за локална сходимост на двуточковия метод на Вайерщрас, която да се явява аналог на формулираната по-горе кратка теорема на Дочев и да подобрява теоремата на* Канно, Кюркчиев и Ямамото [26].

Теорема за полулокална сходимост (с компютърно проверяеми начални условия) на двуточковия метод на Вайерщрас не е известна. Това обуславя актуалността на следния проблем.

Задача 4. *Да се получи теорема за полулокална сходимост на двуточковия метод на Вайерщрас за едновременно намиране на всички нули на даден полином с априори и апостериори оценки на грешката.*

Всички резултати в дисертационния труд, получени при решаването на поставените четири задачи, са формулирани за полиноми над произволно нормирано поле $\mathbb{K}$, но те са нови и за комплексни и реални полиноми.

Кратък обзор на дисертационния труд

Дисертационният труд се състои от увод, три глави, заключение и библиография. Заключението включва: резюме на получените резултати, списък на публикациите по дисертационния труд, апробация на получените резултати и декларация за оригиналност.

Ще изложим накратко съдържанието на дисертационния труд по глави и параграфи.

Най-напред ще въведем някои понятия и означения, които се използват в целия дисертационен труд.

С $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ означаваме произволно нормирано поле, с $\mathbb{K}[z]$ – пръстена на полиномите над $\mathbb{K}$. Във векторното пространство $\mathbb{K}^n$ е въведена p-норма

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \qquad (1 \le p \le \infty).$$

Дефиниция 2.4. Нека $f(z) = z^n + C_1 z^{n-1} + \cdots + C_n$ е нормиран полином в $\mathbb{K}[z]$ от степен $n \ge 1$. Тогава векторът $C = (C_1, \ldots, C_n) \in \mathbb{K}^n$ се нарича *вектор от коефициентите* на f.

Дефинираме функцията $d\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^n$ с $d(x) = (d_1(x), \ldots, d_n(x))$, където

$$d_i(x) = \min_{j \ne i} |x_i - x_j| \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Дефинираме също функцията $\delta\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$ чрез

$$\delta(x) = \min\{d_1(x), \ldots, d_n(x)\}.$$

За всеки два вектора $x \in \mathbb{K}^n$ и $y \in \mathbb{R}^n$, като координатите на y са различни от нула, с $\dfrac{x}{y}$ означаваме вектор в $\mathbb{R}^n$, дефиниран с равенството

$$\frac{x}{y} = \left(\frac{|x_1|}{y_1}, \cdots, \frac{|x_n|}{y_n}\right).$$

По дефиниция полагаме $0^0 = 1$.

Ако p е число в интервала $1 \le p \le \infty$, то навсякъде означаваме с q неговото спрегнато число, т.е. q принадлежи на интервала $1 \le q \le \infty$ и удовлетворява условието $1/p + 1/q = 1$.

Ще отбележим, че навсякъде в дисертационния труд с J означаваме интервал в $\mathbb{R}_+$ от вида $[0, R]$, $[0, R)$ или $[0, +\infty)$, където $R > 0$. За всяко естествено число k с $S_k(t)$ означаваме полинома

$$S_k(t) = 1 + t + \cdots + t^{k-1}.$$

При $k = 0$ полагаме $S_k(t) \equiv 0$.

Глава 1. Локална сходимост на метода на Вайерщрас

Първа глава съдържа три параграфа. В нея е доказана теорема за локална сходимост на метода на Вайерщрас с априори и апостериори оценки на грешката. Този резултат подобрява областта на сходимост в теоремата на Дочев при $n \geq 3$ и обобщава, подобрява и допълва теоремата на Кюркчиев и Марков [29].

В **параграф 1.1** е направен исторически обзор на теоремите за локална сходимост на метода на Вайерщрас.

Параграф 1.2 съдържа някои основни дефиниции и теореми от теорията на нормираните полета.

В **параграф 1.3** е получен основният резултат в първа глава.

Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, който притежава само прости нули в $\mathbb{K}$ и $\xi \in \mathbb{K}^n$ е вектор-корен на f. Главна роля при получаването на теоремата играе функцията на началните условия $E\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$, дефинирана чрез формулата

$$E(x) = E_f(x) = \left\| \frac{x - \xi}{d(\xi)} \right\|_p \qquad (1 \leq p \leq \infty). \tag{3}$$

Основният резултат в тази глава е следната теорема, която обобщава и подобрява Кратката теорема на Дочев и теоремата на Кюркчиев и Марков [29].

Теорема 1.4. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, който притежава n прости нули в $\mathbb{K}$, $\xi \in \mathbb{K}^n$ е вектор-корен на f и $1 \leq p \leq \infty$. Нека $x^0 \in \mathbb{K}^n$ е начално приближение, удовлетворяващо условието*

$$E(x^0) = \left\| \frac{x^0 - \xi}{d(\xi)} \right\|_p < R(n,p) = \frac{2^{1/(n-1)} - 1}{2^{1/q}\left(2^{1/(n-1)} - 1\right) + (n-1)^{-1/p}}\,,$$

където функцията $E\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$ е дефинирана в (3). Тогава итерацията на Вайерщрас е коректно дефинирана и сходяща квадратично към ξ с оценки на грешката

$$\|x^{k+1} - \xi\|_p \leq \lambda^{2^k}\, \|x^k - \xi\|_p \quad \text{за всяко } k \geq 0,$$

$$\|x^k - \xi\|_p \leq \lambda^{2^k - 1}\, \|x^0 - \xi\|_p \quad \text{за всяко } k \geq 0,$$

където $\lambda = E(x^0)/R(n,p)$.

В доказателството на тази теорема главна роля играе следната лема.

