Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“ Факултет по математика и информатика

Катедра „Математически анализ“

Мира Лъчезарова Спасова

Аналитични методи за решаване на някои класове размити интегро-диференциални уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертационен труд

за присъждане на образователната и научна степен

„ДОКТОР“

област на висше образование:

4. Природни науки, математика и информатика;

професионално направление: 4.5. Математика;

докторска програма: Математически анализ

Научен ръководител:

проф. д-р Атанаска Тенчева Георгиева

Пловдив – 2024

Пловдивски университет "Паисий Хилендарски" Факултет по математика и информатика

Катедра "Математически анализ"

Мира Лъчезарова Спасова

Аналитични методи за решаване на някои класове размити интегро-диференциални уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертационен труд
за присъждане на образователната и научна степен
"ДОКТОР"
област на висше образование:
4. Природни науки, математика и информатика;
професионално направление: 4.5. Математика;
докторска програма: Математически анализ

Научен ръководител:
проф. д-р Атанаска Тенчева Георгиева

Пловдив – 2024

Дисертационния труд е обсъден и насрочен за защита на разширен катедрен съвет на катедра „Математически анализ“ при Факултет по математика и информатика на Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“, проведен на 12.02.2024г.

Дисертационния труд „Аналитични методи за решаване на някои класове размити интегро-диференциални уравнения“ се състои от увод, четири глави, заключение и библиография. Библиографията съдържа 103 заглавия. Общият обем на дисертационния труд е 107 страници. Списъкът на авторските публикации включва 5 заглавия.

Материалите по защитата са на разположение за интересуващите се в секретариата на ФМИ, Нова сграда на ПУ "Паисий Хилендарски бул. "България"№ 236, каб. 330, всеки работен ден от 8:30 до 17:00 часа.

Номерацията на теоремите, лемите, забележките и дефинициите в автореферата съвпада с тяхната номерация в дисертационния труд.

Съдържание

Увод

Актуалност на дисертационния труд

Един от основните инструменти на приложната математика е интегралното уравнение. Много клонове на науката и инженерството естествено съдържат интегрални уравнения. Функционални уравнения, като частични диференциални уравнения, интегрални и интегро-диференциални уравнения, стохастични уравнения и други често се създават, когато проблемите от реалния свят се моделират математически. Интегро-диференциалните уравнения са общият компонент на математическите описания на физичните явления. Те могат да бъдат намерени в динамиката на течностите, в биологичните модели и химическата кинетика. Интегро-диференциалните уравнения възникват в многобройни физически процеси, включително образуването на стъкло [31], нанохидродинамика [20], капкова кондензация [28], вълни на вятъра в пустинята [7] и биологичен модел [25].

В някои случаи информацията за възникналите проблеми от реалния живот е изпълнена с несигурност. Тази несигурност е резултат от няколко фактора, като грешки в измерването, недостатъчни данни или ако са въведени ограничителни условия. Така че е необходимо да имаме математически инструменти, за да разберем тази несигурност. Следователно, формирането на удобен и приложим алгоритъм е важно за постигане на точна математическа структура, която да ги обработва и решава.

Размитите диференциални и интегрални уравнения са мощен инструмент за моделиране на динамични системи, описващи процеси и явления от математическата физика, размитите финансови и икономически системи и размитата финансова математика. Те се характеризират с данни, които не са точно определени [34, 11, 27, 32, 35] има загуба на част от тях или се получават от повече от един източник.

През последните години много учени са допринесли за изследване и изучаване на решенията на размитите интегро-диференциални уравнения, използвайки различни числени и аналитични техники. Тези техники включват хомотопно смутен метод [1, 24], метод на Picard [5, 26] декомпозиционен метод на Laplace и Adomian [2, 9, 16], декомпозиционен метод на Sumudu [3, 21], размит диференциално - трансформиращ метод [6, 23], обобщен линеен метод [22] и други. Съществуването и единствеността на решението на размитити интегро-диференциални уравнения са изследвани в [12, 19, 26, 30].

