ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ

„ПАИСИЙ ХИЛЕНДАРСКИ”

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

КАТЕДРА „МАТЕМАТИЧЕСКИ АНАЛИЗ”

СТОЯН ГЕОРГИЕВ ЗЛАТЕВ

ЛОКАЛЕН АНАЛИЗ И АСИМПТОТИЧНИ СВОЙСТВА НА РЕШЕНИЯТА НА КЛАСОВЕ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ С ПРИЛОЖЕНИЕ В ПОПУЛАЦИОННАТА ДИНАМИКА

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертационен труд
за присъждане на образователна и научна степен “доктор” в област
4. Природни науки, математика и информатика,
професионално направление 4.5. Математика,
Докторска програма Диференциални уравнения

Научен ръководител: доц. д-р Андрей Захариев

Пловдив, 2013 г.

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

УВОД

Изследванията в областта на популационната динамика са били винаги актуални, предвид тяхната важност за редица приложения в екологията, биотехнологиите и медицината. Популационната динамика в най-общ аспект се занимава с еволюцията (изменението във времето) на числеността както на съвкупности от биологични индивиди, така и с изменението във времето на концентрацията на биомаса от микроорганизми. Основна предпоставка в тези изследвания е, че при нормални условия преобладаващата част от популациите имат свойството да се възпроизвеждат неограничено дълго време.

Използването на диференциалните уравнения за моделиране в популационната динамика започва на границата между 18-ти и 19-ти век с работата на T. Malthus [64] и продължава през първата третина на 19-ти век с работите на B. Gompertz [31] и P. Verhulst [87]. Макар, че техните модели имат основно демографска цел, те стават отправни при математическото моделиране на популационната динамика на макро и микробиологично ниво. Ще отбележим, че тези математически модели описват изключително динамиката на изолирани популации или такива на индивидуален растеж.

Фундаменталните изследвания на A. Lotka и V. Volterra [89] от първата четвърт на 20-ти век представени в забележителните им монографии [58] и [88], поставят началото на съвременното математическото моделиране в популационната динамика на съвместно съществуващи биологични видове на базата на техните хранителни (трофични) взаимоотношения. Освен това работите на V. Volterra имат и фундаментално математическо значение с отчитането за пръв път на фактора „закъснение” (от съсредоточен и/или разпределен тип) посредством съответните диференциални и интегро-диференциални уравнения.

В началото на 20-ти век Mihaelis и Menten, като използват принципите на химичната кинетика създават динамичен модел на ензимно-субстратно взаимодействие, в който за пръв път е отчетено свойството „насищане“ на относителната скорост на изменение на взаимодействието, т. е. нейната асимптотична ограниченост отгоре. На тази база Monod [68] формулира постулата, че ензимно-субстратното взаимодействие е определящ фактор за растежа на микроорганизмите. С помощта на този постулат той изгражда следния динамичен модел за периодичното култивиране на микроорганизми, включващ ефекта на насищане:

$$\begin{aligned} s'(t) &= -\alpha\mu(s)x \\ x'(t) &= \mu(s)x \end{aligned}, \tag{0.1.1}$$

където $s(\cdot), x(\cdot): R_+ \to R_+$ и $\mu(\cdot): R \to R$. Със $s(t)$ е означено количеството субстрат (храна), а с $x(t)$ количеството микроорганизми в момента t. Константата $\alpha > 1$ е параметър, чиято реципрочна стойност $Y = \alpha^{-1}$ се нарича икономически коефициент. Функцията $\mu(s)$ се нарича трофична функция и представлява моментната относителна скорост на нарастване на популацията от микроорганизми .

Започналото преди столетие развитие на математическото моделиране в популационната динамика е актуална област за научни изследвания и до днес. Използваните математически апарат и технически средства са претърпели сериозно развитие и усъвършенстване. За актуалността на тази тематика може да се съди по големия брой публикации в специализираните списания (голяма част от тях с висок импакт-фактор), както и по сериозното количество монографии, отразяващи този клон от човешкото познание. Актуалността на популационната динамика особено нарасна в последното столетие, както поради екологичните проблеми предизвикани от често пъти безконтролната човешка дейност така и от широкото приложение на биотехнологиите във всички сфери на живота.

Развитието на математическия апарат, използван за моделиране на биологични обекти и явления се обуславя от нарасналите възможности на математиката, информатиката и изчислителната техника. Това позволява да се моделират по-сложни биологични и екологични процеси и съответно по-точно да се прогнозира тяхната динамика. На тази основа са установени редица математически факти като възникване на изолирани периодични колебания (автоколебания), популационни вълни, странни атрактори, катастрофи и други, част от които се наблюдават в реалния свят.

От друга страна, биологичните и екологичните системи поставят нови и по-трудни за решаване проблеми, изискващи използването на по-мощен и прецизен математически апарат. В моделите на популационната динамика от класически тип, представени с обикновени автономни диференциални уравнения и системи от тях, се акцентира основно върху вътрешните фактори за реалната система, които обуславят нейната динамика. Тези фактори са вътревидовите и междувидовите отношения. По този начин до голяма степен се изключва влиянието на околната среда върху динамиката на реалната система.

Използването на качествения анализ на нелинейни модели и избора на трофична функция, отразяваща явлението „насищане“ позволява да се отчете влиянието на околната среда и да се решат редица основни задачи за моделите, които дават съдържателна информация относно еволюцията на разглежданата популация. При нелинейните популационни модели с екологична насоченост ефекта на насищане се отчита, като се използва трофична функция притежаваща горна хоризонтална асимптота.

Влиянието на околната среда се реализира като фактор, който обуславя съществуването на решения със специално асимптотично поведение – постоянни (равновесни), монотонни или осцилиращи решения (в частност периодични, под формата на гранични цикли). Важна роля в отчитането на ефектите от това влияние, играят изследването на тяхната устойчивост или неустойчивост, а също така и анализа на фазовите им портрети.

От средата на миналия век при моделиране на процеси от популационната динамика интензивно започват активно да се използват функционално-диференциалните уравнения и системи, с цел да се прецизира и отрази по-точно въздействието на околната среда върху вътрешните фактори на моделираната система. Този подход дава възможност да се отрази влиянието и на външните фактори върху нейната динамика. Разглеждането на нелинейни динамични модели със закъсняващ аргумент позволи да се повиши адекватността на моделите, както и да бъдат обяснени механизмите на явления като насищане, инхибиране и други такива, важни за приложенията в биотехнологичните процеси.

Математическото моделиране на физиологичните процеси и изкуственото култивиране на микроорганизми (бактерии) са важни части от общата популационна динамика и медицината поради тяхната непосредствена връзка със здравеопазването и прехраната на човечеството. Ето защо една съществена част от представения труд е посветена на качествен и количествен анализ на модели от този род.

Обекти на изследване в настоящата работа са модели, които обобщават някои от утвърдените динамични модели на физиологични и микробиологични процеси, изразени чрез функционално-диференциални уравнения и системи със съсредоточени или разпределени закъснения.

Целите на изследванията в този дисертационен труд са:

1. Разширяване възможностите на съществуващите модели чрез изграждане на по-общи такива и получаване на нови резултати относно съществуването и единствеността на техните решения с определена асимптотична природа (положителни, ограничени, монотонни, неосцилиращи).

2. Провеждане на изследване относно асимптотичното поведение на съвкупността от положителни решения (персистентност, перманентост и равномерна перманентност) на разглежданите модели.

Задачите, които трябва да се решат за постигане на тази цел в настоящата работа са:

А. Да се формулират достатъчни условия за съществуване и единственост на положително решение, на началната задача за разглежданите нелинейни модели, с прекъснати начални условия, като началните функции са само неотрицателни, ограничени и измерими по Борел.

Б. Намиране на достатъчни условия за персистентност, перманентност на положителните решения на началната задача за обобщените модели на Mackey–Glass, както и равномерна перманентност на множеството от положителните решения на даден модел при неотрицателни начални функции.

В. Намиране на достатъчни условия за съществуване на ограничени и неограничени неосцилиращи решения на автономна система линейни диференциални уравнения от неутрален тип с разпределено закъснение, в случаите когато функциите с ограничена вариация имат сингулярна част и не са монотонни относно логаритмичната норма.

Дисертационният труд се състои от увод , три глави, заключение, списък на публикациите по проекта за дисертационен труд и използвана литература.

Глава 1 има обзорен характер и се състои от два параграфа. В нея са изложени всички основни определения и твърдения използвани при изложението в глави 2 и 3. С цел по голяма яснота на изложението е направена и кратка историческа ретроспекция на разглежданите теми.

В първи параграф на Глава 1 са унифицирани използваните в дисертационния труд означения и дадени основни математически определения и твърдения, които са необходими при изложението по долу.

Във втори параграф на Глава 1 са посочени класическите математическите модели, чиито обобщения са предмет на изследване в глава 2, основните принципи и концепции при тяхното изграждане и изследване, а така също и основните резултати от анализа на тези модели в исторически аспект.

В Глава 2 са изследвани обобщения на три основни динамични модела съответно на физиологичния процес свързан с респираторната динамика, хематопоезиса (производството и развитието на кръвните клетки) и на периодичното култивиране на микроорганизми. Първите два модела са били предмет на изследване в работите на редица автори [7] – [22], [30] – [39], [51] – [57], [61] – [63], което обуславя тяхната актуалност. В горецитираните работи са формулирани редица отворени проблеми представляващи обобщения на разгледаните от тези автори модели. В този аспект изследванията в параграфи 1 и 2 на Глава 2 на двата модела, описани с нелинейни функционално-диференциални уравнения, както и на свързаните с тях задачи са проведени с оглед да се решат част от поставените проблеми.

В първи параграф на Глава 2 е изследвано едно обобщение на респираторния модел на Mackey – Glass изследван в [18]. Формулирана е начална задача с прекъснати начални неотрицателни функции и е доказано че тя притежава единствено, глобално, положително абсолютно непрекъснато решение. Получени са достатъчни условия са персистентност (ограниченост отдолу), перманентност (двустранна ограниченост) и равномерна перманентност (равномерна двустранна ограниченост) на съвкупността от всички положителни решения на началната задача. Даден е пример, който показва, че въведените условия са съществени и не могат да бъдат отслабени, дори и в случая когато модела представлява обикновено диференциално уравнение.

В параграф втори на Глава 2 е изследвано обобщение на друг модел на Mackey – Glass разгледан в [16], описващ динамиката на хематопоезиса (производството и развитието на кръвни клетки) в случая на монотонна обратна връзка. Както и в предходния параграф е формулирана начална задача с прекъснати начални неотрицателни функции и е доказано, че тя притежава единствено, глобално, положително абсолютно непрекъснато решение. Получени са достатъчни условия за персистентност (ограниченост отдолу), перманентност (двустранна ограниченост) и равномерна перманентност (равномерната двустранна ограниченост) на съвкупността от всичките положителни решения на началната задача.

В параграф трети на Глава 2 е разгледан модел, който обобщава класическия модел на Monod с отчитане на смъртността в микробиологичната популация. Класическият модел на Monod се изследва от различни автори [4], [25], [26], [29], [43], [47] – [49], [59], [65], [68] до днешни дни, което говори за неговата актуалност. Основният смисъл на направеното обобщение е отчитането на важния фактор за всеки анализ на динамиката на дадена популация - времето на средна продължителност на живота на индивидите от разглежданата популация от микроорганизми в дадена среда, който фактор не е отчетен в класическия модел на Monod. Важността на този фактор са обуславя от две неща - от възможността той да бъде обективно определен на базата на експерименти, както и от възможността да се отчете различната средна продължителност на жизнения цикъл на индивидите от различните популации от микроорганизми. Анализът е проведен за по-широк клас трофични функции. Това дава възможност за увеличаване на нелинейността на тези функции, което помага за по точното приближение на експерименталните данни. От друга страна общността на изложението откроява съществените свойства и качества на трифичните функции, които са необходими за приложенията .

Изследванията в Глава 3 са посветени на съществуването на ограничени и неограничени неосцилиращи решения на неутрална линейна автономна система с разпределено закъснение от нечетен ред. Разгледаната система представлява обобщение на някои модели разгледани в монографията [33].

В параграф първи от глава 3 са дадени някои от специфичните определения и е доказана основната техническа лема, която се използва при доказването на почти всички резултати в следващите два параграфа от тази глава.

В параграф втори на глава 3 са получени експлицитни достатъчни условия, гарантиращи съществуването на неограничени неосцилиращи решения на разглежданата система.

В параграф трети на глава 3 са дадени практически лесно проверими достатъчни условия, които гарантират съществуването на ограничени неосцилиращи решения.