Лема 1.9. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, който притежава n прости нули в $\mathbb{K}$, $\xi \in \mathbb{K}^n$ е вектор-корен на f и $1 \leq p \leq \infty$. Нека за някое $k \geq 0$ итерацията x^k на итерационната редица на Вайерщрас удовлетворява условието*

$$E(x^k) = \left\| \frac{x^k - \xi}{d(\xi)} \right\|_p < 1/2^{1/q}\,,$$

където функцията $E\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$ е дефинирана в (3). Тогава итерацията x^k е коректно дефинирана, т.е. всичките координати на вектора x^k са различни. Нещо повече, следващата итерация x^{k+1} удовлетворява следните оценки

$$\|x^{k+1} - \xi\|_p \leq \sigma_k \, \|x^k - \xi\|_p \quad \text{и} \quad E(x^{k+1}) \leq \sigma_k \, E(x^k),$$

където

$$\sigma_k = \left(1 + \frac{E(x^k)}{(n-1)^{1/p}(1 - 2^{1/q}\, E(x^k))}\right)^{n-1} - 1.$$

От основната теорема при $p = \infty$ се получава следното следствие, което подобрява формулираната теорема на Кюркчиев и Марков [29].

Следствие 1.2. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, който притежава n прости нули в $\mathbb{K}$ и $\xi \in \mathbb{K}^n$ е вектор-корен на f. Нека*

$$0 < h < 1 \qquad \text{и} \qquad 0 < c < \frac{\sqrt[n-1]{2} - 1}{2\,\sqrt[n-1]{2} - 1}\,\operatorname{sep}(f).$$

Ако началното приближение $x^0 \in \mathbb{K}^n$ удовлетворява неравенството

$$\|x^0 - \xi\|_\infty \leq c\, h,$$

то итерацията на Вайерщрас е коректно дефинирана и сходяща квадратично към ξ с оценка на грешката

$$\|x^k - \xi\|_\infty \leq c\, h^{2^k} \qquad \text{за всяко} \;\; k \geq 0.$$

Във връзка със следващия резултат ще припомним една от дефинициите за ред на сходимост[3].

Дефиниция 1.3. Нека (x_k) е редица в произволно нормирано пространство $(X, \|\cdot\|)$, която е сходяща към $x \in X$. Казваме, че (x_k) е сходяща към x с *ред на сходимост* (поне) $r > 1$, ако съществува константа $C > 0$, такава че

$$\|x^{k+1} - x\| \leq C\, \|x^k - x\|^r$$

[3] Тази дефиниция за ред на сходимост е известна като Q-ред на сходимост.

за достатъчно големи k. Ако (x_k) е сходяща към x с ред на сходимост r, то числото

$$c = \limsup_{k\to\infty} \frac{\left\| x^{k+1} - x \right\|}{\left\| x^k - x \right\|^r}\,.$$

се нарича *асимптотична константа на сходимост* на редицата (x_k).

През 1994 година Хопкинс, Маршал, Шмид и Злобек [22, Теорема 2.2] получават следния резултат за асимптотичната константа на сходимост на итерацията на Вайерщрас.

Теорема 1.5 (Хопкинс и др. [22])**.** *Нека $f \in \mathbb{C}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, който притежава само прости нули и $\xi \in \mathbb{C}^n$ е вектор-корен на f. Ако началното приближение $x^0 \in \mathbb{C}^n$ удовлетворява условието*

$$\|x^0 - \xi\|_\infty < \frac{\sqrt[n-1]{4} - 1}{2\,\sqrt[n-1]{4} + 1}\,\mathrm{sep}(f).$$

то за асимптотичната константа на сходимост на итерацията на Вайерщрас е в сила оценката

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\left\| x^{k+1} - \xi \right\|_\infty}{\left\| x^k - \xi \right\|_\infty^r} \leq \frac{n-1}{\mathrm{sep}(f)}.$$

Следващият резултат е следствие от основната теорема и формулираната по-горе лема. Следствието обобщава и подобрява резултата на Хопкинс, Маршал, Шмид и Злобек [22].

Следствие 1.3. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, който притежава n прости нули в $\mathbb{K}$, $\xi \in \mathbb{K}^n$ е вектор-корен на f и $1 \leq p \leq \infty$. Ако $x^0 \in \mathbb{K}^n$ е начално приближение, при което редицата на Вайерщрас е сходяща към ξ, то за асимптотичната константа на сходимост на итерацията на Вайерщрас е в сила оценката*

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\left\| x^{k+1} - \xi \right\|_p}{\left\| x^k - \xi \right\|_p^r} \leq \frac{(n-1)^{1/q}}{\mathrm{sep}(f)}.$$

Като следствие от основната теорема и формулираната по-горе лема се получава също следният резултат на Хан [21] (2000).

Следствие 1.4 (Хан [21])**.** *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, който притежава n прости нули в $\mathbb{K}$, $\xi \in \mathbb{K}^n$ е вектор-корен на f, $1 \leq p \leq \infty$. Нека $x^0 \in \mathbb{K}^n$ е начално приближение, удовлетворяващо условието*

$$E(x^0) = \left\| \frac{x^0 - \xi}{d(\xi)} \right\|_p < R(n,p) = \frac{2^{1/(n-1)} - 1}{2^{1/q}\left(2^{1/(n-1)} - 1\right) + (n-1)^{-1/p}}\,.$$

Тогава итерацията на Вайерщрас удовлетворява оценката

$$E(x^{k+1}) \leq \frac{E(x^k)^2}{R(n,p)} \quad \text{за всяко } k \geq 0.$$

Глава 2. Полулокална сходимост на метода на Вайерщрас

Втора глава съдържа шест параграфа. В тази глава получаваме теорема за полулокална сходимост на метода на Вайерщрас с компютърно проверяеми начални условия, които съществено се различават от съществуващите в научната литература. Основният резултат в тази глава е получен чрез комбиниране на идеи на Вайерщрас (1891) и Пройнов (2010). Получени са също априори и апостериори оценки на грешката при новите начални условия. Резултатът е илюстриран с конкретни числени примери.

В **параграф 2.1** е направен кратък исторически обзор на известните теореми за полулокална сходимост на метода на Вайерщрас.

В **параграф 2.2** като следствие от теоремата на Пройнов [55, Теорема 5.6] за сходимост на итерационни методи от типа на Пикар е изведена следната обща теорема за сходимост. Тази теорема се прилага при доказателството на основния резултат в настоящата глава.

