

Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“
Факултет по математика и информатика

КАТЕДРА
„МАТЕМАТИЧЕСКИ АНАЛИЗ“

Лаура Айети Аземи

**Върху двойки неподвижни точки и двойки
точки на най-добро приближение за циклични,
нециклични и полу-циклични изображения**

АВТОРЕФЕРАТ

за присъждане на образователната и научна степен
„ДОКТОР“

Област на висше образование:

4. Природни науки, математика и информатика

Професионално направление:

4.5. Математика
(МАТЕМАТИЧЕСКИ АНАЛИЗ)

Научни ръководители: проф. дн Боян Златанов
доц. д-р Христина Кулина

Пловдив - 2025

Дисертационният труд е обсъден и насочен за защита на разширено заседание на катедра „Математически анализ“ на Факултета по математика и информатика при Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“ на 09.04.2025 г.

Дисертационният труд „Върху двойки неподвижни точки и двойки точки на най-добро приближение за циклични, нециклични и полу-циклични изображения“ съдържа 136 страници. Състои се от предговор, въведение, 3 глави, заключение, библиография. Библиографията съдържа 90 източника. Списъкът на авторските публикации по дисертацията се състои от 4 заглавия.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на 4.06.2025 г. от 13:00 часа в Заседателната зала на Нова сграда на Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“, гр. Пловдив, бул. „България“ № 236.

Материалите по защитата са на разположение на интересувалите се в Деканата на Факултета по математика и информатика, Нова сграда на Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“, кабинет 330, всеки работен ден от 8:30 до 17:00 часа.

Съдържание

ОБЩИ ХАРАКТЕРИСТИКИ НА ДИСЕТАЦИОННИЯ ТРУД 5

ВЪВЕДЕНИЕ 5

Означения, използвани в дисертационния труд	6
Неподвижни точки в частично наредени метрични пространства . . .	6
Двойки неподвижни точки в частично наредени метрични простран-	
ства	7
Циклични изображения	9
Равномерно изпъкнали банахови пространства	9
Точки на най-добро приближение	10
Оценка на грешката за точки на най-добро приближение в равномер-	
но изпъкнали банахови пространства	11
Рефлексивни банахови пространства	12
Точки на най-добро приближение в рефлексивни банахови простран-	
ства	12
Нециклични изображения	13
Двойки на най-добро приближение за нециклични изображения . . .	13
Наредени двойки от циклични изображения	14
Полу-непрекъснато от долу изображения	14
Вариационен принцип на Екеланд и неподвижни точки	15

Глава I Двойки точки на най-добро приближение за циклични, полу-циклични и нециклични изображения в банахови пространства 15

Двойки точки на най-добро приближение за циклични изображения	
в рефлексивни банахови пространства	15
Двойки точки на най-добро приближение за полу-циклични изобра-	
жения в рефлексивни банахови пространства	18
Някои спомагателни резултата	19
Двойки точки на най-добро приближение за нециклични изображе-	
ния в равномерно изпъкнали банахови пространства	20
Някои спомагателни резултата	21

Глава II Вариационен принцип в частично наредени метрични пространства	22
Изображения на Харди-Роджърс със смесеното монотонно свойство в частично наредени метрични пространства	22
Тройки неподвижни точки за изображения със смесеното монотонно свойство	23
Някои спомагателни резултата	24
Приложение на Теорема 15	25
 Глава III Приложение в пазарно равновесие за олигополни пазари	25
Приложение на Теорема 12 за пазарно равновесие в дуополни пазари	27
Някои статистически тестове при моделиране на временни редове . .	28
Метод на най-малките квадрати	29
Статистически мерки за оценка на моделите	30
Приложение на Теорема 16 в изследването на пазарно равновесие в пазари доминирани от трима участника	30
Изследване на пазара на бира в България	32
Модели с $(F_1, F_2, F_3) \in M_2$	35
Модели с $(F_1, F_2, F_3) \in M_1$	38
Модели с $(F_1, F_2, F_3) \in M_3$	40
Заклучение относно моделирането на пазара на бира с помощта на функции на реакция със смесено монотонно свойство	42
Изследване на пазара на мобилни услуги в САЩ	43
Модели с $(F_1, F_2, F_3) \in M_2$	47
Модели с $(F_1, F_2, F_3) \in M_1$	48
Заклучение относно моделирането на мобилния пазар с помощта на функции на реакция със смесено монотонно свойство	50
Върху илюстративен пример със специфично подбрани случайни данни, удовлетворяващи предварително зададени зависимости	51
Върху илюстративни примери с произволно избрани данни . . .	52
Устойчивост на редиците от последователни итерации	54

Заключение	59
Основни приноси в настоящия дисертационен труд	59
Списък на публикациите по дисертационния труд	59
Апробация на получените резултати	60
Връзката между приносите, задачите, мястото на описание в дисертационния труд и направените публикации	60
Благодарности	60
Литература	60

ОБЩИ ХАРАКТЕРИСТИКИ НА ДИСЕРТАЦИОННИЯ ТРУД

В представения дисертационен труд са разгледани обобщения на теоремата на Банах за свиващите изображения, свързани с двойки неподвижни точки, тройки неподвижни точки, двойки точки на най-добро приближение и техни възможни приложения. Обобщенията касаят отслабване на изискването прилежащото пространство да бъде равномерно изпъкнало банахово пространство, а само да бъде рефлексивно такова. Друго направление на изследванията е да се разглеждат не само циклични изображения, а също така нециклични и полу-циклични такива. В контекста на точки на най-добро приближение е намеране оценка на грешките за нециклични изображения. Получени са някои резултати и в областта на неподвижните точки в частично наредени метрични пространства. Разгледано е обобщение на вариационния принцип на Екеланд върху множества, породени от изображения със смесеното монотонно свойство. Предложена е техника за доказателство на резултати за съществуване и единственост на тройки неподвижни точки за изображения удовлетворяващи смесеното монотонно свойство. Конструирани са модели, породени то реални статистически данни за олигополни пазари доминирани от три големи участника.

ВЪВЕДЕНИЕ

Теоремите за неподвижни точка, инициирани от принципа на свиване на Банах [10] се оказват мощен инструмент в нелинейния анализ.

Теорията на неподвижните точка разбира се включва търсенето на комбинация на условия върху множество X и изображението $T : X \rightarrow X$, която от своя страна, гарантира, че T оставя поне една точка от X фиксирана, т.е. $\xi = T(\xi)$ за някои $\xi \in X$. След публикуването му [10] има голям брой приложения и обобщения.

Означения, използвани в дисертационния труд

Означаваме множеството на естествените числа с $\mathbb{N}$ и множеството на реалните числа с $\mathbb{R}$. Главните букви от Латинската азбука A, B, C, U, V, X, Y, Z използваме за означаване на множества с различна структура. Обикновено буквите F, G, H и T използваме за означение на изображения между множества. Константите, които се появяват в неравенствата от свиващ тип означаваме с малките букви от Гръцката азбука α, β, γ или първите от малките букви на латинската азбука a, b и c . Гръцката буква δ ще бъде използвана за модула на изпъкналост. С малките букви от края на Латинската азбука x, y, z, w, u, v, t и ξ, η, ζ означаваме елементи от разглежданите множества. Ще означаваме с ρ функцията за разстояние върху произволно множество X , с (X, ρ) метричното пространства и с $(X, \|\cdot\|)$ нормирано пространство. Предпочитаме да използваме ρ за разстояние вместо d , защото ще означаваме с $d(U, V) = \inf\{\rho(u, v) : u \in U, v \in V\}$ разстоянието между подмножествата U и V на някое метрично пространство (X, ρ) . Понякога, когато няма опасност от объркване, ще пишем $\text{dist}(U, V) = d(U, V)$ или дори $\text{dist}(U, V) = d$, единствено за да можем да съберем някои от формулите в текстовото поле.

Винаги, когато разглеждаме разстояние ρ в нормирано пространство, ще приемаме, че то е дефинирано чрез $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Означението $X \times Y$ ще използваме за декартово произведение на двете множества X и Y , т.е. $u = (x, y) \in X \times X$, ако $x \in X$ и $y \in Y$.

Определение 1. Нека X е множество и $T : X \rightarrow X$ е изображения. Елементът $\xi \in X$ се нарича неподвижна точка на T , ако е изпълнено $\xi = T\xi$.

Неподвижни точки в частично наредени метрични пространства

Ще означаваме с $(X, \preceq)$ частично наредено множество, а с $(X, d, \preceq)$ метрично пространство с частична наредба.

Определение 2. ([33, 34]) Нека $(X, \preceq)$ е частично наредено множество. Казваме, че изображението $T : X \rightarrow X$ е монотонна, ако или запазва наредбата, т.е. $Tx \preceq Ty$ за всички $x \preceq Y$ или обръща наредбата, т.е. $f(x) \succ y$ за всеки $x \preceq y$.

Теорема 1. ([33]) Нека $(X, d, \preceq)$ е частично наредено, пълно метрично пространство, $T : X \rightarrow X$ е непрекъснато, монотонно изображение и съществува $\alpha \in [0, 1)$, така че неравенството

$$(1) \quad \rho(Tx, Ty) \leq \alpha \rho(x, y)$$

е изпълнено за всеки две $x, y \in X$, удовлетворяващи $x \succ y$. Тогава съществува неподвижна точка $\xi \in X$ за T , ако съществува $x_0 \in X$, така, че едно от двете неравенства $x_0 \preceq fx_0$ или $x_0 \succ fx_0$ е изпълнено.

Неподвижната точка ξ е единствена, ако всеки два елемента $x, y \in X$ имат горна граница или долна граница.

Идеите в [33] са предхождани от [26], където в частично наредено спрямо конус метрично пространство $(X, \|\cdot\|)$ е изследвано наличието на неподвижни точки за монотонни изображения.

Ако неравенство (1) е изпълнено за всеки две $x, y \in X$, без изискването X да бъде частично наредено и премахвайки допълнителните предположения, то получаваме теоремата на Банах за свиващите изображения, т.е. съществува единствена неподвижна точка за T .

Двойки неподвижни точки в частично наредени метрични пространства

Новото понятие, а именно двойки неподвижни точки е въведено в [27]. По късно в [26] са получени резултати за двойки неподвижни точки в частично наредени метрични пространства.

Определение 3. ([38]) Нека A е непразно множество и $F, G : A \times A \rightarrow A$ са две изображения. Ако $\xi = F(\xi, \eta)$ и $\eta = G(\xi, \eta)$, то наредената двойка $(\xi, \eta) \in A \times A$ се нарича двойка неподвижни точки в A за наредената двойка (F, G) от изображения.

Ако $G(x, y) = F(y, x)$, то получаваме класическата дефиниция за двойки неподвижни точки от [26, 27].

Смесеното монотонно свойство за изображение $F : X \times X \rightarrow X$ е обобщено до смесено монотонно свойство за наредена двойка от изображения $F, G : X \times X \rightarrow X$ в [7, 29].

Определение 4. ([7, 29]) Нека $(X, \preceq)$ е частично наредено множество и са дадени изображенията $F, G : X \times X \rightarrow X$. Казваме, че (F, G) удовлетворява смесеното монотонно свойство, ако $F(x, y)$ и $G(x, y)$ са монотонно ненамаляващи по x и са монотонно нарастващи по y , т.е. за всеки две $x, y \in X$,

$$F(x_1, y) \preceq F(x_2, y) \text{ и } G(x_1, y) \preceq G(x_2, y), \text{ когато } x_1 \preceq x_2$$

и

$$F(x, y_1) \succeq F(x, y_2) \text{ и } G(x, y_1) \succeq G(x, y_2), \text{ когато } y_1 \preceq y_2.$$

Ако $G(x, y) = F(y, x)$, то получаваме класическото определение за смесено монотонно свойство от [26, 27].

Следващата теорема е обобщение на резултатите от [27].

Теорема 2. ([7]) Нека $(X, \rho, \preceq)$ е пълно метрично пространство с частична наредба и $F, G : X \times X \rightarrow X$ са такива, че (F, G) притежава смесеното монотонно свойство и съществува $\alpha \in [0, 1)$, така че

$$(2) \quad \rho(F(x, y), F(u, v)) + \rho(G(x, y), G(u, v)) \leq \alpha(\rho(x, u) + \rho(y, v))$$

е изпълнено за всеки $x \succ u, y \preceq v$.

Нека е валидно едно от следните условия:

2.а) F и G са непрекъснати

2.б) за всяка сходяща редица $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x, y), (x_n, y_n) \in X \times X$

- ако $(x_n, y_n) \preceq (x_{n+1}, y_{n+1})$, то $(x_n, y_n) \preceq (x, y)$
- ако $(x_n, y_n) \succcurlyeq (x_{n+1}, y_{n+1})$, то $(x_n, y_n) \succcurlyeq (x, y)$.

Ако съществуват $x_0, y_0 \in X$ така че едно от следните да е в сила

- $x_0 \preceq F(x_0, y_0)$ и $y_0 \succcurlyeq G(x_0, y_0)$
- $x_0 \succcurlyeq F(x_0, y_0)$ и $y_0 \preceq G(x_0, y_0)$,

то съществува двойка неподвижни точки $(\xi, \eta) \in X \times X$.

Ако допълнително всяка двойка от елементи $x, y \in X$ притежава горна граница или долна граница, то

- (ξ, η) е единствена двойка от неподвижни точки
- ако $G(\xi, \eta) = F(\eta, \xi)$, то $\xi = \eta$.

Ако $G(x, y) = F(y, x)$, то получаваме класическите резултати от [27].

Циклични изображения

Определение 5. ([30]) Нека X е произволно множество и $A, B \subset X$. Изображението $T : A \cup B \rightarrow A \cup B$ се нарича циклично изображение, ако $T : A \rightarrow B$ и $T : B \rightarrow A$.

Първият резултат за неподвижни точки за циклични изображения е получен в [30].

Теорема 3. ([30]) Нека A и B са две непразни множества в пълното метрично пространство и $T : A \cup B \rightarrow A \cup B$ е циклично изображение, такова че е валидно неравенството *there holds*

$$(3) \quad \rho(Tx, Ty) \leq \alpha \rho(x, y), \text{ за всички } x \in A, y \in B,$$

където $\alpha \in [0, 1)$. Тогава T има единствена неподвижна точка в $A \cap B$.

Непосредствено следствие на последната теорема е че множествата A и B имат непразно сечение. Резултатите от [30] са допълнени в [32] с оценка на грешката и резултати за изображения на Канан, Чатержеа и Замфиреску.

Равномерно изпъкнали банахови пространства

Нека $(X, \|\cdot\|)$ е нормирано пространство и с $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ и $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ да означим съответно затвореното единично кълбо и единичната сфера.

Определение 6. ([14, 21]) Нека $(X, \|\cdot\|)$ е банахово пространство. За всяко $\varepsilon \in (0, 2]$ модулът на изпъкналост спрямо нормата $\|\cdot\|$ се дефинира чрез

$$\delta_{(X, \|\cdot\|)}(\varepsilon) = \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\| : x, y \in B_X, \|x-y\| \geq \varepsilon \right\}.$$

Казваме, че нормата е равномерно изпъкнала, ако $\delta_{(X, \|\cdot\|)}(\varepsilon) > 0$ за всяко $\varepsilon \in (0, 2]$ и пространството $(X, \|\cdot\|)$ се нарича равномерно изпъкнало банахово пространство.

Когато няма опасност от объркване ще означаваме $\delta_{(X, \|\cdot\|)}$ само с δ .

Определение 7. ([15], р. 42) Банаховото пространство $(X, \|\cdot\|)$ се нарича строго изпъкнало, ако $x = y$ при условие че $x, y \in X$ са такива, че $\|x\| = \|y\| = 1$ и $\|x+y\| = 2$.

Точки на най-добро приближение

Ако изображението T е циклично, то е възможно да не притежава неподвижна точка. Идея за промяна на понятието за неподвижна точка е предложено в [20], където равенството $x = Tx$ е заменено с оптимизационната задача $\min\{\rho(x, Tx) : x \in A \cup B\}$ за T циклично изображение.

Определение 8. ([20]) Нека (X, ρ) е метрично пространство, A и B са подмножества на X и $T : A \cup B \rightarrow A \cup B$ е циклично изображение. Казваме, че точката $x \in A$ е точка на най-добро приближение за T в A , ако $\rho(x, Tx) = \text{dist}(A, B)$.

Определение 9. ([20]) Нека (X, ρ) е метрично пространство, A и B са подмножества на X . Казваме, че изображението $T : A \cup B \rightarrow A \cup B$ свиващо циклично изображение, ако то е циклично и удовлетворява неравенството

$$(4) \quad \rho(Tx, Ty) \leq \alpha \rho(x, y) + (1 - \alpha) \text{dist}(A, B)$$

за някое $\alpha \in (0, 1)$ и всички $x \in A$, $y \in B$.

Нека споменем, че изключваме случая $\alpha \neq 0$, защото при него (4) се редуцира до $\rho(Tx, Ty) \leq \text{dist}(A, B)$, което е възможен да бъде изпълнено само за някои тривиални частни случаи.