Приведените в главата примери освен, че илюстрират получените в нея резултати, показват че въведените допълнителни условия са съществени. Освен това от разгледаните примери се вижда, че тези условия не налагат допълнителни рестрикции в частните случаи на система (3.1.1) изследвани от други автори.

ГЛАВА 1.

ОСНОВНИ ОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ИСТОРИЧЕСКИ ПРЕГЛЕД НА ТЕМАТИКАТА.

§1.1. Основни означения, определения и теореми.

В изложението по-долу ще използваме следните означения:

$R = R^1$ е множеството на реалните числа, т.е. $R = (-\infty, \infty)$, $R_+ = [0, \infty)$;

N е множеството от естествените числа;

R^n е n-мерното евклидово пространство.

RL^n е реалното линейно пространство от $n \times n$ матриците $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n, a_{ij} \in R^1, n \in N$.

$BV[a,b]$ е линейното пространство от матричните функции $v:[a,b] \to RL^n$ с ограничена вариация в интервала $[a,b]$, където $a,b \in R^1, a < b.$

Ако $A \in RL^n$, то означаваме с $\rho_j = \sum_{j \neq k=1}^{n} \left| a_{jk} \right|$, $j = \overline{1,n}$.

Теорема1.1.1. (Gerschgorin [46]) Нека матрицата $A \in RL^n$. Тогава са в сила следните твърдения:

1. Всяка собствена стойност на матрицата A лежи в поне един от кръговете $\left| z - a_{jj} \right| \le \rho_j$, $j = \overline{1,n}$ на комплексната равнина.
2. Множество от m кръга, непресичащи се с останалите $n-m$ кръга, съдържа m и само m собствени стойности на матрицата A.□

Нека $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in RL^n$ е произволна матрица, а $x \in R^n$ е произволен вектор-стълб. Тогава

$A^T = (a_{ji})$ е транспонираната матрица на A;

$x^T = (x_1, \ldots x_n)$ транспонирания вектор на x.

$Sp(A)$ означава спектъра на A;

$S(A) := \sup\{\operatorname{Re}\lambda \mid \lambda \in Sp(A)\}$ - спектралната граница на А; $\| x \|_k = (\sum_{i=1}^{n} | x_i |^k)^{\frac{1}{k}}, 1 \le k < \infty$,

$\| x \|_\infty = \max_{1 \le i \le n}\{| x_i |\}$,

$\| A \|_k = \sup_{x \in R^n, x \neq 0} \frac{\| Ax \|_k}{\| x \|_k}, k = 1, 2, \ldots, \infty$.

Дефиниция 1.1.2.[23] Функцията $\mu_k : RL^n \to R, k = 1, 2, \ldots, \infty$, дефинирана с равенството

$$\mu_k(A) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\| I + \varepsilon A \|_k - 1}{\varepsilon}, A \in RL^n, k = 1, 2, .., \infty,$$

където $I \in RL^n$ е единичната матрица, се нарича логаритмична норма (мярка на Лозинский).

В лемата по-надолу са посочени основните свойства на логаритмичната норма за квадратна матрица, които ще използваме в Глава 3.

Лема 1.1.3. [92], [13]. Нека $A, B \in RL^n, k = 1, 2, .., \infty, \alpha \ge 0, \beta \in R^1$. Тогава са в сила следните релации:

i. $\mu_k(\alpha A + \beta I) = \alpha \mu_k(A) + \beta$

ii. $-\| A \|_k \le -\mu_k(-A) \le \mu_k(A) \le \| A \|_k$

iii. $\mu_k(A) + \mu_k(-A) \ge 0$

iv. $| \mu_k(A) - \mu_k(B) | \le \| A - B \|_k$

v. $-\mu_k(-A) \le \operatorname{Re}\lambda \le \mu_k(A)$ за всяко $\lambda \in Sp(A)$

vi. $\max\{\mu_k(A)-\mu_k(-B), -\mu_k(-A)+\mu_k(B)\} \le \mu_k(A+B) \le \mu_k(A)+\mu_k(B)$

vii. $\mu_1(A) = \sup_{1\le j\le n}\{a_{jj} + \sum_{i=1,i\ne j}^{n} |a_{ij}|\}$, $\mu_2(A) = \frac{1}{2}S(A+A^T)$,

$\mu_\infty(A) = \sup_{1\le i\le n}\{a_{ii} + \sum_{j=1,i\ne j}^{n} |a_{ij}|\}$.□

По-надолу чрез $\mu(A)$ ние ще означаваме коя да е от нормите $\mu_k(A)$, $k = 1,2,...,\infty$.

Забележка 1.1.4. Логаритмичната норма (мярката на Лозинский) не е норма в общоприетия смисъл, защото тя може да приема и отрицателни стойности. Добре известно е, че за всяка квадратна матрица логаритмичната норма на A е свързана с нейната числова граница (виж [60]). Нещо повече, от Лема 1.1.3. непосредствено следва, че логаритмичната норма $\mu_k : LR^n \to R^1$ е непрекъсната функция, ако топологията в RL^n е индуцирана от нормата $\|.\|_k, k = 1,2,...,+\infty$.

Дефиниция 1.1.5. Функцията $w \in BV[a,b]$ ще наричаме монотонно растяща (намаляваща) върху $[a,b]$ относно логаритмичната норма μ, ако за всеки две числа $c,d \in [a,b]$ неравенството

(1.1.1) $\mu(w(c)-w(d)) \le 0$ ($\mu(w(d)-w(c)) \le 0$)

е изпълнено и от (1.1.1) следва неравенството $c \le d$. Ако неравенството (1.1.1) е строго, то казваме, че функцията w е строго растяща (намаляваща) относно логаритмичната норма μ .

Дефиниция 1.1.6. Ще казваме, че едно свойство P е финално изпълнено за някоя функция $f:[-r,\infty) \to R$, ако съществува точка $t_p \ge 0$ такава, че за функцията f свойството P е в сила за всяко $t \ge t_p$.

Нека K е подмножество на M , а $f : M \to R^n$. Тогава

$f|_K$ означава рестрикцията на функцията f върху K , а $\|f\| = \sup_{t\in M}\|f(t)\|_2$

Дефиниция 1.1.7. Всяко свързано подмножество на R , което съдържа повече от една точка ще наричаме интервал.

Нека $J \subseteq R$ е произволен интервал.

$C(J,R^n)$, $n \in N$ означава линейното пространство от всички непрекъснати функции $F : J \to R^n$.

$AC(J,R^n)$, $n \in N$ означава линейното пространство от всички функции $F : J \to R^n$, за които рестрикцията $F|_{J^*}$ е абсолютно непрекъсната функция във всеки затворен интервал J^*, $J^* \subseteq J$.

$C^k(J,R^n)$, $n,k \in N$ означава линейното пространство от всички функции $F : J \to R^n$, които имат непрекъснати производни в интервала J до ред k включително.

Дефиниция 1.1.8. Нека $J \subseteq R$ е произволен интервал. Ще казваме, че едно свойство е изпълнено почти навсякъде в J , ако множеството J^*, $J^* \subset J$ за което свойството не е изпълнено, има мярка нула ($meas(J^*) = 0$).

§1.2. Исторически преглед на проблематиката.

За да обяснят регулирането и управляващите механизми на някои физиологични системи Mackey и Glass първи създават нови математически модели във фундаменталния си труд [61]. За описание на феномена Cheyne-Stokes (периодично дишане) е предложен следния модел на респираторна динамика:

(1.2.1) $$\frac{dy}{dt} = \lambda - \alpha_0 V_m y(t)\frac{y^n(t-\tau)}{\theta^n + y^n(t-\tau)},$$

където с $y(t)$ е означена артериалната концентрация на CO_2, а с $\lambda > 0$ е означена постоянната скорост на производство на CO_2 в организма. $V_m > 0$ е максималната вентилационна скорост (на извеждане) на CO_2 от организма, а $\tau > 0$ е времето между окисляването на кръвта в белите дробове и стимулирането на хеморецепторите в продълговатия мозък. Параметрите α_0, θ и n също са положителни и служат за синхронизиране на вентилационната функция $V(y) = \alpha_0 V_m \dfrac{y^n}{\theta^n + y^n}$ с експерименталните данни. При $n \le 1$ графиката на функцията $V(y)$ е от хиперболичен тип, а при $n > 1$ графиката е от сигмоидален (S – образен) тип. И в двата случая функцията $V(y)$ е строго растяща, като $\lim_{y\to\infty} V(y) = \alpha_0 V_m$ и $V(y) \le \alpha_0 V_m$. Повече подробности за природата на модела (1.2.1) могат да се намерят в работи [61], [63], [47] и [86], а резултати от математическите изследвания на този модел в работи [33], [48], [49] и [54].

В една от последните работи върху този модел [18] е направен обзор на резултатите от досегашните му изследвания, а също така са изследвани някои негови обобщения. Основната част на споменатата работа е посветена на изследването на следното обобщение на модела (1.2.1):

(1.2.2) $$\frac{dx}{dt} = \alpha(t) - \beta(t)x(t)\frac{x^n(h(t))}{1 + x^n(h(t))}, t \ge 0 .$$

В работата е направен кратък преглед на някои известни резултати по устойчивост и осцилации. Изяснени са редица въпроси от фундаментален и качествен характер свързани с решенията на уравнение (1.2.2). За модела (1.2.2) са изследвани съществуване, положителност и перманентност на решенията, а също така осцилации, устойчивост. В края на работата са посочени някои отворени проблеми свързани с различни обобщения на уравнението (1.2.2). С един от тези отворени проблеми са свързани и част от изследванията в този труд (§ 2.1).

За да моделират хематопоезиса (процеса на производство, размножаване и специализация на кръвните клетки в костния мозък), Mackey и Glass [62] са предложили две уравнения,тъй като природата на регулаторните механизми при производството на кръвни клетки е противоречива.

Модел 1. Хематопоезис с монотонна скорост на производство:

(1.2.3) $$\frac{dy}{dt} = -\gamma y(t) + \frac{F_0 \theta^n}{\theta^n + y^n(t-\tau)}$$

Уравнение (1.2.3) описва модел на хематопоезис с монотонна обратна връзка.

Модел 2. Хематопоезис с унимодална скорост на производство:

(1.2.4) $$\frac{dy}{dt} = -\gamma y(t) + \frac{\beta \theta^n y(t-\tau)}{\theta^n + y^n(t-\tau)}$$

Уравнение (1.2.4) описва модел на хематопоезис с немонотонна обратна връзка.

В тези уравнения $y(t)$ е плътността на циркулиращите в кръвта клетки. Константите n, β, γ и θ са положителни, като се θ нарича параметър на формата, γ е присъща (вътрешна) скорост на разрушаване на клетките, а τ е закъснението между производството на незрели клетки в костния мозък и тяхното съзряване за циркулиране, F_0 само за модел (1.2.3) е максималната скорост на производство. Параметрите на моделите се определят на база опитни данни, свързани с хематопоезисната дейност. В работите [16] и [12] за Модел 1 и Модел 2 е направен кратък преглед на някои известни резултати по устойчивост и осцилации. Освен това са изследвани и редица въпроси от фундаментален и качествен характер свързани с неавтономни обобщения на уравнения (1.2.3) и (1.2.4). Положителността на решенията и глобалната асимптотична устойчивост са изследвани за по общи класове от уравнения, а в качеството на приложение е разгледано уравнение (1.2.3) и негови непосредствени обобщения. Тези модели са изследвани за персистентност, перманентност равномерна перманентност, както и осцилирането около положително равновесно положение. Различни аспекти на автономните уравнения (1.2.3), (1.2.4), както и някои неавтономни техни обобщения са изследвани в други работи като [32], [34], [35], [52], [53], [75]-[77], [84], [92], [95], [100], като основният фокус е върху съществуването на положителни или периодични решения, както и анализ на тяхната устойчивост. В края на работите [16] и [12] , са посочени някои отворени проблеми свързани с различни обобщения на уравненията (1.2.3) и (1.2.4). С един от тези отворени проблеми са свързани и част от изследванията в този труд (§ 2.2).

Добре известно е , че класическите микробни модели на растеж с използване трофични функции от типа на Monod описват адекватно биологичните процеси при наличието на определени благоприятни условия, позволяващи на микроорганизмите да са в състояние активно да произвеждат специфични ензими необходими за разграждането и потреблението на хранителни субстрати. При тези условия те се делят и размножават с максимално възможната скорост. Класическият модел (0.1.1) на Monod е бил предмет на детайлно изучаване [5], [25], [67], [69], [93].