Размитата теория на частните диференциални и интегро-диференциалнит уравнения е нов и важен клон на размитата математика. Той има широки приложения поради факта, че много практически проблеми в индустриалното инженерство, компютърните науки, физиката, изкуствения интелект и изследването на операциите могат да бъдат преобразувани в не точни стойности от частен ред. Темата за размитите частни интегро-диференциални уравнения привлича вниманието на изследователите напоследък, защото се счита за мощен инструмент, чрез който да се представят неясни параметри и да се борави с техните динамични системи в естествени размити среди. Наистина, той има голямо значение в теорията на размития анализ и неговите приложения в моделите на размития контрол, изкуствения интелект, квантовата оптика, теорията на измерването на атмосферата и т.н. [4, 8, 10, 12].

Цели и задачи на дисертационния труд

Основните обекти на изследване в дисертационния труд са нелинейно размито интегро-диференциално уравнение на Volterra-Fredholm, линейно размито интегро-диференциално уравнение на Volterra и линейно частно размито интегро-диференциално уравнение на Volterra.

Основните цели на дисертационния труд са следните:

1. Да се разшири математическият апарат на нелинейните размити интегро-диференциални уравнения, необходим за изследване на съществуването и единствеността на решението им.

2. Да се конструират размити декомпозационни методи за намиране на приближените решения на нелинейното размито интегро-диференциално уравнение на Volterra-Fredholm.

3. Да се дефинират и изследват размити интегрални трансформации, необходими за намирането на точните решения на линейно размито интегро-диференциално уравнение на Volterra и линейно частно размито интегро-диференциално уравнение на Volterra.

Целите на настоящия дисертационен труд са постигнати чрез решаване на следните задачи:

а) Намиране на достатъчни условия за съществуване и единственост на решението на нелинейно размито интегро-диференциално уравнение на Volterra-Fredholm.

б) Конструиране на размит вариант на метода на разлагане на Adomian за намиране на приближеното решение на нелинейно размито интегро-диференциално уравнение на Volterra-Fredholm. Намиране на достатъчни условия за сходимостта на метода и получаване оценка на грешката.

в) Дефиниране и изследване на размит вариант на трансформацията на Sumudu. Използването й за конструиране на размит декомпозиционен метод за намиране на приближеното решение на нелинейното размито интегро-диференциално уравнение на Volterra-Fredholm.

г) Дефиниране и изследване на размитата трансформация на Natural. Прилагането й за намиране на точното решение на линейно размито интегро-диференциално уравнение на Volterra, с размита конволюция.

д) Използване на размитата трансформация на Sumudu за намиране на точното решение на линейно частното размито интегро-диференциално уравнение на Volterra.

е) Дефиниране и изследване на размитата двумерна трансформация на Natural. Прилагането й за намиране на точното решение на линейно частното размито интегро-диференциално уравнение на Volterra.

Структура на дисертационния труд

Настоящият дисертационен труд е посветен на намирането на приближени и точни решения на някои класове размити интегро-диференциални уравнения, като са използвани аналитични методи.

Съдържа 107 страници и се състои от увод, четири глави, заключение и библиография. Съдържа 9 графики и 1 таблици.

Кратък обзор на дисертационния труд

Глава 1. Кратък обзор

Глава първа е обзорна и в нея са дадени основни дефиниции и теореми, които се използват в дисертационния труд. Тя се състои от 5 параграфа.

В **параграф § 1.1** са дадени същността на размитите множества, дефиниция за тях и операциите върху размити множества.

В **параграф § 1.2** са дадени дефиниция за размито число, както и някои негови представяния, аритметиката на размитите числа и разликата на Hukuhara.

В **параграф § 1.3** са дадени дефиниции и основни свойства за размитите функции на една променлива, размита производна и интеграл.

В **параграф § 1.4** са дадени дефиниции и основни свойства за размитите функции на две променливи, размита частна производна и размит интеграл.

В **параграф § 1.5** е разгледан популационният модел на Volterra, който описва растежа на популацията в рамките на затворена система.

Глава 2. Декомпозиционни методи за решаване на НРИДУВФ

Втора глава се състои от 3 параграфа, в които има отделни секции, за по-голяма яснота на изследването.

