

РЕЦЕНЗИЯ

от д-р Вежди Исмаилов Хасанов – професор в
Шуменски университет „Епископ Константин Преславски“

на дисертационен труд за присъждане на образователната и научна степен „доктор“

по: област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика
професионално направление 4.5. Математика
докторска програма „Математически анализ“

Автор: Лаура Айети Аземи

Тема: Върху двойки неподвижни точки и двойки точки на най-добро приближение за циклични, нециклични и полу-циклични изображения

Научни ръководители: проф. дн Боян Георгиев Златанов и доц. д-р Христина Николова Кулина – Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“

1. Общо описание на представените материали

Със Заповед № РД-22-966 от 28.04.2025 г. на Ректора на Пловдивския университет „Паисий Хилендарски“ (ПУ) съм определен за член на научното жури за осигуряване на процедура за защита на дисертационен труд на тема „Върху двойки неподвижни точки и двойки точки на най-добро приближение за циклични, нециклични и полу-циклични изображения“ за придобиване на образователната и научна степен „доктор“ в област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5. Математика, докторска програма „Математически анализ“. Автор на дисертационния труд е Лаура Айети Аземи – докторантка на самостоятелна подготовка към катедра „Математически анализ“ с научен ръководител проф. дн Боян Георгиев Златанов и доц. д-р Христина Николова Кулина от ПУ.

Представеният от г-жа Лаура Аземи комплект материали е в съответствие с Чл.36 (1) от Правилника за развитие на академичния състав на ПУ, включва следните документи:

- молба до Ректора на ПУ за разкриване на процедурата за защита на дисертационен труд;
- автобиография в европейски формат;

- становище на научните ръководители за готовността на дисертационния труд за предварително обсъждане и протокол от катедрен съвет относно това обсъждане и решение за годност на труда за защита пред научно жури;
- дисертационен труд (на английски език);
- автореферат (на български и английски език);
- списък на научните публикации по темата на дисертацията;
- копия на научните публикации;
- списък на забелязани цитирания;
- декларация за оригиналност и достоверност на приложените документи;
- справка за спазване на минималните национални изисквания.

Докторантката е представила списък с 4 броя публикации и копия на същите. Едно от копията на публикации на практика е на резюме, което приемам като доказателство за участие в конференция.

2. Кратки биографични данни за докторанта

Съгласно представената автобиография, г-жа Лаура Аземи е завършила висшето си образование през 2016 г. в Държавен университет Тетово, гр. Тетово, Северна Македония, като придобива ОКС „бакалавър“ с квалификация „Преподавател по математика“. През 2020 г. придобива ОКС „магистър“ в същия университет с квалификация „Математик“.

Професионалната кариера на г-жа Лаура Аземи започва през 2016 г., като учител по математика в Гимназия „Скендербеу“, гр. Прешево, Сърбия. По-късно, през същата година, постъпва на работа в Гимназия „Улпиана“, гр. Липян, Косово (до ноември 2023 г.). От 17 октомври 2023 г. е асистент по математика Университет УБТ, гр. Прищина, Косово.

3. Актуалност на тематиката и целесъобразност на поставените цели и задачи

Темата на дисертационния труд е върху обобщения на теоремата за неподвижна точка на Банах (1922 г.) за свиващите изображения, свързани с двойки неподвижни точки и двойки точки на най-добри приближения, както и на възможни техни приложения.

Теоремите за неподвижни точки на изображение са важен инструмент за доказване съществуването на решение на задачи от различни научни области. От фундаменталните теореми: на Брауер (1911), нейните обобщения – теоремата на Шаудер (1930), Какутани (1941); на Банах, за която стана дума, последвана от теоремата на Браудер (1965), на Ран и Реурингс (2004) и др., до сега, изследванията в тази тема не са загубили своята актуалност. Изследванията с насока обобщаване на теоремата на Банах са основно в две направления:

първото е промени в изискванията върху прилежащото множество, а второто – в изискванията, към разглежданите изображения. През последните години е засилен интересът към двойки и тройки неподвижни точки и двойки и тройки точки на най-добри приближения на изображения със смесена монотонност, дефинирани върху частично наредени пространства.

Целта на изследването в дисертационния труд е получаване на нови резултати върху двойки неподвижни точки и двойки точки на най-добри приближения при отслабени условия върху прилежащото множество и второ при нециклични и полу-циклични изображения. Наред с изследвания върху двойки неподвижни точки е поставена задачата за тройки неподвижни точки на изображения със смесено монотонно свойство в частично наредени пространства.

Актуалността на темата на изследване и целесъобразността на поставената и задачи е показателно от множество публикации на други автори върху темата и разгледания пример на приложение за определяне на пазарно равновесие за олигополни пазари.