Възможно е околната среда в биореактора понякога да стане неблагоприятна за популцията - било поради изчерпване на хранителните вещества, или поради прекомерно изобилие от хранителни вещества (субстрат). В такива случаи микробния растеж може да бъде подтиснат и биотехнологичните процеси да излязат извън контрол. При неблагоприятни условия моделите от типа на Monod не отразяват адекватно инхибирането на растежа на микробите предизвикано от субстрата, а също така и динамиката на кореспондиращите биологични процеси. Основната цел на предложените модификации на моделите от типа на Monod в различни направления, е да се отрази подходящо процеса на инхибиране на микробния растеж[4], [29], [47], [65], [71] . Този проблем е предмет на изследване в редица работи, в които са въведени и изучени различни варианти на моделите на Monod, вземайки под внимание и етапите на микробен растеж при неблагоприятни условия. Един от възможните подходи е използването на модели от ензимната кинетика. Микроорганизмите произвеждат ензими, така че е естествено да се търсят аналогии между модели от микробен растеж и тези на ензимната кинетика. Кинетиката на ензимните модели в простата им форма (когато ензимите притежават само едно активно място) обикновено е представена в два варианта.

В първия вариант динамиката на поемане субстрата е описана с едно диференциално уравнение за концентрацията на субстрата, което се нарича уравнение на Michaelis-Menten или ММ-закон на кратко. ММ-закона се съсредоточава върху основната динамика и не казва нищо за динамиката на останалите три компонента - двете форми на ензим (свободна и свързана) и продукта.

Вторият вариант е представен от четири диференциални уравнения описващи динамиката на всичките четири компонента: субстрата, двете форми на ензима, както и на продукта. Този вариант е известен като модел на Henri-Michaelis-Menten е, HMM модел за кратко. В работата [65] е разгледано взаимодействието на HMM модела, с ММ-закона.

Другият подход е усъвършенстването на биореакторните модели. Изследвани са редица биореакторни модели относно свойствата на техните решения. Основен интерес представляват важните модели на биореактори за периодично (преливно - отливно) микробно култивиране и с отчитане на смъртност от вида

$$\begin{aligned} s'(t) &= -\alpha\mu(s(t))x(t) \\ x'(t) &= \mu(s(t))x(t) - k_d x(t) \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

където, $s(0) = s_0 > 0$, $x(0) = x_0 > 0$, $\alpha > 1$, $k_d > 0$ е постоянната скорост на измиране на микроорганизмите, а трофичната функция $\mu(s)$ в (1.2.5) е дефинирана за $s \geq 0$, $\mu(s) > 0, s > 0$ и $\mu(0) = 0$. Функцията $\mu(s)$ в (1.2.5) може да бъде от монотонен или унимодален тип (виж [4]). Използваните при изследванията основни конкретни видове на функцията $\mu(s)$ са следните четири варианта:

1) $\mu_M(s) = \mu^* \dfrac{s}{K+s}$ - функция на Monod;

2) $\mu_W(s) = \mu^* \dfrac{s\left(1+\beta\dfrac{s}{K_i}\right)}{K+s+\dfrac{s^2}{K_i}}$ - функция на Webb;

3) $\mu_H\ (s) = \mu^* \dfrac{s}{\left(K+s\right)\left(1+\dfrac{s}{K_i}\right)}$ - функция на Haldane;

4) $\mu_A\ (s) = \mu^* \dfrac{s}{K+s+\dfrac{s^2}{K_i}}$ - функция на Andrews.

където в модела на Monod μ^* е максималната скорост на производството на микроорганизми, $K > 0$ константа на полунасищане ($\mu(K) = \dfrac{\mu^*}{2}$) . Константата $K_i > 0$ е параметър, чрез който се отразява инхибиращото (понижаващото) влияние на концентрацията на субстрата върху темпа на нарастване на микроорганизмите, а $\beta \geq 0$ е безразмерен коефициент. Както посочват авторите на цитираната работа [4], трофичните функции 3) и 4) са еквивалентни с точност до константи. От друга страна, функцията 4) се получава от 2) при $\beta = 0$, а функцията 1) също се получава от 2) при $K_i \to \infty$. В този смисъл функцията на Webb поражда останалите три функции. Това определя характерните свойства на четирите функции $\mu\,(s)$: $\mu(0) = 0, \quad \mu(s) > 0$ при $s > 0$.

Съществено различие има само между строго растящата функция 1) с граница $\lim\limits_{s\to\infty} \mu(s) = \mu^*$ и останалите две функции 3) и 4), които са унимодални и $\lim\limits_{s\to\infty} \mu_H(s) = \lim\limits_{s\to\infty} \mu_A(s) = 0$. Що се отнася до функцията $\mu_w(s)$, то $\lim\limits_{s\to\infty} \mu_w(s) = \beta\mu^*$ и в зависимост от стойностите на β и K_i , тя може да бъде монотонна или унимодална .

Неутралните диференциални уравнения със закъснения (НФДУ) намират широко приложение при решаване на задачи в биологията, физиката и други области на живота. Например, при моделиране на популационна динамика, невромеханични системи, преносни мрежи с линии без загуба и др. [6], [33], [41], [46], [48], [97], [99]. Първото задълбочено изследване на линейни системи с разпределено закъснение (фундаментална теория, устойчивост, осцилационно поведение и т.н.) е направено от А. Д. Мишкис в неговата фундаментална монография [70].

Добре известно е, че изследването на асимтотичните свойства на решенията на НФДУ и НФДС общия случай е доста по-комплицирано отколкото изследването на уравнения от закъсняващ тип. Така например, при изследването на устойчивостта на тривиалното решение на линейно НФДУ Громова и Зверкин в [103] доказаха, че едно линейно НФДУ може да има неограничени решения дори когато съответното му характеристично уравнение има само чисто имагинерни корени (виж също [7] и [8]), резултат който няма аналог при линейните ФДУ и ОДУ.

При изследването на осцилационните свойства на НФДУ в А. Захариев и Д. Байнов публикуват в [102] пример, че условието от класическата осцилационната теория за ОДУ и ФДУ гарантиращо осцилацията на всички решения в случая на НФДУ не е достатъчно. Нещо повече същият пример показва, че въведените в [102] условия са свързани със спецификата на НФДУ и в общия случай е невъзможно да бъдат отслабени. Като важна част от качествената теория, осцилационната теория на функционално-диференциалните уравнения е получила сериозно внимание – за повече подробности виж например монографиите [1], [2], [33], [38] и литературните справки в тях.

ГЛАВА 2.

АНАЛИЗ НА ДИНАМИЧНИ МОДЕЛИ НА ПРОЦЕСИ ОТ ФИЗИОЛОГИЯТА И МИКРОБИОЛОГИЯТА

В настоящата глава са разгледани обобщения на моделите на Mackey-Glass, описващи процесите на респираторната динамика и хематопоезиса. Разгледано е и едно обобщение на модела на Monod с отчитане на смъртността на микроорганизмите от анализираната популация.

§2.1. Обобщен модел на Mackey- Glass, описващ респираторната динамика.

В настоящия параграф е разгледано нелинейното уравнение

(2.1.1) $\dfrac{dx(t)}{dt} = \alpha(t) - \beta(t)x(t)\dfrac{x^p(h(t))}{1+x^n(g(t))}, t \geq 0$,

което е посочено в работата [18] като едно от възможните обобщения на респираторния модел на Mackey- Glass, изследван в нея. За (2.1.1) при неотрицателна начална функция е доказано съществуването на единствено глобално абсолютно непрекъснато положително решение. Изследван е и проблема с ограничеността на множеството от положителните решения на уравнението (2.1.1). Приведен е пример, който показа, че въведените условия за перманентност са съществени и не могат да бъдат отслабени дори и в случая на обикновени диференциални уравнения. В този параграф са обобщени резултатите, публикувани в [45].

Нека $\mathrm{T} = -\min(\inf_{t\in R_+} h(t), \inf_{t\in R_+} g(t)) < \infty$, $T > 0$.

Разглеждаме уравнение (2.1.1) с началното условие

(2.1.2) $x(t) = \varphi(t), t \in [-\mathrm{T}, 0]$,

където $\alpha, \beta : R_+ \to R_+$, $h, g : R_+ \to [-\mathrm{T}, \infty)$, $n, p > 0$, а $\varphi : [-\mathrm{T}, 0] \to R_+$.

Дефиниция 2.1.1. Функцията $x(t) : [0, t_x) \to R$, $t_x > 0$ $\mathrm{x} \in \mathrm{AC}([0, \mathrm{t_x}), \mathrm{R})$ се нарича решение на началната задача (2.1.1), (2.1.2) в интервала $[0, t_x)$, ако удовлетворява уравнението (2.1.1) за почти всички $t \in (0, t_x)$ и началното условие (2.1.2) за $t \in [-T, 0]$.

Ще казваме, че са изпълнени условията (S), ако са изпълнени следните условия:

S1. Функциите $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ са измерими по Лебег и локално съществено ограничени.

S2. Функциите $h(t)$ и $g(t)$ са измерими по Лебег, локално ограничени, удовлетворяващи неравенствата $h(t) \leq t, g(t) \leq t$ за $t \geq 0$. Съществува константа $r > 0$ такава, че $\sup_{t\in R^+}(t - h(t)) \leq r < \infty$ и $\sup_{t\in R^+}(t - g(t)) \leq r < \infty$.

S3. Функцията $\varphi(t)$ е ограничена, неотрицателна, измерима по Борел и $\varphi(0) > 0$.

Лема 2.1.2. Нека са изпълнени условията (S).

Тогава съществува единствено положително абсолютно непрекъснато решение на началната задача (2.1.1), (2.1.2), дефинирано в интервала R_+ .

Дефиниция 2.1.3. [39] Ще казваме, че едно положително решение на уравнение (2.1.1) е персистентно, ако $\liminf\limits_{t\to\infty} x(t) > 0$. Едно персистентно решение ще наричаме перманентно, ако $\limsup\limits_{t\to\infty} x(t) < \infty$.

Дефиниция 2.1.4. [39] Ще казваме, че всички положителни решения на дадено уравнения са равномерно перманентни, ако съществуват константи $m > 0$ и $M > 0$, че за всяко перманентно $x(t)$ имаме $m \le \liminf_{t\to\infty} x(t) \le \limsup_{t\to\infty} x(t) \le M$.

Теорема 2.1.5. Нека са изпълнени следните условия

1. В сила са условия (S).

2. Съществуват положителни числа a, A, b и B такива, че $0 < a \le \alpha(t) \le A < \infty$ и $0 < b \le \beta(t) \le B < \infty$.

3. $p \ge n$

Тогава всички решения на началната задача (2.1.1), (2.1.2) са перманентни.

Теорема 2.1.6. Нека са изпълнени следните условия:

1. В сила са условията (S)

2. Съществуват положителни числа a, A, b и B такива, че $0 < a \le \alpha(t) \le A < \infty$ и $0 < b \le \beta(t) \le B < \infty$.

3. $p < n < p+1$

Тогава всички решения на началната задача (2.1.1), (2.1.2) са перманентни.

Пример 2.1.6. Да разгледаме началната задача (2.1.1), (2.1.2) в случаят когато $h(t) = g(t) = t, t \ge -1, p = 1, n = 2, \alpha(t) \equiv \beta(t) \equiv 1, t \in [0,\infty)$.

$$(2.1.9)\quad \begin{aligned} &\frac{dx(t)}{dt} = 1 - \frac{x(t)}{1+x^2(t)}, \quad t \ge 0 \\ &\phi(t) \equiv x(0) = \sqrt[3]{2\sqrt{2}+3} + \sqrt[3]{2\sqrt{2}-3}, \quad t \in [-1,0] \end{aligned}$$

Началната задача (2.1.9) удовлетворява условията 1 и 2 на Теореми 2.1.5 и 2.1.6, но не и техните условия 3, защото $p+1 = n$. Единственото решение на тази задача се дава от уравнението $x^3 + 3x - (3t + 4\sqrt{2}) = 0$ и понеже $3x^2 + 3 > 0$ за всяко $x \in R$, то кубичното уравнение има единствен положителен корен за всяко $t \in R_+$. Следователно за решението имаме

$$(2.1.9)\quad \begin{aligned} &x(t) = \sqrt[3]{\frac{3t+4\sqrt{2}}{2} + \sqrt{(1+(\frac{3t+4\sqrt{2}}{2})^2}} \\ &+\sqrt[3]{\frac{3t+4\sqrt{2}}{2} - \sqrt{(1+(\frac{3t+4\sqrt{2}}{2})^2}} \end{aligned}$$

Непосредствено се вижда, че това решение е неограничено отгоре $t \in [0,\infty)$, т.е. то е само персистентно, но не и перманентно. Този пример илюстрира, че ако $p+1 \le n$, то началната задача (2.1.1), (2.1.2) може да има неограничено решение дори в случая когато (2.1.1) е обикновено диференциално уравнение. Следователно условията 3 на Теореми 2.1.5 и 2.1.6 са съществени за тяхната валидност.