В **Параграф § 2.1** е разгледан метода на разлагане на Adomian за нелинейното размито интегро-диференциално уравнение на Volterra-Fredholm (НРИДУВФ)

В **Подпараграф § 2.1.1** е направена постановка на задачата за НРИДУВФ.

$$\begin{gathered}\sum_{j=0}^{k} p_j \odot u^{(j)}(x) = g(x) \oplus (FR)\int_a^x k_1(x,s) \odot G_1(u(s))ds \oplus \\ \oplus (FR)\int_a^b k_2(x,s) \odot G_2(u(s))ds,\end{gathered} \tag{1}$$

с начални условия

$$u^{(j)}(a) = b_j, \quad j = 0, 1, 2, ..., k-1, \tag{2}$$

където $p_j : [a,b] \to \mathbb{R}$, $k_1,\ k_2 : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$, $G_1,\ G_2 : E^1 \to E^1$ са непрекъснати функции в E^1 и $g,\ u : [a,b] \to E^1$ и са непрекъснати размити числени стойности на функциите $b_j \in E^1,\ j = 0, 1, ..., k-1$ and $a, b \in \mathbb{R}$.

В **Подпараграф § 2.1.2** е даден параметричният вид на уравнение 1.

$$\begin{aligned}\underline{u}(x,r) &= \tfrac{1}{p_k} L^{-1}(\underline{g}(x,r)) + \tfrac{1}{p_k k!}\int_a^x (x-s)^k k_1(x,s) G_1(\underline{u}(s,r))ds + \\ &+ \tfrac{1}{p_k}\int_a^b L^{-1}(f_2(x)) h_2(s) G_2(\underline{u}(s,r)))ds - \\ &- \tfrac{1}{p_k (k-1)!}\sum_{j=0}^{k-1} p_j \int_a^x (x-s)^{(k-1)} \underline{u}^{(j)}(s,r)ds + \\ &+ \sum_{j=0}^{k-1} \tfrac{1}{j!}(x-a)^j \underline{b}_j(r),\end{aligned} \tag{3}$$

Аналогично получаваме

$$\begin{aligned}\overline{u}(x,r) &= \tfrac{1}{p_k} L^{-1}(\underline{g}(x,r)) + \tfrac{1}{p_k k!}\int_a^x (x-s)^k k_1(x,s) G_1(\underline{u}(s,r))ds + \\ &+ \tfrac{1}{p_k}\int_a^b L^{-1}(f_2(x)) h_2(s) G_2(\underline{u}(s,r)))ds - \\ &- \tfrac{1}{p_k (k-1)!}\sum_{j=0}^{k-1} p_j \int_a^x (x-s)^{(k-1)} \underline{u}^{(j)}(s,r)ds + \\ &+ \sum_{j=0}^{k-1} \tfrac{1}{j!}(x-a)^j \underline{b}_j(r),\end{aligned} \tag{4}$$

В **Подпараграф § 2.1.3** е конструиран размит вариант на метода на разлагане на Adomian и е приложен за намиране на приближеното решение на изследваното уравнение.

Нека неизвестните функции $(\underline{u}(x,r), \overline{u}(x,r))$ търсим от вида

$$\underline{u}(x,r) = \sum_{i=0}^{\infty} \underline{u_i}(x,r), \quad \overline{u}(x,r) = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{u_i}(x,r) \tag{5}$$

Означаваме
$$D^j(u(x)) = \frac{d^j u(x)}{dx^j}, \quad j = 0, 1, ..., k-1.$$

Нелинейните оператори $G_1(\underline{u})$, $G_1(\overline{u})$, $G_2(\underline{u})$, $G_2(\overline{u})$, $D^j(\underline{u})$ и $D^j(\overline{u})$ са безкрайни редове от полиноми, зададени чрез равенствата

$$\begin{aligned}
G_1(\underline{u}) &= \sum_{i=0}^{\infty} \underline{A}_i(\underline{u}_0, \underline{u}_1, ..., \underline{u}_i), \quad G_1(\overline{u}) = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{A}_i(\overline{u}_0, \overline{u}_1, ..., \overline{u}_i), \\
G_2(\underline{u}) &= \sum_{i=0}^{\infty} \underline{B}_i(\underline{u}_0, \underline{u}_1, ..., \underline{u}_i), \quad G_2(\overline{u}) = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{B}_i(\overline{u}_0, \overline{u}_1, ..., \overline{u}_i), \\
D^j(\underline{u}) &= \sum_{i=0}^{\infty} \underline{L}_{i_j}(\underline{u}_0, \underline{u}_1, ..., \underline{u}_i), \quad D^j(\overline{u}) = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{L}_{i_j}(\overline{u}_0, \overline{u}_1, ..., \overline{u}_i),
\end{aligned} \tag{6}$$

