

ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ "ПАИСИЙ ХИЛЕНДАРСКИ"

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

КАТЕДРА "АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ"

Муса Ибрахим Айети

ТРОЙКИ КОМПОЗИЦИИ
В ЧЕТНОМЕРНИ ПРОСТРАНСТВА С АФИННА
СВЪРЗАНОСТ БЕЗ ТОРЗИЯ

АВТОРЕФЕРАТ

на Дисертационен труд

за присъждане на образователната и научна степен "доктор"

Област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика;

Професионално направление 4.5 Математика; Научна специалност 01.01.06

Геометрия и топология

Научен ръководител: проф. д-р Георги Златанов

Пловдив, 2013

ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ "ПАИСИЙ ХИЛЕНДАРСКИ"

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

КАТЕДРА "АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ"

Муса Ибрахим Айети

ТРОЙКИ КОМПОЗИЦИИ
В ЧЕТНОМЕРНИ ПРОСТРАНСТВА С АФИННА
СВЪРЗАНОСТ БЕЗ ТОРЗИЯ

АВТОРЕФЕРАТ

на Дисертационен труд

за присъждане на образователната и научна степен "доктор"

Област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика;

Професионално направление 4.5 Математика; Научна специалност 01.01.06

Геометрия и топология

Научен ръководител: проф. д-р Георги Златанов

Рецензенти

проф.дмн Грозю Станилов

доц.д-р Георги Костадинов

Пловдив, 2013

Дисертационният труд е обсъждан и насочен за защита на разширено заседание на катедра "Алгебра и геометрия" при Факултета по математика и информатика на Пловдивски университет "Паисий Хилендарски"

Дисертационният труд "Тройки композиции в четномерни пространства с афинна свързаност без торзия" съдържа 78 страници. Използваната литература включва 55 източника. Списъкът на авторските публикации се състои от 5 заглавия.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на 13.05.2013 от 13 часа в заседателната зала на новата сграда на Пловдивски университет "Паисий Хилендарски".
Материалите по защитата са на разположение на интересуващите се в секретариата на ФМИ, нова сграда на ПУ, кабинет 330, всеки работен ден от 8:30 до 17:00 часа.

Актуалност на темата

Геометриите на пространства с афинна свързаност, на композиции, на пространства с допълнителни структури и на разслоените пространства са актуални клонове на съвременната диференциална геометрия. Съществени приноси в тези области имат А.Норден [13], [15], К.Уано [49], В.Вишневски, А.Широков, В.Шуригин [5], Р.Зуланке [8], М.Михальцев [12], Г.Тимофеев [24], [25], Б.Шапуков [26], Т.Адати, Т.Мiyazawa [29], S.Kaneyuki, М.Kozai [34], Е.Pavlov, Н.Hopteriev [35] и други.

През последното десетилетие тези области получават значително развитие в работите на Е.Алшибая [2], У.Симон [20], А.Столяров [21], В.Blair [30], G.Zlatanov [52], [55], G.Zlatanov, В.Tsareva [51], [53], [54], А.Норден [13], К.Уано [47] и други.

Всички автори, изучавали геометрията на композициите, са изследвали пространства, в които е зададена една композиция. С помощта на апарата, разработен в [52] и [55] могат да се изследват пространства с повече от една композиция. Първите работи в това направление са [53] и [54]. Чрез апарата, разработен в [52] и [55] в дисертационния труд се изследват специални тройки от композиции в четномерни пространства с афинна свързаност без торзия A_{2n} . Апаратът е приложен и при изучаването на пространства с афинна свързаност без торзия A_4 с допълнителни структури. Намерени са характеристиките на 72 нови вида композиции в A_{2n} . Известно е, че намирането на несиметрични свързаности, запазващи паралелното пренасяне на допълнителни структури, са актуални за съвременната физика. Актуални са и изследванията на специални слоения в A_4 .

Цели и задачи на дисертационния труд

Изследванията в настоящия дисертационен труд касаят локалната теория на композициите. Те са инсперирани от идеята на Норден - понятието мрежа в двумерно пространство X_2 може да бъде обобщено в различни направления при преминаването в пространства с много измерения . Едно от тези обобщения, което се разглежда в съвременната диференциална геометрия е понятието композиция [14]. Изследванията се извършват в четномерни пространства със симетрична афинна

свързаност A_{2n} и в четиримерни пространства със симетрична афинна свързаност A_4 .

Основни обекти на изследване в дисертационния труд са композиции, тройки от композиции, допълнителни структури и слоения. Разгледани са и несиметрични афинни свързаности, които запазват паралелното пренасяне на изследваните структури.

Основните цели на дисертационния труд могат да се обединят в следните групи:

1. Изследване на нови видове композиции в A_{2n} ;
2. Намиране на инвариантни характеристики на изследваните обекти;
3. Определяне на вида на пространствата A_{2n} и A_4 , съдържащи специални композиции, специални допълнителни структури и специални слоения;
4. Намиране на несиметрични афинни свързаности, запазващи паралелното пренасяне на специалните структури.

Целите на настоящия дисертационен труд са постигнати основно чрез решаването на следните задачи:

A_1 . Изследване на тройки от композиции, които са от вида (c, c) или (ch, ch) или (g, g) в A_{2n} и A_4 ;

A_2 . Въвеждане и изследване на нови композиции, чиито позиции се пренасят паралелно или квазипаралелно по линиите на базовите многообразия на спрегнатите им композиции;

A_3 . Изследване на следните допълнителни структури в A_4 : параконтактна, полуциклична, нилпотентна и структура A , за която $A^3 = 0$;

A_4 . Изследвания на слоения от вида (c, c) , (ch, ch) , (g, g) в A_4 ;

A_5 . Намиране на несиметрични афинни свързаности, запазващи паралелното пренасяне на допълнителните структури.

Структура и обем на дисертационния труд

Дисертационният труд съдържа 78 страници и е структуриран в следните части: увод, 8 параграфа, разпределени в 3 глави, заключение и литература.

Първа глава, състояща се от два параграфа, е изложена на 9 страници и не съдържа нови резултати. В §1 и §2 на първа глава са включени основните резултати, получени съответно в работите [15] и [54]. Втора и трета глави съдържат резултати на автора.

Заклучението включва: актуалност на темата, научните приноси на автора, решените задачи в дисертационния труд, перспективите за развитие, публикациите по дисертационния труд на автора, апробация на резултатите и декларация за оригиналност.

Литературата съдържа 55 заглавия на научни статии и монографии, които авторът е използвал при изследванията, свързани с дисертационния труд и 5 авторски статии.

Кратък обзор на резултатите, получени в дисертационния труд

Глава I Основни понятия и твърдения

Тази глава съдържа основни резултати за композиции и тройки от композиции, получени в работите на Норден А., Тимофеев Г. [15] и Zlatanov G., Tsareva B. [54] и използвани в дисертационния труд.

Глава II Специални композиции в четномерни пространства с афинна свързаност без торзия

Втората глава е посветена на геометрията на тройки от композиции в четномерни пространства със симетрична свързаност A_{2n} .

Нека A_{2n} е пространство със симетрична свързаност, а v_σ^α , $(\sigma = 1, 2, \dots, 2n)$ са независими векторни полета. Ковекторите $\overset{\sigma}{v}_\beta$ са въведени чрез равенствата

$$(1) \quad v_\sigma^\alpha \overset{\sigma}{v}_\beta = \delta_\beta^\alpha \quad \Leftrightarrow \quad v_\sigma^\alpha \overset{\nu}{v}_\alpha = \delta_\sigma^\nu.$$

Използвани са следните означения:

$$(2) \quad \alpha, \beta, \gamma, \sigma, \nu \in \{1, 2, \dots, 2n\}; \quad i, j, k, p, q, r, s \in \{1, 2, \dots, n\};$$

$$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}, \bar{p}, \bar{q}, \bar{r}, \bar{s} \in \{n+1, n+2, \dots, 2n\}.$$

Мрежата, определена от векторните полета v_α^σ , е означена с $\{v_\alpha\}$.