Теорема 2.5. *Нека* $T\colon D \subset X \to X$ *е оператор в произволно банахово пространство* $(X, \|\cdot\|)$. *Нека* $E\colon D \to \mathbb{R}_+$ *е функция на началните условия на* T *със строго контролна функция* φ *от ред* $r \geq 1$ *в интервал* J, *такава че*

$$\|x - Tx\| \leq c\, E(x) \quad \text{за всяко } x \in D, \text{ такова че } E(x) \in J,$$

където $c \in \mathbb{R}_+$. *Нека* $x^0 \in D$ *е начална точка на* T. *Тогава в сила са следните твърдения*:

(i) Сходимост. *За всяко* $x^0 \in X$ *итерационната редица на Пикар*

$$x^{k+1} = Tx^k \quad (k = 0, 1, \ldots)$$

е сходяща към точка $\xi \in X$.

(ii) Априори оценка. *За всяко* $k \geq 0$ *е в сила оценката*

$$\|x^k - \xi\| \leq \frac{c\, \lambda^{S_k(r)}}{1 - \lambda^{r^k}}\, E(x^0),$$

където $\lambda = \phi(E(x^0))$ *и* $\phi\colon J \to \mathbb{R}_+$ *е растяща функция, удовлетворяваща условието*

$$\varphi(t) = t\phi(t) \quad \text{за всяко } t \in J.$$

(iii) Първа апостериори оценка. *За всяко $k \geq 0$ е в сила оценката*

$$\|x^k - \xi\| \leq \frac{c\, E(x^k)}{1 - \phi(E(x^k))}\,.$$

(iv) Втора апостериори оценка. *За всяко $k \geq 0$ е в сила оценката*

$$\|x^{k+1} - \xi\| \leq \frac{c\, \varphi(E(x^k))}{1 - \phi(E(x^k))^2}\,.$$

В **параграф 2.3** са получени 8 леми, необходими за доказване на основния резултат в тази глава. Нека $f(z) = z^n + \sum_{i=1}^n C_1 z^{n-1}$ е произволен нормиран полином с коефициенти от нормирано поле $\mathbb{K}$. Дефинираме функция на началните условия $E\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$ чрез равенството

$$E(x) = \|\sigma(x) - C\|_\infty,$$

където $\sigma\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ е операторът на Виет, дефиниран чрез

$$\sigma(x) = (\sigma_1(x), \ldots, \sigma_n(x)), \quad \text{като} \quad \sigma_i(x) = (-1)^i \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_i \leq n} x_{j_1} \ldots x_{j_i},$$

а $C = (C_1, \ldots, C_n)$ е векторът от коефициентите на f. В тази глава сходимостта на метода на Вайерщрас се изследва относно така въведената функция на началните условия E.

Нека $\alpha \geq 1$ и $n \geq 2$ е естествено число. Дефинираме величините β и μ по следния начин:

$$\beta = n\alpha^{n-1} + (\alpha - 1) \sum_{j=1}^{n-1} j\, \alpha^{j-1},$$

$$\mu = \max_{1 \leq i \leq n} \binom{n}{i} \left((\alpha + \gamma)^i - \alpha^i - i\, \alpha^{i-1} \gamma \right), \quad \text{където} \quad \gamma = \beta^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i.$$

В следващите две леми са получени важни оценки, които се прилагат в доказателството на основния резултат.

Лема 2.4. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е нормиран полином от степен $n \geq 2$ и $x \in \mathbb{K}^n$ е вектор с различни координати. Тогава*

$$\|W(x)\|_\infty \leq \frac{\beta^n\, \gamma}{|\Delta(\varphi)|}\, E(x),$$

където $\varphi(z) = \prod_{j=1}^n (z - x_j)$.

Лема 2.5. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е нормиран полином от степен $n \geq 2$ и $x \in \mathbb{K}^n$ е вектор с различни координати, такъв че $E(x) \leq 1$. Тогава*

$$E(Tx) \leq \frac{\beta^n \, \mu}{|\Delta(\varphi)|} \, E(x)^2, \tag{4}$$

където $Tx = x - W(x)$, $\varphi(z) = \prod_{j=1}^{n} (z - x_j)$.

Важна роля в този параграф играе следната лема, в която за всеки нормиран полином $f \in \mathbb{K}[z]$ се доказва съществуването на число δ, което се използва във формулировката на главната теорема.

Лема 2.6. *За всеки нормиран полином $f \in \mathbb{K}[z]$ от степен $n \geq 2$ съществува положително число δ, такова че за всеки нормиран полином $g \in \mathbb{K}[z]$ от степен n е изпълнено условието*

$$|f - g| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad |\Delta(f) - \Delta(g)| \leq \delta \, |f - g|. \tag{C}$$

Нека $f(z) = z^n + C_1 z^{n-1} + \ldots + C_n$ е произволен нормиран полином в $\mathbb{K}[z]$ от степен $n \geq 2$. Доказателството на лемата дава следния алгоритъм за намиране на положително число δ, удовлетворяващо условие (C):

Етап 1. Намиране на дискриминантата $\Delta(C_1, \ldots, C_n)$ на f като полином на $C_1, \ldots, C_n$;

Етап 2. Намиране на полинома $P(h_1, \ldots, h_n)$, дефиниран по следния начин

$$P(h_1, \ldots, h_n) = \Delta(C_1 + h_1, \ldots, C_n + h_n) - \Delta(C_1, \ldots, C_n);$$

Етап 3. Пресмятане на сумата от абсолютните стойности на коефициентите на P;

Етап 4. Полагане δ да бъде равно на сумата, намерена в предходния етап.

В **параграф 2.4** се изследва сходимостта на итерационния метод на Вайерщрас за полиноми над пълно нормирано поле относно дефинираната в параграф 2.3 функция на началните условия. В настоящия параграф е доказана нова теорема за полулокална сходимост на метода на Вайерщрас при едновременна апроксимация на нулите на нормиран полином f с ненулева дискриминанта. Началните условия на теоремата дават достатъчно условие за разлагане на полинома f на линейни множители в пълно нормирано поле. Представени са също априори и апостериори оценки на грешката на метода на Вайерщрас.

Основният резултат в параграф 2.4 е следната теорема.