където $A_i = (\underline{A}_i, \overline{A}_i)$, $B_i = (\underline{B}_i, \overline{B}_i)$, $L_{i_j} = (\underline{L}_{i_j}, \overline{L}_{i_j})$ при $i \geq 0$ са така наречените полиноми на Adomian дефинирани чрез

$$\begin{aligned}
\underline{A}_i(\underline{u}_0, \underline{u}_1, ..., \underline{u}_i) &= \tfrac{1}{i!} \tfrac{d^i}{d\lambda^i} \left[G_1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \underline{u}_n \right) \right]_{\lambda=0}, \\
\overline{A}_i(\overline{u}_0, \overline{u}_1, ..., \overline{u}_i) &= \tfrac{1}{i!} \tfrac{d^i}{d\lambda^i} \left[G_1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \overline{u}_n \right) \right]_{\lambda=0}, \\
\underline{B}_i(\underline{u}_0, \underline{u}_1, ..., \underline{u}_i) &= \tfrac{1}{i!} \tfrac{d^i}{d\lambda^i} \left[G_2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \underline{u}_n \right) \right]_{\lambda=0}, \\
\overline{B}_i(\overline{u}_0, \overline{u}_1, ..., \overline{u}_i) &= \tfrac{1}{i!} \tfrac{d^i}{d\lambda^i} \left[G_2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \overline{u}_n \right) \right]_{\lambda=0}, \\
\underline{L}_{ij}(\underline{u}_0, \underline{u}_1, ..., \underline{u}_i) &= \tfrac{1}{i!} \tfrac{d^i}{d\lambda^i} \left[D^j \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \underline{u}_n \right) \right]_{\lambda=0}, \\
\overline{L}_{ij}(\overline{u}_0, \overline{u}_1, ..., \overline{u}_i) &= \tfrac{1}{i!} \tfrac{d^i}{d\lambda^i} \left[D^j \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \overline{u}_n \right) \right]_{\lambda=0}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Модифицираният метод на разлагане на Adomian се основава на предположението, че функциите $\underline{G}(x,r)$ и $\overline{G}(x,r)$ може да се разделят на две части, а именно

$$\underline{G}(x,r) = \underline{G}_1(x,r) + \underline{G}_2(x,r),$$

$$\overline{G}(x,r) = \overline{G}_1(x,r) + \overline{G}_2(x,r),$$

където

$$\underline{G}_1(x,r) = \underline{b}_0(r), \;\; \underline{G}_2(x,r) = \frac{1}{p_k}L^{-1}(\underline{g}(x,r)) + \sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{j!}(x-a)^j\underline{b}_j(r),$$

$$\overline{G}_1(x,r) = \overline{b}_0(r), \;\; \overline{G}_2(x,r) = \frac{1}{p_k}L^{-1}(\underline{g}(x,r)) + \sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{j!}(x-a)^j\overline{b}_j(r).$$

Като резултат получаваме рекурентната формула

$$\begin{aligned}
\underline{u}_0(x,r) \quad &= \underline{b}_0(r),\\
\underline{u}_1(x,r) \quad &= \tfrac{1}{p_k}L^{-1}(\underline{g}(x,r)) + \sum_{j=1}^{k-1}\tfrac{1}{j!}(x-a)^j\underline{b}_j(r) +\\
&+ \tfrac{1}{p_k k!}\int_a^x (x-s)^k k_1(x,s)\underline{A}_0 ds + \tfrac{1}{p_k}\int_a^b L^{-1}(f_2(x))h_2(s)\underline{B}_0 ds -\\
&- \tfrac{1}{p_k(k-1)!}\sum_{j=0}^{k-1} p_j \int_a^x (x-s)^{(k-1)}\underline{L}_{0_j} ds\\
&\dots\\
\underline{u}_{i+1}(x,r) \quad &= \tfrac{1}{p_k k!}\int_a^x (x-s)^k k_1(x,s)\underline{A}_i ds + \tfrac{1}{p_k}\int_a^b L^{-1}(f_2(x))h_2(s)\underline{B}_i ds -\\
&- \tfrac{1}{p_k(k-1)!}\sum_{j=0}^{k-1} p_j \int_a^x (x-s)^{(k-1)}\underline{L}_{i_j} ds
\end{aligned} \tag{8}$$

В **Подпараграф § 2.1.4** са намерени достатъчни условия за съществуване и единственост на решението на уравнението.