Теорема 4. ([20]) *Нека A и B са непразни, затворени и изпъкнали подмножества в равномерно изпъкналото банахово пространство $(X, \|\cdot\|)$. Ако $T : A \cup B \rightarrow A \cup B$ е свиващо циклично изображение, то съществува единствена точка на най-добро приближение x за T в A и Tx е точка на най-добро приближение за T в B .*

Оценка на грешката за точки на най-добро приближение в равномерно изпъкнали банахови пространства

Ако $(X, \|\cdot\|)$ е равномерно изпъкнало банахово пространство, тогава $\delta_{(X, \|\cdot\|)}(\varepsilon)$ е строго растяща функция. Следователно, в всяко равномерно изпъкнало банахово пространство съществува обратната на модула на изпъкналост функция δ^{-1} . Ако съществуват константи $C > 0$ и $q > 0$, така че неравенството $\delta(\varepsilon) \geq C\varepsilon^q$ да е изпълнено за всяко $\varepsilon \in (0, 2]$, то казваме, че модулет на изпъкналост е от степенен тип q .

Теорема 5. ([37]) *Ако A и B са непразни, затворени и изпъкнали подмножества в равномерно изпъкналото банахово пространство $(X, \|\cdot\|)$ и съществуват $C > 0$ и $q \geq 2$, такива че $\delta_{\|\cdot\|}(\varepsilon) \geq C\varepsilon^q$. Нека $T : A \cup B \rightarrow A \cup B$ е свиващо циклично изображение. Тогава*

5.i) *съществува единствена точка на най-добро приближение ξ за T в A , $T\xi$ е единствена точка на най-добро приближение за T в B и $\xi = T^2\xi = T^{2n}\xi$*

5.ii) *за всяко $x_0 \in A$ редицата $\{x_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща към ξ , а $\{x_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща към $T\xi$, където $x_{n+1} = Tx_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$*

5.iii) *в сила са "а приори" оценки на грешката*

$$(5) \quad \|\xi - T^{2n}x_0\| \leq \frac{\|x_0 - Tx_0\|}{1 - \sqrt[q]{\alpha^2}} \sqrt[q]{\frac{\|x_0 - Tx_0\| - d}{Cd}} (\sqrt[q]{\alpha})^{2n}$$

5.iv) в сила са "а постериори" оценки на грешката

$$(6) \quad \|T^{2n}x_0 - \xi\| \leq \frac{\|T^{2n-1}x_0 - T^{2n}x_0\|}{1 - \sqrt[q]{\alpha^2}} \sqrt[q]{\frac{\|T^{2n-1}x_0 - T^{2n}x_0\| - d}{Cd}} \sqrt[q]{\alpha},$$

където $d = \text{dist}(A, B)$.

Рефлексивни банахови пространства

Определение 10. ([21]) Нека $(X, \|\cdot\|)$ е нормирано пространство. Означаваме с X^* линейното пространство от всички непрекъснато линейни функционали върху X , които са снабдени с нормата $\|f\|^* = \sup\{|f(x)| : x \in B_X\}$, която наричаме канонична спрегната норма. Пространството $(X^*, \|\cdot\|^*)$ се нарича спрегнато на X .

Пространството X^{**} е спрегнатото на X^* , т.е. $(X^*)^*$. Изображението $\pi : X \rightarrow X^{**}$ определено чрез $\pi(x) = \psi_{x_0}(f) = f(x_0)$ изобразява множеството X в подмножество подмножество на X^{**} , т.е. $\pi(X) \subseteq X^{**}$. Изображението π се нарича естествено изображение на X в X^{**} .

Определение 11. ([21]) Нека $(X, \|\cdot\|)$ е нормирано пространство. Ако $\pi(X) \equiv X^{**}$, то X се нарича рефлексивно пространство.

Точки на най-добро приближение в рефлексивни банахови пространства

Първият резултат за съществуване и единственост на точки на най-добро приближение за циклични изображения $T : A \cup B \rightarrow A \cup B$ в рефлексивни банахови пространства е получен в [6].

Теорема 6. ([21]) Редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ от елементи в нормирано пространство $(X, \|\cdot\|)$ е слабо сходяща към точката $x \in X$, тогава и само тогава, когато числовата редица $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща към $f(x)$ за всяко $f \in X^*$ и се означава с $w \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Определение 12. ([21]) Нека $(X, \|\cdot\|)$ е нормирано пространство. Множеството $A \subset X^*$ се нарича слабо затворено, ако от $w \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, при $x_n \in A$ следва $x \in A$.

Теорема 7. Нека A и B са непразни, слабо затворени подмножества в рефлексивното банахово пространство X и $T : A \cup B \rightarrow A \cup B$ е свиващо циклично изображение. Тогава съществува $(x, y) \in A \times B$, така че $\|x - y\| = \text{dist}(A, B)$.

Нека подчертаем, че независимо от предположението, че множествата са слабо затворени не, не можем да сме сигурни, че $y = Tx$.

Определение 13. Нека A и B са непразни подмножества в нормираното пространство $(X, \|\cdot\|)$, $T : A \cup B \rightarrow A \cup B$ е циклично изображение. Казваме, че T удовлетворява свойство за близост, ако от $w \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = \text{dist}(A, B)$, следва $\|x - Tx\| = \text{dist}(A, B)$.

Теорема 8. Нека A и B са непразни подмножества в рефлексивното банахово пространство $(X, \|\cdot\|)$, такива че A е слабо затворено и $T : A \cup B \rightarrow A \cup B$ е свиващо циклично изображение. Тогава съществува $x \in A$, токова че $\|x - Tx\| = \text{dist}(A, B)$, винаги когато едно от следните условия

8.a) T is weakly continuous on A

8.b) T satisfies the proximal property

е изпълнено.

Ако в допълнение $(X, \|\cdot\|)$ е строго изпъкнало, то точката на най-добро приближение x е единствена и е в сила $T^2x = x$.

Нециклични изображения

Определение 14. ([1]) Нека X е произволно множество и $A, B \subset X$. изображението $T : A \cup B \rightarrow A \cup B$ се нарича нециклично, ако $T : A \rightarrow A$ и $T : B \rightarrow B$.

Нека $T : A \cup B \rightarrow A \cup B$ е нециклично изображение. Можем да разгледаме следните минимизационни задачи: $\min\{\rho(x, Tx) : x \in A\}$, $\min\{\rho(y, Ty) : y \in B\}$ и $\min\{\rho(x, y) : (x, y) \in A \times B\}$.

Двойки на най-добро приближение за нециклични изображения

Определение 15. ([1]) Нека (X, ρ) е метрично пространство, $A, B \subset X$ и T е нециклично изображение. Наредената двойка $(\xi, \eta) \in A \times B$ се нарича двойка неподвижни точки за нецикличното изображение T , ако едновременно са в сила $\xi = T\xi$, $\eta = T\eta$ и $d(\xi, \eta) = \text{dist}(A, B)$.

Понякога двойките на най-добро приближение за нециклично изображение T се нарича оптимална двойка от неподвижни точки за нецикличното изображение T .

Естествено обобщение изглежда търсенето на условия, които да гарантират съществуването и единствеността на двойки точки на най-добро приближение за нециклични изображения.

Определение 16. ([25]) Нека (X, ρ) е метрично пространство и $A, B \subset X$. Нецикличното изображение $T : A \cup B \rightarrow A \cup B$ се нарича свиващо нециклично изображение, ако съществува $\alpha \in [0, 1)$, така че неравенството $\rho(Tx, Ty) \leq \alpha\rho(x, y) + (1 - \alpha)\text{dist}(A, B)$ да е изпълнено за всеки $x \in A$ и $y \in B$.

Теорема 9. ([23]) Нека A и B са две затворени, изпъкнали подмножества в строго изпъкналото и рефлексивно банахово пространство $(X, \|\cdot\|)$ и $T : A \cup B \rightarrow A \cup B$ е свиващо нециклично изображение. Тогава T има двойка точки на най-добро приближение.

Наредени двойки от циклични изображения

Определение 17. ([38]) Нека A_x, A_y, B_x и B_y са непразни подмножества на X . Нека $F : A_x \times A_y \rightarrow B_x$, $f : A_x \times A_y \rightarrow B_y$, $G : B_x \times B_y \rightarrow A_x$ и $g : B_x \times B_y \rightarrow A_y$. За всяка двойка $(x, y) \in A_x \times A_y$ дефинираме редиците $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ чрез $x_0 = x$, $y_0 = y$ и

$$\begin{aligned} x_{2n+1} &= F(x_{2n}, y_{2n}), & y_{2n+1} &= f(x_{2n}, y_{2n}) \\ x_{2n+2} &= G(x_{2n+1}, y_{2n+1}), & y_{2n+2} &= g(x_{2n+1}, y_{2n+1}) \end{aligned}$$

за всяко $n \geq 0$.

Полу-непрекъснато от долу изображения

Нека (X, ρ) е метрично пространство. Следвайки [12] разширена реално значна функция $T : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ върху X се нарича полу-непрекъсната от долу (накратко п.н.д.), ако $\{x \in X : f(x) > a\}$ е отворено множество за всяко $a \in (-\infty, +\infty]$. Еквивалентно условие за T да бъде п.н.д. е тогава и само тогава, когато за всяко $x_0 \in X$ е в сила $\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0)$. Казваме, че функцията T е собствена, ако $T \not\equiv +\infty$.

Вариационен принцип на Екеланд и неподвижни точки

Екеланд доказва вариационния принцип в [18]. В последователност от статии той обогатява резултатите. По-късно той представи по-сбито доказателств [19], чиято техника ще използваме. В същата статия [19], Теоремата на Банах за свиващите изображения е доказана с помощта на вариационния принцип.

Теорема 10. ([19]) *Нека (X, ρ) е пълно метрично пространство и $T : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е собствена п.н.д. функция, ограничено от долу. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно избрано и точката $u_0 \in X$ удовлетворява $T(u_0) \leq \inf_{v \in X} T(v) + \varepsilon$.*

Тогавя съществува $v_0 \in X$, така че $T(v_0) \leq T(u_0)$, $\rho(u_0, v_0) \leq 1$ и за всяко $w \in X$, различно от v_0 е валидно неравенството $T(w) > T(v_0) - \varepsilon \rho(w, v_0)$.

Глава I

Двойки точки на най-добро приближение за циклични, полу-циклични и нециклични изображения в банахови пространства

Резултатите в тази глава са въз основа на публикацииите на автора [2, 4].

Двойки точки на най-добро приближение за циклични изображения в рефлексивни банахови пространства

Ще започнем с резултатите от [4].

Определение 18. Нека $(X, \|\cdot\|)$ е банахово пространство и $U, V \subset X$ са подмножества. Казваме, че изображението $F : U \times V \rightarrow X$ е слабо непрекъснато, ако за всеки две слабо сходящи редици $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$, $u_n \in U$ и $v_n \in V$ е изпълнено $w \lim_{n \rightarrow \infty} F(u_n, v_n) = F(u, v)$, където $u = w \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ и $v = w \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

Определение 19. Нека $(X, \|\cdot\|)$ е банахово пространство, $A_x, A_y, B_x, B_y \subset X$ са подмножества и $F : A_x \times A_y \rightarrow B_x$, $f : A_x \times A_y \rightarrow B_y$. Казваме, че наредената двойка (F, f) удовлетворява свойството за близост, ако за всяка слабо сходяща редица $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$, $u_n \in A_x$ и $v_n \in A_y$, такива че $u = w \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, $v = w \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$, ако са изпълнени

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - F(u_n, v_n)\| = \text{dist}(A_x, B_x)$$

и

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|v_n - f(u_n, v_n)\| = \text{dist}(A_y, B_y),$$

то са изпълнени

$$\|u - F(u, v)\| = \text{dist}(A_x, B_x)$$

и

$$\|v - f(u, v)\| = \text{dist}(A_y, B_y).$$

Определение 20. Нека (X, ρ) е метрично пространство, $A_x, A_y, B_x, B_y \subset X$ са непразни множества, различни от X , $F : A_x \times A_y \rightarrow B_x$, $f : A_x \times A_y \rightarrow B_y$. Наредената двойка $(x, y) \in A_x \times A_y$ се нарича двойка точки на най-добро приближение за (F, f) в $A_x \times A_y$, ако $\rho(x, F(x, y)) = \text{dist}(A_x, B_x)$ и $\rho(y, f(x, y)) = \text{dist}(A_y, B_y)$.

Определение 21. Нека A_x, A_y, B_x и B_y са непразни подмножества в метричното пространство (X, ρ) , $F : A_x \times A_y \rightarrow B_x$, $f : A_x \times A_y \rightarrow B_y$, $G : B_x \times B_y \rightarrow A_x$ и $g : B_x \times B_y \rightarrow A_y$. Наредената двойка от наредени двойки $((F, f), (G, g))$ се нарича свиваща циклична двойка, ако съществуват

константи $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$, така че $\max\{\alpha + \gamma, \beta + \delta\} < 1$ и неравенството

$$(7) \quad \begin{aligned} S &= \rho(F(x, y), G(u, v)) + \rho(f(z, w), g(t, s)) \\ &\leq \alpha\rho(x, u) + \beta\rho(y, v) + \gamma\rho(z, t) + \theta\rho(w, s) \\ &\quad + (1 - (\alpha + \beta))\text{dist}(A_x, B_x) + (1 - (\beta + \theta))\text{dist}(A_y, B_y) \end{aligned}$$

е изпълнено за всеки $(x, y), (z, w) \in A_x \times A_y$ и $(u, v), (t, s) \in B_x \times B_y$.

Определение 22. Нека A_x, A_y, B_x и B_y са непразни подмножества на X . Нека $F : A_x \times A_y \rightarrow B_x$, $f : A_x \times A_y \rightarrow B_y$, $G : B_x \times B_y \rightarrow A_x$ и $g : B_x \times B_y \rightarrow A_y$. За всяка първоначално избрано $(\xi, \eta) \in A_x \times A_y$ дефинираме редиците $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\eta_n\}_{n=0}^{+\infty}$ чрез $\xi_0 = \xi$, $\eta_0 = \eta$ и

$$\begin{aligned} \xi_{2n+1} &= F(\xi_{2n}, \eta_{2n}), & \eta_{2n+1} &= f(\xi_{2n}, \eta_{2n}), \\ \xi_{2n+2} &= G(\xi_{2n+1}, \eta_{2n+1}), & \eta_{2n+2} &= g(\xi_{2n+1}, \eta_{2n+1}) \end{aligned}$$

за всяко $n \geq 0$.

Теорема 11. Нека $A_x, A_y, B_x, B_y \subset X$ са непразни, собствени и слабо затворени множества в рефлексивното банахово пространство $(X, \|\cdot\|)$, $F : A_x \times A_y \rightarrow B_x$, $f : A_x \times A_y \rightarrow B_y$, $G : B_x \times B_y \rightarrow A_x$ и $g : B_x \times B_y \rightarrow A_y$. Нека $((F, f), (G, g))$ е свиваща циклична наредена двойка от изображения. Наке е изпълнено също така едно от следните условия

11.а) F и f са слабо непрекъснати върху $A_x \times A_y$ и G и g са слабо непрекъснати върху $B_x \times B_y$

11.б) (F, f) удовлетворява свойството за близост.

Тогава (F, f) притежава двойка точки на най-добро приближение $(\xi_x, \xi_y) \in A_x \times A_y$ и (G, g) притежава двойка точки на най-добро приближение $(\eta_x, \eta_y) \in B_x \times B_y$, т.е.

$$\|\xi_x - F(\xi_x, \xi_y)\| = \text{dist}(A_x, B_x), \quad \|\xi_y - f(\xi_x, \xi_y)\| = \text{dist}(A_y, B_y)$$

и

$$\|\eta_x - G(\eta_x, \eta_y)\| = \text{dist}(A_x, B_x), \quad \|\eta_y - g(\eta_x, \eta_y)\| = \text{dist}(A_y, B_y).$$

Ако в допълнение $(X, \|\cdot\|)$ е строго изпъкнало банахово пространство и $A_x, A_y, B_x, B_y \subset X$ са изпъкнали множества, то

$$\xi_x = G(F(\xi_x, \xi_y), f(\xi_x, \xi_y)), \quad \xi_y = g(F(\xi_x, \xi_y), f(\xi_x, \xi_y))$$

и

$$\eta_x = F(G(\eta_x, \eta_y), g(\eta_x, \eta_y)), \quad \eta_y = f(F(\eta_x, \eta_y), g(\eta_x, \eta_y)).$$

Ако $A_x = A_y, B_x = B_y, f(x, y) = F(y, x), g(x, y) = G(y, x)$ и $(X, \|\cdot\|)$ е строго изпъкнало банахово пространство, то двойката неподвижни точки $(\xi_x, \xi_y) \in A_x \times A_x$ удовлетворява $\xi_x = \xi_y$.