Теорема 2.1.7. Нека са изпълнени следните условия:

1. В сила са условията (S)

2. Съществуват положителни числа a, A, b и B , такива че $0 < a \le \alpha(t) \le A < \infty$ и $0 < b \le \beta(t) \le B < \infty$.

3. Изпълнено е едно от следните условия:

3.1. $p \ge n$;

3.2. $p < n < p+1$.

Тогава всички решения на началната задача (2.1.1), (2.1.2) са равномерно перманентни.

§2.2. Обобщен модел на Mackey- Glass, описващ хематопоезиса

В настоящия параграф се изследва нелинейното уравнение

(2.2.1) $x'(t) = -\alpha(t)x(t) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\beta_k(t)}{1 + x^n(h_k(t))}$, $t \geq 0$,

$n > 0$, $\alpha, \beta_k : R^+ \to R^+$, $h_k : R^+ \to [-h, \infty), k = 1, \ldots, m$;

Частен случай на (2.2.1) е изследван в [16], като уравнението (2.2.1) е посочено в цитираната статия, като възможно обобщение на модела на Mackey- Glass описващ хематопоезиса в случаите на монотонна обратна връзка. В случая когато началната функция е неотрицателна е доказано съществуването на единствено глобално абсолютно непрекъснато положително решение. Изследван е и проблема с ограничеността на множеството от положителните решения на уравнението (2.2.1).

Нека $h = -\min_{1 \leq k \leq m}(\inf_{t \in R_+} h_k(t)) < \infty$, $h > 0$.

Разглеждаме уравнението (2.2.1) с началното условие

(2.2.2) $x(t) = \varphi(t)$, $t \in [-h, 0]$,

където функцията $\varphi : [-h, 0] \to R_+$.

Дефиниция 2.2.1. Функцията $x(t) : [0, t_x) \to R$, $t_x > 0$ $x \in AC((0, t_x), R)$ се нарича решение на началната задача (2.2.1), (2.2.2) в интервала $[0, t_x)$, ако удовлетворява уравнението (2.2.1) за почти всички $t \in (0, t_x)$ и началното условие (2.2.2) за $t \in [-h, 0]$.

Ще казваме, че са изпълнени условията (S), ако са изпълнени следните условия:

S1. Функциите $\alpha(t)$ и $\beta_k(t), k = 1, \ldots, m$, са измерими по Лебег и локално съществено ограничени.

S2. За всяко k, $k = 1, \ldots, m$ функциите $h_k(t)$ са измерими по Лебег, ограничени и за всяко $t \geq 0$ удовлетворяват неравенствата $h_k(t) \leq t$.

S3. Съществува константа $r > 0$ такава, че $\sup_{t \in R^+}(t - h_k(t)) \leq r < \infty, k = 1, \ldots, m$.

S4. Функцията $\varphi(t)$ е измерима по Борел, неотрицателна, ограничена и $\varphi(0) > 0$.

Лема 2.2.2. Нека са изпълнени условията (S).

Тогава началната задача (2.2.1), (2.2.2) има единствено положително решение $x \in AC(R_+, R_+)$.

Теорема 2.2.3. Нека са изпълнени следните условия:

1. Изпълнени са условията (S).
2. Съществуват положителни константи a, A, b и B такива, че са изпълнени неравенствата $0 < a \leq \alpha(t) \leq A < \infty$ и $0 < b \leq B(t) \leq B < \infty$, за всяко $t \in R^+$, където функцията $B(t)$ е дефинирана с равенство (2.2.4).

Тогава всички положителни решения на началната задача (2.2.1), (2.2.2) са равномерно перманентни с константи

(2.2.5) $M = \frac{B}{a}$, $m = \frac{b}{A[1 + \left(\frac{B}{a}\right)^n]}$.

§2.3. Модифициран модел Monod на системата "субстрат-микроорганизми"

В този параграф ще изследваме биореакторен модел за периодично (преливно - отливно) микробно култивиране с отчитане на смъртността описан със системата

$$x'(t) = \mu(s(t))x(t) - k_d x(t-\tau)$$
$$s'(t) = -\alpha\mu(s(t))x(t) \tag{2.3.1}$$

с начално условие

(2.3.2) $x(t) = \varphi(t)$, $s(t) = \psi(t)$, $t \in [-\tau, 0]$,

където $\tau, k_d > 0, \alpha > 1$, $\varphi, \psi : [-\tau, 0] \to R_+$, $\mu : R \to R,$ с $s(t)$ е означено количеството на хранителния субстрат, а с $x(t)$ означаваме числеността на популацията от микроорганизми.

Основните резултати при анализа на известните биореакторни модели за периодично (преливно - отливно) микробно култивиране и с отчитане на смъртността описвани със системата обикновени диференциални уравнения (0.1.1) са пряко свързани свързани с възможността за нейното експлицитно интегриране. Това позволява установяване на явни зависимости за $x = x(s)$ и $t = t(s)$ в случаите когато трофичната функция $\mu(s)$ е конкретна. [4], [25], [65], [68], [93].

Предложеният модел (2.3.1) обобщава класическия модел на Monod [4] с отчитане на смъртността на микроорганизмите от популацията, като го прецизира по отношение на по-точното отчитане на влиянието на смъртността на микроорганизмите. Добре известно е, че индивидите от всеки тип популация имат средна продължителност на живот в дадена среда, която може да бъде обективно установена по експериментален начин. Разгледаният в този параграф модел обобщава модела разглеждан в работите [4], [65], [68], [69], в който се предполага, че смъртността на микроорганизмите от дадена популация е пропоционална на числеността и в настоящия момент. Тъй като средното време на живот на индивидите от даден тип популация в съответна среда е различно, то е важно всеки модел да отчита този важен факт специфичен за всяка популация.

Добре известно е, че по експериментален път може да бъде обективно определено средното време на живот на индивидите на популация от определен тип микроорганизми в съответната среда. Ако означим с $\tau > 0$ това средното време, тогава е видно че въведеното предположение в системата (2.3.1) - смъртността им в момента $t > 0$ да е пропорционална на числеността на организмите започнали жизнения си цикъл в момента $t - \tau$ е добре обосновано. Предложеният модел позволява да се отчита специфичното средно време на живот на индивидите от дадена популация .

В настоящия параграф е доказано че началната задача (2.3.1), (2.3.2) при неотрицателни начални условия и подходяща обща форма на трофичната функция $\mu(s)$ притежава положително решение $F(t) = (x(t), s(t))^T \in AC((0, t_F), R^2)$ в интервала $[0, t_F)$ (в смисъла на **Дефиниция 2.3.1**), $t_F > t_{Max} = \max(\tau, t_d)$, където t_d е единственото решение на уравнението $\mu(s(t_d)) = k_d$. Изследвани са и основните задачи важни за практическите приложения:

i. Анализ на изменението на числеността на популацията $x(t)$ при изчерпването на количеството на хранителния субстрат $s(t)$ за краен интервал от време;

ii. Анализ на изменението на числеността на популацията $x(t)$ при намаляването на количеството на хранителния субстрат $s(t)$ за неограничен период.

iii. Анализ на проблема как съотношенията между параметъра k_d и стойностите трофичната функция $\mu(s(t))$ въздействат на числеността на популацията $x(t)$.

В качеството на илюстрация на получените резултати е разгледана трофична функция от вида:

$$\mu(s) = \mu^* \left(sK^{-1}\right)^m \left(1 + \beta\left(sK_i^{-1}\right)^n\right)\left(1 + \left(sK^{-1}\right)^m \left(1 + \left(sK_i^{-1}\right)^n\right)\right)^{-1} \tag{2.3.3}$$

където $K, K_i > 0$, $m, n \geq 0$ и $m+n > 0$. Функцията $\mu(s)$ определена с (2.3.3) позволява по-добро приближение до експерименталните данни, като запазва основните свойства на използваните в изследванията досега дробно-рационални функции посочени в §2.3. Непосредствено се вижда, че тези функции са частен случай на функцията дефинирана с (2.3.3) при $m, n \in \{0,1\}$ [4].

Ще казваме, че са изпълнени условията (Н) ако са изпълнени следните условия:

(Н1). За всяко $t \in [-\tau, 0)$ функцията $\varphi(t) = 0$ и $\varphi(0) = x_0 > 0$.

(Н2). За всяко $t \in [-\tau, 0]$ функцията $\psi(t) \equiv s_0 > 0$.

(Н3). Функцията $\mu \in C^1([-h, \infty), R)$ е растяща в интервала $(-h, \infty)$, $h > 0$, $\mu(0) = 0$ и е непрекъсната в интервала $(-\infty, -h)$ евентуално с изключение на краен брой точки от него.

Дефиниция 2.3.1. Функцията $F(t) = (x(t), s(t))^T$, $F \in AC([0, t_F), R^2)$, $t_F > 0$ се нарича решение на (2.3.1), (2.3.2) в интервала $[0, t_F)$, ако удовлетворява уравнението (2.2.1) за почти всички $t \in (0, t_F)$ и началното условие (2.3.2) за $t \in [-\tau, 0]$.

Дефиниция 2.3.2. Решението $F(t) = (x(t), s(t))^T$, на началната задача (2.3.1), (2.3.2) в интервала $[0, t_F)$, $t_F > 0$ се нарича положително (неотрицателно) в даден интервал $[0, t_F^+)$, $t_F^+ \leq t_F$, ако $x(t) > 0, s(t) > 0$

($x(t) \geq 0, s(t) \geq 0$) за всяко $t \in [0, t_F^+)$. Аналогично се дефинира и отрицателно (неположително решение на (2.3.1), (2.3.2)).

Лема 2.3.3. Нека са изпълнени условията (Н).

Тогава началната задача (2.3.1), (2.3.2) има единствено решение $F(t) \in AC((0, \infty), R^2)$ в R_+.

Забележка 2.3.4. Непосредствено се вижда, че решението $F(t) = (x(t), s(t))^T$ на (2.3.1), (2.3.2) е непрекъснато диференцируемо за $t \in (2\tau, 3\tau]$ и притежава непрекъснати втори производни при $t \in (3\tau, \infty)$.

Лема 2.3.5. Нека са изпълнени условията (Н).

Тогава за всяко решение $F(t) = (x(t), s(t))^T$ на (2.3.1), (2.3.2), за което $x(t)$ е положително в интервала $[t_+, \infty]$, $t_+ \geq \tau$ е в сила неравенството

(2.3.5) $\qquad x(t) \leq x(t-\tau) e^{\tau\mu(s_0)}$

за всяко $t \in [t_+ + \tau, \infty)$.

Забележка 2.3.6. В случая когато $t_+ = \tau$, то очевидно неравенство (2.3.5) е изпълнено за всяко $t \in R_+$.

Теорема 2.3.7. Нека са изпълнени условията (Н).

Тогава за всяко решение $F(t) = (x(t), s(t))^T$ на (2.3.1), (2.3.2), за което съществува точка $t_0^x > 0$ такава че $x(t_0^x) = 0$, а $x(t) > 0$ при $t \in [0, t_0^x)$, то и $s(t) > 0$ за всяко $t \in [0, t_0^x)$.

Следствие 2.3.8. Нека са изпълнени условията (Н).

Тогава за всяко решение $F(t) = (x(t), s(t))^T$ на (2.3.1), (2.3.2), за което съществува точка $t_0^s > 0$ такава, че $s(t_0^s) = 0$, а $s(t) > 0$ при $t \in [0, t_0^s)$, съществува точка $t_0^x \leq t_0^s$ такава, че $x(t_0^x) = 0$ и $x(t) > 0$ за всяко $t \in [0, t_0^x)$.

Теорема 2.3.9. Нека са изпълнени условията (H).

Тогава за всяко решение $F(t)=(x(t),s(t))^T$ на (2.3.1), (2.3.2), съществува точка $t_F^+>\tau$ такава, че решението $F(t)$ е положително, $x(t)$ е растяща при $t\in[0,\tau]$, а $s(t)$ е

Нека означим с $s_{\min}=\inf_{t\in R_+} s(t)$.

Теорема 2.3.10. Нека са изпълнени условията (H).

Тогава за всяко решение $F(t)=(x(t),s(t))^T$ на (2.3.1), (2.3.2) имаме, че $\mu(s_{\min})<k_d$.

Теорема 2.3.11. Нека са изпълнени следните условия:

1. Изпълнени са условията (H).
2. $0\le\mu(s_{\min})$.

Тогава за всяко положително решение $F(t)=(x(t),s(t))^T$ на (2.3.1), (2.3.2) в R_+ са изпълнени $s_{\min}=\lim_{t\to\infty} s(t)$ и $\lim_{t\to\infty} x(t)=0$.