Нека са изпълнени следните условия:
(i) $g \in C([a,b], E^1)$, $k_i \in C([a,b]\times[a,b], \mathbb{R}_+)$, $i = 1,2$;
(ii) съществува $L^i \geq 0$ и $L_j \geq 0$ такова, че $D(G_i(u), G_i(v)) \leq L^i D(u,v)$ и $D(D^j(u), D^j(v)) \leq L_j D(u,v)$ за всяко $u, v \in E^1$, $i = 1,2$, $j = 0,1,...,k-1$
(iii) $\alpha = (L^1M_1 + L^2M_2 + kLM)(b-a) < 1$, където

$$\left|\frac{k_1(x,s)(x-s)^k}{k!p_k}\right| \leq M_1, \;\; \left|\frac{1}{p_k}L^{-1}(f_2(x))h_2(s)\right| \leq M_2, \;\; \left|\frac{(x-s)^{(k-1)}p_j}{p_k(k-1)!}\right| \leq M_j,$$

$j = 0, 1, ..., k-1$, $a \leq s \leq x \leq b$, $M = max|M_j|$, $L = max|L_j|$.

Теорема 2.1.1. *Нека са изпълнени условията $(i)-(iii)$. Тогава интегралните уравнения (3) и (4) имат единствено решение.*

В **Подпараграф § 2.1.5** е доказана сходимостта на метода и е получена оценката на грешката между точното и приближеното решение на изследваното уравнение

Теорема 2.1.2. *Безкрайния ред $\underline{u}(x,r) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \underline{u}_i(x,r)$ получен от (3) е сходящ, ако $0 < \alpha < 1$ и $|\underline{u}_1(x,r)| < \infty$.*

Теорема 2.1.3. *Нека са изпълнени условията $(i)-(iii)$. Тогава максималната абсолютна грешка на решението (5) на интегралните уравнения (3) и (4) се дава с неравенствата*

$$\max_{x \in J} |\underline{u}(x,r) - \sum_{i=0}^{m} \underline{u}_i(x,r)| \leq \frac{\alpha^m b}{1-\alpha}(M_1\underline{\phi_1} + M_2\underline{\phi_2} + M\underline{\phi_3}), \qquad (9)$$

$$\max_{x \in J} |\overline{u}(x,r) - \sum_{i=0}^{m} \overline{u}_i(x,r)| \leq \frac{\alpha^m b}{1-\alpha}(M_1\overline{\phi_1} + M_2\overline{\phi_2} + M\overline{\phi_3}), \qquad (10)$$

В **Параграф § 2.2** е дефинирана размитата трансформация на Sumudu. Дадени са някои нейни свойства и е приложена за размити производни.

В **Подпараграф § 2.2.1** е дадена дефиниция за размита трансформация на Sumudu и нейната обратна.

Дефиниция 2.2.1. Нека $w : \mathbb{R}_+ \to E^1$ е непрекъсната размита функция и функцията $e^{-x} \odot w(ux)$ е интегруема в несобствен смисъл в $\mathbb{R}_+$. Тогава

$$(FR)\int_0^{\infty} e^{-x} \odot w(ux)dx,$$

се нарича размита трансформация на Sumudu и се означава с

$$W(u) = S[w(x)] = (FR)\int_0^{\infty} e^{-x} \odot w(ux)dx, \qquad (11)$$

за $u \in [-\sigma_1, \sigma_2]$, където променливата u се съпоставя на променливата x и $\sigma_1,\ \sigma_2 > 0$.

Дефиниция 2.2.3. Размитата обратна трансформация на Sumudu се дава с формулата

$$S^{-1}\left[W(u)\right] = w(x) = \left(s^{-1}[\underline{W}(u,r)], s^{-1}[\overline{W}(u,r)]\right), \tag{12}$$

където

$$s^{-1}[\underline{W}(u,r)] = \frac{1}{2\pi\imath}\int\limits_{\gamma-\imath\infty}^{\gamma+\imath\infty} e^{\frac{x}{u}}\underline{W}(u,r)du$$

$$s^{-1}[\overline{W}(u,r)] = \frac{1}{2\pi\imath}\int\limits_{\gamma-\imath\infty}^{\gamma+\imath\infty} e^{\frac{x}{u}}\overline{W}(u,r)du$$

За всяко $r \in [0,1]$ функциите $\underline{W}(u,r)$ и $\overline{W}(u,r)$ са аналитични функции за всяко $Reu \geq \gamma$, където γ е реална константа, която е избрана по подходящ начин.