Афинорите

$$(3) \quad a_\alpha^\beta = v_i^\beta \dot{v}_\alpha^i - v_{\bar{i}}^\beta \bar{\dot{v}}_\alpha^{\bar{i}},$$

и

$$(4) \quad b_\alpha^\beta = w_i^\beta \dot{w}_\alpha^i - w_{\bar{i}}^\beta \bar{\dot{w}}_\alpha^{\bar{i}},$$

където

$$w_i^\alpha = v_i^\alpha + v_{n+i}^\alpha, \quad w_{n+i}^\alpha = v_i^\alpha - v_{n+i}^\alpha,$$

определят съответно спрегнатите композиции $X_n \times \bar{X}_n$ и $Y_n \times \bar{Y}_n$ [54].

§3. Композиции, породени от двойка спрегнати композиции в четномерни пространства с афинна свързаност A_{2n} без торзия.

В §3 се въвеждат и афинорите

$$(5) \quad d_\alpha^\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_\alpha^\beta + b_\alpha^\beta), \quad d_1^\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_\alpha^\beta - b_\alpha^\beta).$$

.

Доказано е, че афинорите d_α^β и d_1^β задават интегрируеми структури в пространството A_{2n} (Теорема 3.1) и определят композиции.

Доказано е, че ако две от композициите, определени от афинорите a_α^β , b_α^β , d_α^β и d_1^β са от вида (c, c) или (ch, ch) , то и останалите две композиции са съответно от вида (c, c) или (ch, ch) (Теорема 3.2) и ако три от тези композиции са от вида (g, g) , то и четвъртата композиция е от вида (g, g) (Теорема 3.3).

Разгледани са следните несиметрични свързаности

$$(6) \quad {}^a\Gamma_{\alpha\beta}^\nu = \Gamma_{\alpha\beta}^\nu + {}^aS_{\alpha\beta}^\nu, \quad a = 1, 2, 3$$

където ${}^aS_{[\alpha\beta]}^\nu$ е тензорът на торзията на свързаността ${}^a\Gamma_{\alpha\beta}^\nu$. Нека ${}^a\nabla$ и ${}^aR_{\alpha\beta\sigma}{}^\nu$ са съответно ковариантната производна и тензорът на кривината за свързаността ${}^a\Gamma_{\alpha\beta}^\nu$.

Намерени са необходими и достатъчни условия, при които са изпълнени равенства-та ${}^1\nabla_\sigma a_\alpha^\beta = \nabla_\sigma a_\alpha^\beta$ или ${}^2\nabla_{[\sigma} a_{\alpha]}^\beta = \nabla_{[\sigma} a_{\alpha]}^\beta$, или $a_\alpha^\sigma {}^3\nabla_\beta a_\sigma^\nu + a_\beta^\sigma {}^3\nabla_\sigma a_\alpha^\nu = a_\alpha^\sigma \nabla_\beta a_\sigma^\nu + a_\beta^\sigma \nabla_\sigma a_\alpha^\nu$ (Теорема 3.4, 3.5, 3.6).

За всеки от случаите са определени компоненти на тензорите на кривината ${}^a R_{\alpha\beta\sigma}{}^\nu$ в параметрите на координатната мрежа v_α^σ .

§4 Тройки композиции с общо базово многообразие

Разгледани са следните две тройки от композиции $X_n \times \bar{X}_n$, $X_n \times Y_n$, $X_n \times Z_n$ и $X_n \times \bar{X}_n$, $Y_n \times \bar{X}_n$, $Z_n \times \bar{X}_n$, където композициите $X_n \times \bar{X}_n$ и $Y_n \times \bar{X}_n$ са спрегнати, а композицията $Z_n \times \bar{X}_n$ е определена от афинора $a_\alpha^\sigma b_\sigma^\beta$.

Доказано е, че ако композициите $X_n \times \bar{X}_n$, $X_n \times Y_n$, $X_n \times Z_n$, $Y_n \times \bar{X}_n$ и $Z_n \times \bar{X}_n$ са от вида (c, c) , то пространството A_{2n} е афинно (Теорема 4.1).

Доказано е, че ако композициите $X_n \times \bar{X}_n$, $X_n \times Y_n$, $X_n \times Z_n$ са от вида (c, ch) , то тензорът на кривината удовлетворява равенството $R_{\alpha\beta i}{}^\sigma = 0$ и ако композициите $X_n \times \bar{X}_n$, $Y_n \times \bar{X}_n$, $Z_n \times \bar{X}_n$ са от вида (ch, c) , то $R_{\alpha\beta i}{}^\sigma = 0$ (Теорема 4.2).

Намерени са необходими и достатъчни условия композициите $X_n \times \bar{X}_n$, $X_n \times Y_n$, $X_n \times Z_n$, $Y_n \times \bar{X}_n$, $Z_n \times \bar{X}_n$ да са от вида (g, g) (Теорема 4.3).

Изследвайки паралелното и квазипаралелното пренасяне на позициите $P(X_n)$ и $P(X_m)$ на композицията $X_n \times X_m$, $n + m = N$ по линиите на A_N , X_n , X_m , Норден и Тимофеев в [15] са определили характеристиките на 35 вида композиции (§1, таблица 1.1).

Като е изследвано паралелното и квазипаралелното пренасяне на позициите $P(X_n)$ и $P(\bar{X}_n)$ по линиите на многообразията Y_n и Z_n в дисертационния труд са получени 72 вида специални композиции $X_n \times \bar{X}_n$. Техните характеристики както и характеристики на пространствата A_{2n} , които ги съдържат са дадени в Таблица 4.1.