Двойки точки на най-добро приближение за полу-циклични изображения в рефлексивни банахови пространства

Определение 23. Нека $(X, \|\cdot\|)$ е банахово пространство и $U, V \subset X$ са подмножества и $F : U \times V \rightarrow U, G : U \times V \rightarrow V$. Казваме, че наредената двойка от изображения (F, G) удовлетворява свойството на близост, ако за всеки две слабо сходящи редици $\{u_n\}_{n=0}^\infty$ и $\{v_n\}_{n=0}^\infty, u_n \in U$ и $v_n \in V$ удовлетворяващи $u = w \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n, v = w \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ винаги когато е изпълнено

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - G(u_n, v_n)\| = \text{dist}(U, V)$$

и

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|v_n - F(u_n, v_n)\| = \text{dist}(U, V)$$

е валидно $\|u - G(u, v)\| = \|v - F(u, v)\| = \text{dist}(U, V)$.

Определение 24. Нека A, B са подмножества в метричното пространство (X, ρ) . Наредената двойка от изображения $(F, G) F : A \times B \rightarrow A, G : A \times B \rightarrow B$ наричаме полу-циклично свиващо, ако съществува $\alpha \in [0, 1/2)$, така че за всеки $(x, y), (u, v) \in A \times B$ е изпълнено неравенството

$$(8) \quad \rho(F(x, y), G(u, v)) - \text{dist}(A, B) \leq \alpha(\rho(x, v) + \rho(y, u) - 2\text{dist}(A, B)).$$

Теорема 12. Нека $(X, \|\cdot\|)$ е рефлексивно банахово пространство и $A, B \subset X$ са непразни, собствени и слабо затворени множества, $F : A \times$

$B \rightarrow A$, $G : A \times B \rightarrow B$ е полу-циклично свиване. Нека е в сила едно от следните условия

12.а) F и G са слабо непрекъснати върху $A \times B$

12.б) (F, G) удовлетворява свойството за близост.

Тогава съществува елемент $(\xi, \eta) \in A \times B$, който е точка на най-добро приближение за (F, G) .

Ако в допълнение $(X, \|\cdot\|)$ е строго изпъкнало банахово пространство и $A, B \subset X$ са изпъкнали подмножества, тогава $\xi = F(F(\xi, \eta), G(\xi, \eta))$, $\eta = G(F(\xi, \eta), G(\xi, \eta))$ и $\xi = F(\xi, \eta)$, $\eta = G(\xi, \eta)$.

Някои спомагателни резултати

Lemma 1. Нека (X, ρ) е метрично пространство, $A, B \subset X$ са непразни, собствени подмножества на X и $F : A \times B \rightarrow A$, $G : A \times B \rightarrow B$ са полу-циклични свиващи изображения. Тогава

$$\rho(x_{n+1}, y_{m+1}) + \rho(x_{m+1}, y_{n+1}) - 2d \leq (2\alpha)^n (\rho(x_1, y_{m-n+1}) + \rho(x_{m-n+1}, y_1) - 2d).$$

за всяко $n, m \in \mathbb{N}$, $m \geq n$, където $d = \text{dist}(A, B)$.

Lemma 2. Нека (X, ρ) е метрично пространство, $A, B \subset X$ са непразни, собствени подмножества на X и $F : A \times B \rightarrow A$, $G : A \times B \rightarrow B$ са полу-циклични свиващи изображения. Тогава

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(x_{n+1}, y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(x_n, y_{n+1}) = \text{dist}(A, B).$$

Lemma 3. Нека (X, ρ) е метрично пространство, $A, B \subset X$ са непразни, собствени подмножества на X и $F : A \times B \rightarrow A$, $G : A \times B \rightarrow B$ са полу-циклични свиващи изображения. Тогава

$$\rho(x_1, y_n) + \rho(y_1, x_n) - 2d \leq \frac{1}{1 - 2\alpha} (\rho(x_1, x_2) + \rho(y_1, y_2)) + 2(2\alpha)^{n-1} (\rho(x_1, y_1) - d).$$

Lemma 4. Нека (X, ρ) е метрично пространство, $A, B \subset X$ са непразни, собствени подмножества на X и $F : A \times B \rightarrow A$, $G : A \times B \rightarrow B$ са полу-циклични свиващи изображения. Тогава редиците $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ са ограничени.

Двойки точки на най-добро приближение за нециклични изображения в равномерно изпъкнали банахови пространства

Този параграф е базиран на [2].

Ще обобщим идеите за нециклични изображения и оптимални точки [1], точки на най-добро приближение за изображения на две променливи [36] да въведем понятието оптимални точки за нециклични изображения на две променливи.

Определение 25. Нека (Z, ρ) е метрично пространство. Нека $X, Y \subset Z$ са множества, такива че $\text{dist}(X, Y) > 0$. Let $F : X \times X \rightarrow X$ и $G : Y \times Y \rightarrow Y$. Наредената двойка от изображения (F, G) наричаме нециклично изображение на две променливи. Наредената двойка от наредени двойки точки $((x, y), (u, v)) \in (X \times X) \times (Y \times Y)$ наричаме оптимална двойка от двойки неподвижни точки за наредената двойка от нециклични изображения (F, G) , ако е изпълнено: (x, y) е двойка неподвижни точки за F , (u, v) е двойка неподвижни точки за G и $\rho(x, u) = \rho(y, v) = \text{dist}(X, Y)$.

Определение 26. Нека (Z, d) е метрично пространство. Нека $X, Y \subset Z$ са множества, такива че $\text{dist}(X, Y) > 0$. Нека $F : X \times X \rightarrow X$ и $G : Y \times Y \rightarrow Y$. Наричаме наредената двойка от нециклични изображения (F, G) нециклично свиващо изображение, ако съществува $\alpha \in [0, 1)$, така че неравенството $\|F(x, y) - G(u, v)\| \leq \alpha\|x - u\| + (1 - \alpha)\text{dist}(X, Y)$ е в сила за всеки $x, y \in X$ и $u, v \in Y$.

Теорема 13. Нека $(Z, \|\cdot\|)$ е равномерно изпъкнало банахово пространство. Нека $X, Y \subset Z$ са две изпъкнали множества, такива че $\text{dist}(X, Y) > 0$. Нека $F : X \times X \rightarrow X$ и $G : Y \times Y \rightarrow Y$ са такива, че наредената двойка то изображения (F, G) е нециклично свиващо такова. Тогава

13.i) наредената двойка от изображения (F, G) притежава единствена оптимална двойка $((x, y), (u, v))$ неподвижни точки $(x, y) \in X \times X$ и $(u, v) \in Y \times Y$

13.ii) за всяка $(x_0, y_0) \in X \times X$, $(u_0, v_0) \in Y \times Y$ редиците $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, $\{y_n\}_{n=1}^\infty$, $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ са съответно сходящи към x , y , u и v

13.iii) в сила е "а приори" оценка на грешката

$$\max\{\|x - x_m\|, \|y - y_m\|\} \leq \max\{M_0, N_0\} \sqrt[q]{\frac{\max\{M_0, N_0\} - d}{Cd}} \frac{\sqrt[q]{\alpha^m}}{1 - \sqrt[q]{\alpha}}$$

13.iv) в сила е "а постериори" оценка на грешката

$$\max\{\|x_n - x\|, \|y_n - y\|\} \leq \frac{\max\{M_n, N_n\}}{1 - \sqrt[q]{\alpha}} \sqrt[q]{\frac{\max\{M_n, N_n\} - d}{Cd}},$$

където за всеки $x \in A$ и $y \in B$ използваме означението

$$M_n = \max\{\|x_n - u_n\|, \|F(x_n, y_n) - u_n\|\},$$

$$N_n = \max\{\|y_n - v_n\|, \|F(y_n, x_n) - v_n\|\},$$

и $d = \text{dist}(X, Y)$.

Ако в допълнение едно от множествата X или Y е строго изпъкнало, то $x = y$ и $u = v$.

Някои спомагателни резултата

Определение 27. ([22]) Нека (X, d) е метрично пространство и $A, B \subset X$ са непразни множества. Наредената двойка от множества (A, B) удовлетворява свойството WUC , ако за всяка редица $\{x_n\}_{n=1}^\infty \in A$, такава че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $u \in B$ така че $d(x_n, u) \leq \text{dist}(A, B) + \varepsilon$ за $n \geq n_0$, то $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ е редица на Коши.

Proposition 1. *Нека $(Z, \|\cdot\|)$ е равномерно изпъкнало банахово пространство. Тогава Декартовото произведение $(Z \times Z, |||\cdot|||)$, снабдено с нормата $|||(x, y)||| = \|x\| + \|y\|$ е WUC метрично пространство.*

Proposition 2. *Нека (Z, ρ) е метрично пространство. Нека $X, Y \subset Z$ са множества, така че $\text{dist}(X, Y) > 0$. Нека $F : X \times X \rightarrow X$ и $G : Y \times Y \rightarrow Y$ и (F, G) е наредена двойка от свиващи изображения. Тогава са в сила неравенствата*

$$\rho(x_{n+1}, u_{n+1}) - d \leq \alpha^n(\rho(x_0 - u_0) - \text{dist}(X, Y))$$

и

$$\rho(y_{n+1}, v_{n+1}) - d \leq \alpha^n(\rho(y_0, v_0) - \text{dist}(X, Y)).$$

Глава II

Вариационен принцип в частично наредени метрични пространства

Резултатите в тази глава се базират на публикации [3, 5].

Изображения на Харди-Роджърс със смесеното монотонно свойство в частично наредени метрични пространства

Следващият резултат се базира на [5].

Теорема 14. *Нека $(X, \rho, \preceq)$ е частично наредено пълно метрично пространство и $F : X \times X \rightarrow X$ е непрекъснато изображение със смесеното монотонно свойство. Нека съществуват $\alpha + \beta + \gamma \in [0, 1/2)$, така че неравенството*

$$(9) \quad \begin{aligned} \rho(F(x, y), F(u, v)) &\leq \alpha(\rho(x, u) + \rho(y, v)) \\ &+ \beta(\rho(x, F(x, y)) + \rho(u, F(u, v))) \\ &+ \gamma(\rho(x, F(u, v)) + \rho(u, F(x, y))). \end{aligned}$$

е в сила за всеки $x \succeq u$ и $y \preceq v$. Ако съществува поне една наредена двойка (x, y) , така че $x \preceq F(x, y)$ и $y \succeq F(y, x)$, то съществува двойка неподвижни точки (x, y) на F .

Ако в допълнение всяка двойка елементи от $X \times X$ има горно или долна граница, то двойката неподвижни точки е единствена.

Тройки неподвижни точки за изображения със смесеното монотонно свойство

Резултатите в този параграф е основан на резултатите от [3].

Нека $(X, \preceq)$ е частично наредено множество. Следвайки [11], винаги когато разглеждаме декартово произведение $X \times X \times X = X^3$ ще бъде снабдено със следната частична наредба $(u, v, w) \preceq (x, y, z)$, ако $u \preceq x$, $v \succcurlyeq y$ и $w \preceq z$ за всеки $(x, y, z), (u, v, w) \in X \times X \times X$.

Нека (X, ρ) е метрично пространство. Следвайки [11], винаги когато разглеждаме декартово произведение $X \times X \times X = X^3$ ще бъде снабдено със следната метрика

$$\rho_1((x, y, z), (u, v, w)) = \rho(x, u) + \rho(y, v) + \rho(z, w),$$

за $(x, y, z), (u, v, w) \in X \times X \times X$.

Определение 28. Нека X е множество и $F : X \times X \times X \rightarrow X$, $G : X \times X \times X \rightarrow X$ и $H : X \times X \times X \rightarrow X$. наредената тройка (F, G, H) наричаме наредена тройка от изображения.

Определение 29. Нека X е множество и (F, G, H) е наредена тройка от изображения. Елементът $(x, y, z) \in X \times X \times X$ наричаме тройка неподвижни точки, ако $\xi = F(\xi, \eta, \zeta)$, $\eta = G(\xi, \eta, \zeta)$, $\zeta = H(\xi, \eta, \zeta)$.

Ако $G(x, y, z) = F(y, x, y)$ и $H(x, y, z) = F(z, y, x)$ получаваме понятието за тройка неподвижни точки въведено в [11].

Определение 30. Нека $(X, \preceq)$ е частично наредено множество и (F_1, F_2, F_3) е наредена тройка от изображения. Казваме, че (F_1, F_2, F_3) удовлетворява смесеното монотонно свойство, ако за всеки $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2, z, z_1, z_2 \in X$ са в сила

$$F_i(x_1, y, z) \preceq F_i(x_2, y, z), \quad \text{за всеки } i = 1, 2, 3, \text{ ако } x_1 \preceq x_2$$

$$F_i(x, y_1, z) \succcurlyeq F_i(x, y_2, z), \quad \text{за всеки } i = 1, 2, 3, \text{ ако } y_1 \preccurlyeq y_2$$

and

$$F_i(x, y, z_1) \preccurlyeq F_i(x, y, z_2), \quad \text{за всеки } i = 1, 2, 3, \text{ ако } z_1 \preccurlyeq z_2.$$

Ако $G(x, y, z) = F(y, x, y)$ и $H(x, y, z) = F(z, y, x)$ получаваме понятието за тройка неподвижни точки въведено в [11].

Теорема 15. Нека $(X, \rho, \preccurlyeq)$ е частично наредено пълно метрично пространство и (F, G, H) е наредена тройка от непрекъснати изображения.

Полагаме $\bar{x} = (x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) \in X \times X \times X$ и разглеждаме подмножеството $Y^3 \subset X^3$ дефинирано чрез

$$Y^3 = \{(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) \in X^3 : x^{(1)} \preccurlyeq F(\bar{x}), x^{(2)} \succcurlyeq G(\bar{x}) \text{ and } x^{(3)} \preccurlyeq H(\bar{x})\} \neq \emptyset.$$

Нека $T : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е собствена, п.н.д., ограничено отдолу функция. Нека за всяко $\varepsilon > 0$ произволно избрано и фиксирано съществува $\bar{u}_0 \in Y^3$, така че е изпълнено неравенството $T(\bar{u}_0) \leq \inf_{\bar{v} \in Y^3} T(\bar{v}) + \varepsilon$.

Тогава съществува наредена тройка $\bar{x} \in Y^3$, така че $T(\bar{x}) \leq T(\bar{u}_0)$, $\rho_1(\bar{x}, \bar{u}_0) \leq 1$ и за всяка $\bar{w} \in Y^3$, различно от $\bar{x} \in Y^3$ е изпълнено неравенството

$$T(\bar{w}) > T(\bar{x}) - \varepsilon \rho_1(\bar{w}, \bar{x}).$$

Някои спомагателни резултата

Proposition 3. Нека $(X, \preccurlyeq)$ е частично наредено множество и (F, G, H) е наредена тройка от изображения със смесеното монотонно свойство. Нека $(x, y, z) \in X \times X \times X$ удовлетворяват неравенствата $x \preccurlyeq F(x, y, z)$, $y \succcurlyeq G(x, y, z)$, $z \preccurlyeq H(x, y, z)$ и нека положим $u = F(x, y, z)$, $v = G(x, y, z)$, $w = H(x, y, z)$. Тогава са в сила неравенствата $u \preccurlyeq F(u, v, w)$, $v \succcurlyeq G(u, v, w)$ и $w \succcurlyeq H(u, v, w)$ и $u \succcurlyeq x$, $v \preccurlyeq y$ и $w \succcurlyeq z$.

Proposition 4. Нека $(X, \preccurlyeq)$ е частично наредено множество и (F, G, H) е наредена тройка от изображения със смесеното монотонно свойство. Нека $(x, y, z) \in X^3$ е трока неподвижни точки и (ξ_0, η_0, ν_0) е сравнима с (x, y, z) . Тогава (ξ_n, η_n, ν_n) са сравними с (x, y, z) .

Приложение на Теорема 15

Теорема 16. Нека $(X, \rho, \preceq)$ е частично наредено пълно метрично пространство и (F_1, F_2, F_3) е наредена тройка от непрекъснати изображения със смесеното монотонно свойство. Нека съществува $\alpha \in [0, 1)$, така че неравенството

$$\sum_{k=1}^3 \rho(F_k(x, y, z), F_k(u, v, w)) \leq \alpha(\rho(x, u) + \rho(y, v) + \rho(z, w))$$

е валидно за всеки $x \succcurlyeq u$, $y \preceq v$ и $z \succcurlyeq w$. Ако съществува поне една наредена тройка (x, y, z) , така че $x \preceq F_1(x, y, z)$, $y \succcurlyeq F_2(x, y, z)$ и $z \preceq F_3(x, y, z)$, то съществува тройка неподвижни точки (x, y, z) за (F_1, F_2, F_3) .

Ако в допълнение всяка двойка елементи от X^3 има долна или горна граница, то тройката неподвижни точки е единствена.

Следващата теорема, която е следствие на Теорема 16, покрива широк клас от изследваните в [11] изображения.

Теорема 17. ([11]) Нека $(X, \rho, \preceq)$ е частично наредено, пълно метрично пространство и F е непрекъснато изображение със смесеното монотонно свойство. Нека съществуват $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1)$, удовлетворяващи $s = \alpha + 2\beta + \gamma < 1$, така че неравенството $\rho(F(x, y, z), F(u, v, w)) \leq \alpha\rho(x, u) + \beta\rho(y, v) + \gamma\rho(z, w)$ е изпълнено за всеки $x \succcurlyeq u$, $y \preceq v$ и $z \succcurlyeq w$. Ако съществува поне една наредена тройка (x, y, z) , така че $x \preceq F(x, y, z)$, $y \succcurlyeq F(y, x, y)$ и $z \preceq F(z, y, x)$, то съществува тройка неподвижни точки (x, y, z) за F , т.е. $x = F(x, y, z)$, $y = F(y, x, y)$ и $z = F(z, y, x)$.