В **Подпараграф § 2.2.2** са дадени свойства за размита трансформация на Sumudu.

Теорема 2.2.2. *Нека $c_1,\ c_2$ са произволни константи. Тогава*

$$\begin{aligned} S[c_1 \odot f(x) \oplus c_2 \odot g(x)] &= c_1 \odot S[f(x)] \oplus c_2 \odot S[g(x)] = \\ &= c_1 \odot F(u) \oplus c_2 \odot G(u). \end{aligned}$$

Теорема 2.2.3. *Нека a и b са произволни константи. Тогава*

$$S[e^{ax} \odot f(x)] = \frac{1}{1-au}F\left(\frac{u}{1-au}\right).$$

В **Подпараграф § 2.2.3** е представена размита конволюция.

Дефиниция 2.2.4. Нека $k,\ w : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ са размити интегруеми функции. Тогава размитата конволюция на $k(x)$ и $w(x)$ се дава с равенството

$$(k * w)(x) = (FR)\int\limits_0^x k(x-s) \odot w(s)ds. \tag{13}$$

Символът $*$ означава размита конволюция.

Теорема 2.2.6. *Нека $k,\ w : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ са размити интегруеми функции, за които съществува размитата трансформация на Sumudu, т. е. $s[k(x)] = K(u)$ и $S[w(x)] = W(u)$. Тогава*

$$S[(k * w)(x)] = us[k(x)] \odot S[w(x)]. \tag{14}$$

В **Подпараграф § 2.2.4** са дадени основни свойства на размитата трансформация на Sumudu, свързани с размити производни.

Теорема 2.2.7. *Нека $w : \mathbb{R} \to E^1$ е непрекъсната размита функция. Функциите $e^{-x} \odot w(ux)$, $e^{-x} \odot w^{(n)}(ux)$ са интегруеми в несобствен смисъл в $\mathbb{R}_+$. Тогава*

$$S\left[w^{(n)}(x)\right] = \frac{d^n}{dx^n}[S[w(x)]], \tag{15}$$

където $n \in \mathbb{N}$.

В **Параграф § 2.3** е конструиран размит декомпозиционен метода на Sumudu, който е комбинация на размитата трансформация на Sumudu и размитият метод на разлагане на Adomian.

В **Подпараграф § 2.3.1** е направена постановка на задачата за РДМС.

$$\begin{gathered} w^{(n)}(x) = g(x) \oplus (FR)\int\limits_0^x k_1(x-s) \odot G_1(w(s))ds \oplus \\ \oplus (FR)\int\limits_0^b k_2(x-s) \odot G_2(w(s))ds, \end{gathered} \tag{16}$$

с начални условия

$$w^{(i)}(0) = b_i, \quad i = 0, 1, 2, ..., n-1, \tag{17}$$

където $k_1,\ k_2 : [0, b] \to \mathbb{R}$, $G_1,\ G_2 : E^1 \to E^1$ са непрекъснати функции в E^1 и $g,\ w : [a, b] \to E^1$ са непрекъснати размити функции и $b_i \in E^1$, $i = 0, 1, ...n-1$, $b \in \mathbb{R}$.

В **Подпараграф § 2.3.2** е приложена размитата трансформация на Sumudu за уравнение (16).

$$\underline{w}_0(x,r) = \sum_{j=1}^{n} s^{-1}\left[v^{(n-j)}\underline{b}_{(n-j)}(r)\right] + \underline{g}(x,r),$$
$$\underline{w}_{(i+1)}(x,r) = s^{-1}\left[v^{(n+1)}s[k_1(x)]s[\underline{A}_i]\right] + s^{-1}\left[v^{(n+1)}s[k_2(x)]s[\underline{B}_i]\right], \tag{18}$$
$$\overline{w}_0(x,r) = \sum_{j=1}^{n} s^{-1}\left[v^{(n-j)}\overline{b}_{(n-j)}(r)\right] + \overline{g}(x,r),$$
$$\overline{w}_{(i+1)}(x,r) = s^{-1}\left[v^{(n+1)}s[k_1(x)]s[\overline{A}_i]\right] + s^{-1}\left[v^{(n+1)}s[k_2(x)]s[\overline{B}_i]\right]. \tag{19}$$

Глава 3. Размита трансформация на Natural за решаване на ЛРИДУВ

Трета глава се състои от 3 параграфа, в които има отделни секции, за по-голяма яснота на изследването.