4. Познаване на проблема и методика на изследването

Г-жа Лаура Аземи в библиографията на дисертационния си труд е включила 90 литературни източника. Всеки един източник е подбран според темата на изследването и показва развитието на теорията на двойките неподвижните точки и двойките точки на най-добро приближение. Всички литературни източници с изключение на един са на английски език, като над 30 са от последните 15 години. Направеният обзор, представените предварителни резултати във въведението на дисертационния труд и коректното цитиране на литературните източници, са съответно признак, че г-жа Аземи добре познава състоянието на проблема и оценява постигнатите предварителни резултатите и възможностите за тяхното развитие.

Методиката и използваните методи на изследване са предимно теоретични. Проведеното емпирично проучване по състоянието на проблема, последвано от анализ на състоянието и оценка на резултатите са предпоставка за постигане на поставените цели и задачи. По метода на аналогията и обобщението от резултати за двойки точки са получени за тройки точки и съответни приложения.

5. Характеристика и оценка на дисертационния труд

Дисертационният труд е от 136 стр. и включва четири глави, заключение и библиография.

Първа глава на дисертационния труд представлява въведение в темата и има реферативен характер. Подробно е представено състоянието на проблема, формулирани са задачите на изследването и е направена обосновка на разработената тема. Дадени са основните използвани означения, дефиниции и твърдения от литературата. Представянето е подробно и изчерпателно и дава яснота за значимостта и актуалността на изследваната тема.

Втора глава е посветена на двойки точки на най-добро приближение за двойки циклични, полуциклични и нециклични изображения. Съдържанието на главата се базира на публикация [1] от приложения списък с публикации. От справката е видно, че резултатите са представени с доклад [4] на научна конференция. В параграф 2.1 са проведени изследвания за двойки точки (ξ_x, ξ_y) , (η_x, η_y) на най-добро приближение на циклично свиваща наредена двойка от двойки изображения $((F, f), (G, g))$ в рефлексивно банахово пространство. В следващите параграфи са изследвани полуциклични и нециклични двойки свиващи изображения съответно в рефлексивно и равномерно изпъкнало банахово пространство.

В трета глава се изследва изображение на Харди – Роджърс на две променливи със смесено монотонно свойство в частично наредено пространство и приложение на вариационния принцип на Екеланд за тройки неподвижни точки за изображение със смесено монотонно свойство. Резултатите в трета глава са публикувани в [2,3].

В четвърта глава е разгледано приложението неподвижните точки и точките на най-добро приближение при моделиране на пазарно равновесие на олигополни пазари. Разгледани са дуополни пазари и пазари доминирани от трима играчи.

6. Приноси и значимост на разработката за науката и практиката

Приносите в настоящия дисертационен труд имат научен и научно-приложен характер.

Доказано е съществуването на двойки точки (ξ_x, ξ_y) , (η_x, η_y) на най-добро приближение съответно на (F, f) и (G, g) , като $((F, f), (G, g))$ е циклично свиваща наредена двойка от двойки изображения, които са дефинирани в подмножества на рефлексивно банахово пространство X . Отслабването на изискването към X от равномерно изпъкнало до рефлексивно банахово пространство е за сметка на единствеността на двойките точки на най-добро приближение. За полуциклична двойка свиващи изображения (F, G) в рефлексивно банахово пространство е доказано също съществуването на точка на най-добро приближение (ξ, η) . Доказано е, че нециклична свиваща двойка изображения (F, G) на по две променливи съществува единствена оптимална двойка $((x, y), (u, v))$ от наредени двойки неподвижни

точки (x, y) и (u, v) съответно на F и G . В този случай е получена оценка на грешките $\|x - x_n\|$ и $\|y - y_n\|$.

За изображение на Харди – Роджърс на две променливи със смесено монотонно свойство в частично наредено пространство е доказано съществуване на двойка неподвижна точка. За наредена тройка изображения (F_1, F_2, F_3) със смесено монотонно свойство е приложен принципът на Екеланд и като приложение е доказано съществуването на тройка неподвижна точка (x, y, z) на (F_1, F_2, F_3) .

7. Преценка на публикациите по дисертационния труд

Основните резултатите от дисертационния труд са публикувани в три публикации. И трите публикации са в съавторство, от които две са с един съавтор и една с двама съавтори. В две от работите единият съавтор е единия научен ръководител. Считам, че приносите на съавторите в публикациите са равностойни.

Статия [1] от представения списък с публикации съдържа основни резултати от втора глава и публикувана в списание Mathematics с импакт фактор квартил Q1 на Web of Science. Публикация [2] в сборник от доклади на научна конференция MATTEX 2022 с международно участие от националния референтен списък. Третата публикация [3] е включена в специализиран сборник с доклади на 49-та международна конференция „Приложение на математиката в техниката и икономиката“ 2023, издание на AIP Conference proceedings, който е с SJR и е реферирано в Scopus и Web of Science. Двете публикации [2,3] включват резултати от трета глава и са за основа на приложенията в четвърта глава.