Ако в допълнение всяка двойка елементи от $X \times X \times X$ има долна или горна граница, то тройката неподвижни точки е единствена.

Глава III

Приложение в пазарно равновесие за олигополни пазари

Искаме да въведем основните понятия и резултати в областта на теория на равновесието в олигополни пазари.

функцията на печалба за k -ти производител е

за $k = 1, 2, \dots, n$.

[illegible]
$$\begin{array}{l}
\frac{\partial \Pi_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} = P(Z) + x_1 P'(Z) - c'_1(x_1) = 0 \\
\frac{\partial \Pi_2(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2} = P(Z) + x_2 P'(Z) - c'_2(x_2) = 0 \\
\vdots \\
\frac{\partial \Pi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} = P(Z) + x_i P'(Z) - c'_i(x_i) = 0 \\
\vdots \\
\frac{\partial \Pi_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} = P(Z) + x_n P'(Z) - c'_n(x_n) = 0,
\end{array}
\tag{11}$$

26

Решението на задачата за максимизиране на функциите на печалба Π_k for $k = 1, 2, \dots, n$ са решенията на системата уравнения от първи ред (11). Достатъчно условие, решение на (11) да представлява равновесно производство в разглеждания модел [24, 35], т.е. решение на максимизиране на печалбата Π_k за $k = 1, 2, \dots, n$, то трябва да се проверят някои допълнителни условия. Това са или функциите на печалба Π_k за $k = 1, 2, \dots, n$ да бъдат вдлъбнати или решенията $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ да удовлетворяват условията от втори ред

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \Pi_k(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_k^2}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) < 0 \\ k = 1, 2, \dots, n. \end{array} \right.$$

Ако се придържаме към дуополен пазар, т.е. пазар с двама производители, често уравненията (11) притежават решения от вида $x_1 = b_1(x_2)$ и $x_2 = b_2(x_1)$, които се наричат функции на реакция ([24]). Същите функции на реакция се появяват и в случай на тримата участника на пазара, т.е. $x_1 = b_1(x_2, x_3)$, $x_2 = b_2(x_1, x_3)$ и $x_3 = b_3(x_1, x_2)$ [24, 35].

Възможно е да се окаже трудно или невъзможно решаването на (11); така често е търси приближено решения. Друг недостатък при търсенето на приближено решение е, че то може да не е устойчиво. За щастие е възможно винаги да се намери неявна форма на функциите на реакция в (11), т.е.

$$x_k = \frac{\partial \Pi_k(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_k} + x_k = G_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

за $k = 1, 2, \dots, n$. По този начин достигаем до обобщението за двойка неподвижни точки $x_1 = G_1(x_1, x_2)$ и $x_2 = G_2(x_1, x_2)$ в случая на дуополен пазар и тройка неподвижни точки $x_1 = G_1(x_1, x_2, x_3)$, $x_2 = G_2(x_1, x_2, x_3)$ и $x_3 = G_3(x_1, x_2, x_3)$ при участието на трима играча в пазара.

Приложение на Теорема 12 за пазарно равновесие в дуополни пазари

Следващият пример е подобен на този от [17], с разликата, че нормата, вместо евклидовата $\|\cdot\|$ е сумиращата $\|\cdot\|_1$.

Example 1. Да разгледаме пазар с две конкуриращи се фирми; всяка фирма произвежда две стоки, и всяка една от тях е напълно заменяема с тази на конкурентната фирма. Да предположим, че първата фирма има възможността да произвежда значително по-малки количества от тези а втората фирма, т.е. ако x_1, x_2 са количествата произведени от първия производител, а y_1, y_2 са количествата на втория участник като $x_1, x_2 \in [0, 1]$ и $y_1, y_2 \in [2, 3]$. Нека $A = [0, 1] \times [0, 1]$ и $B = [2, 3] \times [2, 3]$ са подмножества в $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, което е банахово пространство. Нека функциите на реакция $F(x_1, x_2, y_1, y_2)$ и $f(x_1, x_2, y_1, y_2)$ са дефинирани чрез

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{3x_1}{8} + \frac{x_2}{8} - \frac{3y_1}{16} - \frac{y_2}{16} + 1 \\ \frac{x_1}{8} + \frac{3x_2}{8} - \frac{y_1}{16} - \frac{3y_2}{16} + 1 \end{cases}, \quad f(x, y) = \begin{cases} -\frac{3x_1}{16} - \frac{x_2}{16} + \frac{3y_1}{4} + \frac{y_2}{4} + \frac{5}{4} \\ -\frac{x_1}{16} - \frac{3x_2}{16} + \frac{y_1}{4} + \frac{3y_2}{4} + \frac{5}{4} \end{cases}.$$

Наредената двойка (F, f) удовлетворява Теорема 12. Следователно съществува равновесно производство $(x, y) = ((x_1, x_2), (y_1, y_2))$ и за всяко начално състояние в пазара, редицата от последователни производства $(x^n, y^n) = ((x_1^n, x_2^n), (y_1^n, y_2^n))$ е сходяща към пазарното равновесие (x, y) . В този илюстративен пример получаваме, че равновесните производства са съответно $x = (1, 1)$, $y = (2, 2)$ и общото производство е $a = (3, 3)$.

Примерът илюстрира, че геометрията на прилежащото пространство и тази на дефиниционното множество $A \times B$, разположение в пространството на подмножествата A и B е съществено за единствеността на съществуващото пазарно равновесие.

Някои статистически тестове при моделиране на временни редове

Изследването за стационарност на временните редове е едни от най-съществените фактори за тяхното моделиране. Един временен ред се определя за стационарен, ако неговите статистически мерки, като например: средно, дисперсия, ковариация и стандартно отклонение не са функции на времето. С други думи, стационарността в един временен ред означава липса на тренд или сезонни компоненти. Два от най-популярните статистически теста за установяване дали даден временен ред е стационарен или не, са разширените тестове на Филипс-Перон (Phillips-Perron (PP)) и Дики-Фулър (Dickey-Fuller (ADF))[16]. Тестът ADF проверява нулевата хипотеза за единичен корен

$\alpha_1 = 1$ в

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \epsilon_t$$

или, еквивалентно, нулевата хипотеза за $\gamma = 0$ в

$$\Delta Y_t = \gamma Y_{t-1} + \epsilon_t,$$

където Y_t означава изменението на стойността в момент t ,

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1},$$

ϵ_t – случаен шум в момент t . Тестовите, включващи лагирани променливи, се наричат разширени тестове на Дики-Фулър и се използват също за тестване на нулевата хипотеза $\gamma = 0$. Нулевата хипотеза H_0 означава, че динамичният ред е нестационарен и показва наличието на тенденция. Алтернативната хипотеза H_1 означава наличие на стационарност. Казано по друг начин, малка p -стойност на теста показва, че не съществува единичен корен.

Метод на най-малките квадрати

Методът на най-малките квадрати (МНМК) е един от най-разпространените методи в статистиката и заема специално място в развитието на науката. МНМК е създаден от Карл Фридрих Гаус (1795 г.), но за пръв път е публикуван от Адриен Мари Лежандър (1805 г.) [31]. Едно от най-широките приложения на метода е при моделиране на линейни зависимости, където ефикасността му е най-очевидна.

При предположение за линейна зависимост на y от $x_1, x_2, \dots, x_k$, имаме:

$$(12) \quad y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k + \epsilon,$$

където коефициентите $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ са тези, които търсим.

За n наблюдения на зависимата променлива y и независимите променливи $x_i, i = 1, \dots, k$ представяме (12) в следния матричен вид: $Y = X\beta + \epsilon$, където $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ е $n \times 1$ вектор на наблюдаваните стойности, X е известната матрица от тип $n \times (k+1)$ с първа колона от единици, $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k)^T$ е вектор на неизвестните параметри от тип $(k+1) \times 1$ и $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)^T$

е вектор-грешка от тип $n \times 1$. Намирането на параметрите β така че сумата от квадратите на грешките да е минимална е основната цел на метода на най-малките квадрати[13], т.е.

$$(Y - X\beta)^T(Y - X\beta) \rightarrow \min.$$

Статистически мерки за оценка на моделите

Ние използваме два основни статистически показателя, за да оценим ефективността на изградените модели: средната абсолютна процентна грешка

$$MAPE = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^n \left| \frac{P_t - Y_t}{Y_t} \right|$$

и коефициента на детерминация

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^n (P_t - Y_t)^2}{\sum_{t=1}^n (Y_t - \bar{Y})^2},$$

където n е обема на извадката, Y_t са стойностите на зависимата променлива, P_t са предсказаните от модела стойности, а средното на Y_t е означено с $\bar{Y}$. Нашата цел е да конструираме модели с възможно най-ниско MAPE и максимална стойност на R^2 .

Приложение на Теорема 16 в изследването на пазарно равновесие в пазари доминирани от трима участника

Ще използваме лесна за проверка и прилагане версия на Теорема 16.

Corollary 1. ([3]) *Нека разгледаме олигополен пазар с три производителя, удовлетворяващ:*

1. *всичките участници произвеждат напълно заменяема една стока*
2. *участникът i произвежда количества от множеството X_i , $i = 1, 2, 3$, където X_i са затворени, непразни подмножества в пълното метрично пространство $(\mathbb{R}, |\cdot|)$*

3. наредената тройка $(F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$,

$$F_i : X_1 \times X_2 \times X_3 \rightarrow X_i, \quad i = 1, 2, 3$$

е полуциклично изображение, което представлява функциите на реакция за играчи, съответно едно, две и три

4. (F_1, F_2, F_3) наредената тройка удовлетворява смесеното монотонно свойство и изображенията са непрекъснати
5. съществува $0 < \alpha < 1$, т.к. че неравенството

$$(13) \quad \sum_{i=1}^3 |F_i(x, y, z) - F_i(u, v, w)| \leq \alpha(|x - u| + |y - v| + |z - w|)$$

е изпълнено за всеки $x \succ u$, $y \preccurlyeq v$ и $z \succ w$

6. съществува поне една наредена тройка (x, y, z) , така че $x \preccurlyeq F_1(x, y, z)$, $y \succ F_2(x, y, z)$ и $z \preccurlyeq F_3(x, y, z)$.

Тогава съществува наредена тройка (x, y, z) , която е пазарно равновесие, т.е. тройка неподвижни точки за (F_1, F_2, F_3) .

Ако в допълнение всеки два елемента от X^3 имат долна или горна граница, то пазарното равновесие е единствено.

Ще разгледаме реални данни от олигополни пазари, доминирани от трима участника. Ще се опитаме да моделираме функциите на реакция за тези играчи, използвайки наредени тройки от функции на реакция (F_1, F_2, F_3) , удовлетворяващи смесеното монотонно свойство. Трсим (F_1, F_2, F_3) от линейни функции на реакция $F_k(x_1, x_2, x_3) = \sum_{j=1}^3 a_{kj}x_j + d_k$, удовлетворяващ

$$\max \left\{ \sum_{k=1}^3 |a_{kj}| : j = 1, 2, 3 \right\} < 1.$$

Ще изследваме класовете от функции на реакция (F_1, F_2, F_3) със смесеното монотонно свойство. Въвеждаме означението

$$M_i = \{(F_1, F_2, F_3) : a_{kj} \leq 0, a_{ij} \geq 0 \text{ for } i \in \{1, 2, 3\} \setminus \{k\}, j = 1, 2, 3\}.$$

Нека отбележим, че няма ограничение, кой от производителите ще бъде поставен като първа, втора или трета променлива в F_i . Ето защо ще разгледаме трите различни случая, споменати по-горе със смесеното монотонно свойство и свиващото условие в Следствие 1 също ще изискваме да бъде изпълнено.

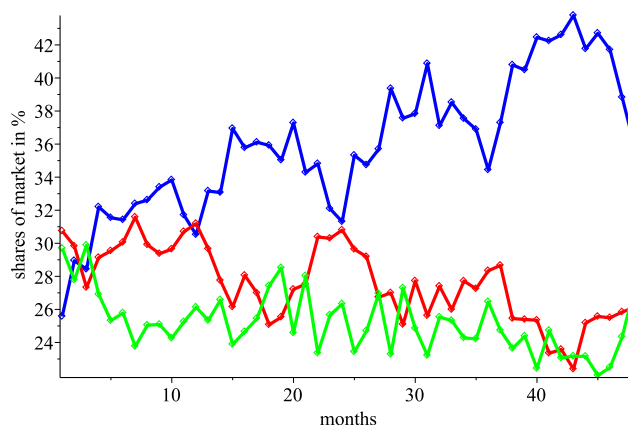
Изследване на пазара на бира в България

За пълнота ще цитираме направения статистически анализ върху началната база от данни [28].

Разполагаме с месечни данни за продажбите на бира (в 1000 хекто литри) за пет големи производителя, които покриват целия бирен пазар в България. От количествата продажби сме получили процентните дялове на всяка от петте компании. В анализа участват трите най-големи производителя.

Месечните данни в проценти за всяка от компаниите (Com_1, Com_2, Com_3) съдържат общо $N = 48$ записа от Януари 2017 до Декември 2020. За разглеждания период трите компании покриват средно около 88.73% от бирения пазар.

Таблица 1 представя описателната статистика на обема на продажбите за всяка от трите компании. Близките стойности на медианите и извадковите средни, както и близките до нула стойности на асиметрията и ексцеса показват разпределение, близко до нормалното и за трите променливи. Това се потвърждава от тестовете на Колмогоров-Смирнов и Шапиро-Уилк, които са незначими с p -стойност $> 0,05$. От таблица 1 се вижда също, че третата фирма Com_3 има най-голям среден процентен дял на продажбите.



Фигура 1. Процентни дялове участия на Com_1 (червен), Com_2 (зелен) и Com_3 (син).

Фигура 1 показва графиката на процентното участие на трите компании. От фигурата се вижда, че водещата компания има растящ тренд, докато за другите две компании може да се констатира леко намаляващ такъв.

Таблица 1. Описателна статистика на използваните променливи.

Променлива	Средно	Медиана	Ст. откл.	Дисперсия
$Com_1, \%$	27.593	27.46	2.26	5.09
$Com_2, \%$	25.202	24.95	1.83	3.36
$Com_3, \%$	35.931	35.83	4.18	17.47
Променлива	Асиметрия	Ст.гр.асим.	Ексцес	Ст.гр.ексцес
$Com_1, \%$	-0.152	0.343	-0.766	0.674
$Com_2, \%$	0.632	0.343	0.102	0.674
$Com_3, \%$	-0.064	0.343	-0.369	0.674

Резултатите от тестовете за стационарност са показани в Таблица 2. Тъй като всички p -стойности за началните променливи са незначителни, нулевата хипотеза H_0 не може да бъде отхвърлена. В резултат на това следва, че временните редове показват тенденция от поне първи ред и са нестационарни.

Таблица 2. Резултати от тестове за стационарност на началния временен ред.

Тест		Com_1	Com_2	Com_3
Дики-Фулър F тест	Статистика	-0.237856	-0.258687	0.167359
	p -стойност	0.624571	0.619816	0.723573
	Статистика	-0.225644	-0.162057	0.183871
Филипс-Перон F тест	p -стойност	0.627348	0.641746	0.727902

За разликите $DCom_1$, $DCom_2$ и $DCom_3$ пресметнати с:

$$(14) \quad DY_t = Y_t - Y_{t-1},$$

Таблица 3 показва съответните тестове и p -стойности. Тъй като всички p -стойности в тази таблица са по същество нула, следва, че диференцираните редове от първи ред са стационарни. От Таблица 2 и Таблица 3 следва, че е налична тенденция от първи ред и за трите разглеждани променливи. Това на практика показва, че стойностите на динамичния ред за всеки месец зависят от стойностите в предходния такъв.

Таблица 3. Резултати от тестове за стационарност на диференцираните временни редове.

Тест		$DCom_1$	$DCom_2$	$DCom_3$
Дики-Фулър F тест	статистика	-56.0131	-70.4378	-55.6533
	p -стойност	$4.824 \cdot 10^{-8}$	$5.807 \cdot 10^{-9}$	$5.120 \cdot 10^{-9}$
	статистика	-57.4133	-65.5202	-55.599
Филипс-Перон F тест	p -стойност	$3.840 \cdot 10^{-8}$	$1.133 \cdot 10^{-8}$	$5.166 \cdot 10^{-8}$

Наличието на тенденция от първи ред показва, че можем да търсим зависимост, която описва текущото състояние на всеки производител спрямо състоянието преди един месец. Поради тази причина ние формираме три нови лагирани променливи с един лаг назад, а именно $LagC_1$, $LagC_2$ и $LagC_3$, въз основа на основните променливи. И за трите лагирани променливи тестовете на Шапиро-Уилк и Колмогоров-Смирнов са незначими (p -стойности

$> 0,05$) и следователно променливите имат нормално разпределение. Таблица 4) показва корелационната матрица с корелационните коефициенти на Пирсън. Всички коефициенти на корелация между променливите Com_1 , Com_2 и Com_3 и техните съответни лагирани са статистически значими при ниво на значимост $\alpha = 0,05$.