Теорема 2.6. *Нека* $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ *е пълно нормирано поле и* $f \in \mathbb{K}[z]$ *е нормиран полином от степен* $n \geq 2$ *с дискриминанта* $\Delta(f) \neq 0$. *Нека* $\alpha = \|C\|_\infty + 2$, *където* C *е векторът от коефициентите на* f. *Избираме* $0 < \theta < 1$ *и положително число* δ, *което удовлетворява условието* (C). *Нека съществува вектор* $x^0 \in \mathbb{K}^n$, *такъв че*

$$E(x^0) < R = \min\left\{1, \frac{\theta|\Delta(f)|}{\beta^n\,\mu}, \frac{(1-\theta)|\Delta(f)|}{\delta}\right\}.$$

Тогава са изпълнени следните твърдения.

(i) Съществуване на нули. *Полиномът* f *има* n *прости нули в* $\mathbb{K}$.

(ii) Сходимост. *Итерацията на Вайерщрас с начално приближение* x^0 *е коректно дефинирана и сходяща квадратично към вектор-корен* ξ *на* f.

(iii) Априори оценка за грешката. *За всяко* $k \geq 0$ *е в сила оценката*

$$\|x^k - \xi\|_\infty \leq \frac{c\,\lambda^{2^k-1}}{1-\lambda^{2^k}}\,E(x^0),$$

където $\lambda = b\,E(x^0)$, $b = \dfrac{\beta^n\,\mu}{\theta|\Delta(f)|}$ *и* $c = \dfrac{\beta^n\,\gamma}{\theta|\Delta(f)|}$.

(iv) Първа апостериори оценка за грешката. *За всяко* $k \geq 0$ *е в сила оценката*

$$\|x^k - \xi\|_\infty \leq \frac{c\,E(x^k)}{1 - b\,E(x^k)}\,.$$

(v) Втора апостериори оценка за грешката. *За всяко* $k \geq 0$ *е в сила оценката*

$$\|x^{k+1} - \xi\|_\infty \leq \frac{b\,c\,E(x^k)^2}{1 - b^2 E(x^k)^2}\,.$$

В **параграф 2.5** така получената теорема за полулокална сходимост на метода на Вайерщрас е използвана за доказване на фундаменталната в теорията на нормираните полета теорема на Кюршак [30], според която всяко нормирано поле може да бъде разширено до пълно алгебрично затворено нормирано поле.

В **параграф 2.6** са приведени числени примери, в които прилагаме получената теорема за полулокална сходимост за компютърно доказване на квадратичната сходимост на метода на Вайерщрас за конкретни реални и комплексни полиноми при дадени начални приближения.

Глава 3. Сходимост на двуточковия метод на Вайерщрас

Трета глава се състои от четири параграфа. В нея са доказани две теореми – за локална и за полулокална сходимост на двуточковия метод на Вайерщрас за едновременно намиране на всички нули на даден полином с априори и апостериори оценки на грешката. Теоремата за локална сходимост подобрява и допълва теоремата на Канно, Кюркчиев и Ямамото [26], публикувана 1996 година. Доказаната теорема за полулокална сходимост е първият резултат за сходимост на двуточковия метод на Вайерщрас с компютърно проверяеми начални условия. Резултатът е илюстриран с конкретни числени примери.

В **параграф 3.1** е формулиран двуточковия метод на Вайерщрас, публикуван през 1996 година от Канно, Кюркчиев и Ямамото [26].

В **параграф 3.2** двуточковият метод на Вайерщрас се изследва относно функцията $E\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$, която се дефинира чрез

$$E(x) = E_f(x) = \left\| \frac{x - \xi}{d(\xi)} \right\|_\infty . \tag{5}$$

Основният резултат в настоящия параграф е следната теорема за локална сходимост на двуточковия метод на Вайерщрас.

Теорема 3.2. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, който притежава n прости нули в $\mathbb{K}$ и нека $\xi \in \mathbb{K}^n$ е вектор-корен на f. Нека началните приближения $x^0, x^1 \in \mathbb{K}^n$ удовлетворяват условието*

$$\max\left\{E(x^0), E(x^1)\right\} < R = \frac{\sqrt[n-1]{2} - 1}{2\sqrt[n-1]{2} - 1},$$

където функцията $E\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$ е дефинирана в (5). Тогава двуточковата итерация на Вайерщрас е коректно дефинирана и сходяща към ξ със следните априори и апостериори оценки на грешката

$$\|x^k - \xi\|_\infty \leq \lambda^{r^k - r} \|x^1 - \xi\|_\infty \quad \text{за всяко } k \geq 1,$$

$$\|x^{k+1} - \xi\|_\infty \leq \lambda^{r^{k-1}} \|x^k - \xi\|_\infty \quad \text{за всяко } k \geq 1,$$

където $r = (1 + \sqrt{5})/2$ и

$$\lambda = \max\left\{ \frac{E(x^0)}{R}, \left(\frac{E(x^1)}{R}\right)^{1/r} \right\}.$$

От тази теорема получаваме следното следствие, което е аналог на Кратката теорема на Дочев.

Следствие 3.2. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, който има n прости нули в $\mathbb{K}$ и нека $\xi \in \mathbb{K}^n$ е вектор-корен на f. Ако началните приближения $x^0, x^1 \in \mathbb{K}^n$ удовлетворяват условието*

$$\max\{\|x^0 - \xi\|_\infty, \|x^1 - \xi\|_\infty\} < \frac{\sqrt[n-1]{2} - 1}{2\sqrt[n-1]{2} - 1} \operatorname{sep}(f),$$

то двуточковата итерация на Вайерщрас е коректно дефинирана и сходяща към ξ с ред на сходимост $r = (1 + \sqrt{5})/2$.

Следващата теорема е еквивалентна на представения по-горе основен резултат, но е формулирана с стила на теоремата на Канно, Кюркчиев и Ямамото [26, Теорема 6.1].

Теорема 3.3. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, който притежава n прости нули в $\mathbb{K}$, $\xi \in \mathbb{K}^n$ е вектор-корен на f,*

$$0 < h < 1, \quad r = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{и} \quad 0 < c \leq \frac{\sqrt[n-1]{2} - 1}{2\sqrt[n-1]{2} - 1}.$$

Нека началните приближения $x^0, x^1 \in \mathbb{K}^n$ удовлетворяват условията

$$E(x^0) \leq c\,h \quad \text{и} \quad E(x^1) \leq c\,h^r,$$

където $E \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$ е дефинирана в (5), Тогава двуточковата итерация на Вайерщрас е коректно дефинирана и сходяща към ξ със следните априори и апостериори оценки на грешката

$$\|x^k - \xi\|_\infty \leq h^{r^k - r} \|x^1 - \xi\|_\infty \quad \text{за всяко } k \geq 1,$$

$$\|x^{k+1} - \xi\|_\infty \leq h^{r^{k-1}} \|x^k - \xi\|_\infty \quad \text{за всяко } k \geq 1.$$

От тази теорема получаваме следното следствие, което подобрява и допълва теоремата на Канно, Кюркчиев и Ямамото [26, Теорема 6.1].