Резултатите са апробирани общо на три научни конференции. При справка в Scopus се вижда, че публикация [1] има 4 цитирания. Съгласно минималните национални изисквания в Правилника за прилагане на ЗРАС в РБ необходимите и натрупаните по група показатели точки са, както следва:

Група показатели	Минимални точки	Натрупани точки
А – дисертационен труд	50	50 т.
Г 7 – научни публикации - в издание с IF от Q1 на WoS - в издание с SJR	30	Общо 105 т. 3*25=75 3*10=30
Д 11 - цитирания	-	4*2*4=32 т.

Следователно минималните национални изисквания са преизпълнени.

Не съм забелязал наличие на плагиатство, както в публикациите така и в дисертационния труд на г-жа Лаура Аземи.

8. Лично участие на докторантката

Нямам основания да се съмнявам за личното участие на докторантката в дисертационното изследване, приносите и в подготовката на дисертационния труд.

9. Автореферат

Авторефератът е подготвен на два езика – български и английски. Отразява коректно съдържанието на дисертационния труд и отговаря на нормативните изисквания. Съдържа някои технически и езикови грешки, но те не омаловажават постигнатите резултати. Има разминаване на номерацията на главите в автореферата с тези в дисертационния труд, поради липса на номер на въведението в автореферата, докато в дисертационния труд е с номер едно.

10. Критични забележки и препоръки

Нямам критични бележки към комплекта документи.

Дисертационният труд съдържа някои технически грешки, които при по-внимателно четене лесно могат да бъдат отстранени. Препоръчвам да се обмисли дефиниция 1.9 и смесеното монотонно свойство на двойка изображения. Считаю, че тук $G(x_1, y) \leq G(x_2, y)$ следва да е $G(x_1, y) \geq G(x_2, y)$. Дефиниция 1.41 съдържа дефинирани две редици, които биха могли да са като номерирани формули, за да бъдат цитирани при необходимост. Текстът „Everywhere, when considering the sequences $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ and $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ we will assume that they are the sequences defined in Definition 1.41.“ не е приложим за целия труд (виж теорема 2.3). Препоръчвам в условията на теоремите да се дефинират всички използвани означения или да се направи препратка, за да са ясни с какво значение са. Обръщам внимание на теорема 2.3, освен редиците $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$, не са пояснени и константите C , q и α , които имат отношение с изпъкналостта на пространството Z и свойството на двойката изображения (F, G) .

Следват някои от забелязаните неточности в дисертационния труд:

- на стр. 8, ред 19, $X \times X$ следва да е $X \times Y$;
- на стр. 11, в теорема 1.4, $(X \times X, \rho)$ е излишно;
- на стр. 13, в теореме 1.5 и 1.6 и на стр. 4, в редове 4 и 6, f следва да е T ;
- на стр. 18, в теорема 1.9, $y = F(\eta, \xi, \eta)$ следва да е $\eta = F(\eta, \xi, \eta)$;

- на стр. 25, в теорема 1.17, $(X, \|\cdot\|)$ следва да е $(X^*, \|\cdot\|)$;
- на стр. 68, в ред 6 отдолу на горе, A и B следва да са X ;
- на стр. 70, в ред 12, $u_n = F(u_n, v_n)$ и $v_n = F(v_n, u_n)$ следва да са $u_n = G(u_n, v_n)$ и $v_n = G(v_n, u_n)$;
- на стр. 79, на ред 15 отдолу на горе, $x \leq u$ и $z \leq w$ следва да са $u \leq x$ и $w \leq z$, в дефиниция 3.11, $H: X \rightarrow X$ следва да е $H: X \times X \times X \rightarrow X$, в дефиниция 3.12, „of if“ следва да е „of (F, G, H) if“;
- на стр. 80, в края на твърдение 3.1, неравенствата $u \geq x$, $v \leq y$ и $w \geq z$ са излишни, те са изпълнени по условие.

11. Лични впечатления

Не познавам докторантката и нямам предварителни впечатления.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дисертационният труд **съдържа научни и научно-приложни резултати, които представляват оригинален принос в науката** и отговарят на всички изисквания на Закона за развитие на академичния състав в Република България (ЗРАСРБ), Правилника за прилагане на ЗРАСРБ и съответния Правилник на ПУ „Паисий Хилендарски“. Съдържанието на дисертационния труд и публикациите показват, че докторантката Лаура Айети Аземи притежава задълбочени теоретични знания и професионални умения по професионално направление 4.5. Математика, като демонстрира качества и умения за самостоятелно провеждане на научно изследване.

Поради гореизложеното, давам своята **положителна оценка** за проведеното изследване, постигнатите резултати и приноси, в представения дисертационния труд и **предлагам на почитаемото научно жури да присъди образователната и научна степен „доктор“** на Лаура Айети Аземи в област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5. Математика, докторска програма „Математически анализ“.

16.05.2025 г.

Рецензент:

Проф. д-р Вежди Хасанов