№	Вид на композицията $X_n \times \bar{X}_n$	Инвариантни характеристики	Характеристики в параметрите на мрежата $\{v\}$	
1	$(Y_n, -)$	$T_{\sigma \bar{s}}^i v^\sigma + T_{\sigma \bar{s}-n}^i v^\sigma = 0$	$T_{\bar{s}}^i + T_{\bar{s}-n}^i = 0$	$\Gamma_{\bar{s}j}^i + \Gamma_{\bar{s}-n j}^i = 0$
2	$(-, Y_n)$	$T_{\sigma s}^i v^\sigma + T_{\sigma n+s}^i v^\sigma = 0$	$T_s^i + T_{n+s}^i = 0$	$\Gamma_{s\bar{j}}^i + \Gamma_{n+s \bar{j}}^i = 0$
3	(Y_n, Y_n)	$T_{\sigma \bar{s}}^i v^\sigma + T_{\sigma \bar{s}-n}^i v^\sigma = 0,$ $T_{\sigma s}^i v^\sigma + T_{\sigma s+n}^i v^\sigma = 0$	$T_{\bar{s}}^i + T_{\bar{s}-n}^i = 0,$ $T_s^i + T_{s+n}^i = 0$	$\Gamma_{\bar{s}j}^i + \Gamma_{\bar{s}-n j}^i = 0,$ $\Gamma_{s\bar{j}}^i + \Gamma_{s+n \bar{j}}^i = 0$
4	$(Z_n, -)$	$T_{\sigma \bar{s}}^i v^\sigma - T_{\sigma \bar{s}-n}^i v^\sigma = 0$	$T_{\bar{s}}^i - T_{\bar{s}-n}^i = 0$	$\Gamma_{\bar{s}j}^i - \Gamma_{\bar{s}-n j}^i = 0$
5	$(-, Z_n)$	$T_{\sigma s}^i v^\sigma - T_{\sigma n+s}^i v^\sigma = 0$	$T_s^i - T_{n+s}^i = 0$	$\Gamma_{s\bar{j}}^i - \Gamma_{n+s \bar{j}}^i = 0$
6	(Z_n, Z_n)	$T_{\sigma \bar{s}}^i v^\sigma - T_{\sigma \bar{s}-n}^i v^\sigma = 0,$ $T_{\sigma s}^i v^\sigma - T_{\sigma n+s}^i v^\sigma = 0$	$T_{\bar{s}}^i - T_{\bar{s}-n}^i = 0,$ $T_s^i - T_{n+s}^i = 0$	$\Gamma_{\bar{s}j}^i - \Gamma_{\bar{s}-n j}^i = 0,$ $\Gamma_{s\bar{j}}^i - \Gamma_{n+s \bar{j}}^i = 0$
7	(Y_n, Z_n)	$T_{\sigma \bar{s}}^i v^\sigma + T_{\sigma \bar{s}-n}^i v^\sigma = 0,$ $T_{\sigma s}^i v^\sigma - T_{\sigma n+s}^i v^\sigma = 0$	$T_{\bar{s}}^i + T_{\bar{s}-n}^i = 0,$ $T_s^i - T_{n+s}^i = 0$	$\Gamma_{\bar{s}j}^i + \Gamma_{\bar{s}-n j}^i = 0,$ $\Gamma_{s\bar{j}}^i - \Gamma_{n+s \bar{j}}^i = 0$
8	(Z_n, Y_n)	$T_{\sigma s}^i v^\sigma + T_{\sigma n+s}^i v^\sigma = 0,$ $T_{\sigma \bar{s}}^i v^\sigma - T_{\sigma \bar{s}-n}^i v^\sigma = 0$	$T_s^i + T_{n+s}^i = 0,$ $T_{\bar{s}}^i - T_{\bar{s}-n}^i = 0$	$\Gamma_{s\bar{j}}^i + \Gamma_{n+s \bar{j}}^i = 0,$ $\Gamma_{\bar{s}j}^i - \Gamma_{\bar{s}-n j}^i = 0$
9	$(qY_n, -)$	$T_{\sigma \bar{s}}^i v^\sigma + T_{\sigma \bar{s}-n}^i v^\sigma = \delta_{\bar{s}j}^i v^\sigma \varphi_{\sigma 1}$	$T_{\bar{s}}^i + T_{\bar{s}-n}^i = \delta_{\bar{s}j}^i \varphi_j$	$\Gamma_{\bar{s}j}^i + \Gamma_{\bar{s}-n j}^i = \delta_{\bar{s}j}^i \varphi_j$
10	$(-, qY_n)$	$T_{\sigma s}^i v^\sigma + T_{\sigma n+s}^i v^\sigma = \delta_{s\bar{j}}^i v^\sigma \varphi_{\sigma 2}$	$T_s^i + T_{n+s}^i = \delta_{s\bar{j}}^i \varphi_{\bar{j}}$	$\Gamma_{s\bar{j}}^i + \Gamma_{n+s \bar{j}}^i = \delta_{s\bar{j}}^i \varphi_{\bar{j}}$
11	(qY_n, qY_n)	$T_{\sigma \bar{s}}^i v^\sigma + T_{\sigma \bar{s}-n}^i v^\sigma = \delta_{\bar{s}j}^i v^\sigma \varphi_{\sigma 1},$ $T_{\sigma s}^i v^\sigma + T_{\sigma n+s}^i v^\sigma = \delta_{s\bar{j}}^i v^\sigma \varphi_{\sigma 2}$	$T_{\bar{s}}^i + T_{\bar{s}-n}^i = \delta_{\bar{s}j}^i \varphi_j,$ $T_s^i + T_{n+s}^i = \delta_{s\bar{j}}^i \varphi_{\bar{j}}$	$\Gamma_{\bar{s}j}^i + \Gamma_{\bar{s}-n j}^i = \delta_{\bar{s}j}^i \varphi_j,$ $\Gamma_{s\bar{j}}^i + \Gamma_{n+s \bar{j}}^i = \delta_{s\bar{j}}^i \varphi_{\bar{j}}$
12	$(qZ_n, -)$	$T_{\sigma \bar{s}}^i v^\sigma - T_{\sigma \bar{s}-n}^i v^\sigma = \delta_{\bar{s}j}^i v^\sigma \varphi_{\sigma 3}$	$T_{\bar{s}}^i - T_{\bar{s}-n}^i = \delta_{\bar{s}j}^i \varphi_j$	$\Gamma_{\bar{s}j}^i - \Gamma_{\bar{s}-n j}^i = \delta_{\bar{s}j}^i \varphi_j$
13	$(-, qZ_n)$	$T_{\sigma s}^i v^\sigma - T_{\sigma n+s}^i v^\sigma = \delta_{s\bar{j}}^i v^\sigma \varphi_{\sigma 4}$	$T_s^i - T_{n+s}^i = \delta_{s\bar{j}}^i \varphi_{\bar{j}}$	$\Gamma_{s\bar{j}}^i - \Gamma_{n+s \bar{j}}^i = \delta_{s\bar{j}}^i \varphi_{\bar{j}}$
14	(qZ_n, qZ_n)	$T_{\sigma \bar{s}}^i v^\sigma - T_{\sigma \bar{s}-n}^i v^\sigma = \delta_{\bar{s}j}^i v^\sigma \varphi_{\sigma 3},$ $T_{\sigma s}^i v^\sigma - T_{\sigma n+s}^i v^\sigma = \delta_{s\bar{j}}^i v^\sigma \varphi_{\sigma 4}$	$T_{\bar{s}}^i - T_{\bar{s}-n}^i = \delta_{\bar{s}j}^i \varphi_j,$ $T_s^i - T_{n+s}^i = \delta_{s\bar{j}}^i \varphi_{\bar{j}}$	$\Gamma_{\bar{s}j}^i - \Gamma_{\bar{s}-n j}^i = \delta_{\bar{s}j}^i \varphi_j,$ $\Gamma_{s\bar{j}}^i - \Gamma_{n+s \bar{j}}^i = \delta_{s\bar{j}}^i \varphi_{\bar{j}}$
15	(qY_n, qZ_n)	$T_{\sigma \bar{s}}^i v^\sigma + T_{\sigma \bar{s}-n}^i v^\sigma = \delta_{\bar{s}j}^i v^\sigma \varphi_{\sigma 1},$	$T_{\bar{s}}^i + T_{\bar{s}-n}^i = \delta_{\bar{s}j}^i \varphi_j,$	$\Gamma_{\bar{s}j}^i + \Gamma_{\bar{s}-n j}^i = \delta_{\bar{s}j}^i \varphi_j,$