Таблица 4. Матрица на корелационните коефициенти на Пирсън (ККР) между $C_i = Com_i$ и лагираните променливи $LC_i = LagCom_i$, $i = 1, 2, 3$.

		C_1	C_2	C_3	LC_1	LC_2	LC_3
	ККР	1	0.256	-0.827	0.781	0.382	-0.768
C_1	p -стойност		0.079	0.000	0.000	0.008	0.000
	ККР		1	-0.712	0.326	0.334	-0.474
C_2	p -стойност			0.000	0.025	0.022	0.000
	ККР			1	-0.787	-0.488	0.876
C_3	p -стойност				0.000	0.000	0.000
	ККР				1	0.278	-0.831
LC_1	p -стойност					0.058	0.000
	ККР					1	-0.722
LC_2	p -стойност						0.000

Модели с $(F_1, F_2, F_3) \in M_2$

Търсим наредена тройка от функции $(F_1, F_2, F_3) \in M_2$, т.е.

$$(15) \quad \begin{cases} F_1(x, y, z) = a_1x + b_1y + c_1z + d_1, \\ F_2(x, y, z) = a_2x + b_2y + c_2z + d_2, \\ F_3(x, y, z) = a_3x + b_3y + c_3z + d_3 \end{cases}$$

така че $a_i, c_i > 0$ за $i = 1, 2, 3$, $\max\{\sum_{i=1}^3 a_i, \sum_{i=1}^3 c_i\} < 1$, $b_i < 0$ за $i = 1, 2, 3$, $\sum_{i=1}^3 b_i > -1$.

Нека споменем, че за да можем да приложим Следствие 1 е необходимо да се удовлетворяват и условията

$$x_0 \leq F_1(x_0, y_0, z_0), \quad y_0 \geq F_2(x_0, y_0, z_0), \quad z_0 \leq F_3(x_0, y_0, z_0),$$

където наредената тройка (x_0, y_0, z_0) е първоначалното състояние в изследвания пазар.

Нека $A_1 = \{x_i\}_{i=0}^{47}$, $A_2 = \{y_i\}_{i=0}^{47}$ и $A_3 = \{z_i\}_{i=0}^{47}$ са наличните статистически данни, пресметнати в процентно присъствие на пазара, съответно за трите фирми. Нека B_i е оценката получена за реакцията на производител i , съгласно наличните данни съгласно търсената функция на реакция F_i , т.е. $B_i = \{F_i(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})\}_{i=1}^{48}$. Решаваме минимизационната задача

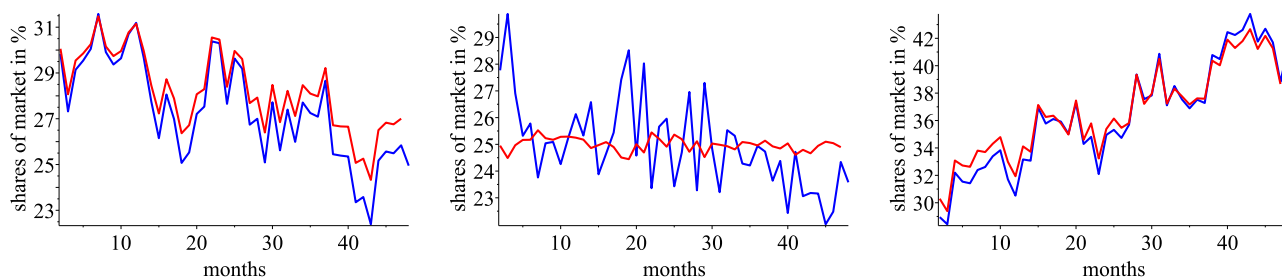
$$\min \left\{ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=0}^{47} (x_{j+1} - F_i(x_j, y_j, z_j))^2 \right\}$$

при наложени ограничения

$$\begin{aligned} a_1 &\in [0.1, 0.99], a_2 \in [0, 1, 0.99 - a_1], a_3 \in [0.1, 0.99 - a_1 - a_2], \\ b_1 &\in [-0.99, -0.1], b_2 \in [-0.99 + b_1, -0.1], b_3 \in [-0.99 + b_1 + b_2, -0.1], \\ c_1 &\in [0.1, 0.99], c_2 \in [0.1, 0.99 - c_1], c_3 \in [0.1, 0.99 - c_1 - c_2], \\ x_0 &\leq F_1(x_0, y_0, z_0), y_0 \geq F_2(x_0, y_0, z_0), z_0 \leq F_3(x_0, y_0, z_0). \end{aligned}$$

Получаваме

$$(16) \quad \begin{cases} F_1(x, y, z) = 0.79x & +0.01z & +6.2, \\ F_2(x, y, z) = 0.1x & -0.1y & +24.74, \\ F_3(x, y, z) = 0.1x & -0.1y & +0.85z & +5.37 \end{cases}$$



(а) Com_1 , реални данни в синьо спрямо приближените данни пресметнати с функцията на реакция $x_n = F_1(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ в червено.

(б) Com_2 , реални данни в синьо спрямо приближените данни пресметнати с функцията на реакция $y_n = F_2(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ в червено.

(в) Com_3 , реални данни в синьо спрямо приближените данни пресметнати с функцията на реакция $z_n = F_3(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ в червено.

Фигура 2. Реални данни в синьо спрямо приближени с помощта на функциите на реакция в червено.

Таблица 5 представя статистическите мерки на получените модели, което показва, че първият и третият модел имат високи статистически показатели, докато вторият модел обяснява само 25% от данните.

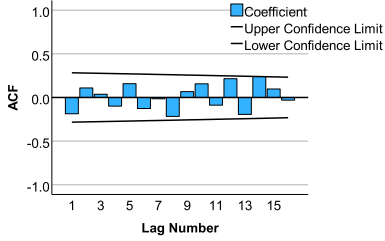
Таблица 5. Статистически показатели на получените модели.

	Model Com_1	Model Com_2	Model Com_3
R^2	0.988	0.249	0.995
MAPE	0.0302	0.0566	0.0187

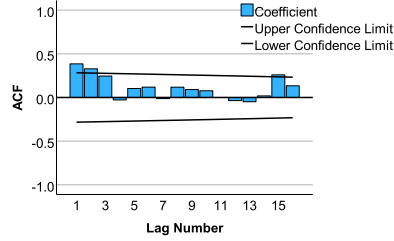
Фигура 3 представя автокорелационните функции (ACF) на остатъците до 16-ти лаг. Както се вижда от фигурата, повечето автокорелации попадат в границите на доверителния интервал, което показва, че остатъците на моделите се държат като бял шум.

Фигура 4 представя p -стойностите на теста на Лjung-Бокс за остатъците на конструираните модели. На оста x са означени лаговете h . На оста y са нанесени p -стойностите на теста. Червената хоризонтална линия показва нивото на значимост (0,05). Лаговете, при които p -стойностите на теста са под тази линия показват наличието на автокорелация в остатъците. В първия модел няма автокорелации в остатъците до 16-ия лаг. В третия модел се наблюдават

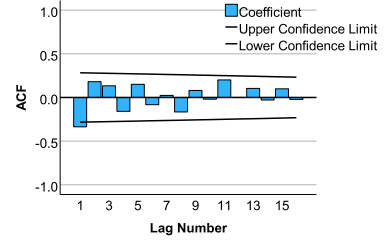
няколко автокорелации до втория лаг, докато във втория модел автокорелациите присъстват до 10-ия лаг. Това показва, че първият и третият модел описват адекватно данните, докато вторият - не.



(a) Com_1 , ACF на остатъците.

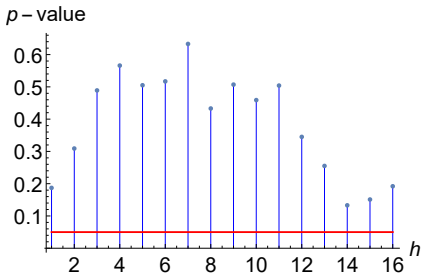


(б) Com_2 , ACF на остатъците.

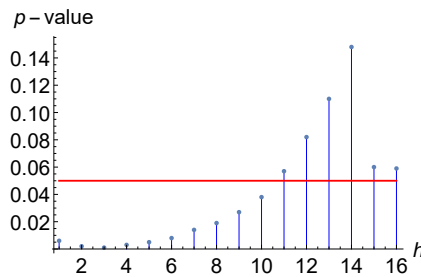


(в) Com_3 , ACF на остатъците.

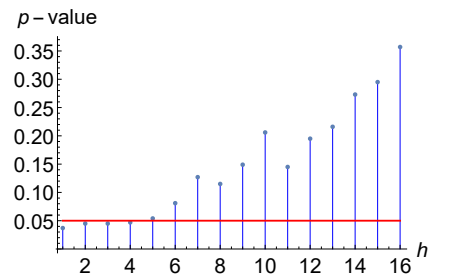
Фигура 3. ACF на остатъците на моделите.



(a) Com_1 , Тест на Лjung-Бокс за остатъци.



(б) Com_2 , Тест на Лjung-Бокс за остатъци.



(в) Com_3 , Тест на Лjung-Бокс за остатъци.

Фигура 4. Тестове на Лjung-Бокс за остатъците на моделите.

Модели с $(F_1, F_2, F_3) \in M_1$

Търсим наредена тройка от функции $(F_1, F_2, F_3) \in M_1$, т.е.

$$(17) \quad \begin{cases} F_1(x, y, z) = a_1x + b_1y + c_1z + d_1, \\ F_2(x, y, z) = a_2x + b_2y + c_2z + d_2, \\ F_3(x, y, z) = a_3x + b_3y + c_3z + d_3, \end{cases}$$

така че $b_i, c_i > 0$ за $i = 1, 2, 3$, $\max\{\sum_{i=1}^3 b_i, \sum_{i=1}^3 c_i\} < 1$, $a_i < 0$ за $i = 1, 2, 3$, $\sum_{i=1}^3 a_i > -1$.

Нека споменем, че за да можем да приложим Следствие 1 е необходимо

да се удовлетворяват и условията

$$x_0 \geq F_1(x_0, y_0, z_0), \quad y_0 \leq F_2(x_0, y_0, z_0), \quad z_0 \leq F_3(x_0, y_0, z_0),$$

където наредената тройка (x_0, y_0, z_0) е първоначалното състояние в разглеждания пазар.

Нека $A_1 = \{x_i\}_{i=0}^{47}$, $A_2 = \{y_i\}_{i=0}^{47}$ и $A_3 = \{z_i\}_{i=0}^{47}$ са наличните статистически данни, пресметнати в процентно присъствие на пазара, съответно за трите фирми. Нека B_i е оценката получена за реакцията на производител i , съгласно наличните данни съгласно търсената функция на реакция F_i , т.е. $B_i = \{F_i(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})\}_{i=1}^{48}$. Решаваме минимизационната задача

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=0}^{47} (x_{j+1} - F_i(x_j, y_j, z_j))^2 \right\}$$

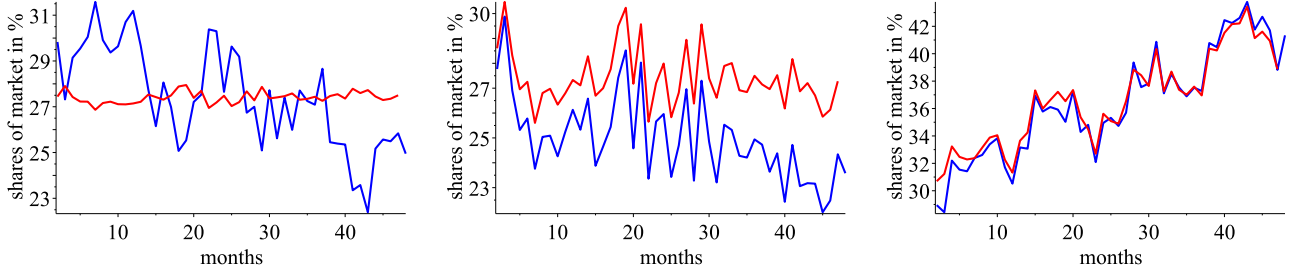
при наложени ограничения

$$\begin{aligned} b_1 &\in [0.1, 0.99], b_2 \in [0, 1, 0.99 - b_1], b_3 \in [0.1, 0.99 - b_1 - b_2], \\ a_1 &\in [-0.99, -0.1], a_2 \in [-0.99 + a_1, -0.1], a_3 \in [-0.99 + a_1 + a_2, -0.1], \\ c_1 &\in [0.1, 0.99], c_2 \in [0.1, 0.99 - c_1], c_3 \in [0.1, 0.99 - c_1 - c_2], \\ x_0 &\geq F_1(x_0, y_0, z_0), y_0 \leq F_2(x_0, y_0, z_0), z_0 \leq F_3(x_0, y_0, z_0). \end{aligned}$$

Получаваме

$$(18) \quad \begin{cases} F_1(x, y, z) = & -0.1x & +0.1y & & +27.65, \\ F_2(x, y, z) = & -0.1x & +0.79y & +0.1z & +6.75, \\ F_3(x, y, z) = & -0.28x & +0.1y & +0.74z & +14.67 \end{cases}$$

Графичното представяне на получените модели в сравнение с действителните данни може да се види на фигура 5. Фигурата показва, че третият и донякъде вторият конструирани модели описват коректно данните. Това не може да се каже за първия.



(а) Com_1 , реални данни в синьо спрямо предсказани с помощта на функция на реакция $x_n = F_1(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ в процентни дялове в червено.

(б) Com_2 , реални данни в синьо спрямо предсказани с помощта на функция на реакция $y_n = F_2(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ в процентни дялове в червено.

(в) Com_3 , реални данни в синьо спрямо предсказани с помощта на функция на реакция $z_n = F_3(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ в процентни дялове в червено.

Фигура 5. Реалнии данни в синьо спрямо предсказаните с функция на реакция в червено.

В Таблица 6 представяме статистически оценки на моделите, които, разбира се, съответстват на графичното представяне. Първият модел описва по-малко от 50% от вариацията в данните, докато MAPE на втория модел е почти 10%.

Таблица 6. Статистически показатели на получените модели.

	Модел Com_1	Модел Com_2	Модел Com_3
R^2	0.499	0.823	0.983
MAPE	0.0720	0.0954	0.0192

Въпреки това получаваме точката на пазарно равновесие

$$(19) \quad x = 28.61342617, y = 38.25300698, z = 41.41574083.$$

Модели с $(F_1, F_2, F_3) \in M_3$

Търсим наредена тройка от функции $(F_1, F_2, F_3) \in M_1$, т.е.

$$(20) \quad \begin{cases} F_1(x, y, z) = a_1x + b_1y + c_1z + d_1, \\ F_2(x, y, z) = a_2x + b_2y + c_2z + d_2, \\ F_3(x, y, z) = a_3x + b_3y + c_3z + d_3, \end{cases}$$

така че $a_i, b_i > 0$ за $i = 1, 2, 3$, $\max\{\sum_{i=1}^3 a_i, \sum_{i=1}^3 b_i\} < 1$, $c_i < 0$ за $i = 1, 2, 3$, $\sum_{i=1}^3 c_i > -1$.

Нека споменем, че за да можем да приложим Следствие 1 е необходимо да се удовлетворяват и условията

$$x_0 \leq F_1(x_0, y_0, z_0), y_0 \leq F_2(x_0, y_0, z_0), z_0 \geq F_3(x_0, y_0, z_0),$$

където наредената тройка (x_0, y_0, z_0) е началното състояние в изследвания пазар.