Следствие 3.3. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, който притежава n прости нули в $\mathbb{K}$, $\xi \in \mathbb{K}^n$ е вектор-корен на f,*

$$0 < h < 1, \quad r = (1 + \sqrt{5})/2 \quad \text{и} \quad 0 < c < \frac{\sqrt[n-1]{2} - 1}{2\sqrt[n-1]{2} - 1} \operatorname{sep}(f).$$

Ако $x^0, x^1 \in \mathbb{K}^n$ са начални приближения, които удовлетворяват условията

$$\|x^0 - \xi\|_\infty \le c\,h \quad \text{и} \quad \|x^1 - \xi\|_\infty \le c\,h^r,$$

то двуточковата итерация на Вайерщрас е коректно дефинирана и сходяща към ξ със следните априори и апостериори оценки на грешката

$$\|x^k - \xi\|_\infty \le h^{r^k - r} \|x^1 - \xi\|_\infty \quad \text{за всяко } k \ge 1,$$

$$\|x^{k+1} - \xi\|_\infty \le h^{r^{k-1}} \|x^k - \xi\|_\infty \quad \text{за всяко } k \ge 1,$$

$$\|x^k - \xi\|_\infty \le c\,h^{r^k} \quad \text{за всяко } k \ge 0.$$

В **параграф 3.3** е доказана теорема за полулокална сходимост на двуточковия метод на Вайерщрас. Това е първият резултат за сходимост на метода при компютърно проверяеми начални условия.

Пройнов [56] доказва, че съществува тясна връзка между локални и полулокални теореми за сходимост на методите за едновременно намиране нулите на полиноми. Оказва се, че от всяка теорема за локална сходимост на даден итерационен метод за едновременно намиране на нули на полиноми може да се получи теорема за полулокална сходимост на същия метод. Следната теорема дава тази зависимост между началните условия от вида $\left\| \dfrac{x^0 - \xi}{d(\xi)} \right\|$ и $\left\| \dfrac{W(x^0)}{d(x^0)} \right\|$.

Теорема 3.4 (Пройнов [56]). *Нека $\mathbb{K}$ е алгебрично затворено поле и $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \ge 2$. Нека $x \in \mathbb{K}^n$ е вектор с различни координати, удовлетворяващ условието*

$$\left\| \frac{W(x)}{d(x)} \right\|_\infty < \frac{R}{1 + (n+1)R} \tag{6}$$

за някое $0 < R < 1/(n-2)$. Тогава са в сила следните твърдения:

(i) Прости нули. *Полиномът f притежава само прости нули в $\mathbb{K}$.*

(ii) Локално начално условие. *Съществува вектор-корен $\xi \in \mathbb{K}^n$ на f, такъв че*

$$\left\| \frac{x - \xi}{d(\xi)} \right\|_\infty < R.$$

Като комбинираме тази теорема с формулираната в предния параграф теорема за локална сходимост (Теорема 3.2), получаваме основния резултат в този параграф.

Теорема 3.5. *Нека* $\mathbb{K}$ *е алгебрично затворено поле и* $f \in \mathbb{K}[z]$ *е полином от степен* $n \geq 2$. *Нека началните приближения* $x^0, x^1 \in \mathbb{K}^n$ *удовлетворяват условието*

$$\max\left\{ \left\| \frac{W(x^0)}{d(x^0)} \right\|_\infty, \left\| \frac{W(x^1)}{d(x^1)} \right\|_\infty \right\} < \frac{\sqrt[n-1]{2} - 1}{(n+4)\sqrt[n-1]{2} - n - 3}.$$

Тогава са в сила следните твърдения:

(i) Прости нули. *Полиномът* f *притежава само прости нули в* $\mathbb{K}$.

(ii) Сходимост на метода. *Двуточковата итерация на Вайерщрас е коректно дефинирана и сходяща към вектор-корен* ξ *на* f.

В **параграф 3.4** привеждаме числени примери, в които прилагаме получената в параграф 3.3 теорема за полулокална сходимост за компютърно доказване на сходимостта на двуточковия метод на Вайерщрас за някои реални и комплексни полиноми.

Заключение

Резюме на получените резултати

По мнение на автора основните приноси в дисертационния труд са:

1. Получена е нова теорема за локална сходимост на метода на Вайерщрас с априори и апостериори оценки на грешката (Теорема 1.4). Този резултат подобрява областта на сходимост на теоремата на Дочев (1962), а също така подобрява и допълва резултата на Кюркчиев и Марков (1983).

2. Получен е резултат, който обобщава и подобрява резултата на Хопкинс, Маршал, Шмид и Злобек (1994) за асимптотичната константа за метода на Вайерщрас (Следствие 1.3).

3. Получена е нова теорема за полулокална сходимост на класическия метод на Вайерщрас с компютърно проверяеми начални условия, които съществено се различават от съществуващите досега (Теорема 2.6). Тази теорема може да се разглежда като количествен вариант на резултата на Вайерщрас[4] (1891).

4. Приведени са следните три приложения на новата полулокална теорема за сходимост на метода на Вайерщрас:

1) Като се използва тази теорема е доказана известната теорема, че всяко нормирано поле може да се вложи в пълно алгебрично затворено нормирано поле.

2) Началните условия на теоремата могат да се използват за компютърно доказване на квадратичната сходимост на метода на Вайерщрас за даден полином и дадено начално приближение.

3) Оценките на грешката на теоремата могат да се използват като стоп-критерий на итерационния процес за достигане на дадена точност при пресмятане на нулите на полинома.

5. Получена е нова теорема за локална сходимост на двуточковия метод на Вайерщрас с априори и апостериори оценки на грешката (Теорема 3.2). Тази теорема подобрява и допълва резултата на Канно, Кюркчиев и Ямамото (1996).