67	(ch, g) и (qY_n, qZ_n)	$\bar{T}_j^\sigma v^\sigma = 0, \bar{T}_j^\sigma v^\sigma = 0,$ $\bar{T}_j^\sigma v^\sigma = \delta_s^i v^\sigma \varphi_\sigma,$ $\bar{T}_j^\sigma v^\sigma - \bar{T}_j^\sigma v^\sigma = \delta_s^i v^\sigma \varphi_\sigma$	$\bar{T}_j^\sigma = 0, \bar{T}_j^\sigma = 0,$ $\bar{T}_j^{\bar{s}-n} = \delta_s^i \varphi_j,$ $\bar{T}_j^\sigma - \bar{T}_j^{\sigma+n+s} = \delta_s^i \varphi_j$	$\Gamma_{\bar{s}j}^i = 0, \Gamma_{\bar{s}j}^i = 0,$ $\Gamma_{\bar{s}-n j}^i = \delta_s^i \varphi_j,$ $\Gamma_{\bar{s}j}^i - \Gamma_{n+s j}^i = \delta_s^i \varphi_j$
68	(ch, g) и (qZ_n, qY_n)	$\bar{T}_j^\sigma v^\sigma = 0, \bar{T}_j^\sigma v^\sigma = 0,$ $\bar{T}_j^\sigma v^\sigma = -\delta_s^i v^\sigma \varphi_\sigma,$ $\bar{T}_j^\sigma v^\sigma + \bar{T}_j^\sigma v^\sigma = \delta_s^i v^\sigma \varphi_\sigma$	$\bar{T}_j^\sigma = 0, \bar{T}_j^\sigma = 0,$ $\bar{T}_j^{\bar{s}-n} = -\delta_s^i \varphi_j,$ $\bar{T}_j^\sigma + \bar{T}_j^{\sigma+n+s} = \delta_s^i \varphi_j$	$\Gamma_{\bar{s}j}^i = 0, \Gamma_{\bar{s}j}^i = 0,$ $\Gamma_{\bar{s}-n j}^i = -\delta_s^i \varphi_j,$ $\Gamma_{\bar{s}j}^i + \Gamma_{n+s j}^i = \delta_s^i \varphi_j$
69	(g, ch) и (qY_n, qY_n)	$\bar{T}_j^\sigma v^\sigma = 0, \bar{T}_j^\sigma v^\sigma = 0,$ $\bar{T}_j^\sigma v^\sigma + \bar{T}_j^\sigma v^\sigma = \delta_s^i v^\sigma \varphi_\sigma,$ $\bar{T}_j^\sigma v^\sigma = \delta_s^i v^\sigma \varphi_\sigma$	$\bar{T}_j^\sigma = 0, \bar{T}_j^\sigma = 0,$ $\bar{T}_j^\sigma + \bar{T}_j^{\bar{s}-n} = \delta_s^i \varphi_j,$ $\bar{T}_j^{\sigma+n+s} = \delta_s^i \varphi_j$	$\Gamma_{\bar{s}j}^i = 0, \Gamma_{\bar{s}j}^i = 0,$ $\Gamma_{\bar{s}j}^i + \Gamma_{\bar{s}-n j}^i = \delta_s^i \varphi_j,$ $\Gamma_{n+s j}^i = \delta_s^i \varphi_j$
70	(g, ch) и (qZ_n, qZ_n)	$\bar{T}_j^\sigma v^\sigma = 0, \bar{T}_j^\sigma v^\sigma = 0,$ $\bar{T}_j^\sigma v^\sigma - \bar{T}_j^\sigma v^\sigma = \delta_s^i v^\sigma \varphi_\sigma,$ $\bar{T}_j^\sigma v^\sigma = -\delta_s^i v^\sigma \varphi_\sigma$	$\bar{T}_j^\sigma = 0, \bar{T}_j^\sigma = 0,$ $\bar{T}_j^\sigma - \bar{T}_j^{\bar{s}-n} = \delta_s^i \varphi_j,$ $\bar{T}_j^{\sigma+n+s} = -\delta_s^i \varphi_j$	$\Gamma_{\bar{s}j}^i = 0, \Gamma_{\bar{s}j}^i = 0,$ $\Gamma_{\bar{s}j}^i - \Gamma_{\bar{s}-n j}^i = \delta_s^i \varphi_j,$ $\Gamma_{n+s j}^i = -\delta_s^i \varphi_j$
71	(g, ch) и (qY_n, qZ_n)	$\bar{T}_j^\sigma v^\sigma = 0, \bar{T}_j^\sigma v^\sigma = 0,$ $\bar{T}_j^\sigma v^\sigma + \bar{T}_j^\sigma v^\sigma = \delta_s^i v^\sigma \varphi_\sigma,$ $\bar{T}_j^\sigma v^\sigma = -\delta_s^i v^\sigma \varphi_\sigma$	$\bar{T}_j^\sigma = 0, \bar{T}_j^\sigma = 0,$ $\bar{T}_j^\sigma + \bar{T}_j^{\bar{s}-n} = \delta_s^i \varphi_j,$ $\bar{T}_j^{\sigma+n+s} = -\delta_s^i \varphi_j$	$\Gamma_{\bar{s}j}^i = 0, \Gamma_{\bar{s}j}^i = 0,$ $\Gamma_{\bar{s}j}^i + \Gamma_{\bar{s}-n j}^i = \delta_s^i \varphi_j,$ $\Gamma_{n+s j}^i = -\delta_s^i \varphi_j$
72	(g, ch) и (qZ_n, qY_n)	$\bar{T}_j^\sigma v^\sigma = 0, \bar{T}_j^\sigma v^\sigma = 0,$ $\bar{T}_j^\sigma v^\sigma - \bar{T}_j^\sigma v^\sigma = \delta_s^i v^\sigma \varphi_\sigma,$ $\bar{T}_j^\sigma v^\sigma = \delta_s^i v^\sigma \varphi_\sigma$	$\bar{T}_j^\sigma = 0, \bar{T}_j^\sigma = 0,$ $\bar{T}_j^\sigma - \bar{T}_j^{\bar{s}-n} = \delta_s^i \varphi_j,$ $\bar{T}_j^{\sigma+n+s} = \delta_s^i \varphi_j$	$\Gamma_{\bar{s}j}^i = 0, \Gamma_{\bar{s}j}^i = 0,$ $\Gamma_{\bar{s}j}^i - \Gamma_{\bar{s}-n j}^i = \delta_s^i \varphi_j,$ $\Gamma_{n+s j}^i = \delta_s^i \varphi_j$

Таблица 1:

С T_{α}^{β} са означени коефициентите от деривационните уравнения [51]

$$\nabla_{\sigma} v_{\alpha}^{\beta} = T_{\alpha}^{\nu} v_{\nu}^{\beta}, \quad \nabla_{\sigma} v_{\beta}^{\alpha} = -T_{\sigma}^{\alpha} v_{\nu}^{\beta}.$$

С φ_{σ} , φ_{σ}^1 , φ_{σ}^2 , φ_{σ}^3 и φ_{σ}^4 са означени векторите на квазипаралелното пренасяне съответно за композициите $X_n \times \overline{X}_n$, $X_n \times Y_n$, $X_n \times Z_n$, $Y_n \times \overline{X}_n$, $Z_n \times \overline{X}_n$.

Съгласно [10], [15] $\varphi_{\sigma} = -\frac{1}{2n}\psi_{\sigma}$, където $\psi_{\sigma} = \frac{1}{2}a_{\alpha}^{\nu} \nabla_{\nu} a_{\sigma}^{\alpha}$.

Глава III Специални композиции в четиримерни пространства с афинна свързаност без торзия

Трета глава е посветена на геометрията на четиримерни пространства A_4 със симетрична свързаност $\Gamma_{\alpha\beta}^{\nu}$, снабдени с допълнителни структури. За индексите приемаме

$$(7) \quad \alpha, \beta, \gamma, \sigma, \nu \in \{1, 2, 3, 4\}; \quad i, j, k, s \in \{1, 2\}; \quad \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}, \bar{s} \in \{3, 4\}.$$

В §5 и §6 се изследва тройката от композиции $X_2 \times \overline{X}_2$, $Y_2 \times \overline{Y}_2$ и $Z_2 \times \overline{Z}_2$, генерирани съответно от следните афинори

$$(8) \quad \begin{aligned} a_{\alpha}^{\beta} &= v_1^{\beta} v_{\alpha}^1 + v_2^{\beta} v_{\alpha}^2 - v_3^{\beta} v_{\alpha}^3 - v_4^{\beta} v_{\alpha}^4, \\ b_{\alpha}^{\beta} &= v_1^{\beta} v_{\alpha}^3 + v_3^{\beta} v_{\alpha}^1 + v_2^{\beta} v_{\alpha}^4 + v_4^{\beta} v_{\alpha}^2, \\ c_{\alpha}^{\beta} &= v_3^{\beta} v_{\alpha}^1 - v_1^{\beta} v_{\alpha}^3 + v_4^{\beta} v_{\alpha}^2 - v_2^{\beta} v_{\alpha}^4, \end{aligned}$$

където v_{α}^{σ} са независими векторни полета, а v_{σ}^{α} са определени чрез равенствата (1).