Нека $A_1 = \{x_i\}_{i=0}^{47}$, $A_2 = \{y_i\}_{i=0}^{47}$ и $A_3 = \{z_i\}_{i=0}^{47}$ са наличните статистически данни, пресметнати в процентно присъствие на пазара, съответно за трите фирми. Нека B_i е оценката получена за реакцията на производител i , съгласно наличните данни съгласно търсената функция на реакция F_i , т.е. $B_i = \{F_i(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})\}_{i=1}^{48}$. Решаваме минимизационната задача

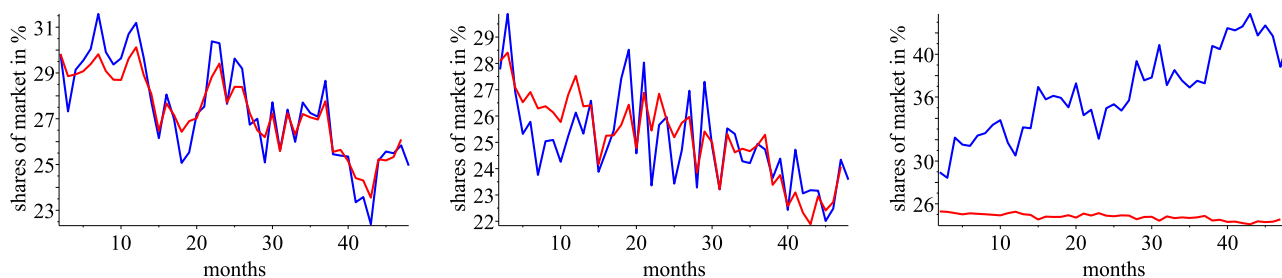
$$\min \left\{ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=0}^{47} (x_{j+1} - F_i(x_j, y_j, z_j))^2 \right\}$$

$$\begin{aligned} a_1 &\in [0.1, 0.99], a_2 \in [0, 1, 0.99 - a_1], a_3 \in [0.1, 0.99 - a_1 - a_2], \\ c_1 &\in [-0.99, -0.1], c_2 \in [-0.99 + c_1, -0.1], c_3 \in [-0.99 + c_1 + c_2, -0.1], \\ b_1 &\in [0.1, 0.99], b_2 \in [0.1, 0.99 - b_1], b_3 \in [0.1, 0.99 - b_1 - b_2], \\ x_0 &\leq F_1(x_0, y_0, z_0), y_0 \leq F_2(x_0, y_0, z_0), z_0 \geq F_3(x_0, y_0, z_0). \end{aligned}$$

Получаваме

$$(21) \quad \begin{cases} F_1(x, y, z) = 0.5x + 0.1y - 0.14z + 16.22, \\ F_2(x, y, z) = 0.3x + 0.47y - 0.12z + 9.35, \\ F_3(x, y, z) = 0.1x + 0.1y + 19.53 \end{cases}$$

Графичното представяне на получените модели в сравнение с действителните данни може да се види на фигура 6. Моделът описва най-добре данните в първия случай. В третият получената графика дори не следва нарастващата тенденция на данните. Поради тази причина ние не представяме коефициента на детерминации в този случай и, както може да се види от Таблица 7, МАРЕ е 30%.



(а) Com_1 , реални данни в синьо спрямо предсказани с помощта на функция на реакция $x_n = F_1(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ в процентни дялове в червено.

(б) Com_2 , реални данни в синьо спрямо предсказани с помощта на функция на реакция $y_n = F_2(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ в процентни дялове в червено.

(в) Com_3 , реални данни в синьо спрямо предсказани с помощта на функция на реакция $z_n = F_3(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ в процентни дялове в червено.

Фигура 6. Реални данни в синьо спрямо предсказани с помощта на функция на реакция в червено.

Таблица 7. Статистически показатели на получените модели.

	Модел Com_1	Модел Com_2	Модел Com_3
R^2	0.916	0.671	-
MAPE	0.0219	0.0331	0.3023

Въпреки това получаваме точката на пазарно равновесие

$$(22) \quad x = 31.19778718, y = 29.93140172, z = 25.63891889.$$

Заклучение относено моделирането на пазара на бира с помощта на функции на реакция свс смесено монотонно свойство

Представените три модела, базирани на функции на реакцията, удовлетворяващи смесеното монотонно свойство, демонстрират невъзможността да се опише пазарът само с един модел от клас $M_1 \cup M_2 \cup M_3$. Интересно е да се отбележи, че във всеки от разглежданите случаи имаме статистически достоверно описание на двама от участниците на пазара. Освен това, ако трябва да изследваме например поведението и реакциите на двама от участниците,

например първия и втория, тогава би следвало да построим модел с функции от клас M_3 . Така ще получим модел за първите двама, който описва тяхното поведение във времето. Можем да заключим, че представените илюстрации демонстрират възможностите за разглеждане на три възможни модела, като във всеки от тях можем да направим изводи за двама от участниците.

Представените модели показват, че само в случая, когато разглеждаме функции са от класа M_2 представят резултати, за които може да се приеме, че моделират статистически добре наличните данни. Това води до извода, че при моделиране класът на разглежданите функции е тясно свързан с данните, които ще бъдат моделирани.

Бихме искали да кажем няколко думи за предположението за смесеното монотонно свойство. Нека разгледаме например случая M_2 . Изглежда неестествено в условията на олигополен пазар, че реакциите на втория играч F_2 ще бъдат намаляваща функция на неговата втора променлива, т.е. за всеки конкретен момент със стойности (x_n, y_n, z_n) той ще реагира чрез намаляване на пазарните си дялове y_n . Но има връзка между неговото бъдещо ниво y_{n+1} и всички стойности (x_n, y_n, z_n) в предишния момент, следователно неговите дялове ще бъдат повлияни от резултатите на неговите конкуренти, което може да доведе до увеличение с y_n .

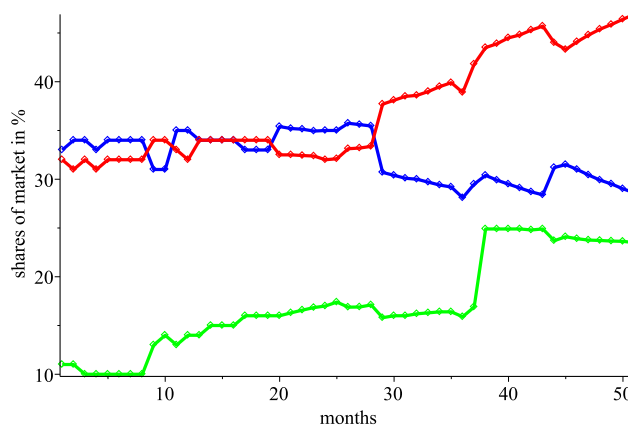
Изследване на пазара на мобилни услуги в САЩ

Пазарите на мобилни услуги са естествено олигополни. Това се дължи на изискването за лицензи, поради ограничените възможности за предоставяне на услуги. В исторически план повече от трима доставчици са участвали в добре развития свободен пазар на мобилни услуги в САЩ. За повече от 20 години пазарите на мобилни услуги също се развиват естествено и броят на участниците намалява. През последните години американският пазар на мобилни услуги се стабилизира при трима участници и можем да го наречем типичен пазар. Има две проучвания на динамиката на мобилните услуги в САЩ, използващи функции на реакция [7, 9]. В [9] се разглежда дуополен модел на пазара на мобилни услуги в САЩ до 2020, което се дължи на факта, че по това време има 7 участници, но в действителност само двама са достатъчно големи, за да покрият 60% от пазара. Впоследствие през 2020 третият

и четвъртият по големина доставчици се сливат, останалите малки излизат от пазара. Това дава основание за изследване в [7] на пазара на мобилни услуги на базата на олигополен пазар с трима участници.

Моделите, получени в [7, 9] са базирани на линейни и сигмоидални функции. Досегашните публикации могат да създадат впечатлението, че когато се разглежда достатъчно широк клас функции на реакция, винаги е възможно да се конструира статистически надежден модел. Ще разгледаме възможността за моделиране на пазара на мобилни услуги в САЩ с помощта на линейни функции, удовлетворяващи смесеното монотонно свойство.

В нашето изследване използваме тримесечни данни за дяловете на мобилните доставчици в САЩ, изразени в проценти, от $Q1 - 2011$ до $Q3 - 2023$ общо $N = 51$ данни. Фигура 7 показва пазарните дялове на трите важни мобилни оператора. През периода трите компании покриват средно 86,61%.



Фигура 7. Процентни дялово за Verizon (синьо), AT&T (червено) и T-Mobile (зелено).

За по-лесно, обозначаваме всеки мобилен доставчик с променливата в скобите: Verizon (Mob_1), AT&T (Mob_2), T-Mobile (Mob_3).

Таблица 8 представя описателната статистика за процентния пазарен дял на всяка от трите компании. От таблицата се вижда, че вторият оператор е с най-голям среден процентен дял. Тестовите на Колмогоров-Смирнов и Шапиро-Уилк за нормалност са значими с p -стойност $< 0,05$, което показва, че разглежданите променливи не са нормално разпределени.

Таблица 8. Описателна статистика на използваните първоначални променливи.

Променлива	Средно	Медиана	Стандартно отклонение
$Mob_1, \%$	32.132	33.00	2.43
$Mob_2, \%$	37.237	34.00	5.39
$Mob_3, \%$	17.239	16.30	4.86
Променлива	Дисперсия	Асиметрия	Ст. гр. асиметрия
$Mob_1, \%$	5.91	-0.054	0.333
$Mob_2, \%$	29.09	0.530	0.333
$Mob_3, \%$	23.65	0.329	0.333
Променлива	Ексцес	Ст. гр. ексцес	
$Mob_1, \%$	-1.547	0.656	
$Mob_2, \%$	-1.374	0.656	
$Mob_3, \%$	-0.953	0.656	

Таблица 9 показва резултатите от тестовете за единичен корен, проведени върху началния времеви ред. Тъй като всички p -стойности за трите променливи са незначителни може да кажем, че разглежданите редове имат тренд поне от първи ред и са нестационарни.

Таблица 9. Резултати от тестове за стационарност на началния временен ред.

Тест		Mob_1	Mob_2	Mob_3
Дики-Фулър F тест	Статистика	-0.165	0.400	0.549
	p -стойност	0.642	0.782	0.817
Филипс-Перон F тест	Статистика	-0.161	0.402	0.548
	p -стойност	0.643	0.782	0.817

За диференцираните редове $\Delta Mob_i, i = 1, \dots, 4$ получени по следния начин

$$(23) \quad \Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1},$$

в Таблица 10 са представени p -стойностите на двата теста за единичен корен. Всички p -стойности по същество са нули, което означава, че диференцираните редове са стационарни. Следователно за разглежданите начални времеви серии имаме наличие на тренд от първи ред.

Таблица 10. Резултати от тестове за стационарност на диференцираните временни редове.

Тест		ΔMob_1	ΔMob_2	ΔMob_3
Дики-Фулър F тест	Статистика	-47.65	-45.41	-44.71
	p -стойност	$2.42 \cdot 10^{-7}$	$3.79 \cdot 10^{-7}$	$4.37 \cdot 10^{-7}$
Philips-Perron F test	Статистика	-43.72	-41.92	-42.08
	p -стойност	$9.83 \cdot 10^{-8}$	$7.93 \cdot 10^{-7}$	$7.65 \cdot 10^{-7}$

Това ни дава основание да търсим зависимост на стойностите на временните редове за всеки период от предходния.

Корелационните коефициенти на Пирсън и тяхната значимост са представени на в Table 11.

От таблица 11 може да се види, че всички коефициенти на корелация са значими. Трябва да отбележим силните корелационни зависимости между Mob_1 и Mob_3 и $Lag Mob_2$, тоест от стойностите на Mob_2 в предишния квартал. Също така наблюдаваме силна корелация между Mob_2 и $Lag Mob_3$.

Таблица 11. Матрица на корелационните коефициенти на Пирсън (ККР) между Mob_i и лагираните променливи $Lag Mob_i$, $i = 1, 2, 3$.

		Mob_1	Mob_2	Mob_3	$Lag Mob_1$	$Lag Mob_2$	$Lag Mob_3$
Mob_1	ККР	1	-0.852	-0.587	0.873	-0.820	-0.568
	p -стойност		<0.001	<0.001	<0.001	<0.001	<0.001
Mob_2	ККР		1	0.885	-0.825	0.982	0.866
	p -стойност			<0.001	<0.001	<0.001	<0.001
Mob_3	ККР			-0.596	-0.591	0.888	0.964
	p -стойност			<0.001	<0.001	<0.001	<0.001
$Lag Mob_1$	ККР				1	-0.845	-0.571
	p -стойност					<0.001	<0.001
$Lag Mob_2$	ККР					1	0.882
	p -стойност						<0.001

Модели с $(F_1, F_2, F_3) \in M_2$

Търсим наредена тройка от функции $(F_1, F_2, F_3) \in M_2$, т.е.

$$(24) \quad \begin{cases} F_1(x, y, z) = a_1x + b_1y + c_1z + d_1, \\ F_2(x, y, z) = a_2x + b_2y + c_2z + d_2, \\ F_3(x, y, z) = a_3x + b_3y + c_3z + d_3, \end{cases}$$

така че $a_i, c_i > 0$ за $i = 1, 2, 3$, $\max\{\sum_{i=1}^3 a_i, \sum_{i=1}^3 c_i\} < 1$, $b_i < 0$ за $i = 1, 2, 3$, $\sum_{i=1}^3 b_i > -1$.

Нека споменем, че за да можем да приложим Следствие 1 е необходимо да се удовлетворяват и условията

$$x_0 \leq F_1(x_0, y_0, z_0), \quad y_0 \geq F_2(x_0, y_0, z_0), \quad z_0 \leq F_3(x_0, y_0, z_0),$$

където наредената тройка (x_0, y_0, z_0) е първоначалното състояние на пазара.

Нека $A_1 = \{x_i\}_{i=0}^{50}$, $A_2 = \{y_i\}_{i=0}^{50}$ и $A_3 = \{z_i\}_{i=0}^{50}$ са наличните статистически данни, пресметнати в процентно присъствие на пазара, съответно за трите фирми. Нека B_i е оценката получена за реакцията на производител i , съгласно наличните данни съгласно търсената функция на реакция F_i , т.е. $B_i = \{F_i(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})\}_{i=1}^{51}$. Решаваме минимизационната задача

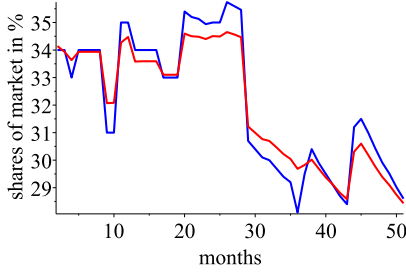
$$\min \left\{ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=0}^{50} (x_{j+1} - F_i(x_j, y_j, z_j))^2 \right\}$$

при следните ограничения

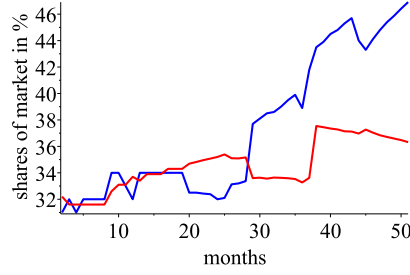
$$\begin{aligned} a_1 &\in [0.1, 0.99], a_2 \in [0, 1, 0.99 - a_1], a_3 \in [0.1, 0.99 - a_1 - a_2], \\ b_1 &\in [-0.99, -0.1], b_2 \in [-0.99 + b_1, -0.1], b_3 \in [-0.99 + b_1 + b_2, -0.1], \\ c_1 &\in [0.1, 0.99], c_2 \in [0.1, 0.99 - c_1], c_3 \in [0.1, 0.99 - c_1 - c_2], \\ x_0 &\leq F_1(x_0, y_0, z_0), z_0 \geq F_2(x_0, y_0, z_0), z_0 \leq F_3(x_0, y_0, z_0). \end{aligned}$$

Получаваме

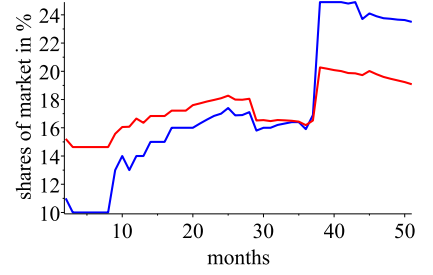
$$(25) \quad \begin{cases} F_1(x, y, z) = 0.5x - 0.19y + 0.01z + 23.14, \\ F_2(x, y, z) = 0.1x - 0.1y + 0.5z + 26.4, \\ F_3(x, y, z) = 0.1x - 0.1y + 0.48z + 9.63 \end{cases}$$



(а) Mob_1 , реални данни в синьо спрямо предсказани с помощта на функция на реакция $x_n = F_1(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ в процентни дялове в червено.



(б) Mob_2 , реални данни в синьо спрямо предсказани с помощта на функция на реакция $y_n = F_2(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ в процентни дялове в червено.



(в) Mob_3 , реални данни в синьо спрямо предсказани с помощта на функция на реакция $z_n = F_3(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ в процентни дялове в червено.

Фигура 8. Реални данни в синьо спрямо предсказани с помощта на функциите на реакция в червено.

От така получените графики се вижда, че не бихме могли да очакваме добри статистически показатели на получените модели. Следващата Таблица 12 показва 16% MAPE на третия модел.

Таблица 12. Статистически показатели на получените модели.

	Модел Mob_1	Модел Mob_2	Модел Mob_3
R^2	0.939	0.564	0.940
MAPE	0.0163	0.089	0.1656

Получаваме пазарно равновесие

$$(26) \quad x = 32.77636751, y = 35.18931750, z = 18.06122500.$$

Модели с $(F_1, F_2, F_3) \in M_1$

Търсим функции $(F_1, F_2, F_3) \in M_1$, i.e.

$$(27) \quad \begin{cases} F_1(x, y, z) = a_1x + b_1y + c_1z + d_1, \\ F_2(x, y, z) = a_2x + b_2y + c_2z + d_2, \\ F_3(x, y, z) = a_3x + b_3y + c_3z + d_3, \end{cases}$$

така че $b_i, c_i > 0$ за $i = 1, 2, 3$, $\max\{\sum_{i=1}^3 b_i, \sum_{i=1}^3 c_i\} < 1$, $a_i < 0$ за $i = 1, 2, 3$, $\sum_{i=1}^3 a_i > -1$.

