

## **РЕЦЕНЗИЯ**

**от доц. д-р Мирослав Колев Христов**  
**ШУ „Епископ Константин Преславски“**  
**Катедра „Алгебра и геометрия“**

на дисертационен труд за присъждане на образователната и научна степен  
**„доктор“**

по: област на висше образование 4. *Природни науки, математика и информатика*  
професионално направление 4.5. *Математика*  
докторска програма *Математически анализ*

**Автор: Лаура Айети Аземи .**

**Тема:** *„Върху двойки неподвижни точки и двойки точки на най-добро приближение за циклични, нециклични и полу-циклични изображения“*

**Научен ръководител:** проф. д.м.н. Боян Георгиев Златанов и доц. д-р Христина Николова Кулина ПУ „Паисий Хилендарски“

### **1. Общо описание на представените материали**

Със заповед № 22-966 /28.04.2025 г. на Ректора на ПУ бях определен за член на научното жури за осигуряване на процедура за защита на посочения по-горе дисертационен труд. На първото заседание на журито бях избран за рецензент.

Съгласно чл. 36 (1) от Правилника за развитието на Академичния състав на ПУ (в сила от 16.12.2024 г.) дисертантът е представил пълния комплект от документи, който включва:

1. молба по образец до ректора за откриване на процедура;
2. автобиография по европейски формат;

3. протокол от предварителното обсъждане в катедрата и становище от научния ръководител, относно готовността за предварително обсъждане;

4. автореферат (на български и чужд език);

4.а. на български език 64 стр.

4.б. на английски език 32 стр.

4.в. на български език 32 стр.

5. декларация за оригиналност и достоверност на приложените документи;

6. справка за съответствие с минималните национални изисквания;

7. списък на публикациите;

8. дисертационен труд;

9. копия на публикациите по темата на дисертационния труд;

10. списък на забелязани цитирания;

11. документ за внесена такса, съгласно Тарифата;

Докторантът е приложил, 4 публикации.

## **2. Кратки биографични данни за докторанта**

Лаура Айети Аземи е родена на 19.04.1993. През 2016 завършва бакалавърска степен в Държавен университет Тетово - Република македония, където придобива квалификация „преподавател по математика“. Магистърска степен по математика е придобита в същия университет през 2020г. През периода 2016-2023 Лаура Айети Аземи е работила като учител по математика в гимназия „Скендербеу“ и „Улпиана“. От 2023г до настоящия момент докторантът работи като асистент в Университета в Прищина.

## **3. Актуалност на тематиката и целесъобразност на поставените цели и задачи**

Последните години има лавинообразен ръст на изследванията в областта на обобщения от различен вид за неподвижни точки и теорията на олигополните пазари. Интересът към неподвижните точки и техни обобщения се основава на големите възможности които предлагат в приложенията. Интересът към олигополните пазари е продиктуван от глобализацията на икономиката. Публикациите върху олигополни пазари са както чисто теоретични в

математически списания, така и приложни в списания по икономика. Моето мнение е, че представените изследвания са актуални и ще бъдат интересни за широк кръг от читатели, както математици така и икономисти.

Също така първата публикации от 2022 г има вече 4 цитирания, които са индексирани в базите от данни WoS и/или SCOPUS, което е убедително доказателство за актуалността на изследваните в дисертационния труд задачи.

#### **4. Познаване на проблема**

Считам, че в настоящия момент, всеки изследовател не е в състояние да се запознае и да усвои всички публикувани резултати по дадена научна тема (дори и в „тясно“ направление). Основни причини за това са: наличието на огромен брой източници; външно наложен ограничен достъп до информацията, недостъпни от езикова гледна точка и др. Поради посочените причини, познаването на даден научен проблем би трябвало да означава, че изследователят притежава определен набор от научни сведения по темата, които едновременно имат необходимото качество, дълбочина, обхват и са достатъчни за конкретното изследване. Смятам, че Лаура Айети Аземи познава детайлно моментното състояние (както и историческото развитие) на разглежданите научни проблеми в дисертационния си труд. Това мое впечатление се основава на представената дисертация. Ще отбележа, че литературата съдържа само източници, които имат пряко отношение към изследванията в дисертацията.

#### **5. Методика на изследването**

Основен апарат на провеждане на изследванията в рецензирания труд са методите и научни факти от няколко математически направления: реален математически анализ; функционален анализ; топология; вариационни принципи; теория на олигополните пазари, статистически методи за моделиране върху бази от данни. В изследванията по математика за разлика от другите науки не може да се каже, че се използва точно едни метод или дори няколко добре известни

метода, а по-скоро се прилагат различни знания, умения и техники, които изследвателя съумява да съчетае, така че да реши поставените задачи.

## **6. Характеристика и оценка на дисертационния труд**

Представеният за защита дисертационен труд е в размер от 136 страници, състои се от предговор, увод, три глави, заключение и литература от 90 заглавия.

Уводът е в две части, предговор където възможно най-кратко е описана темата на изследваните проблеми. Глава 1 е въведението, където са представени известните понятия и теореми, които се използват в следващите глави. Въведени са понятията за неподвижна точка, частично наредено метрично пространство, равномерно изпъкнали и рефлексивни банахови пространства, двойки и тройки неподвижни точки, точки на най-добро приближение, оценка на грешката за неподвижни точки и точки на най-добро приближение, вариационния принцип на Екеланд.