[4]Резултатът на Вайерщрас не е формулиран в явен вид в неговата статия [73]

6. За първи път е доказана теорема за полулокална сходимост на двуточковия метод на Вайерщрас с компютърно проверяеми начални условия (Теорема 3.5). Началните условия на тази теоремата могат да се използват за компютърно доказване на сходимост на двуточковия метод на Вайерщрас за даден полином и дадени начални приближения.

Списък на публикациите по дисертационния труд

Основните резултати от дисертационния труд са публикувани в следните научни статии:

1. Petko D. Proinov, Milena D. Petkova,
Convergence of the Weierstrass method for simultaneous approximation of polynomial zeros, Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences 66 (2013), No. 6, 809–818, http://www.proceedings.bas.bg, ISSN 1310-1331. **(Impact factor: 0.211)**

2. Petko D. Proinov, Milena D. Petkova,
A new semilocal convergence theorem for the Weierstrass method for finding zeros of a polynomial simultaneously, Journal of Complexity 30 (2014), No. 3, 366-380, ISSN 0885-064X.
http://dx.doi.org/10.1016/j.jco.2013.11.002 **(Impact factor: 1.217)**

3. Petko D. Proinov, Milena D. Petkova,
Convergence of the two-point Weierstrass root-finding method, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics 31 (2014), ISSN 0916-7005.
http://dx.doi.org/10.1007/s13160-014-0138-4 **(Impact factor: 0.452)**

Връзките между приносите, целите, задачите, мястото на описание в дисертационния труд и направените публикации по темата са следните:

Приноси	Цел	Задачи	Параграфи	Публикации
1	1	Задача 1.	1.1, 1.2, 1.3	1
2	1	Задача 1.	1.3	1
3	1	Задача 2.	2.1, 2.2, 2.3, 2.4	2
4	1	Задача 2.	2.5, 2.6	2
5	1	Задача 3.	3.1, 3.2	3
6	1	Задача 4.	3.3, 3.4	3

Апробация на получените резултати

А) Доклади на семинари и конференции

- Нова полулокална теорема за сходимост на метода на Вайерщрас за нули на полиноми, Научен семинар "Итерационни методи", Пловдивски университет "Паисий Хилендарски", Пловдив, 15 юни 2012. http://fmi-plovdiv.org/GetResource?id=1628
- Нова теорема за полулокална сходимост на метода на Вайерщрас за едновременно намиране на всички нули на даден полином, Юбилейна национална научна конференция с международно участие "Традиции, посоки, предизвикателства", Смолян, 19–21 октомври 2012. http://old.uni-plovdiv.bg/smolyan/GetResource?id=3214
- Сходимост на итерационния метод на Вайерщрас за нули на полиноми, Научен семинар "Итерационни методи и неподвижни точки", Пловдивски университет "Паисий Хилендарски", Пловдив, 17 май 2013. http://fmi-plovdiv.org/GetResource?id=1420
- Сходимост на двустъпковия метод на Вайерщрас, Научен семинар "Итерационни методи и неподвижни точки", Пловдивски университет "Паисий Хилендарски", Пловдив, 24 януари 2014. http://fmi-plovdiv.org/GetResource?id=1625

Б) Участие в проекти

- Научен проект НИ11-ФМИ-004 към НПД на ПУ на тема: "Разработка и приложение на иновативни ИКТ за провеждане на качествени конкурентноспособни научни изследвания и цялостно осъвременяване процеса на обучение във ФМИ", 2011-2012.
- Научен проект НИ13-ФМИ-002 към НПД на ПУ на тема: "Интеграция на ИТ в научните изследвания по математика, информатика и педагогика на обучението", 2013-2014.

Декларация за оригиналност

от **Милена Димова Петкова**,
редовен докторант към катедра "Математически анализ"
при Факултет по математика и информатика
на Пловдивски университет "Паисий Хилендарски"

Във връзка с провеждането на процедура за придобиване на образователната и научна степен "доктор" в Пловдивски университет "Паисий Хилендарски" и защита на представения от мен дисертационен труд, декларирам:

Резултатите и приносите на проведеното дисертационно изследване, представени в дисертационния ми труд на тема "Локална и полулокална сходимост на едноточковия и двуточковия метод на Вайерщрас за апроксимация на нули на полиноми", са оригинални и не са заимствани от изследвания и публикации, в които нямам участие.

10.01.2014 г. ДЕКЛАРАТОР:
гр.Пловдив /Милена Димова Петкова/

Библиография

[1] Aberth O., Iteration methods for finding all zeros of a polynomial simultaneously, Math. Comp. 27 (1973) 339–344.

[2] Abu-Alshaikh I., A. Sahin, Two-point iterative methods for solving nonlinear equations, Appl. Math. Comput. 182 (2006) 871–878.

[3] Argyros I.K., D. González, Unified majorizing sequences for Traub type multipoint iterative procedures, Numer. Algorithms, Springer (2012) 1–17.

[4] Batra P., Improvement of a convergence condition for Durand-Kerner iteration, J. Comput. Appl. Math. 96 (1998) 117–125.

[5] Börsch-Supan W., A posteriori error bounds for the zeros of polynomials, Numer. Math. 5 (1963) 380–398.

[6] Börsch-Supan W., Residuenabschätzung für Polynom-Nullstellen mittels Lagrange-Interpolation, Numer. Math. 14 (1970) 287–296.

[7] Cauchy A.L., Exercises de mathématique, in Oeuvres Ser. 2, Vol. 9, 1829, p. 122.

[8] Cholakov S.I., Local convergence of a Chebyshev-type method for finding polynomial zeros simultaneously, Scientific Researches of the Union of Scientists in Bulgaria–Plovdiv, Ser. B, 14 (2012) 197–200.

[9] Cholakov S.I., Local convergence of Chenyshev-like method for simultaneous finding polynomial zeros, C. R. Bulg. Acad. Sci. 66 (2013) 1081–1090.

[10] Cira O., The Convergence Simultaneous Inclusion Methods, MatrixRom, Bucuresti, 2012.