Композициите $X_2 \times \overline{X}_2$ и $Y_2 \times \overline{Y}_2$ са спрегнати.

§5 Чебишеви композиции в четиримерни пространства с афинна свързаност без торзия

Намерени са необходими и достатъчни условия композицията $X_2 \times \overline{X}_2$ или $Y_2 \times \overline{Y}_2$, или $Z_2 \times \overline{Z}_2$ да е от вида (ch, ch) (Теорема 5.1, 5.2, 5.3).

Определен е видът на пространствата A_4 , съдържащи композиция $X_2 \times \overline{X}_2$ или $Y_2 \times \overline{Y}_2$, или $Z_2 \times \overline{Z}_2$ от вида (ch, ch) (Следствия 5.1, 5.2, 5.3).

Определен е видът на пространството A_4 , когато две от разглежданите композиции са от вида (ch, ch) (Следствия 5.4, 5.5, 5.6).

Установено е, че когато спрегнатите композиции $X_2 \times \overline{X}_2$ и $Y_2 \times \overline{Y}_2$ или композициите $X_2 \times \overline{X}_2$ и $Z_2 \times \overline{Z}_2$ са от вида (ch, ch) , то в параметрите на координатната мрежа $\{v_\alpha\}$ компонентите на тензора на кривината удовлетворяват равенствата

$$\begin{aligned}
R_{123.}^\alpha &= R_{124.}^\alpha = R_{341.}^\alpha = R_{342.}^\alpha = 0, \\
R_{3ij.}^\alpha &= R_{3ji.}^\alpha = \partial_3 \Gamma_{ij}^\alpha + \varepsilon(\Gamma_{11}^\alpha \Gamma_{ij}^3 + \Gamma_{12}^\alpha \Gamma_{ij}^4), \\
R_{4ij.}^\alpha &= R_{4ji.}^\alpha = \partial_4 \Gamma_{ij}^\alpha + \varepsilon(\Gamma_{22}^\alpha \Gamma_{ij}^4 + \Gamma_{12}^\alpha \Gamma_{ij}^3), \\
R_{i33.}^\alpha &= \varepsilon(\partial_i \Gamma_{11}^\alpha + \Gamma_{ii}^\alpha \Gamma_{11}^i + \Gamma_{12}^\alpha \Gamma_{11}^j), \quad i \neq j, \\
(9) \quad R_{i44.}^\alpha &= \varepsilon(\partial_i \Gamma_{22}^\alpha + \Gamma_{ii}^\alpha \Gamma_{22}^i + \Gamma_{12}^\alpha \Gamma_{22}^j), \quad i \neq j, \\
R_{i34.}^\alpha &= R_{i43.}^\alpha = \varepsilon(\partial_i \Gamma_{12}^\alpha + \Gamma_{ii}^\alpha \Gamma_{12}^i + \Gamma_{12}^\alpha \Gamma_{12}^j), \quad i \neq j, \\
R_{ijj.}^\alpha &= \partial_i \Gamma_{jj}^\alpha - \partial_j \Gamma_{12}^\alpha + \Gamma_{ij}^\alpha \Gamma_{jj}^i + \Gamma_{12}^\alpha (\Gamma_{jj}^j - \Gamma_{12}^i) - \Gamma_{jj}^\alpha \Gamma_{12}^j, \quad i \neq j, \\
R_{344.}^\alpha &= \varepsilon(\partial_3 \Gamma_{22}^\alpha - \partial_4 \Gamma_{12}^\alpha) + \Gamma_{11}^\alpha \Gamma_{22}^3 + \Gamma_{12}^\alpha (\Gamma_{22}^4 - \Gamma_{12}^3) - \Gamma_{22}^\alpha \Gamma_{12}^4, \\
R_{433.}^\alpha &= \varepsilon(\partial_4 \Gamma_{11}^\alpha - \partial_3 \Gamma_{12}^\alpha) + \Gamma_{22}^\alpha \Gamma_{11}^4 + \Gamma_{12}^\alpha (\Gamma_{11}^3 - \Gamma_{12}^4) - \Gamma_{11}^\alpha \Gamma_{12}^3,
\end{aligned}$$

където $\varepsilon = 1$ съответства на случая композициите $X_2 \times \overline{X}_2$ и $Y_2 \times \overline{Y}_2$ са от вида (ch, ch) , а $\varepsilon = -1$ съответства на случая, когато композициите $X_2 \times \overline{X}_2$ и $Z_2 \times \overline{Z}_2$ са от вида (ch, ch) .

Доказано е, че ако композициите $X_2 \times \overline{X}_2$, $Y_2 \times \overline{Y}_2$ и $Z_2 \times \overline{Z}_2$ са едновременно от вида (ch, ch) , то пространството A_4 е афинно (Следствие 5.7).

§6 Геодезични композиции в четиримерни пространства с афинна свързаност без торзия

Намерени са необходими и достатъчни условия композицията $X_2 \times \overline{X}_2$ или $Y_2 \times \overline{Y}_2$, или $Z_2 \times \overline{Z}_2$ да е от вида (g, g) (Теорема 6.1, 6.2, 6.3).

Определен е видът на пространствата A_4 , съдържащи композиция $X_2 \times \overline{X}_2$ или $Y_2 \times \overline{Y}_2$, или $Z_2 \times \overline{Z}_2$ от вида (g, g) (Следствия 6.1, 6.2, 6.3).

Доказано е, че ако две от композициите $X_2 \times \bar{X}_2$, $Y_2 \times \bar{Y}_2$, $Z_2 \times \bar{Z}_2$ са от вида (g, g) , то и третата е от вида (g, g) .

Установено е, че ако композициите $X_2 \times \bar{X}_2$, $Y_2 \times \bar{Y}_2$ и $Z_2 \times \bar{Z}_2$ са от вида (g, g) , то компонентите на тензора на кривината удовлетворяват условията

$$R_{ijk.}^{\bar{s}} = R_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}.}^s = 0, \quad R_{133.}^\alpha = R_{244.}^\alpha = R_{311.}^\alpha = R_{422.}^\alpha = R_{143.}^\alpha = R_{243.}^\alpha = R_{321.}^\alpha = R_{412.}^\alpha = 0.$$

Разгледан е и следният афинор

$$(10) \quad d_\alpha^\beta = a_\alpha^\beta + b_\alpha^\beta + c_\alpha^\beta,$$

който определя в A_4 композиция $U_2 \times \bar{U}_2$.

Доказано е, че ако композиция $U_2 \times \bar{U}_2$ от вида (g, g) , то композиция $X_2 \times \bar{X}_2$ от вида $(-, g)$.

Доказано е, че ако в еквафинното пространство EqA_4 с основен 4-вектор

$v_{[\alpha}^1 v_\beta^2 v_\gamma^3 v_\delta^4]$ спрегнатите композиции $X_2 \times \bar{X}_2$ и $Y_2 \times \bar{Y}_2$ са от вида (g, g) , то пространството EqA_4 е афинно (Твърдение 6.1).