Нека споменем, че за да можем да приложим Следствие 1 е необходимо да се удовлетворяват и условията

$$x_0 \geq F_1(x_0, y_0, z_0), \quad y_0 \leq F_2(x_0, y_0, z_0), \quad z_0 \leq F_3(x_0, y_0, z_0),$$

където наредената тройка от (x_0, y_0, z_0) е първоначалното състояние на пазара.

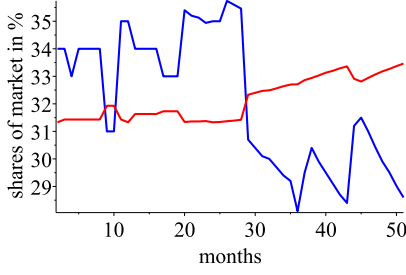
Нека $A_1 = \{x_i\}_{i=0}^{50}$, $A_2 = \{y_i\}_{i=0}^{50}$ и $A_3 = \{z_i\}_{i=0}^{50}$ са наличните статистически данни, пресметнати в процентно присъствие на пазара, съответно за трите фирми. Нека B_i е оценката получена за реакцията на производител i , съгласно наличните данни съгласно търсената функция на реакция F_i , т.е. $B_i = \{F_i(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})\}_{i=1}^{51}$. Решаваме минимизационната задача

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=0}^{50} (x_{j+1} - F_i(x_j, y_j, z_j))^2 \right\}$$

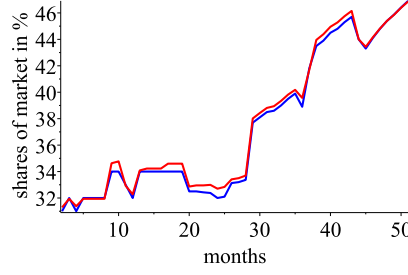
при следните ограничения

$$\begin{aligned} a_1 &\in [-0.99, -0.1], a_2 \in [-0.99 + a_1, -0.1], a_3 \in [-0.99 + a_1 + a_2, -0.1], \\ b_1 &\in [0.1, 0.99], b_2 \in [0.1, 0.99 - b_1], b_3 \in [0.1, 0.99 - b_1 - b_2], \\ c_1 &\in [0.1, 0.99], c_2 \in [0.1, 0.99 - c_1], c_3 \in [0.1, 0.99 - c_1 - c_2], \\ x_0 &\geq F_1(x_0, y_0, z_0), z_0 \leq F_2(x_0, y_0, z_0), z_0 \leq F_3(x_0, y_0, z_0) \end{aligned}$$

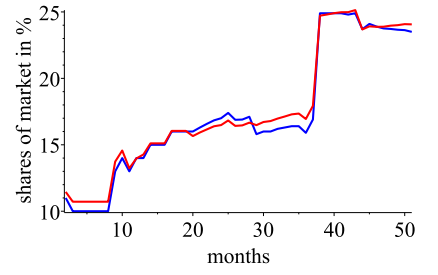
$$(28) \quad \begin{cases} F_1(x, y, z) = -0.1x + 0.1y + 0.1z + 31.63, \\ F_2(x, y, z) = -0.23x + 0.79y + 0.14z + 12.99, \\ F_3(x, y, z) = -0.1x + 0.1y + 0.83z + 2.53 \end{cases}$$



(а) Mob_1 , реални данни в синьо спрямо предсказани с помощта на функция на реакция $x_n = F_1(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ в процентни дялове в червено.



(б) Mob_2 , реални данни в синьо спрямо предсказани с помощта на функция на реакция $y_n = F_2(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ в процентни дялове в червено.



(в) Mob_3 , реални данни в синьо спрямо предсказани с помощта на функция на реакция $z_n = F_3(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ в процентни дялове в червено.

Фигура 9. Реални данни в синьо спрямо предсказани с помощта на функциите на реакция в червено.

Графичното представяне на конструирания модел на първия оператор е далеч от тенденцията на данните и поради тази причина не представяме неговите статистически показатели.

Таблица 13. Статистически показатели на получените модели.

	Модел Mob_1	Модел Mob_2	Модел Mob_3
R^2	-	0.998	0.991
MAPE	-	0.0089	0.0299.

Получавме следното пазарно равновесие

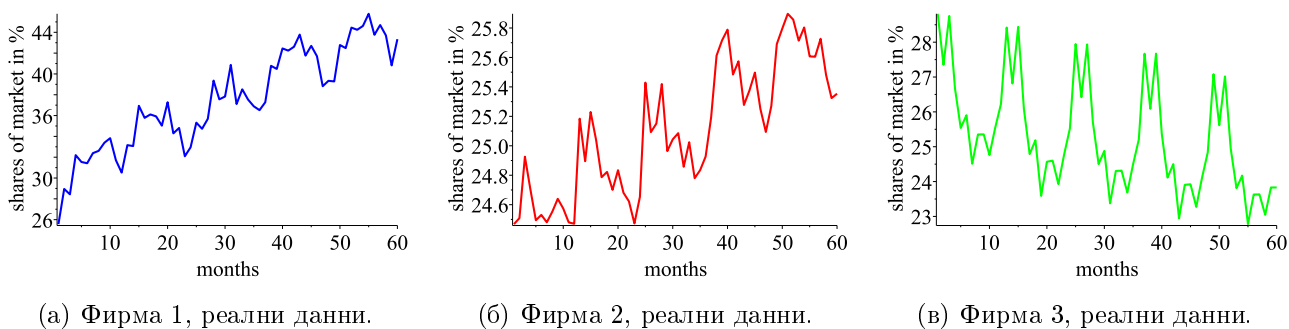
$$(29) \quad x = 32.44929470, y = 40.63484167, z = 20.72850631.$$

Заклучение относно моделирането на мобилния пазар с помощта на функции на реакция със смесено монотонно свойство

Видяхме, че не е възможно да се моделира мобилният пазар в САЩ с помощта на линейни функции със смесено монотонно свойство, докато получихме някои относително добри модели на пазара на бира със същия клас функции. Пазарът на бира е стар, който се е стабилизирал и графиката на данните показва това. Пазарът на бира е близък до линейното поведение за участниците, докато мобилният пазар е сравнително нов и прилича повече на сигмоидален [7, 9]. Това потвърждава още веднъж, че моделите, които данните споделят, са значими при търсенето на класа функции на реакция, които трябва да бъдат взети предвид.

Върху илюстративен пример със специфично подбрани случайни данни, удовлетворяващи предварително зададени зависимости

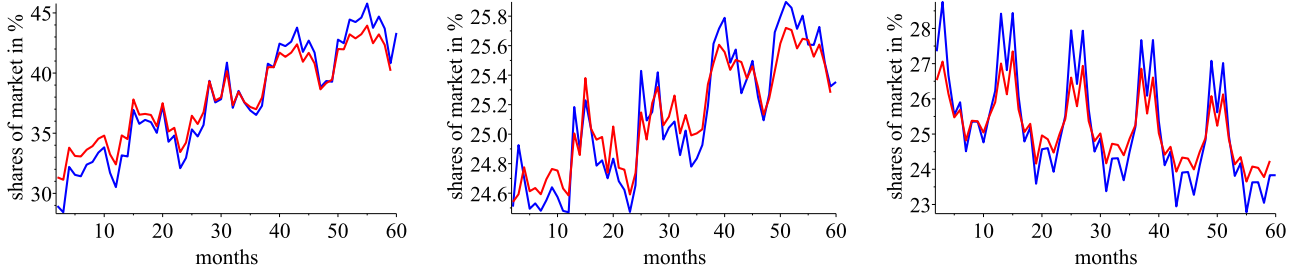
Генерираме случайни данни, които следват специфични зависимости. Графиките са представени на Фигура 10. Изискваме за някакво периодично поведение на тримата играчи като двама от тях да показват възходящ тренд, а третият – низходящ.



Фигура 10. Случайни данни за трите фирми в олигополния пазар.

Търсим $(F_1, F_2, F_3) \in M_2$ и получаваме

$$(30) \quad \begin{cases} F_1(x, y, z) = 0.79x & +0.15z & +4.37, \\ F_2(x, y, z) = 0.1x & -0.1y & +0.1z & +21.25, \\ F_3(x, y, z) = 0.1x & -1.1y & +0.73z & +30.21 \end{cases}$$



(а) Фирма 1, реални данни в синьо спрямо приближените данни пресметнати с функцията на реакция $x_n = F_1(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ в червено.

(б) Фирма 2, реални данни в синьо спрямо приближените данни пресметнати с функцията на реакция $x_n = F_2(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ в червено.

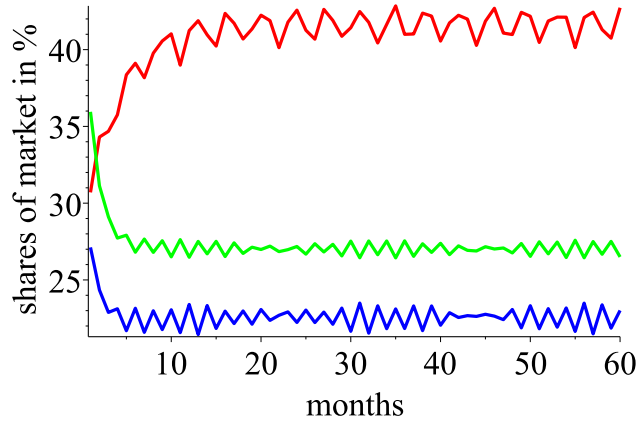
(в) Фирма 3, реални данни в синьо спрямо приближените данни пресметнати с функцията на реакция $x_n = F_2(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ в червено.

Фигура 11. Реални данни в синьо спрямо приближени с помощта на функциите на реакция в червено.

Получаваме пазарното равновесие

$$(x, y, z) = (38.66859470, 25.20445457, 25.05539642).$$

Върху илюстративни примери с произволно избрани данни



Фигура 12. Процентен дял в течение на времето за Com_1 в червен, Com_2 в зелен и Com_3 в син цвят.

Търсим наредена тройка от функции $(F_1, F_2, F_3) \in M_2$, т.е.

$$(31) \quad \begin{cases} F_1(x, y, z) = a_1x + b_1y + c_1z + d_1, \\ F_2(x, y, z) = a_2x + b_2y + c_2z + d_2, \\ F_3(x, y, z) = a_3x + b_3y + c_3z + d_3, \end{cases}$$

така че $a_i, c_i > 0$ за $i = 1, 2, 3$, $\max\{\sum_{i=1}^3 a_i, \sum_{i=1}^3 c_i\} < 1$, $b_i < 0$ за $i = 1, 2, 3$, $\sum_{i=1}^3 b_i > -1$.

Нека споменем, че за да можем да приложим Следствие 1 е необходимо да се удовлетворяват и условията

$$x_0 \leq F_1(x_0, y_0, z_0), \quad y_0 \geq F_2(x_0, y_0, z_0), \quad z_0 \leq F_3(x_0, y_0, z_0),$$

където наредената тройка (x_0, y_0, z_0) е първоначалното състояние на пазара.

Нека $A_1 = \{x_i\}_{i=0}^{59}$, $A_2 = \{y_i\}_{i=0}^{59}$ и $A_3 = \{z_i\}_{i=0}^{59}$ са наличните статистически данни, пресметнати в процентно присъствие на пазара, съответно за трите фирми. Нека B_i е оценката получена за реакцията на производител i , съгласно наличните данни съгласно търсената функция на реакция F_i , т.е. $B_i = \{F_i(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})\}_{i=1}^{60}$. Решаваме минимизационната задача

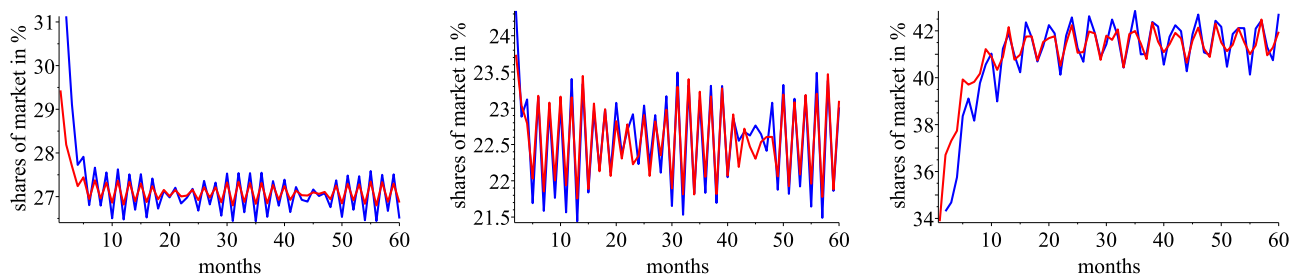
$$\min \left\{ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=0}^{60} (x_{j+1} - F_i(x_j, y_j, z_j))^2 \right\}$$

при следните ограничения

$$\begin{aligned} a_1 &\in [0.1, 0.99], a_2 \in [0, 1, 0.99 - a_1], a_3 \in [0.1, 0.99 - a_1 - a_2], \\ b_1 &\in [-0.99, -0.1], b_2 \in [-0.99 + b_1, -0.1], b_3 \in [-0.99 + b_1 + b_2, -0.1], \\ c_1 &\in [0.1, 0.99], c_2 \in [0.1, 0.99 - c_1], c_3 \in [0.1, 0.99 - c_1 - c_2], \\ x_0 &\leq F_1(x_0, y_0, z_0), z_0 \geq F_2(x_0, y_0, z_0), z_0 \leq F_3(x_0, y_0, z_0). \end{aligned}$$

Получаваме

$$(32) \quad \begin{cases} F_1(x, y, z) = 0.32x - 0.1y + 20.81, \\ F_2(x, y, z) = 0.53x - 0.55y + 0.1z + 16.26, \\ F_3(x, y, z) = 0.1x - 0.39y + 0.62z + 21.97 \end{cases}$$



(а) Com_1 , реални данни в синьо спрямо предсказани с помощта на функцията на реакция $x_n = F_1(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ в проценти в червено.

(б) Com_2 , реални данни в синьо спрямо предсказани с помощта на функцията на реакция $y_n = F_2(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ в проценти в червено.

(в) Com_3 , реални данни в синьо спрямо предсказани с помощта на функцията на реакция $z_n = F_3(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ в проценти в червено.

Фигура 13. Реални данни в синьо спрямо предсказани с помощта на функциите на реакция в червено.

Статистическите показатели на създадените модели са представени в Таблица 14.

Таблица 14. Статистически показатели на получените модели.

	Модел Com_{ranu_1}	Модел Com_{ranu_2}	Модел Com_{ranu_3}
R^2	0.952	0.947	0.908
MAPE	0.0083	0.0479	0.0126

Получаваме пазарно равновесие

$$(33) \quad x = 27.09805319, y = 22.56013869, z = 41.34665614.$$

Устойчивост на редиците от последователни итерации

Съвсем нов резултат [8] намира достатъчни условия за устойчивост на редицата от последователни приближения.

Теорема 18. Нека $(X, \rho, \preceq)$ е частично наредено, пълно метрично пространство и (F_1, F_2, F_3) е наредена тройка от изображения със смесеното мо-

нотонно свойство. Нека съществува константа $\alpha \in [0, 1)$, така че неравенството

$$(34) \quad \sum_{k=1}^3 \rho(F_k(x, y, z), F_k(u, v, w)) \leq \alpha(\rho(x, u) + \rho(y, v) + \rho(z, w))$$

е изпълнено за всички $x \succcurlyeq u$, $y \preccurlyeq v$ и $z \succcurlyeq w$.

Нека е в сила едно от следните условия

1. F_k , $k = 1, 2, 3$ са непрекъснати изображения
2. за всяка сходяща редица $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n, z_n) = (x, y, z)$, $(x_n, y_n, z_n) \in X \times X \times X$
 - ако $(x_n, y_n, z_n) \preccurlyeq (x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$, то $(x_n, y_n, z_n) \preccurlyeq (x, y, z)$
 - ако $(x_n, y_n, z_n) \succcurlyeq (x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$, то $(x_n, y_n, z_n) \succcurlyeq (x, y, z)$.

Ако съществуват $x_0, y_0, z_0 \in X$, така че едно от следните условия е в сила

$$\begin{aligned} & x_1^{(0)} \preccurlyeq F_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) \\ \bullet & \quad x_2^{(0)} \succcurlyeq F_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) \\ & \quad x_3^{(0)} \preccurlyeq F_3(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) \\ & x_1^{(0)} \succcurlyeq F_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) \\ \bullet & \quad x_2^{(0)} \preccurlyeq F_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) \\ & \quad x_3^{(0)} \succcurlyeq F_3(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) \end{aligned}$$

тогава съществува наредена тройка $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in X \times X \times X$, която е граница на редицата $\{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)})\}_{n=0}^{\infty}$, дефинирана чрез $x_k^{(n)} = F_k(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)})$ за $k = 1, 2, 3$ и $n \in \mathbb{N}$.