Забележка 2.3.12. Непосредствено се вижда, че условието $\mu(s_0)>k_d$, води до увеличаване на скоростта на размножаване на популацията от микроорганизми.

Нека разгледаме трофичната функция дефинирана с (2.3.3). Непосредствено се проверява, че при $s\ge 0$ тя притежава следните основни свойства:

I. При $\beta\ge 1$ функцията $\mu(s)$ е строго растяща и ограничена при $s\ge 0$, като $\mu(0)=0,\mu(s)>0$ за $s>0$.

II. При $\beta\in[0,1)$ функцията $\mu(s)$ е унимодална с локален максимум в точката $s=\overline{s}$, където $\overline{s}$ е единственият положителен корен на уравнението $mK^mK_i^n+\beta(m+n)K^ms^n-n(1-\beta)s^{m+n}=0$

III. $\lim_{s\to\infty}\mu(s)=\beta\mu^*$.

Непосредствено се вижда, че при $\beta\ge 1$ за функцията $\mu(s)$ дефинирана с (2.3.1) са приложими доказаните по горе резултати, като в случая, когато m и n не са цели числа в (2.3.3) s трябва да се замени с $|s|$.

ГЛАВА 3.

НЕОСЦИЛИРАЩИ РЕШЕНИЯ НА ЛИНЕЙНИ ФУНКЦИОНАЛНО-ДИФЕРЕНЦИАЛНИ СИСТЕМИ ОТ НЕЧЕТЕН РЕД И НЕУТРАЛЕН ТИП С РАЗПРЕДЕЛЕНО ЗАКЪСНЕНИЕ

В настоящата глава, с оглед на приложенията при моделирането на процеси в популационната динамика (Smith [81] , Pielou [72], Gopalsamy and Zhang [36]), са получени експлицитни достатъчни условия за съществуване на ограничени и неограничени решения на автономни линейни системи с разпределено закъснение от неутрален тип, които могат да бъдат непосредствено изчислени с компютърни програми от типа на Wolfram Mathematica. При доказателството на резултатите е използвана техника базирана на логаритмичната норма. Това позволява резултатите да бъдат получени при по-слаби ограничителни условия като се допуска матричните функции с ограничена вариация $v(s)$ и $u(s)$ (виж уравнение (3.1.1)) да имат и сингулярна част. Добре известно е, че стандартното условие матричните функции с ограничена вариация $v(s)$ и $u(s)$ да нямат сингулярна част опростява нещата в идеен и технически аспект.

Представените в тази глава резултати са обобщение на резултатите, получени в работа [97]. Ограничителното условие в [97] матричните функции с ограничена вариация $v(s)$ и $u(s)$ да са монотонни относно логаритмичната норма е заменено с по слабо.

§3.1. Помощни твърдения

В този параграф ще докажем основната лема, която ще използваме при доказването на основните резултати в следващите два параграфа от тази глава.

Нека $t^* = \max\{\tau, \sigma\}$ и да разгледаме началната задача за линейна система диференциални уравнения от неутрален тип с разпределено закъснение

(3.1.1) $\left(x(t) + \delta_1 \int_{-\tau}^{0} dv(s)x(t+s) \right)' + \delta_2 \int_{-\sigma}^{0} du(s)\, x(t+s) = 0,$

(3.1.2) $x(t) = \varphi(t),\ t \in [-t^*, 0]$

където $\delta_1, \delta_2 \in \{-1,1\}$, $\sigma > 0, \tau > 0$, $x : [0,+\infty) \to R^n$, $v : [-\tau, 0] \to RL^n$, $u : [-\sigma, 0] \to RL^n$,

$\varphi \in C([-t^*, 0], R^n)$.

Ще казваме че са изпълнени условията (S), ако са изпълнени следните условия:

(S1) Функцията $v \in BV[-\tau, 0]$ е непрекъсната отляво върху $[-\tau, 0]$, $\lim_{t\to+0}[\operatorname{Var}_{s\in[-t,0]}(v(s))] = v(0) = 0$ и $\det(v(-\tau+0) - v(-\tau-0)) \neq 0.$

(S2) Функцията $u \in BV[-\sigma, 0]$ е непрекъсната отляво върху $[-\sigma, 0]$ и $\det(u(-\sigma+0) - u(-\sigma-0)) \neq 0$.

(S3) Числото n е нечетно.

Забележка 3.1.1. Условието (S1) означава, че функцията $v \in BV[-\tau, 0]$ е атомарна при $s = -\tau$ и неатомарна при $s = 0$. За функцията $u \in BV[-\sigma, 0]$ условието (S2) означава, че тя е атомарна при $s = -\sigma$, а при $s = 0$ функцията може да бъде както атомарна, така и неатомарна.

Забележка 3.1.2. Нека $v \in BV[a,b]$ е произволна функция. Тогава функцията $\mu \circ v : [a,b] \to R^1$ е с ограничена вариация в интервала $[a,b]$.

Нека означим с $t^* = \max\{\tau, \sigma\}$.

Дефиниция 3.1.3. Функцията $x \in AC((0,+\infty), R^n)$ се нарича решение на началната задача (3.1.1), (3.1.2) ако функцията $x(t) + \delta_1 \int_{-\tau}^{0} dv(s)x(t+s) \in C^1((0,+\infty), R^n)$, $x(t)$ удовлетворява системата (3.1.1) за всяко $t \ge 0$ и началното условие (3.1.2).

Дефиниция 3.1.4. Решението $x(t)$ на системата (3.1.1) се нарича осцилиращо, ако съществуват индекс $i, 1 \le i \le n$ и редица $\{t_k^i\}_{k=1}^{+\infty}, \lim_{k\to+\infty} t_k^i = +\infty$ такива, че $x_i(t_k^i) = 0$ за всяко $k \ge 1$. Ако всички решения на системата (3.1.1) са осцилиращи, то ние наричаме системата осцилираща.

Дефиниция 3.1.5. Решението $x(t) = (x_1(t),...,x_n(t))^T$ на (3.1.1) се нарича неосцилиращо, ако за всеки индекс i, $1 \le i \le n$ съществува точка $t_i \ge 0$, такава че $|x_i(t)| > 0$ за всяко $t \ge t_i$.

Дефиниция 3.1.6. Решението $x(t)$ на системата (3.1.1) се нарича строго осцилиращо, ако съществуват индекс i, $1 \le i \le n$ и редица $\{t_k^i\}_{k=1}^{+\infty}, \lim_{k\to+\infty} t_k^i = +\infty$ такива, че $x_i(t_k^i)x_i(t_{k+1}^i) < 0$ за всяко $k \ge 1$. Ако всички решения на системата (3.1.1) са строго осцилиращи, то ние наричаме системата строго осцилираща.

Дефинираме функцията $F : R^1 \to RL^n$ по следния начин:

(3.1.3) $$F(\lambda) = \lambda I + \lambda\delta_1 \int_{-\tau}^{0} e^{\lambda s} dv(s) + \delta_2 \int_{-\sigma}^{0} e^{\lambda s} du(s).$$

Лема 3.1.7.[70] Необходимото и достатъчно условие за съществуване на неосцилиращо решение на системата (3.1.1) от вида $x(t) = e^{\lambda t}C(\lambda)$, където $\lambda \in R^1$, $C(\lambda) \in R^n$ е нейното характеристично уравнение

(3.1.4) $$\det\left(\lambda(I + \delta_1 \int_{-\tau}^{0} e^{\lambda s} dv(s)) + \delta_2 \int_{-\sigma}^{0} e^{\lambda s} du(s)\right) = 0$$

да има поне един реален корен.□

Следствие 3.1.8. Необходимото условие системата (3.1.1) да бъде осцилираща (строго осцилиращо) е характеристичното уравнение (3.1.4) да няма реални корени. □

За всяка матрична функция $w = (w_{ij})_{i,j=1}^n \in BV[-t^*, 0]$ въвеждаме следните множества:

$$J_{w_{ij}}[-t^*, 0] = \left\{t \in [-t^*, 0] \,||\, w_{ij}(t+0) - w_{ij}(t-0)| > 0\right\},\ 1 \le i, j \le n,$$

$$J_w[-t^*, 0] = \bigcup_{i,j=1}^{n} J_{w_{ij}}[-t^*, 0],$$

$$E_w[-t^*, 0] = [-t^*, 0] \setminus J_w[-t^*, 0].$$

Лема 3.1.9. [28] Нека са изпълнени следните условия:

1. Функцията $w \in BV[-t^*, 0]$.
2. Функцията $f \in BV[-t^*, 0]$ е монотонна и има постоянен знак върху $[-t^*, 0]$.
3. $J_w[-t^*, 0] \cap J_f[-t^*, 0] = \varnothing$.

Тогава са в сила следните неравенства:

1. Ако f е намаляваща и положителна , то

$$\mu\left(\int_{-t^*}^{0} f(s)dw(s)\right) \le \int_{-t^*}^{0} f(s)d\mu(w(s) - w(-t^*)).$$

2. Ако f е намаляваща и отрицателна, то

$$\mu(\int_{-t^*}^{0} f(s)dw(s)) \le \int_{-t^*}^{0} f(s)d\mu(w(s)-w(0)) .$$

3. Ако f е растяща и положителна , то

$$\mu(\int_{-t^*}^{0} f(s)dw(s)) \le -\int_{-t^*}^{0} f(s)d\mu(w(0)-w(s))$$

4. Ако f е растяща и отрицателна, то

$$\mu(\int_{-t^*}^{0} f(s)dw(s)) \le -\int_{-t^*}^{0} f(s)d\mu(w(-t^*)-w(s))$$

Забележка 3.1.10. Частен случай на Лема 3.1.9 е доказан в [44] при допълнителното условие за функцията $f:[-t^*,0]\to R^1$ да е непрекъсната в интервала $[-t^*,0]$. Въведеното условие 3 в Лема 3.1.9 позволява резултатите от [44] да се обобщат за случая когато f е само монотонна. Условие 3 не налага допълнителни ограничения тъй като то е изпълнено когато функцията $f(t)$ е непрекъсната.

Забележка 3.1.11. Проверява се, че $\lambda = 0$ е корен на уравнението (3.1.4) тогава и само тогава, когато $\det(u(-\sigma)-u(0)) = 0$. В този случай, без допълнителни условия, системата (3.1.1) има ограничено неосцилиращо решение. Тогава, ако $\det(u(-\sigma)-u(0)) \ne 0$ следва, че $\lambda = 0$ не е корен на уравнението (3.1.4).

§3.2. Достатъчни условия за съществуване на неограничени неосцилиращи решения .

В настоящия параграф са получени експлицитни достатъчни условия за съществуване на неограничени неосцилиращи решения на системата (3.1.1). С примери е показано, че условията (S) са съществени за съществуването на неограничени неосцилиращи решения на тази система. Ще отбележим, че в доказаните в параграфа теореми не се предполага че функциите $u\in BV[-\sigma,0]$ и $v\in BV[-\tau,0]$ са монотонни относно логаритмичната норма, при което предположение са получени основните резултати в други изследвания (виж [97]). Резултатите в този параграф са публикувани в [28], [102].

Теорема 3.2.1. Нека са изпълнени следните условия:

1. В сила са условията (S) и $\delta_1 = \delta_2 = -1$.
2. $\det(u(-\sigma)-u(0)) < 0.$
3. $\sup\limits_{s\in E_v[-\tau,0]} \mu(-v(s)) < 1$.

Тогава системата (3.1.1) има поне едно неограничено неосцилиращо решение.

Теорема 3.2.2. Нека са изпълнени следните условия:

1. В сила са условията (S) и $\delta_1 = \delta_2 = -1$.
2. $\det(u(-\sigma)-u(0)) > 0.$
3. Изпълнено е едно от следните условия:

3.1. $\sup\limits_{s\in[-\sigma,0]} \mu(u(0)-u(s)) < 0$;

3.2. $\sup\limits_{s\in[-\tau,0]} \mu(v(s)) < -1$.

Тогава системата (3.1.1) има поне едно неограничено и неосцилиращо решение.

Теорема 3.2.3. Нека са изпълнени следните условия:

1. В сила са условията (S), $\delta_1 = 1$ и $\delta_2 = -1$.

2. $\det(u(-\sigma)-u(0))<0.$

3. $\sup\limits_{s\in E_v[-\tau,0]} \mu(v(s))<1$

Тогава системата (3.1.1) има поне едно неограничено и неосцилиращо решение.

Следствие 3.2.4. Нека са изпълнени следните условия:

1. В сила са условията (S) и $\delta_2=-1$.

2. $\mu(u(-\sigma)-u(0))\le 0$ и $\det(u(-\sigma)-u(0))\ne 0$.