Ако в еквафинното пространство EqA_4 с основна плътност e композициите $X_2 \times \bar{X}_2$ и $Y_2 \times \bar{Y}_2$ са от вида (g, g) , то компонентите на тензора на Ричи за пространството EqA_4 удовлетворяват следните равенства $R_{13} = -\partial_{13} \ln e$, $R_{14} = -\partial_{14} \ln e + \Gamma_{14}^\alpha \partial_\alpha \ln e + \partial_\alpha \Gamma_{14}^\alpha$, $R_{24} = \partial_{24} \ln e$, $R_{23} = -\partial_{23} \ln e - \Gamma_{23}^\alpha \partial_\alpha \ln e - \partial_\alpha \Gamma_{23}^\alpha$, $R_{ij} = -\partial_{ij} \ln e - \varepsilon \Gamma_{14}^{\bar{i}} \Gamma_{14}^{\bar{j}}$, $R_{\bar{i}\bar{j}} = -\partial_{\bar{i}\bar{j}} \ln e - \varepsilon \Gamma_{14}^i \Gamma_{14}^j$, където $\varepsilon = 1$ за $i = j$ и $\bar{i} = \bar{j}$, $\varepsilon = -1$ за $i \neq j$ и $\bar{i} \neq \bar{j}$, а за индексите имаме: $1 \leftrightarrow 4$, $2 \leftrightarrow 3$.

§7 Едно слоение на пространството A_4

В §7 се изследва тройка от композиции, първата от които се състои от двумерни базови многообразия, а втората и третата се състоят от тримерни и едномерни базови многообразия. Първата композиция $X_2 \times \bar{X}_2$ е породена от афинора a_α^β (8), а втората $Y_3 \times Y_1$ и третата $Z_3 \times Z_1$ композиции са генерирани съответно от

афинорите [52], [54]

$$(11) \quad \begin{aligned} K_\alpha^\beta &= v_1^\beta v_\alpha^1 + v_2^\beta v_\alpha^2 + v_3^\beta v_\alpha^3 - v_4^\beta v_\alpha^4 \\ L_\alpha^\beta &= v_1^\beta v_\alpha^1 + v_2^\beta v_\alpha^2 + v_4^\beta v_\alpha^4 - v_3^\beta v_\alpha^3 \end{aligned}$$

Намерени са необходими и достатъчни условия, при които:

Всяка от композициите $X_2 \times \overline{X}_2$, $Y_3 \times Y_1$ и $Z_3 \times Z_1$ е от вида (c, c) (Теорема 7.1);

Всяка от композициите $Y_3 \times Y_1$ и $Z_3 \times Z_1$ е от вида (ch, ch) или (g, g) (Теорема 7.2, 7.3);

Определен е видът на пространството A_4 , съдържащо всяка от тези специални композиции (Следствия 7.1, 7.3, 7.5).

Доказано е, че ако две от композициите $X_2 \times \overline{X}_2$, $Y_3 \times Y_1$ и $Z_3 \times Z_1$ са от вида (c, c) или (ch, ch) , то и третата е от същия вид (Следствия 7.2, 7.4.).

Намерени са необходими и достатъчни условия една от композициите да е от вида (g, g) , когато другите две вече са от вида (g, g) (Следствие 7.6).

Когато и трите композиции $X_2 \times \overline{X}_2$, $Y_3 \times Y_1$, $Z_3 \times Z_1$ са от вида (c, c) , се установява, че компонентите на тензора на кривината на пространството A_4 удовлетворяват условията $R_{\alpha\beta\bar{j}}^{\bar{k}} = R_{\alpha\beta\bar{j}}^{\bar{k}} = 0$, $R_{\alpha\beta 4}^3 = R_{\alpha\beta 3}^4 = 0$.

Когато и трите композиции $X_2 \times \overline{X}_2$, $Y_3 \times Y_1$, $Z_3 \times Z_1$ са от вида (ch, ch) , се установява, че компонентите на тензора на кривината на пространството A_4 удовлетворяват условията $R_{i\bar{j}\bar{k}}^{\bar{s}} = R_{i\bar{j}\bar{k}}^{\bar{s}} = 0$, $R_{i34}^3 = R_{i34}^4 = 0$.

Диференцируемите многообразия Y_3 и Z_3 образуват слоение в A_4 , което означаваме (Y_3, Z_3) . Сечението на базовите многообразия Y_3 и Z_3 е двумерното многообразие X_2 . С Определения 7.1, 7.2, 7.3 са въведени три вида слоения (Y_3, Z_3) :

Ще казваме, че слоението (Y_3, Z_3) е от вида (c, c) , ако позициите $P(Y_3)$ и $P(Z_3)$ се пренасят паралелно по всяка линия на пространството A_4 .

Ще казваме, че слоението (Y_3, Z_3) е от вида (ch, ch) , ако позициите $P(Y_3)$ и $P(Z_3)$ се пренасят паралелно съответно по всяка линия на многообразиата Z_3 и Y_3 .

Ще казваме, че слоението (Y_3, Z_3) е от вида (g, g) , ако позициите $P(Y_3)$ и $P(Z_3)$ се пренасят паралелно съответно по всяка линия на многообразиата Y_3 и Z_3 .

Намерени са необходими и достатъчни условия, при които слоението (Y_3, Z_3) е от вида (c, c) , (ch, ch) или (g, g) ;

Намерени са условията, които трябва да удовлетворяват коефициентите на свързаността за всеки от случаите, както и условията, които трябва да удовлетворяват компонентите на тензора на кривината. Например:

Слоението (Y_3, Z_3) е от вида (g, g) тогава и само тогава, когато коефициентите от деривационните уравнения на векторните полета v_α^σ удовлетворяват равенствата

$$\overset{4}{T}_a^\sigma \overset{b}{v}^\sigma = 0, \quad \overset{3}{T}_m^\sigma \overset{n}{v}^\sigma = 0. \quad (\text{Теорема 7.5})$$

В параметрите на координатната мрежа (v_1, v_2, v_3, v_4) условията на Теорема 7.5 приемат вида $\Gamma_{ba}^4 = 0$, $\Gamma_{nm}^3 = 0$ (Следствие 7.8), а за компонентите на тензора на кривината на пространството A_4 имаме $R_{abc}^4 = 0$, $R_{mnl}^3 = 0$, където $a, b, c \in \{1, 2, 3\}$; $m, n, l \in \{1, 2, 4\}$.

§8 Четиримерни пространства A_4 с допълнителни структури

Изследвани са пространства A_4 със следните допълнителни структури:

Параконтактна структура P , $P_\alpha^\beta = v_\alpha^i \overset{i}{v}^\beta - v_\alpha^3 \overset{3}{v}^\beta$;

Полуциклична структура Q , $Q_\alpha^\beta = v_\alpha^2 \overset{2}{v}^\beta + v_\alpha^1 \overset{1}{v}^\beta$;

Структура A с афинор $A_\alpha^\beta = v_\alpha^2 \overset{2}{v}^\beta + v_\alpha^3 \overset{3}{v}^\beta$, удовлетворяващ условието $A^3 = 0$;

Нилпотентна структура B , $B_\alpha^\beta = v_\alpha^3 \overset{3}{v}^\beta + v_\alpha^4 \overset{4}{v}^\beta$.

В параметрите на координатната мрежа $\{v_\alpha\}$ матриците на афинорите имат следния вид:

$$(12) \quad \begin{aligned} (P_\alpha^\beta) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & (Q_\alpha^\beta) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ (A_\alpha^\beta) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & (B_\alpha^\beta) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Намерени са необходимите и достатъчни условия за паралелното пренасяне на тези структури (Теорема 8.1, 8.3, 8.5, 8.7). Определен е видът на пространството A_4 , съдържащо всяка от тези структури (Следствия 8.1, 8.3, 8.5, 8.7). С помощта на всяка от разглежданите структури е определена несиметрична свързаност ${}^a\Gamma_{\alpha\beta}^\nu = \Gamma_{\alpha\beta}^\nu + {}^aS_{\alpha\beta}^\nu$, $a = 1, 2, 3, 4$, където ${}^aS_{[\alpha\beta]}^\nu$ е тензорът на торзията в новата свързаност.