В сила са следните оценки на грешката

1. априори оценка на грешката

$$\max_{k=1,2,3} \{d(x_k^{(n)}, \xi_k)\} \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \sum_{k=1}^3 d(x_k^{(0)}, x_k^{(1)})$$

2. а постериори оценка на грешката

$$\max_{k=1,2,3} \left\{ d \left(x_k^{(n+1)}, \xi_k \right) \right\} \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \sum_{k=1}^3 d \left(x_k^{(n)}, x_k^{(n+1)} \right)$$

3. скорост на сходимост

$$\max_{k=1,2,3} \left\{ d \left(x_k^{(n+1)}, \xi_k \right) \right\} \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \sum_{k=1}^3 d \left(x_k^{(n)}, \xi_k \right).$$

Ако за всяка двойка то елементи $(x, y, z), (u, v, w) \in (X \times X \times X, \preceq)$, където $(x_1, x_2, x_3) \preceq (y_1, y_2, y_3)$ ако $x_1 \preceq y_1$, $x_2 \succcurlyeq y_2$, и $x_3 \preceq y_3$ има или горна граница или долна граница, то (ξ_1, ξ_2, ξ_3) е единствена тройка неподвижни точки.

Ще преформулираме Теорема 18 в стила на Следствие 1.

Corollary 2. Нека разгледаме олигополен пазар с трима основни участника, удовлетворяващ:

1. тримата играчи произвеждат напълно взаимно заменяеми стоки
2. фирма i произвежда количества в множествот X_i , $i = 1, 2, 3$, където X_i са затворени, непразни подмножества в пълното метрично пространство $(\mathbb{R}, |\cdot|)$
3. нека наредената тройка $(F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)) \in M_1 \cup M_2 \cup M_3$ е функциите на реакция съответно за фирми едно, две и три
4. съществува поне една наредена тройка (x, y, z) , така че $x \preceq F_1(x, y, z)$, $y \succcurlyeq F_2(x, y, z)$ и $z \preceq F_3(x, y, z)$.

Тогава съществува наредена тройка (x, y, z) , която е пазарно равновесие, т.е. трока неподвижни точки за наредената тройка от изображения (F_1, F_2, F_3) .

Ако в допълнение всеки два елемента от X^3 са или ограничени от долу или ограничени от горе, то съществува единствено пазарна равновесна тройка (ξ, η, ζ) в $X_1 \times X_2 \times X_3$, т.е. $\xi = F_1(\xi, \eta, \zeta)$, $\eta = F_2(\xi, \eta, \zeta)$ и $\zeta = F_3(\xi, \eta, \zeta)$.

В сила са следните оценки на грешката:

1. а priori оценка на грешката

$$\max_{k=1,2,3} \left\{ d \left(x_k^{(n)}, \xi_k \right) \right\} \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \sum_{k=1}^3 d \left(x_k^{(0)}, x_k^{(1)} \right)$$

2. а постериори оценка на грешката

$$\max_{k=1,2,3} \left\{ d \left(x_k^{(n+1)}, \xi_k \right) \right\} \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} \sum_{k=1}^3 d \left(x_k^{(n)}, x_k^{(n+1)} \right)$$

3. скорост на сходимост

$$\max_{k=1,2,3} \left\{ d \left(x_k^{(n+1)}, \xi_k \right) \right\} \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} \sum_{k=1}^3 d \left(x_k^{(n)}, \xi_k \right).$$

Можем да направим извод, че в разглежданите илюстративни примери реиците от последователни итерации, ако започват от точка (x_0, y_0, z_0) , която удовлетворява неравенствата

$$x_0 \preceq F_1(x_0, y_0, z_0), \quad y_0 \succcurlyeq F_2(x_0, y_0, z_0), \quad z_0 \preceq F_3(x_0, y_0, z_0),$$

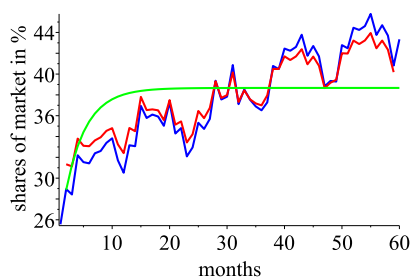
то (x_n, y_n, z_n) е сходяща към пазарното равновесие (x, y, z) , където

$$x_n = F_1(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}),$$

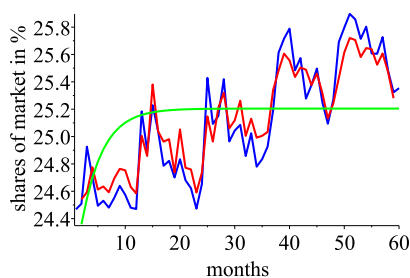
$$y_n = F_2(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$$

и

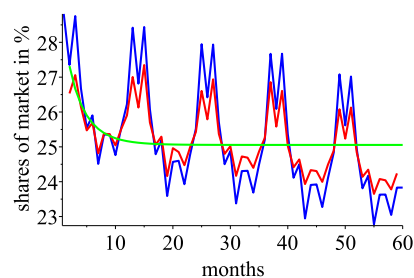
$$z_n = F_3(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}).$$



(а) $Company_1$, реални данни в синьо спрямо предсказаните с помощта на функцията на реакция $x_n = F_1(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ в процентни дялове в червено.

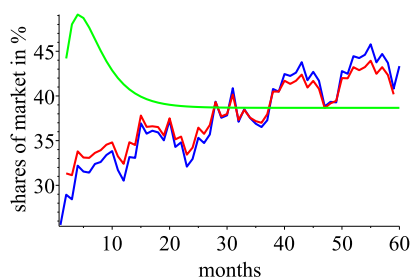


(б) $Company_2$, реални данни в синьо спрямо предсказаните с помощта на функцията на реакция $y_n = F_2(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ в процентни дялове в червено.

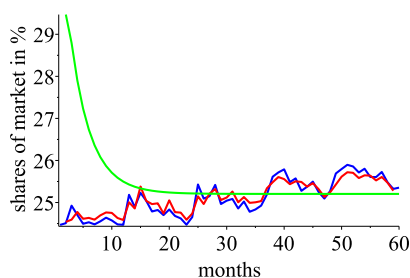


(в) $Company_3$, реални данни в синьо спрямо предсказаните с помощта на функцията на реакция $z_n = F_3(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ в процентни дялове в червено.

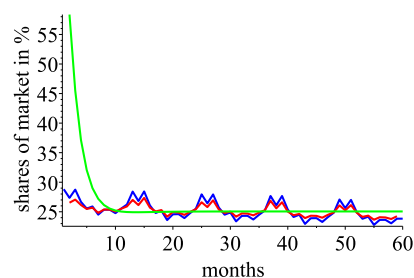
Фигура 14. Реални данни в синьо спрямо предсказаните с помощта на функции на реакция в червено, ако началното състояние в пазара е първоначалното състояние в пазара, според наличните данни.



(а) $Company_1$, реални данни в синьо спрямо предсказаните с помощта на функцията на реакция $x_n = F_1(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ в процентни дялове в червено.



(б) $Company_2$, реални данни в синьо спрямо предсказаните с помощта на функцията на реакция $y_n = F_2(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ в процентни дялове в червено.



(в) $Company_3$, реални данни в синьо спрямо предсказаните с помощта на функцията на реакция $z_n = F_3(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ в процентни дялове в червено.

Фигура 15. Реални данни в синьо спрямо предсказаните с помощта на функции на реакция в червено, ако началното състояние в пазара е $(40, 15, 55)$.

Заклучение

Основни приноси в настоящия дисертационния труд

Основни приноси в настоящия дисертационния труд:

- I. Двойки точки на най-добро приближение за циклични и полу-циклични изображения в рефлексивни банахови пространства вместо в равномерно изпъкнали.
- II. Разработе на техника за оценка на грешката за точки на най-добро приближение за нециклични изображения.
- III. Изследвани са двойки и тройки неподвижни точки за изображения със смесеното монотонно свойство в частично наредени метрични пространства.
- IV. Обобщен е вариационния принцип на Екеланд за изображения със смесеното монотонно свойство. С негова помощ са намерени условия за съществуване и условия за единственост на тройки неподвижни точки за класове от изображения със смесеното монотонно свойство.
- V. Някои от резултатите са приложени при моделиране на олигополни пазари.

Списък на публикациите по дисертационния труд

- 1 L. Ajeti, A. Ilchev, B. Zlatanov. On Coupled Best Proximity Points in Reflexive Banach Spaces, Mathematics, 10(8), (2022), Article number 1304. (Web of Science, IF=2.258, Q1; SCOPUS, SJR=0.538, Q2)
- 2 L. Ajeti, B. Zlatanov. Coupled Fixed Points Results for Hardy-Rogers Type of Maps with the Mixed Monotone Property Obtained with The Help of a Variational Technique, MATTEX 2022, CONFERENCE PROCEEDING, v. 1, (2022) 37- 42.
- 3 L. Ajeti, A. Ilchev. A Variational Principle and Triple Fixed Points, AIP Conference Proceedings, 3182 (2025), Article number 070006, doi: 10.1063/5.0245984, (Web of Science, SCOPUS, SJR=0.152)

Апробация на получените резултати

- a) L. Ajeti, B. Zlatanov. Coupled Fixed Points Results for Hardy-Rogers Type of Maps with the Mixed Monotone Property Obtained with The Help of a Variational Technique, MATTEX 2022, CONFERENCE PROCEEDING, v. 1, (2022) 37- 42.
- б) L. Ajeti, Coupled best proximity points for noncyclic maps, The International Annual Scientific Conference of the University "Kadri Zeka" (UKZ) Annual Conference 2024, Trends and Challenges in the Development of Contemporary Society, June 13-14, (2024), Gjilan, Republic of Kosovo, pp 27
- в) L. Ajeti, A. Ilchev. A Variational Principle and Triple Fixed Points, 49th International Conference - Applications of Mathematics in Engineering and Economics – AMEE'2023, 2023.

Връзката между приносите, задачите, мястото на описание в дисертационния труд и направените публикации

Връзката между приносите, задачите, мястото на описание в дисертационния труд и направените публикации са следните:

Принос	Глава	Параграф	Статия	Доклад
I	2	2.1,2.2,2.3	1	
II	2	2.5		b)
III	3	3.1	2	a)
IV	3	3.2	3	c)
V	4	4.3,4.4,4.5	(in progress)	

Благодарности

Издавам своята дълбока благодарност и признателност към моите научни ръководители проф. дн Боян Златанов и доц. д-р Христина Кулина за всичко, на което ме научиха, докато се обучавах в докторската програма. Искам да благодаря на колегите от катедрата за подкрепата. Благодарена съм и на моето семейство, което винаги ме е подкрепяло и насърчавало.

Литература

- [1] A. Abkar, M. Gabeleh. Global Optimal Solutions of Noncyclic Mappings in Metric Spaces. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **153**, 298–305 (2012).
- [2] L. Ajeti. Coupled best proximity points for noncyclic maps, *The International Annual Scientific Conference of the University "Kadri Zeka" (UKZ) Annual Conference 2024, Trends and challenges in the development of contemporary society*, June 13-14, Gjilan, Republic of Kosovo (2024).
- [3] L. Ajeti, B. Ilchev. A Variational Principle and Triple Fixed Points, *AIP Conference Proceedings*, **3182**, Article number 070006, (2025).
- [4] L. Ajeti, A. Ilchev, B. Zlatanov. On Coupled Best Proximity Points in Reflexive Banach Spaces, *Mathematics*, **10**, Article number 1304 (2022).
- [5] L. Ajeti, B. Zlatanov. Coupled Fixed Points Results for Hardy-Rogers Type of Maps with the Mixed Monotone Property Obtained with The Help of a Variational Technique, *MATTEX 2022, CONFERENCE PROCEEDING*, v. 1, 37-42 (2022).
- [6] M. Al-Thagafi, N. Shahzad. Convergence and Existence Results for Best Proximity Points. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, **70**, 3665–3671 (2009).
- [7] A. Ali, C. Dinkova, A. Ilchev, B. Zlatanov. Bhaskar-Lakshmikantham fixed point theorem vs Ran-Reunrings one and some possible generalizations and applications in matrix equations, *AIMS Mathematics*, **9**, 21890-21917, (2024).
- [8] A. Ali, C. Dinkova, H. Kulina, A. Ilchev, B. Zlatanov, Tripled Fixed Points, Obtained by Ran-Reunrings Theorem for Monotone Maps in Partially Ordered Metric Spaces, *Mathematics*, **13**, Article number 758 (2025).
- [9] A. Badev, S. Kabaivanov, P. Kopanov, V. Zhelinski, B. Zlatanov, Long-run Equilibrium in the market of mobile services in the USA, *Mathematics*, **12**, Article number 724 (2024).
- [10] S. Banach, Sur les opérations dan les ensembles abstraits et leurs applications aux integrales, *Fundamenta Mathematicae. Inst. Math.*, **3**, 133–181 (1922).
- [11] V. Berinde, M. Borcut. Tripled fixed point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, **74**, 4889—4897 (2011).

- [12] J. Borwein, Q. Zhu. *Techniques of Variational Analysis*, Springer, Berlin Heidelberg (2005).
- [13] O. Bretscher. *Linear Algebra with Applications*, Prentice Hall, Upper Saddle River NJ (2009).
- [14] J.A. Clarkson. Uniformly convex spaces, *Transactions of the American Mathematical Society* **40**, 396–414 (1936).
- [15] R. Deville, G. Godefroy, V. Zizler. *Smmothness and Renormings in Banach Spaces*, Longman Scientific Technical: Harlow, UK; John Wiley Sons: New York, NY, USA, (1993).
- [16] D. Dickey, W. Fuller. Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root, *Journal of American Statistical Association*, **74**, 427–431 (1979).
- [17] Y. Dzhabarova, S. Kabaivanov, M. Ruseva, B. Zlatanov, Existence, Uniqueness and Stability of Market Equilibrium in Oligopoly Markets, *Administrative Sciences* **10**, Article number 70 (2020).
- [18] I. Ekeland. Remarques sur les problèmes variationnels I, *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Série A*, **275**, 1057–1059 (1972).
- [19] I. Ekeland. Nonconvex minimization problems, *American Mathematical Society. Bulletin. New Series* **1**, 443–474 (1979).
- [20] A. Eldred, P. Veeramani. Existence and Convergence of Best Proximity Points, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **323**, 1001–1006 (2006).
- [21] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos and V. Zizler. *Banach Space Theory - The Basis for Linear and Nonlinear Analysis*, Springer, New York Dordrecht Heidelberg London (2010).
- [22] R. Espínola, A. Fernández-León. On best proximity points in metric and Banach space, *Canadian Journal of Mathematics*, **63**, 533–550 (2011).
- [23] A. Fernández-León, M. Gabeleh. Best Proximity Pair Theorems for Noncyclic Mappings in Banach and Metric Spaces, *Fixed Point Theory*, **17**, 63–84 (2016).
- [24] J. W. Friedman. *Oligopoly Theory*, Cambradge University Press, Cambradge UK (2007).

- [25] M. Gabeleh, N. Shahzad. Best proximity pair and fixed point results for noncyclic mappings in convex metric spaces, *FILOMAT*, **30**, 3149–3158 (2016).
- [26] T. Gnana Bhaskar, V. Lakshmikantham. Fixed point theorems in partially ordered metric spaces and applications, *Nonlinear Analysis*, **65**, 1379-1393 (2006).
- [27] D. J. Guo, V. Lakshmikantham. Coupled fixed points of nonlinear operators with applications, *Nonlinear Analysis*, **11**, 623-632 (1987).
- [28] A. Ilchev, V. Ivanova, H. Kulina, P. Yaneva, B. Zlatanov. Investigation of equilibrium in oligopoly markets with the help of tripled fixed points in Banach spaces, *Econometrics*, **12**, Article number 18 (2024).
- [29] S. Kabaivanov, B. Zlatanov. A variational principle, coupled fixed points and market equilibrium, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, **26**, 169-185 (2022).
- [30] W. Kirk, P. Srinivasan, P. Veeramani. Fixed points for mappings satisfying cyclical contractive conditions, *Fixed Point Theory*, **4**, 79–89 (2003).
- [31] A. M. Legendre, Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes [New Methods for the Determination of the Orbits of Comets] (in French), Paris: F. Didot. (1805)
- [32] M. Petric, B. Zlatanov. Fixed point theorems of Kannan type for cyclical contractive conditions, *Plovdiv University, Faculty of Mathematics and Informatics, REMIA*, 187-194 (2010).
- [33] A. C. M. Ran, M. C. B. Reurings. A fixed point theorem in partially ordered sets and some applications to matrix equations, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **132**, 1435-1443 (2004).
- [34] D. A. Simovici, C. Djeraba. *Mathematical Tools for Data Mining: Set Theory, Partial Orders, Combinatorics*, Springer-Verlag, London (2008).
- [35] A. Smith. *A Mathematical Introduction to Economics*, Basil Blackwell Limited, Oxford (1987).
- [36] W. Sintunavarat, P. Kumam. Coupled best proximity point theorem in metric spaces, *Fixed Point Theory and Applications*, **2012**, Article number 93 (2012).
- [37] B. Zlatanov. Error estimates for approximating best proximity points for cyclic contractive maps, *Carpathian Journal of Mathematics*, **32**, 265-270 (2016).

- [38] B. Zlatanov. Coupled best proximity points for cyclic contractive maps and their applications, *Fixed Point Theory*, **22**, 431-452 (2021).