3. Изпълнено е едно от следните две условия:

3.1. $\delta_1=-1$ и $\sup\limits_{s\in E_v[-\tau,0]} \mu(-v(s))<1$

3.2 $\delta_1=1$ и $\sup\limits_{s\in E_v[-\tau,0]} \mu(v(s))<1$.

Тогава системата (3.1.1) има поне едно неограничено неосцилиращо решение.

Теорема 3.2.5. Нека са изпълнени следните условия:

1. В сила са условията (S), $\delta_1=1$ и $\delta_2=-1$.

2. $\det(u(-\sigma)-u(0))>0.$

3. Изпълнено е едно от следните условия:

3.1. $\sup\limits_{s\in E_v[-\tau,0]} \mu(-v(s))<-1$;

3.2. $\sup\limits_{s\in[-\sigma,0]} \mu(u(0)-u(s))<0$.

Тогава системата (3.1.1) има поне едно неограничено и неосцилиращо решение.

Следствие 3.2.6. Нека са изпълнени следните условия:

1. В сила са условията (S) и $\delta_2=-1$.

2. $\mu(u(0)-u(-\sigma))\le 0$ и $\det(u(-\sigma)-u(0))\ne 0$.

3. Изпълнено е едно от следните две условия:

3.1. $\delta_1=-1$ и $\sup\limits_{s\in E_v[-\tau,0]} \mu(v(s))<-1$

3.2. $\delta_1=1$ и $\sup\limits_{s\in E_v[-\tau,0]} \mu(-v(s))<-1$

Тогава системата (3.1.1) има поне едно неограничено неосцилиращо решение.

Забележка 3.2.7. В общия случай от условието $\mu(u(-\sigma)-u(0))<0$ не следва, че функцията $u(s)$ е монотонна в интервала $[-\sigma,0]$ относно логаритмичната норма.

Забележка 3.2.8. Нека в системата (3.1.1) $\delta=-1$ и $\tau>0$. В [97] е разгледан случаят, когато функцията $v(s)$ има вида $v(s)=H(-(s+\tau))A, A\in RL^n$, където $H(s)$ е функцията на Хевисайд. Непосредствено се проверява, че за тази функция удовлетворява условие 3 от теорема 3.2.5.

Пример 3.2.9. Нека в системата (3.1.1) $\delta_1=-1$ и $\tau>0$. Разглеждаме функция $v(s)$ от вида

$$v(s)=\sum_{k=1}^{m} H_k(-(s+\tau_k))A_k,\ A_k\in RL^n, \tag{3.2.13}$$
$$\tau_k\in(0,-\tau],k=1,2,\dots,m, 0<\tau_1<\tau_2<\dots<\tau_m=\tau$$

За функцията $v(s)$, дефинирана с (3.2.13), условието 3 на теореми 3.2.1 и 3.2.3 е в сила. В частност това показва, че въведеното условие 3 не налага допълнителни ограничения в случая на краен брой постоянни закъснения разглеждан от други автори [97] .

Теорема 3.2.10. Нека са изпълнени следните условия:

1. В сила са условия (S) и $\delta_1=\delta_2=1$

2. $\det(u(-\sigma)-u(0))>0.$

3. $\sup\limits_{s\in E_v[-\tau,0]} \mu(v(s))<1$.

Тогава системата (3.1.1) има поне едно неограничено неосцилиращо решение.

Теорема 3.2.11. Нека са изпълнени следните условия:

1. В сила са условията (S) , $\delta_1=-1$ и $\delta_2=1$.

2. $\det(u(-\sigma)-u(0))>0.$

3. $\sup\limits_{s\in E_v[-\tau,0]} \mu(-v(s))<1$.

Тогава системата (3.3.1) има поне едно неограничено и неосцилиращо решение.

Следствие 3.2.12. Нека са изпълнени следните условия:

1. В сила са условията (S) и $\delta_2=1$.

2. $\mu(u(-\sigma)-u(0))\le 0$ и $\det(u(-\sigma)-u(0))\ne 0$.

3. Изпълнено едно от следните условия:

3.1. $\delta_1=-1$ и $\sup\limits_{s\in E_v[-\tau,0]} \mu(v(s))<1$;

3.2. $\delta_1=1$ и $\sup\limits_{s\in E_v[-\tau,0]} \mu(-v(s))<1$.

Тогава системата (3.1.1) има поне едно неограничено неосцилиращо решение.

Теорема 3.2.13. Нека са изпълнени следните условия:

1. В сила са условия (S), $\delta_1=-1$ и $\delta_2=1$.

2. $\det(u(-\sigma)-u(0))<0.$

3. $\sup\limits_{s\in E_v[-\tau,0]} \mu(v(s))<-1$.

Тогава системата (3.1.1) има поне едно неограничено неосцилиращо решение.

Теорема 3.2.14. Нека са изпълнени следните условия:

1. В сила са условията (S) и $\delta_1=\delta_2=1$.

2. $\det(u(-\sigma)-u(0))<0.$

3. $\sup\limits_{s\in E_v[-\tau,0]} \mu(-v(s))<-1$.

Тогава системата (3.1.1) има поне едно неограничено и неосцилиращо решение.

Следствие 3.2.15. Нека са изпълнени следните условия:

1. В сила са условията (S) и $\delta_2=1$.

2. $\mu(u(-\sigma)-u(0))\le 0$ и $\det(u(-\sigma)-u(0))\ne 0.$

3. В сила е едно от следните две условия:

3.1. $\delta_1=-1$ и $\sup\limits_{s\in E_v[-\tau,0]} \mu(v(s))<-1$;

3.2. $\delta_1=1$ и $\sup\limits_{s\in E_v[-\tau,0]} \mu(-v(s))<-1$.

Тогава системата (3.1.1) има поне едно неограничено неосцилиращо решение.

§3.3. Достатъчни условия за съществуване на ограничени неосцилиращи решения

Наличието на ограничени неосцилиращи (в едномерния случай положителни или отрицателни) решения играе важна роля за редица приложения. В настоящия параграф са получени проверими достатъчни условия системата (3.1.1) да притежава ограничени и клонящи към нула при $t \to \infty$ решения. Изследвано е влиянието на връзката между τ и σ върху съществуването на неосцилиращи решения, както и върху тяхното асимптотично поведение. Резултатите в този параграф са публикувани в [28], [102].

Теорема 3.3.1. Нека са изпълнени следните условия:

1. В сила са условията (S) и $\delta_2 = -1$

2. $\det(u(-\sigma) - u(0)) < 0.$

3. Изпълнено е едно от следните две условия:

3.1. $\delta_1 = -1$ и $\sup\limits_{s \in E_v[-\tau,0]} \mu(v(-\tau) - v(s)) < 0$

3.2. $\delta_1 = 1$ и $\sup\limits_{s \in E_v[-\tau,0]} \mu(v(s) - v(-\tau)) < 0$

4. $\tau > \sigma$.

Тогава системата (3.1.1) има поне едно ограничено неосцилиращо решение $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))^T$ такова, че $\lim_{t \to +\infty} x_i(t) = 0$ за всяко i, $1 \le i \le n$.

Забележка 3.3.2. Ако матрицата $A \in RL^n$ е от ред $n = 1$, то формално имаме $\mu(A) = \det A$ и тогава двата случая, споменати в условие 3 на теорема 3.3.1, съвпадат. Ако $A \in RL^n$ при нечетно $n \ge 3$, в общия случай $-\mu(A) \ne \mu(-A)$ и въпросните два случая са различни. Валидността на забележката остава в сила и при разгледаните по-надолу случаи.

Теорема 3.3.3. Нека са изпълнени следните условия:

1. В сила са условията (S) и $\delta_2 = -1$.

2. $\det(u(-\sigma) - u(0)) > 0$.

3. В сила е едно от следните две условия:

3.1. $\delta_1 = -1$ и $\sup\limits_{s \in E_v[-\tau,0]} \mu(v(s) - v(-\tau)) < 0$.

3.2. $\delta_1 = 1$ и $\sup\limits_{s \in E_v[-\tau,0]} \mu(v(-\tau) - v(s)) < 0$.

4. $\tau > \sigma$.

Тогава системата (3.1.1) има поне едно ограничено неосцилиращо решение $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))^T$ такова,че $\lim_{t \to +\infty} x_i(t) = 0$ за всяко $i, 1 \le i \le n$.

Пример 3.3.4. Разглеждаме системата (3.1.1) в случая, когато $\delta_1 = \delta_2 = -1$, $\tau > 0$ и функцията $v(s)$ има вида $v(s) = \sum_{k=1}^{m} H_k(-(s + \tau_k))A_k$ където $A_k \in RL^n$, $\tau_k \in (0, \tau]$, $k = 1, 2, ..., m$, $0 < \tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_m = \tau$. Нека са изпълнени неравенствата $\sup\limits_{k} \mu(\sum_{i=k}^{m} (A_i)) < 0$, $k = 1, 2, ..., m$. Тези неравенства са в сила например, ако $\mu(A_k) \le 0$, $k = 1, 2, ..., m$. Тогава за функцията $v(s)$

$$E_v[-\tau, 0] = (-\tau_1, 0] \bigcup (\bigcup_{i=1}^{m-1} (-\tau_{i+1}, \tau_i)) .$$

От Лема 1.1.3 следва, че за функцията $v(s)$ е изпълнено условие 3.1 на Теорема 3.3.3.

Теорема 3.3.5. Нека са изпълнени следните условия:

1. В сила са условията (S) и $\delta_2 = 1$.

2. $\det(u(-\sigma) - u(0)) < 0.$

3. В сила е едно от следните условия:

3.1. $\delta_1 = -1$ и $\sup\limits_{s \in E_v[-\tau,0]} \mu(v(s) - v(-\tau)) < 0$

3.2. $\delta_1 = 1$ и $\sup\limits_{s \in E_v[-\tau,0]} \mu(v(-\tau) - v(s)) < 0$.

4. $\tau > \sigma$.

Тогава системата (3.1.1) има поне едно ограничено неосцилиращо решение $x(t)=(x_1(t),...,x_n(t))^T$ такова,че $\lim_{t\to+\infty} x_i(t)=0$ за всяко $i, 1\le i\le n$.

Теорема 3.3.6. Нека са изпълнени следните условия:

1. В сила са условията (S) и $\delta_2=1$.
2. $\det(u(-\sigma)-u(0))>0$.
3. В сила е едно от следните условия:

3.1. $\delta_1=-1$ и $\sup\limits_{s\in E_v[-\tau,0]} \mu(v(-\tau)-v(s))<0$

3.2. $\delta_1=1$ и $\sup\limits_{s\in E_v[-\tau,0]} \mu(v(s)-v(-\tau))<0$.

4. $\tau>\sigma$.

Тогава системата (3.1.1) има поне едно ограничено неосцилиращо решение $x(t)=(x_1(t),...,x_n(t))^T$ такова,че $\lim_{t\to+\infty} x_i(t)=0$ за всяко $i, 1\le i\le n$.

Пример 3.3.7. Нека разгледаме системата (3.1.1) в случая когато $n=3$, $\delta_1=-1$, $\delta_2=1$ и да дефинираме функциите $v\in BV[-2,0]$ и $u\in BV[-3,0]$ с равенствата

$v(s)=-H(-(s+2))A,\ u(s)=H(-(s+3))B_1+H(s)B_0$,

където матриците $A,B_0,B_1\in RL^3$, са дефинирани както следва:

$$A=\begin{pmatrix}0.5&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix},\ B_0=\begin{pmatrix}-5&0&0\\0&-5&0\\0&0&-5\end{pmatrix} \text{ и } B_1=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

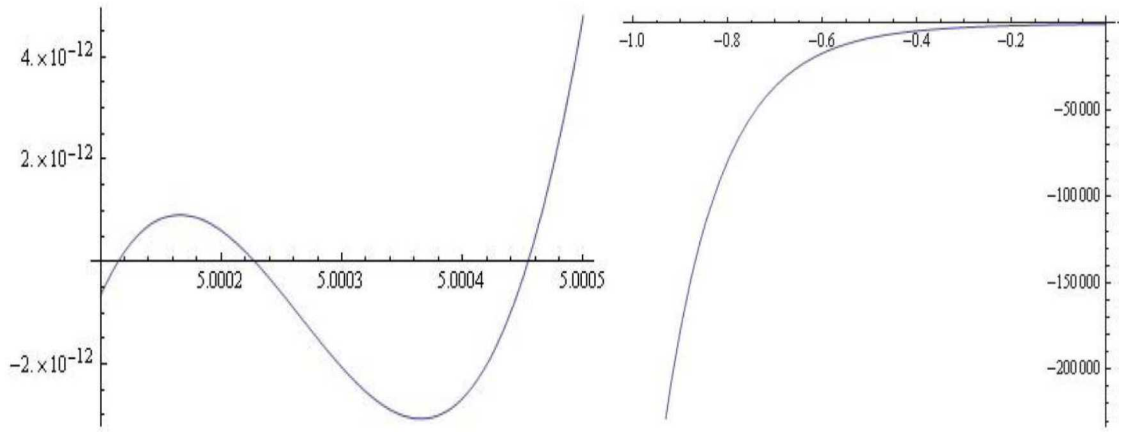
Тогава характеристичното уравнение на системата ще има вида

(3.3.21) $det(\lambda(I-Ae^{-2\lambda})+(B_0-B_1e^{-3\lambda}))=0$.