Намерени са необходими и достатъчни условия за тензорите на деформация ${}^aS_{\alpha\beta}^\nu$, при които афинорите на четирите структури са ковариантно постоянни в дадената свързаност $\Gamma_{\alpha\beta}^\nu$ и в свързаността с торзия ${}^a\Gamma_{\alpha\beta}^\nu$. (Теорема 8.2, 8.4, 8.6, 8.8).

Установено е, че в параметрите на координатната мрежа $\{v\}$ компонентите на тензорите на кривината ${}^aR_{\alpha\beta\sigma}^\nu$ удовлетворяват следните равенства :

$${}^1R_{\alpha\beta\bar{j}}^i = R_{\alpha\beta\bar{j}}^i = {}^1R_{\alpha\beta\bar{j}}^{\bar{i}} = R_{\alpha\beta\bar{j}}^{\bar{i}} = {}^1R_{\alpha\beta 4}^3 = R_{\alpha\beta 4}^3 = {}^1R_{\alpha\beta 3}^4 = R_{\alpha\beta 3}^4 = 0 ;$$

$${}^2R_{\alpha\beta\bar{j}}^i = R_{\alpha\beta\bar{j}}^i = {}^2R_{\alpha\beta\bar{j}}^{\bar{i}} = R_{\alpha\beta\bar{j}}^{\bar{i}} = 0, \quad R_{\alpha\beta 2}^2 = R_{\alpha\beta 1}^1, \quad {}^2R_{\alpha\beta 2}^2 = {}^2R_{\alpha\beta 1}^1 ;$$

$${}^3R_{\alpha\beta\bar{j}}^{\bar{i}} = R_{\alpha\beta\bar{j}}^{\bar{i}} = 0, \quad R_{\alpha\beta 1}^1 = R_{\alpha\beta 2}^2 = R_{\alpha\beta 3}^3, \quad {}^3R_{\alpha\beta 1}^1 = {}^3R_{\alpha\beta 2}^2 = {}^3R_{\alpha\beta 3}^3 ;$$

$${}^4R_{\alpha\beta\bar{j}}^{\bar{i}} = R_{\alpha\beta\bar{j}}^{\bar{i}} = 0, \quad R_{\alpha\beta 1}^1 = R_{\alpha\beta 3}^3, \quad {}^4R_{\alpha\beta 1}^1 = {}^4R_{\alpha\beta 3}^3, \quad R_{\alpha\beta 2}^2 = R_{\alpha\beta 4}^4,$$

$${}^4R_{\alpha\beta 4}^4 = {}^4R_{\alpha\beta 4}^4 .$$

Авторска справка за приносите

Научните приноси в дисертационния труд са следните:

- I. Въведени и изучени са нови 72 композиции в A_{2n} ;
- II. Намерени са инвариантни характеристики на специални тройки от композиции в A_{2n} и A_4 ;
- III. Получени са инвариантни характеристики на специални структури и слоения в A_{2n} и A_4 ;
- IV. Намерени са инвариантни характеристики на пространствата A_{2n} и A_4 , съдържащи специални композиции, тройки от композиции, допълнителни структури, слоения;
- V. Изследвани са несиметрични афинни свързаности, запазващи паралелното пренасяне на допълнителните структури.

Връзките между приносите, целите, задачите, мястото на описание в дисертационния труд и направените публикации са представени в табличен вид

Приноси	Цели	Задачи	Параграфи	Публикации
I	1	A_2	4	58
II	2	A_1	3, 4, 5, 6	56, 57, 59
III	2	A_1, A_2, A_3, A_4	3, 4, 5, 6, 7, 8	
IV	3	A_1, A_2, A_3, A_4	3, 4, 5, 6, 7, 8	56, 57, 58, 59, 60
V	4	A_5	3, 8	

Перспективи за развитие

Изследванията от дисертационния труд могат да продължат в следните насоки:

1. Класификация на специалните композиции, спрегнати на дадена композиция в A_{2n} ;
2. Изследване на многомерни пространства със симетрична афинна свързаност, които притежават специални структури или слоения;
3. Изследване на метрични пространства със специални структури;

Апробация на резултатите

Част от резултатите на дисертацията са докладвани от докторанта на 8-th International Symposium on Geometric Function Theory and Applications (GFTA), August 27-31, 2012, Ohrid, R Macedonia.

Публикации по дисертационния труд

1. Musa Ajeti, Chebyshevian compositions in four dimensional space with an affine connectedness without a torsion, Plovdiv Univ.Bulgaria, Sci. Works, Math., 38(3), 2011, 5-15.
2. Musa Ajeti, Triad geodesic compositions in four dimensional space with an affine connectedness without a torsion, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, ISSN:1821-1291, URL, v.4, № 1,(2012), 72-82.
3. M. Ajeti, M. Teofilova, G. Zlatanov, Triads of compositions in an even dimensional space with a symmetric affine connection, Tensor, 73(3) (2011), 171-187.
4. M. Ajeti and M. Teofilova, On triads of compositions in an even dimensional space with a symmetric affine connection, Advances in Mathematics: Scientific Journal 1 (2012), no.1, 45-50, ISSN 1857-8365, UDC: 514.754 (Proceedings of the 8-th International Symposium on Geometric Function Theory and Applications (GFTA), August 27-31, 2012, Ohrid, R Macedonia).
5. Musa Ajeti, Ivan Badev, Triad compositions in four dimensional affine space without a torsion, Journal of Technical University-Sofia, Plovdiv branch, Bulgaria, Fundamental Sciences and Applications, v.18, 2012, 91-96.

Декларация за оригиналност по член 27 ал.2 от ППЗРАСРБ

Получените резултати, описани в заключението на дисертационния труд "Тройки композиции в четномерни пространства с афинна свързаност без торзия" са оригинални и не са взимани от публикации, в които нямам участие.

Декларатор:

(Муса Ибрахим Айети)

Пловдив

Благодарности

Изразявам моята голяма благодарност на проф. д-р Георги Златанов за ценните съвети и препоръки при разработването на моя дисертационен труд. Благодаря също на ръководството на ФМИ на ПУ "П.Хилендарски" и катедрата "Алгебра и геометрия", които разрешиха да се обучавам.

Литература

- [1] Алшибая Э.Д., К геометрии распределений гиперплоскостных элементов в аффинном пространстве, АН СССР, т.5, (1974), 169-193.
- [2] Алшибая Э.Д., Об аффинных связностях на распределении гиперплоскостных элементов в A_{n+1} , Известия вузов, Математика, № 8, (2002), 72-74.
- [3] Анчиков А.М., Инвариантный тензорный признак конформно-приводимых римановых пространств, Известия вузов, Математика, № 5, (1965), 13-18.
- [4] Вишневский В. В., О геометрической модели полукасательных структур, Известия вузов, Математика, № 3, (1983), 73-75.
- [5] Вишневский В. В., Широков А. П., Шурин В. В., Пространства над алгебрами, Издат. Казанского университета, 1985.
- [6] Вишневский В. В., Многообразия над плюральными числами и полукасательные структуры, Итоги науки и техники, Проблемы геометрии, ВИНТИ, т.20, (1988), 35-72.
- [7] Вишневский В. В., Интегрируемые аффинорные структуры и их плюральные интерпретации, Итоги науки и техники, т.73, (2002), Москва, 5-64.
- [8] Зуланке Р., Винтген П., Дифференциальная геометрия и расслоения, Издат. Мир, 1975, Москва.
- [9] Кирсанова Т. В., Полукасательные структуры 1-го порядка, Труды Геометр. семинара, в.46, (1984), Издат. Казанского университета, 41-47.
- [10] Леонтьев Е. К., Классификация специальных связок и композиций многомерных пространств, Известия вузов, Матем., № 5, (1967), 40-51.
- [11] Леонтьев Е. К., О чебышевских композициях, Учен. зап. Казанского университета, т. 26, кн. 1 (1966), 23-40.
- [12] Михальцев П. А., Об одном классе многообразии над алгеброй дуальных чисел, Труды Геометр. семинара, в.21, (1991), Издат. Казанского университета, 70-79.