За разлика от класическата структура за дисертационен труд, където уводът или въведението е посветено на всички определения, понятия и резултати, които са на други автори, то в представената дисертация, добро впечатление прави, че общата дефиниция за пазарно равновесие по Курно за олигополни пазари и обобщението му при използване на функции на реакция вместо максимизиране на печалбата, статистически методи за оценка на модели при използване на реални бази от данни са въведени в глава 4, където се използват, което облекчава читателя. Нека обърнем внимание, че дисертационния труд е по математически анализ и глави 2 и 3 съдържат резултатите по математически анализ и са напълно достатъчни за придобиването на образователната и научна степен „доктор“. Глава 4 е допълнителна и илюстрира възможностите на получените теоретични резултати при моделиране и изследване на олигополни пазари.

В Глава 2 се изследват двойки точки на най-добро приближение за циклични и полуциклични изображения. Полуцикличните изображения са появяват естествено, когато разглеждаме пазар с двама участника, които променят своите

нива на производство, като се съобразяват едновременно от собствените резултати и тези на конкурента. От друга страна класическата евклидова метрика не описва удачно печалбите на участниците, докато сумиращата такава е по-пригодна при изследването на олигополни пазари, с недостатъка, че тя не поражда равномерно изпъкнало банахово пространство, а само рефлексивно такова. Въведени са нови понятия, като двойки неподвижни точки и двойки точки на най-добро приближение за полуцикличвни изображения. Понятието за двойка оптимални неподвижни точки за нециклични изображения е обобщено за изображения на две променливи, намерени са достатъчни условия за съществуване и единственост на наредени двойки от оптимални точки, когато прилежащото пространство е равномерно изпъкнало и са намерени априори и а постериори оценки на грешката, когато модулът на изпъкналост е от степенен порядък.

В глава втора е обобщен вариационният принцип на Екеланд върху множества породени от изображения със смесеното монотонно свойство в частично наредени метрични пространства. Така полученият резултат е използван за намиране на достатъчни условия за съществуване и единственост на тройки неподвижни точки за наредени тройки от изображения със смесеното монотонно свойство. Като следствие са получени вече известни резултати от направлението за тройки неподвижни точки.

Глава 4 се състои от приложения в олигополни пазари, на получените в глава 2 резултати и други непубликувани резултати. Непубликуваните резултати са върху моделирането на реални данни от олигополен пазар с трима участника. Конструирани са модели, на функции на реакцията за участниците, които да притежават смесеното монотонно свойство. Направен е статистически анализ на предсказаните с конструираните модели данни. От илюстративните примери се вижда, че съществуват пазари в които по естествен начин функции със смесеното монотонно свойство описват статистически достоверно реалните данни.

В заключението са описани коректно приносите в представения дисертационен труд.

Резултатите са апробирани на два научни форума.

## **7. Приноси и значимост на разработката за науката и практиката**

Представенията дисертационен труд е оригинално изследване което е посветено на обобщения на фундаменталния резултат на Банах за съществуване и единственост на неподвижни точки. Като основни приноси на автора могат да се посочат:

- Двойки точки на най-добро приближение на циклични и полу-циклични изображения в рефлексивни банахови пространства, вместо равномерно изпъкнали.
- Разработка на техника за оценка на грешката на точки на най-добро приближение за нециклични изображения.
- Изследвани са двойки и тройки неподвижни точки за изображения със смесено монотонно свойство в частично наредени пространства.
- Обобщен е вариационния принцип на Екеланд за изображения със смесено монотонно свойство.
- Някои от резултатите са приложени за моделиране на олигополни пазари.

## **8. Преценка на публикациите по дисертационния труд**

Дисертационния труд е базиран на 4 публикации (две в списания и две от доклади на конференции). Едната от публикациите е индексирана в WoS с Q1 а другата е в индексирана в SCOPUS с SJR. Две от работите са самостоятелни. Това показва, че Лаура Айети Аземи удовлетворява минималните национални изисквания според ППЗРАСРБ с 105 точки при необходими 30 такива.

## **9. Лично участие на докторанта(ката)**

Докторантът се обучава в самостоятелна форма, което предполага, че при записването си като докторант е представил приключен дисертационен труд. Изложението в дисертацията е последователно, технически обосновано и ясно демонстрира задълбочено лично ангажиране на докторанта с всички етапи на разработката. Периодът в който Лаура Аземи се е обучавала и работила по тематиката е повече от 4 години.

Това ми дава основание да приема, че формулираните приноси и получени резултати, са нейна лична заслуга.

## **10. Автореферат**

Авторефератът коректно систематизира резултатите от дисертацията и е в съответствие с Правилника на ПУ за изготвяне на авторефератите по дисертационните трудове.

## **11. Критични забележки и препоръки**

Нямам критични бележки, за стил на оформление на дисертацията и получените резултати

Препоръчвам на автора да продължи своята работа в тематиката на дисертационния труд, да се опита да реши и публикува поставените в края на всяка глава отворени задачи и да публикува резултатите от глава 4.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

По мое мнение кандидатът Лаура Айети Аземи има достатъчно, както като количество, така и като качество резултати. Дисертационният труд съдържа научни и научно-приложни резултати, които представляват оригинален принос в науката. Представените документи удовлетворяват всички изисквания на Закона за развитие на академичния състав в Република България (ЗРАСРБ), Правилника

за прилагане на ЗРАСРБ, Правилника за развитие на академичния състав на ПУ. Затова давам своята **строго положителна оценка и препоръчвам научното жури да присъди образователната и научна степен „доктор“ на Лаура Айети Аземи** по област на висшето образование 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5. Математика, докторска програма Математически анализ.

16.05.2025 г.

Рецензент: .....

(подпис)

(доц. д-р Мирослав Христов)