Непосредствено се вижда, че условия 1 и 2 на Теорема 3.2.11 са изпълнени. От равенствата

(3.3.22) $v(-2)=-A,\ v(s)=0, s\in E_v[-2,0]$

следва, че $\sup\limits_{s\in E_v[-2,0]} \mu(-v(s))<1$, т.е. условие 3 на Теорема 3.2.11 е също изпълнено.



Фигура 1.

Пресмятайки корените на характеристичното уравнение (3.3.21) с Wolfram Mathematica ние получаваме, че уравнението има три реални положителни корена

$s_1=5.00011,\ s_2=5.00023,\ s_3=5.00045$,

което се вижда на лявата графика на Фигура 1 и следователно системата има три неограничени неосцилиращи решения.

Същият пример показва, че условието 4 на Теорема 3.3.6 е съществено за нейната валидност. Очевидно условия 1 и 2 на Теорема 3.3.6 са изпълнени, а от равенства (3.3.22) следва, че е изпълнено и условие 3.1. Единствено не е изпълнено условие 4 на Теорема 3.3.6 и както се вижда от Фигура 1 системата няма ограничени неосцилиращи решения.□

Следващият пример показва, че условие 4 на Теорема 3.3.6 е съществено и в случая когато $\delta_1 = 1$.

Пример 3.3.8. . Нека разгледаме системата (3.1.1) в случая когато $n = 3$, $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 1$ и да дефинираме функциите $v \in BV[-2,0]$ и $u \in BV[-3,0]$ с равенствата

(3.3.23) $v(s) = H(-(s+2))A,\ u(s) = H(-(s+3))B_1 + H(s)B_0$,

където матриците $A, B_0, B_1 \in RL^3$ са дефинирани както в Пример 3.3.7. Характеристичното уравнение има вида

(3.3.24) $det(\lambda(I + Ae^{-2\lambda}) + (B_0 - B_1 e^{-3\lambda})) = 0$,

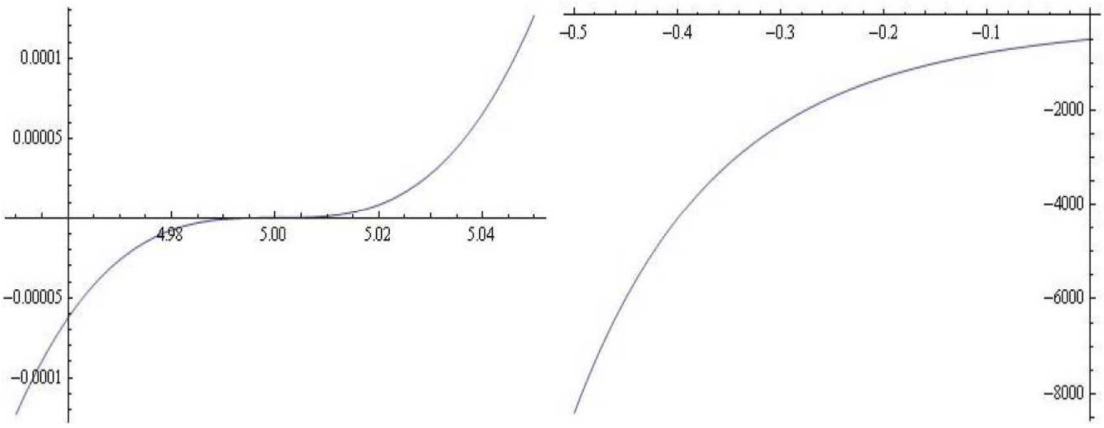
а от (3.3.23) следват равенствата

(3.3.25) $v(-2) = A, v(s) = 0, s \in E_v[-2,0]$.

Условия 1 и 2 на Теорема 3.3.6 са изпълнени, а от равенства (3.3.25) следва, че

$$\sup_{s \in E_v[-2,0]} \mu(v(s) - v(-2)) = \sup_{s \in E_v[-2,0]} \mu(-v(-2)) < 0$$

т.е. изпълнено е и условие 3.2. Единствено не е изпълнено условие 4 на Теорема 3.3.6. Пресмятайки корените на характеристичното уравнение (3.3.24) с Wolfram Mathematica ние получаваме, че уравнението има единствен реален положителен корен s = 4.99989 и следователно системата няма ограничени неосцилиращи решения, както се вижда от Фигура 2 по долу.



Фигура 2.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ДИСЕРТАЦИОННИЯ ТРУД

1) Georgieva A., Kiskinov H., Zahariev A., Zlatev S., Explicit conditions for existing of non-oscillating solutions of an odd order linear system of neutral type with distributed delay, International Journal of Pure and Applied Mathematics, Volume 85 No 1 2013, 155-170, ISSN 1311-8080 (printed version), ISSN1314-3395 (on-line version), doi:http: //dx.doi.org/ 10.12732 /ijpam.v85i1.13.

2) A. I. Zahariev, S. G. Zlatev, A.T. Georgieva, Non-oscillatory solutions of an odd order linear functional differential system of neutral type with distributed delay, Proceedings of the Bulgarian Academy of Sciences, Vol. 66, No 6, 2013, 793 – 800, ISSN 1310 – 1331, Impact factor: 0.21 .

3) H. Kiskinov, A. Zahariev, S. Zlatev, On the permanence of the positive absolutely continuous solutions of the generalized Mackey – Glass model, Scientific Works, Plovdiv University, Vol. 40, Book 3, Mathematics, in press, ISSN 0204-52-49.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящата работа са изследвани обобщените модели на Mackey–Glass, описващи динамиката на респираторния процес и хематопоезиса (производството и развитието на кръвните клетки) в случая на монотонна обратна връзка. Анализиран е и модел, който обобщава класическия модел на Monod с отчитане на смъртността в микробиологичната популация.

Изследван е проблема за съществуване на ограничени и неограничени неосцилиращи решения на автономна система линейни диференциални уравнения от неутрален тип с разпределено закъснение.

Основните приноси в настоящия дисертационен труд са:

1. Получени са достатъчни условия за съществуване и единственост на положително решение на началната задача (с начални условия, които са само неотрицателни, ограничени и измерими по Борел функции) за обобщените модели на Mackey – Glass описващи респираторната динамика и динамиката на хематопоезиса. Получени са достатъчни условия са персистентност и перманентност на всяко положително решение на началната задача за обобщените модели на Mackey – Glass, както и за равномерната перманентност на съвкупността от всички положителни решения на началната задача.

2. Въведен е съдържателен биореакторен модел, който обобщава класическия модел на Monod с отчитане на смъртността в микробиологичната популация и за този модел е доказано съществуване и единственост на глобално положително абсолютно непрекъснато решение, на началната задача с ограничена и измерима по Борел неотрицателна начална функция.

3. Получени са експлицитни достатъчни условия за съществуването на неограничени и ограничени неосцилиращи решения на неутрална линейна автономна система с разпределено закъснение от нечетен ред. Резултатите са получени при най-общи предположения, като се допуска функциите с ограничена вариация да имат и сингулярна част и не се предполага те да са монотонни относно логаритмичната норма.

Връзки между приносите, целите, задачите, мястото на описание в дисертационния труд и направените публикации по темата са следните:

Принос	Цел	Задачи	Параграф	Публикации
1, 2	1	А, Б	2.1.	3
1, 2	1	А, Б	2.2.	3
1, 2	1	А, Б	2.3.	3
3	2	В	3.2.	1
3	2	В	3.3.	2

ДЕКЛАРАЦИЯ ЗА ОРИГИНАЛНОСТ

по чл. 27 ал.2 от ППЗРАСБ

Във връзка с провеждането на процедура за придобиване на образователната и научна степен ***“доктор”*** в Пловдивския университет ”Паисий Хилендарски” и защита на представения от мен дисертационен труд, декларирам:

Резултатите и приносите на проведеното дисертационно изследване, представени в дисертационния ми труд на тема: ,,ЛОКАЛЕН АНАЛИЗ И АСИМПТОТИЧНИ СВОЙСТВА НА РЕШЕНИЯТА НА КЛАСОВЕ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ С ПРИЛОЖЕНИЕ В ПОПУЛАЦИОННАТА ДИНАМИКА“,

са оригинални и не са заимствани от изследвания и публикации, в които нямам участия.

.

05. 07. 2013 Д Е К Л А Р А Т О Р:.............................

Гр. Пловдив /Стоян Георгиев Златев/

БИБЛИОГРАФИЯ

[1] Agarwal P. R., L. Berezansky, E. Braverman, A. Domoshnitsky, Nonoscillation Theory of Functional Differential Equations with Applications, Springer, New York, 2012.

[2] Agarwal P. R., S.R. Grace, in: Oscillation Theory for Difference and Functional Differential Equations, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht(2000).

[3] Ali Z., A. Taha, Bounded solutions of higher order neutral differential equations with oscillating coefficients, Appl. Math. e-Notes 6 (2006), 126-131.

[4] Alt R., Sv. Markov, Theoretical and computational studies of some bioreactor models, Comp. and Math. With Appl., 64 (2012), 350-360.

[5] Andrews J.F., A mathematical model for the continuous culture of microorganisms utilizing inhibitory substrates, Biotechnology and Bioengineering, 10 (1968), 707–723.

[6] Angelov V., D. Angelova, Oscillatory solutions of neutral equations with polynomial nonlinearities, Inter. J. Diff. Equations., (2011), 1-12.

[7] Berezansky L., E. Braverman, Linearized oscillation theory for a nonlinear equation with a distributed delay, Math. Comput. Modell., 48 (2008), 287–304

[8] Berezansky L., E. Braverman, Linearized oscillation theory for a nonlinear nonautonomous delay differential equation, J. Comput. Appl. Math., 151 (2003), 119–127.

[9] Berezansky L., E. Braverman, Mackey–Glass equation with variable coefficients, Comput. Math. Appl., 51 (2006), 1–16.

[10] Berezansky L., E. Braverman, New stability conditions for linear differential equations with several delays, Abstr. Appl. Anal., (2011) 19, (Article ID178568).

[11] Berezansky L., E. Braverman, On existence and attractivity of periodic solutions for the hematopoiesis equation, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst., Ser. A Math. Anal., 13B (2006), (suppl. 103–116).

[12] Berezansky L., E. Braverman, L. Idels, Mackey – Glass model of hematopoiesis with non-monotone feedback, Appl. Math. and Computation, 219 (2013), 6268–6283.

[13] Berezansky L., E. Braverman, On oscillation of equations with distributed delay, Z. Anal. Anwend., 20 (2001), 489–504.

[14] Berezansky L., E. Braverman, On stability of some linear and nonlinear delay differential equations, J. Math. Anal. Appl., 314 (2006), 391–411.

[15] Berezansky L., E. Braverman, Stability and linearization for differential equations with a distributed delay, Funct. Differ. Equ., 19 (2012), 27–43.

[16] Berezansky L., E.Braverman, L. Idels, Mackey – Glass model of hematopoiesis with monotone feedback revisited, Appl. Math. Comp., 219 (2013), 4892-4907.

[17] Berezansky L., E. Braverman, L. Idels, On delay differential equations with Hill's type growth rate and linear harvesting, Comput. Math. Appl., 49 (2005), 549–563.

[18] Berezansky L., E.Braverman, L. Idels, The Mackey – Glass model of respiratory dynamics: review and new results, Nonlinear Anal. TMA, 75 (2012) , 6034-6052

[19] Bonsall F.F., J. Duncan, Numerical ranges of operators of normed spaces and elements of normed algebras, London, Cambridge University Press (1971).

[20] Braverman E., D. Kinzebulatov, Nicholson's blowflies equation with a distributed delay, Can. Appl. Math. Q., 14 (2) (2006), 107–128.

[21] Braverman E., S. Zhukovskiy, Absolute and delay-dependent stability of equations with a distributed delay, Discrete Contin. Dyn. Syst., A 32 (2012), 2041–2061.

[22] Cushing J. M., Integrodifferential equations and delay models in population dynamics, Lecture notes in biomathematics, Springer- Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1977.

[23] Dahlquist G., Stability and error bounds in the numerical integration of ordinary differential equations, Uppsala, Almqvist & Wiksell (1958).