[11] Dochev K., Modified Newton's method for simultaneous computation of all the roots of a given algebraic equation, Phys. Math. J. Bulg. Acad. Sci. 5 (1962) 136–139. (in Bulgarian)

[12] Dochev K., P. Byrnev, Certain modifications of Newton's method for the approximate solution of algebraic equations, USSR Comput. Math. Math. Phys. 4 (1964) 174–182.

[13] Durand E., Solutions numeriques des equations algebriques, Racines d'un polynome: Equations du type $F(x) = 0$, Vol. 1, Masson, Paris, 1960.

[14] Ehrlich L.W., A modified Newton method for polynomials, Comm. ACM 10 (1967) 107–108.

[15] Ezquerro J.A., J.M. Gutiérrez, M.A. Hernández, M.A. Salanova, A bipara-metric family of inverse-free multipoint iterations, Comput. Appl. Math. 19 (2000) 109–124.

[16] Farmer M., G. Loizou, An algorithm for the total or partial factorization of a polynomial, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 82 (1977) 427–437.

[17] Fraigniaud P., The Durand-Kerner polynomial root finding method in case of multiple roots, BIT 31 (1991) 112–123.

[18] Gargantini I., Further applications of circular arithmetic: Schröder-like algorithms with error bounds for finding zeros of polynomials, SIAM J. Numer. Anal. 15 (1978) 497–510.

[19] Grau-Sánchez M., J.M. Gutiérrez, Zero-finder methods derived from Obreshkov's techniques, Appl. Math. Comput. 215 (2009) 2992–3001.

[20] Green M.W., A.J. Korsak, M.C. Pease, Simultaneous iteration toward all roots of a complex polynomial, SIAM Rev. 18 (1976) 501–502.

[21] Han D., The convergence of the Durand-Kerner method for simultaneously finding all zeros of a polynomial, J. Comput. Math. 18 (2000) 567–570.

[22] Hopkins M., B. Marshall, G. Schmidt, S. Zlobec, On a method of Weierstrass for the simultaneous calculation of the roots of a polynomial, Z. Angew. Math. Mech. 74 (1994) 295–306.

[23] Ilieff L., K. Dočev, Über Newtonsche Iterationen, Wiss. Z. Tech. Univ. Drezden 12 (1963) 117–118.

[24] Iliev L., Laguerre Entire Functions, Pub. House of the Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, 1987.

[25] Iliev A., N. Kyurkchiev, Nontrivial Methods in Numerical Analysis: Selected Topics in Numerical Analysis, Lambert Acad. Publ., Saarbruecken, 2010.

[26] Kanno S., N. Kjurkchiev, T. Yamamoto, On some methods for the simultaneous determination of polynomial zeros, Japan J. Indust. Appl. Math. 13 (1996) 267–288.

[27] Kerner I.O., Ein Gesamtschrittverfahren zur Berechnung der Nullstellen von Poly-nomen, Numer. Math. 8 (1966) 290–294.

[28] Kjurkchiev N., R. Ivanov, On some multi-stage schemes with a superlinear rate of convergence, Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Mec. 78 (1984) 132–136.

[29] Kjurkchiev N.V., S.M. Markov, Two interval methods for algebraic equations with real roots, Pliska Stud. Math. Bulg. 5 (1983) 118–131.

[30] Kürschák J., Über Limesbildung und allgemeine Körpertheorie, J. Reine Angew. Math. 142 (1913) 211–253.

[31] Kyurkchiev N.V., Initial Approximations and Root Finding Methods, Mathematical Research, Vol. 104, Wiley, Berlin, 1998.

[32] McNamee J.M., Numerical methods for roots of polynomials, Part I, Studies in Computational Mathematics, Vol. 14, Elsevier, Amsterdam, 2007.

[33] Nedzhibov G.H., V.I. Hasanov, M.P. Petkov, On some families of multi-point iterative methods for solving nonlinear equations, Numer. Algorithms 42 (2006), 127–136.

[34] Niell A., The simultaneous approximation of polynomial roots, Comput. Math. Appl. 41 (2001) 1–14.

[35] Nourein A., An iteration formula for the simultaneous determination of the zeros of a polynomial, J. Comput. Appl. Math. 4 (1975) 251–254.

[36] Nourein A., An improvement on Nourein's method for the simultaneous determina-tion of the zeros of a polynomial (an algorithm), J. Comput. Appl. Math. 3 (1977) 109–110.

[37] ORTEGA J., W. RAINBOLDT, Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables, Academic Press., London, 1970.

[38] PETKOV M., N. KYURKCHIEV, Numerical methods for solving of nonlinear equations, University Publishing "St. Kliment Ohridski", Sofia, 2000. (in Bulgarian)

[39] PETKOVIĆ M.S., Generalised root iterations for the simultaneous determination of multiple complex zeros, Z. Angew. Math. Mech. 62, 1982, No. 10, 627–630.

[40] PETKOVIĆ M., Iterative methods for simultaneous inclusion of polynomial zeros, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[41] PETKOVIĆ M.S., On initial conditions for the convergence of simultaneous root-finding methods, Computing 57 (1996) 163–177.

[42] PETKOVIĆ M., Point Estimation of Root Finding Methods, Lecture Notes in Mathe-matics, Vol. 1933, Springer, Berlin, 2008.

[43] PETKOVIĆ M., C. CARSTENSEN, M. TRAJKOVIĆ, Weierstrass formula and zero-finding methods, Numer. Math. 69 (1995) 353–372.

[44] PETKOVIĆ M.S., D. HERCEG, Point estimation and safe convergence of root-finding simultaneous methods, Scientific Review, 21–22 (1996) 117–130.

[45] PETKOVIĆ M.S., D. HERCEG, Point estimation of simultaneous methods for solving polynomial equations, J. Comput. Appl. Math. 136 (2001) 283–307.

[46] PETKOVIĆ M.S., D.D. HERCEG, S.M. ILIĆ, Point Estimation Theory and Its Applications, Institute of Mathematics, Novi Sad, Yugoslavia, 1997.

[47] PETKOVIĆ M.S., D. HERCEG, S. ILIĆ, Safe convergence of simultaneous methods for polynomial zeros, Numer. Algorithms 17 (1998) 313–331.

[48] PETKOVIĆ M.S., B. NETA, L.D. PETKOVIĆ, J. DŽUNIĆ, Multipoint methods for solving nonlinear equations, Amsterdam, Elsevier, 2013.