- [13] Норден А. П., Пространства аффинной связности, Издат. Наука, Москва, 1976.
- [14] Норден А. П., Пространства декартовой композиции, Известия вузов, Матем., № 4, (1963), 117-128.
- [15] Норден А. П., Тимофеев Г. Н., Инвариантные признаки специальных композиций многомерных пространств, Известия вузов, Матем., № 8, (1972), 81-89.
- [16] Норден А. П., Об одном классе четырехмерных А-пространств, Известия вузов, Матем., № 4, (1960), 145-157.
- [17] Норден А. П., О проективно-евклидовом пространстве Вейля, ДАН СССР, т.48, № 5, (1945), 23-37.
- [18] Павлов Е. В., Вещественная реализация конформного соответствия римановых пространствах на Клиффордской алгеброй, Известия вузов, Матем., № 7, (1978), 64-67.
- [19] Павлов Е. В., Василева М. К., Конформно-голоморфно соответствие между V -многообразиями, Известия вузов, Матем., № 10, (1981), 52-57.
- [20] Симон У., К аффинной теории гиперповерхностей: калибровочно-инвариантные структуры, Известия вузов, Матем., № 11, (2004), 53-81.
- [21] Столяров А. В., Двойственная геометрия нормализованного пространства аффинной связности, в. ЧГПУ, № 4, (2005), 21-27.
- [22] Талантова Н. В., Биаксиальное пространство параболического типа, Известия вузов, Матем., № 3, (1959), 214-228.
- [23] Талантова Н. В., Широков А. П., Замечание об одной метрике в касательном расслоении, Известия вузов, Матем., № 6, (1975), 143-146.
- [24] Тимофеев Г. Н., Инвариантные признаки специальных композиций в пространствах Вейля, Известия вузов, Матем., № 1, (1976), 87-98.
- [25] Тимофеев Г. Н., Ортогональные композиции в пространствах Вейля, Известия вузов, Матем., № 3, (1976), 73-85.

- [26] Шапуков Б. Н., Связности на дифференцируемых расслоениях, Итоги науки и техники, Проблемы геометрии, т. 15, (1983), Москва, 61-91.
- [27] Широков А. П., Структуры на дифференцируемых многообразиях, ВИНТИ АН СССР, Мат. 1967, 127-188.
- [28] Широков А. П., Об одном свойстве ковариантно постоянных аффиноров, ДАН СССР, т.112, № 3, (1955), 461-464.
- [29] Adati T., Miyarawa T., On paracontact Riemannian manifolds, TRU, Math, 13(2), 1977, 27-39.
- [30] Blair B., Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds, Prog. in Math. 203, Birkhauser Boston, 2002.
- [31] Carfagna D'Andrea A., Di Febo Marinelli R., $S - n$ una generalizzazione delle strutture quasi tangenti, Rend. Mat.E appl. № 2, (1982-2), 257-267.
- [32] Duc T.V., Structure Presque-transverse, J. Different.Geom., v.14, №2, (1979), 215-219.
- [33] Kaneyuki S., Williams F., Almost paracontact and parahodge structures on manifolds, Nagoya, Math. J. 99 (1985), 173-187.
- [34] Kaneyuki S., Kozai M., Paracomplex structures and affine symmetric spaces, Tokyo J. Math., 8 (1), 1985, 81-95.
- [35] Pavlov E., Hopterliev H., A sufficient condition for CH-mapping, Докл. БАН, v. 34, № 4, 1984, 473-475.
- [36] Sasaki S., On paracontact Riemannian manifolds, TRU Math., 16(2), 1980, 75-86.
- [37] Sasaki S., On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure, Tohoku Math. J.(2), 12(3), 1960, 459-476.
- [38] Sato J., On a structure simital to the almost contact structure, Tensor 30(3), 1976, 219-224.
- [39] Teofilova M., On a class complex manifolds with Norden metric, Plovdiv Univ., Bulgaria, Sci. Works,Math., 35(3), 2007, 149-156.

- [40] Teofilova M., On a class almost contact manifolds with Norden metric, REMIA 2010, Anniv. Intern. Conf. 10-12.12.2010, Plovdiv, Bulgaria, 217-223.
- [41] Teofilova M., Lie groups a Kachler manifolds with Killing Norden metric, C. R. Acad. Bulg. Sci., 65(6), (2012), 733-742.
- [42] Vanzura J., Simultaneous integrability of an almost tangent structure and a distribution, Demonstr. Math., № 2, 1989-19, 359-370.
- [43] Walker A., Connexions for parallel distributions in the large, Quart. J. Math., v. 6, № 24, 1955, 301-308.
- [44] Walker A., Connexions for parallel distributions in the large, II, Quart. J. Math., v. 9, № 35, 1958, 221-231.
- [45] Willmore T., Connexions for systems of parallel distributions, Quart. J. Math., v. 7, № 28, 1956, 269-276.
- [46] Willmore T., Parallel distributions on manifolds, Proc. London, Math. Soc., v. 6, № 22, 1956, 269-276.
- [47] Yano K., Affine connexions in an almost product space, Kodai Math. Semin.Repts., v. 611 № 1, 1959, 1-24.
- [48] Yano K., On Walker differentiation in almost product or almost complex spaces, Proc. Koninkl.Nederl. Acad.wel., A61, № 5, 1958, 572-580.
- [49] Yano K., Differential Geometry on Complex and Almost Complex Spaces, New York, 1965.
- [50] Yano K., Ishihara Sh., Tangent and Cotangent Bundles , New York, 1973.
- [51] Zlatanov G., Tsareva B., Geometry on the nets in equiaffine spacews, J. Geometry, 55, (1996), 192-201.
- [52] Zlatanov G., Compositions generated by special nets in affinely connected spaces, Serdica Math. J., 28(2002), 1001-1012.

- [53] Zlatanov G., Tsareva B., Triad compositions in affinely connected spaces A_{3n} , Plovdiv Univ. Sci. Works, 36(3), 2009, 141-156.
- [54] Zlatanov G., Tsareva B., Conjugate compositions in even-dimensional affinely connected spaces without a torsion, REMIA 2010, Anniv. Intern. Conf.10-12.12.2010, Plovdiv, Bulgaria, 225-231.
- [55] Zlatanov G., Special compositions in affinely connected spaces without a torsion, Serdica Math. J., 37(2011), 211-220.
- [56] Musa Ajeti, Chebyshevian compositions in four dimensional space with an affine connectedness without a torsion, Plovdiv Univ.Bulgaria, Sci. Works, Math., 38(3), 2011, 5-15.
- [57] Musa Ajeti, Triad geodesic compositions in four dimensional space with an affine connectedness without a torsion, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, ISSN:1821-1291, URL, v.4, № 1,(2012), 72-82.
- [58] M. Ajeti, M. Teofilova, G. Zlatanov, Triads of compositions in an even dimensional space with a symmetric affine connection, Tensor, 73(3) (2011), 171-187.
- [59] M. Ajeti and M. Teofilova, On triads of compositions in an even dimensional space with a symmetric affine connection, Advances in Mathematics: Scientific Journal 1 (2012), no.1, 45-50, ISSN 1857-8365, UDC: 514.754 (Proceedings of the 8-th International Symposium on Geometric Function Theory and Applications (GFTA), August 27-31, 2012, Ohrid, R. Macedonia).
- [60] Musa Ajeti, Ivan Badev, Triad compositions in four dimensional affine space without a torsion, Journal of Technical University-Sofia, Plovdiv branch, Bulgaria, Fundamental Sciences and Applications, v.18, 2012, 91-96.