[24] Davis H. T., Introduction to Non Linear Differential and Integral Equations, Dover, 1962.

[25] Haldane J.B.S., Enzymes, Longmans, London, 1930.

[26] Hale J., S. Verduyn Lunel, Introduction to Functional Differential Equations, Springer, New York, 1993.

[27] Hearn T., C. Haurie, M. Mackey, Cyclical neutropenia and the peripheral control of white blood cell production, J. Theor. Biol., 192 (1998), 167–181.

[28] Georgieva A., Kiskinov H., Zahariev A., Zlatev S., Explicit conditions for existing of non-oscillating solutions of an odd order linear system of neutral type with distributed delay, IJPAM, Vol.85, No 1, 2013.

[29] Gerber M., R. Span, An analysis of available mathematical models for anaerobic digestion of organic substances for production of biogas, in: Proc. IGRC, Paris, 2008.

[30] Glass L., M. Mackey, Mackey–Glass equation, Scholarpedia 5 (3) (2010) .

[31] Gompertz B., On the nature of the function expressive of the law of human mortality, Fhil.Trans.115, 1825, 513-585.

[32] Gopalsamy K., M. Kulenovic´ , G. Ladas, Oscillations and global attractivity in models of hematopoiesis, J. Dyn. Differ. Equ., 2 (1990), 117–132.

[33] Gopalsamy K., Stability and oscillations in delay differential eqations of population dynamics, Mathematics and its Applications, 74, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1992.

[34] Gopalsamy K., S. Trofimchuk, N. Bantsur, A note on global attractivity in models of hematopoiesis, Ukrainian Math. J., 50 (1998), 3–12.

[35] Gopalsamy K., P.-X. Weng, Global attractivity and level crossings in a model of hematopoiesis, Bull. Inst. Math. Acad. Sin., 22 (1994), 341–360.

[36] Gopalsamy K., B.G. Zhang, On delay Differential Equations with impulses, J. Math. Anal. Appl., 139/1 (1989), 110-122.

[37] Gourley S., Y. Kuang, Dynamics of a neutral Delay Equation for an insect population with long larval and short adult phase, J. Diff. Equations, 246 (2009), 4653-4669.

[38] Gyori I., G. Ladas, Oscillation Theory of Delay Differential Equations with Applications, Clarendon Press, Oxford, 1991.

[39] Gyori I., S. Trofimchuk, Global attractivity in $x'(t) = -\delta x(t) + pf(x(t-h))$, Dyn. Sist. Appl., 8 (1999), 197-210.

[40] Gyori I., S.I. Trofimchuk, On the existence of rapidly oscillatory solutions in the Nicholson blowflies equation, Nonlinear Anal., 48 (2002), 1033–1042.

[41] Hodgson P.E., Oscillations in mathematical biology, Lecture notes in biomathematics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1983.

[42] Ivanov A., M. Mammadov, Global stability, Periodic solutions and optimal control in a nonlinear differential delay model, Electron. J. Differ. Equ. Conf., 19 (2010), 177–188.

[43] Karakostas G., Ch. Philos, Y. Sficas, Stable steady state of some population models, J. Dyn. Differ. Equ., 4 (1992), 161–190.

[44] Kirchner J., U. Stroinski, Explicit oscillation criteria for systems of neutral differential equations with distributed delay, Tuebinger berichte zur functional analysis, (1994), 1-19.

[45] Kiskinov H., A. Zahariev, S. Zlatev, On the permanence of the positive absolutely continuous solutions of the generalized Mackey – Glass model, Scientific Works, Plovdiv University, Vol. 40, Book 3, Mathematics, in press, ISSN 0204-52-49.

[46] Kolmanovskii V., A.D. Myshkis, Introduction to the Theory and Applications of Functional differential Equations, Mathematics and its Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1999).

[47] Kuang Y., Global attractivity and periodic solutions in delay differential equations related to models of physiology and population biology, Jpn. J. Ind. Appl. Math., 9 (1992), 205–238.

[48] Kuang Y., On neutral-delay two species Lotka-Volterra competitive systems, J. Austr. Math. Sosc., B32 (1991), 311-326.

[49] Kubiaczyk I., S. Saker, Oscillation and stability in nonlinear delay differential equations of population dynamics, Math. Comput. Modell., 35 (2002), 295–301.

[50] Lankaster P., Theory of matrices, Academic Press, New York – Londonn, 1969.

[51] Li J., S. Cheng, Remarks on a set of sufficient conditions for global attractivity in a model of hematopoiesis, Comput. Math. Appl., 59 (2010), 2751–2755.

[52] Liu G., J. Yan, F. Zhang, Existence and global attractivity of unique positive periodic solution for a model of hematopoiesis, J. Math. Anal. Appl., 334 (2007), 157–171.

[53] Liu S.H, Q.X. Zhang, Y.H. Yu. Comput. Math. Appl, vol. 61(April 2011), No. 8, p. 2191-2196. [53] Liu G., J. Yan, F. Zhang, Existence and global attractivity of unique positive periodic solution for a model of hematopoiesis, J. Math. Anal. Appl. 334 (2007) 157–171.

[54] Liz E., E. Trofimchuk, S. Trofimchuk, Mackey–Glass type delay differential equations near the boundary of absolute stability, J. Math. Anal. Appl., 275 (2002), 747–760.

[55] Liz E., Four theorems and one conjecture on the global asymptotic stability of delay differential equation, The First 60 Years of Nonlinear Analisys ofJean Mawhin, Word Sci. Publ., River Edge, NJ, 2004 (pp. 117–129).

[56] Liz E., M. Pinto, M. Tkachenko, S. Trofimchuk, A global stability criterion for a family of delayed population models, Q. Appl. Math., 63 (2005), 56–70.

[57] Liz E., G. Rost, On the global attractor of delay differential equations with unimodal feedback, Discrete Contin. Dyn. Syst., 24 (2009), 1215–1224.

[58] Lotka A. J., Elements of phisical biology, Wiliams and Wilkins, Baltimore, 1925.

[59] MacDonald N., Time lags in biological models, Lecture notes in biomathematics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1978.

[60] Lumer G., Semi-inner product spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 100 (1961), 29-43.

[61] Mackey M., L. Glass, Oscillation and chaos in physiological control systems, Science 197, (1977), 287–289.

[62] Mackey M., Mathematical models of hematopoietic cell replication and control, in: H.G. Othmer, F.R. Adler, M.A. Lewis, J.C. Dallon (Eds.), The Art of Mathematical Modelling: Case Studies in Ecology, Physiology and Biofluids, Prentice Hall, 1997, pp. 149–178.

[63] Mackey M., U. an der Heiden, Dynamic diseases and bifurcations in physiological control systems, Funk. Biol. Med. 1, (1982), 156–164

[64] Malthus T. R.,An Essay on the principle of population,Johnson, London,1798.

[65] Markov S., On the mathematical modelling of microbial growth: some computational aspects, Serdica Journal of Computing, 5 (2) (2011), 153–168.

[66] Minorsky N., Self-exited oscillations in dynamical systems possessing retarded actions, J. Appl. Mech., 9 (1942), 65- 71.

[67] Monod J., Recherches sur la croissance des cultures bacteriennes, Paris, Hermann, 1942, p. 211.

[68]Monod J., The growth of bacterial cultures, Annual Reviews of Microbiology, 3 (1949), 371–394.

[69] Murray J.D., Lectures on Nonlinear-Differential-Equation Models in Biology, Clarendon Press, Oxford, 1977.

[70] Myshkis A.D., Linear Differential Equations with retarded argument,(In Russian), Izdatel'stwo "Nauka", 2nd edition.6

[71] Nazarenko V., Influence of delay on auto-oscillation in cell populations, Biofisika, 21 (1976), 352–356.

[72] Pielou E.C., Mathematical ecology, Wiley Interscience, New York, (1977).

[73] Rakkiappan R., Balasuramaniam P., New global exponential stability results for neutral type neural networks with distributed time delays, Neurocomputing, 71 (2008), 1039-1045.

[74] Rath R., N. Misra, P. Mishra, L. Padhy, Non-oscillatory behavior of higher order functional differential equations of neutral type, Electronic J. Diff. Equat., 163 (2007), 1-14.

[75] Rost G., On the global attractivity controversy for a delay model of hematopoiesis, Appl. Math. Comput., 190 (2007) , 846–850.

[76] Rost G., J. Wu, Domain-decomposition method for the global dynamics of delay differential equations with unimodal feedback, Proc. R. Soc. London Ser.A Math. Phys. Eng. Sci., 463 (2007), 2655–2669.

[77] Saker S., Oscillation and global attractivity in hematopoiesis model with delay time, Appl. Math. Comput., 136 (2003), 241–250.

[78] Schnell S., C. Mendoza, A closed-form solution for time-dependent enzyme kinetic, Journal of theoretical Biology, 187, (1997), 207–212.

[79] Schnell S., C. Mendoza, Time-dependent closed form solution for fully competitive enzyme kinetics, Bulletin of Mathematical Biology, 62, (2000), 321–336.

[80] Sissons C. J., M. Cross, S. Robertson, A new approach to the mathematical modelling of biodegradation processes, AMM 10, (1986), 33–40.

[81] Smith F.E., Population dynamics in Daphnia magna, Ecology, 44 (1963), 651-653.

[82] Smith H., P. Waltman, The Theory of Chemostat, Cambridge University press, 1995.

[83] Soederlind G., The logarithmic norm. History and modern theory, BIT Numerical mathematics, 46, No 3, (2006), 631- 652.

[84] Song Y., J. Wei, M. Han, Local and global Hopf bifurcation in a delayed hematopoiesis model, Int J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng., 14, (2004), 3909–3919.

[85] Song Y., Y. Peng, Periodic solutions of a nonautonomous periodic model of population with continuous and discrete time, J. Comput. Appl. Math., 188, (2006), 256–264.

[86] H. Thieme, Mathematics in Population Biology, Princeton Univ. Press, Princeton, 2003.

[87] Verhulst P. F., Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement, Corresp. Math. Et Phis.10, 1838, 113-121.

[88] Volterra V., Theorie mathematique de la lutte pour la vie, Gauthier – Villars et c-ie, Paris, 1931.

[89] Volterra V., Variazioni e fluttuazioni del numero díndividui in specie animali conviventi, Mem. R. Accad.Naz. Dei Lincei, 2, (1926), 31-113.

[90] Wan A., D. Jiang, Existence of positive periodic solutions for functional differential equations, Kyushu J. Math., 56, (2002), 193–202.

[91] Wan A., D. Jiang, X. Xu, A new existence theory for positive periodic solutions to functional differential equations, Comput.Math. Appl., 47, (2004), 1257–1262.

[92] Wang X., Z. Li, Dynamics for a class of general hematopoiesis model with periodic coefficients, Appl. Math. Comput., 186, (2007), 460–468.

[93] Webb J. L., Enzyme and Metabolic Inhibitors, Academic Press, 1963.

[94] Weng P., Global attractivity of pe riodic solution in a model of hematopoiesis, Comput. Math. Appl., 44 (2002), 1019–1030.

[95] Weng P., M. Liang, Existence and stability of periodic solution in a model of hematopoiesis, Math. Appl. (Wuhan), 8, (1995), 434–439.

[96] Wu X., J. Li, H. Zhou, A necessary and sufficient condition for the existence of positive periodic solutions of a model of hematopoiesis, Comput. Math. Appl. 54, (2007), 840–849.

[97] Yan X. Z., Non – oscillatory solutions of linear delay functional differential system of neutral type, Advanced Materials Research, Vols.482-484, (2012), 66-69.

[98] Ye D., M. Fan, H. Wang, Periodic solutions for scalar functional differential equations, Nonlinear Anal. 62, (2005), 1157–1181.

[99] Yilmaz Y., A. Zafer, A note on the oscillation of nonlinear neutral differential equations of arbitrary order, Chech. Math. J., 126/51 (2001),185-195.

[100] Zaghrout A., A. Ammar, M. El-Sheikh, Oscillations and global attractivity in delay differential equations of population dynamics, Appl. Math. Comput.,77, (1996), 195–204.

[101] Zahariev A. I., S. G. Zlatev, A.T. Georgieva, Non-oscillatory solutions of an odd order linear functional differential system of neutral type with distributed delay, Proceedings of the Bulgarian Academy of Sciences, Vol. 66, No 6, 2013.

[102] Zahariev A. I., D.D. Bainov, On some oscillation criteria for a class of neutral type functional differential equations, J. Austral. Math. Soc. Ser. B, 28 (1986), 229-239.

[103] Zverkin A.M., P.S. Gromova, On trigonometric series whose sums are continuous unbounded functions on the real axis- solutions of equations with retarded arguments. Diff. Uravn. 4, 1986, 1774-1784 (In Russian).