[49] PREŠIĆ S.B., Un procéd é itératif pour la factorisation des polynômes, C. R. Acad. Sci. Paris, Sèr. A, 262 (1966) 862–863.

[50] PREŠIĆ M., An iterative procedure for determination of k roots of polynomial, Ph.D. Thesis, University of Belgrade, Belgrade, 1971. (in Serbian)

[51] Prešić M. D., A convergence theorem for a method for simultaneous determination of all zeros of a polynomial, Publ. Inst. Math. 28 (1980) 159–165.

[52] Proinov P.D., A new semilocal convergence theorem for the Weierstrass method from data at one point, C. R. Acad. Bulg. Sci. 59 (2006) 131–136.

[53] Proinov P.D., Semilocal convergence of two iterative methods for simultaneous computation of polynomial zeros, C. R. Acad. Bulg. Sci. 59 (2006) 705–712.

[54] Proinov P.D., General local convergence theory for a class of iterative processes and its applications to Newton's method, J. Complexity 25 (2009) 38–62.

[55] Proinov P.D., New general convergence theory for iterative processes and its applications to Newton-Kantorovich type theorems, J. Complexity 26 (2010) 3–42.

[56] Proinov P.D., Relationships between different types of initial conditions for simultaneous root finding methods, in preparation.

[57] Proinov P.D., S.I. Ivanov, A theorem for local convergence of Halley's method for finding polynomial zeros simultaneously, Scientific Researches of the Union of Scientists in Bulgaria–Plovdiv, Ser. B, 14 (2012) 173–176.

[58] Proinov P.D., S.I. Ivanov, Convergence of Schröder's method for polynomial zeros of unknown multiplicity, C. R. Bulg. Acad. Sci. 66 (2013) 1073–1080.

[59] Proinov P.D., S.I. Ivanov, On the convergence of Halley's method for multiple polynomial zeros, Mediterranean J. of Mathematics (2014), http://dx.doi.org/10.1007/s00009-014-0400-7.

[60] Proinov P.D., M.D. Petkova, Convergence of the Weierstrass method for simultaneous approximation of polynomial zeros, C. R. Bulg. Acad. Sci. 66 (2013) 809–818.

[61] Proinov P.D., M.D. Petkova, A new semilocal convergence theorem for the Weierstrass method for finding zeros of a polynomial simultaneously, J. Complexity 30 (2014) 366–380.

[62] Proinov P.D., M.D. Petkova, Convergence of the two-point Weierstrass root-finding method, Japan J. Indust. Appl. Math. 31 (2014), http://dx.doi.org/10.1007/s13160-014-0138-4.

[63] SEKULOSKI R.M., Generalization of Prešić's iterative method for factorization of a polynomial, Mat. Vesnik 9 (1972) 257–264. (in Serbo-Croatian)

[64] SEMERDZHIEV KHR., Method for simultaneous determination of all roots of an algebraic equation when their multiplicities are known (in Russian), C. R. Acad. Bulg. Sci. 35 (1982), 1057–1060.

[65] SENDOV BL., A. ANDREEV, N. KJURKCHIEV, Numerical Solution of Polynomial Equations, in: Handbook of Numerical Analysis (eds. P. Ciarlet, J. Lions), Vol. III, Elsevier, Amsterdam, 1994, 625–778.

[66] SENDOV BL., V. POPOV, Méthodes d'analyse numérique, Tome 1, Sofia, 1996. (The first edition is published in Bulgarian in 1976)

[67] STEWART G.W., On the convergence of multipoint iterations, Numer. Math. 68 (1994) 143–147.

[68] TANABE K., Behavior of the sequences around multiple zeros generated by some (in Japanese), Tech. Rep. Inf. Procces. Numer. Anal. 4–2 (1983) 1–6.

[69] TILLI P., Convergence conditions of some methods for the simultaneous computation of polynomial zeros, Calcolo 35 (1998) 3–15.

[70] WANG X., S. ZHENG, A family of parallel and interval iterations for finding all roots of a polynomial simultaneously with rapid convergence, I part, J. Comput. Math. 1 (1984) 70–76.

[71] WANG D., F. ZHAO, On the determination of the safe initial approximation for the Durand–Kerner algorithm, J. Comput. Appl. Math. 38 (1991) 447–456.

[72] WANG D., F. ZHAO, The theory of Smale's point estimation and its applications, J. Comput. Appl. Math. 60 (1995) 253–269.

[73] WEIERSTRASS K., Neuer Beweis des Satzes, dass jede ganze rationale Function einer Veränderlichen dargestellt werden kann als ein Product aus linearen Functionen derselben Veränderlichen, Sitzungsber. Königl. Akad. Wiss. Berlin, 1891, 1085–1101.

[74] WERNER W., On the simultaneous determination of polynomial roots, Lecture Notes Math. 953 (1982) 188–202.

[75] Yakoubsohn J.-C., Simultaneous computation of all the zero-clusters of univariate polynomial, in: Foundations of computational mathematics, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2002, 433–455.

[76] Yamagishi Y., Global convergence of the Durand-Kerner method applied to the equation $z^3 = 0$, J. Comput. Appl. Math. 70 (1996) 67–73.

[77] Zhao F., D. Wang, The theory of Smale's point estimation and the convergence of Durand-Kerner program, Math. Numer. Sinica 15 (1993) 196–206. (in Chinese)

[78] Zheng S., On convergence of the Durand-Kerner's method for finding all roots of a polynomial simultaneously, Kexue Tongbao 27 (1982) 1262–1265.

[79] Zheng S., On convergence of a parallel algorithm for finding the roots of a polynomial, J. Math. Res. Exposition 7 (1987) 657–660. (in Chinese)

Благодарности

Изказвам своята благодарност и признателност към своя научен ръководител проф. д-р Петко Димитров Пройнов, който ме въведе в математическия анализ и итерационните методи, за отделеното време и внимание, ценните забележки и получените знания, умения и опит.

Сърдечно благодаря на семейството си за огромното търпение, разбиране и подкрепа, и особено на моя съпруг, който изтърпя цялото творческо напрежение и ангажираност, свързани с написването на настоящата работа.