В **Параграф § 3.1** е направена постановка на задачата за линейното размито интегро-диференциално уравнение на Volterra(ЛРИДУВ)

$$\int_0^x k_1(x-s)\odot w(s))ds \oplus \int_0^x k_2(x-s)\odot w^{(n)}(s))ds = g(x), \quad k_2(x-s)\neq 0 \tag{20}$$

с начални условия

$$w^{(i)}(0) = b_i, \quad i = 0,1,2,...,n-1, \tag{21}$$

където $k_1,\ k_2 : [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{R}$, са непрекъснати функции в E^1, $g,\ u : [a,b] \to E^1$ са непрекъснати размити функции и $b_i,\ (i = 0,1,...,n-1)$ са константи.

В **Параграф § 3.2** е получена трансформацията на Natural от интеграла на Fourier и е свързана с трансформациите на Laplace и Sumudu.

В **Подпараграф § 3.2.1** е дадена дефиниция за размитата трансформация на Natural и връзката между тях.

Дефиниция 3.2.3. Нека $w : \mathbb{R}_+ \to E^1$ е непрекъсната размита функция и размитата функция

$$e^{-sx} \odot w(ux)$$

е интегруема в несобствен смисъл в $\mathbb{R}_+$. Тогава

$$(FR)\int_0^\infty e^{-sx} \odot w(ux)dx$$

се нарича размита трансформация на Natural и се означава с

$$W[s;u)] = N[w(x)] = (FR)\int_0^\infty e^{-sx} \odot w(ux)dx, \tag{22}$$

където s и u са променливи на трансформацията.

В **Подпараграф § 3.2.2** са дадени свойства на размитата трансформация на Natural (РТН).

Теорема 3.2.4. *Нека c_1, c_2 са произволни константи. Тогава*

$$\begin{aligned} N[c_1 \odot f(x) \oplus c_2 \odot g(x)] &= c_1 \odot N[f(x)] \oplus c_2 \odot N[g(x)] = \\ &= c_1 \odot F[s;u] \oplus c_2 \odot G[s;u)]. \end{aligned}$$

Теорема 3.2.5. *Нека $f : \mathbb{R}_+ \to E^1$ е размита функция, за която $N[f(x)] = F[s;u]$. Тогава*

$$N[f(ax)] = \frac{1}{a}F[\frac{s}{a};u)],$$

където a е произволна константа.

Теорема 3.2.6. *Нека a и b са произволни константи. Тогава*

$$N[e^{-ax} \odot f(x)] = F[s+a;u].$$

В **Подпараграф § 3.2.3** е дадена размитата конволюция.

Дефиниция 3.2.6. Нека $k,\ \ w : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ са размити интегруеми функции. Тогава размитата конволюция на $k(x)$ и $w(x)$ се дава с равенството

$$(k * w)(x) = (FR) \int_0^x k(x-\tau) \odot w(\tau) d\tau,$$

където символът $*$ означава размитата конволюция.

Теорема 3.2.9. *Нека $k, \ w : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ са размити функции, за които съществува размитата трансформация на Natural, т. е. $n[k(x)] = K[s;u]$ и $N[w(x)] = W[s;u]$. Тогава*

$$N[(k * w)(x,t)] = un[k(x)] \odot N[w(x)]. \tag{23}$$

В **Подпараграф § 3.2.4** са получени нови резултати, свързани с РТН за размити производни от m-ти ред.

Теорема 3.2.10. *Нека $w : \mathbb{R}_+ \to E^1$ е размита функция. За всяко $x > 0$ и $m \in \mathbb{N}$ съществува непрекъсната gH-производна от $(m-1)-$ви ред и съществува $\frac{d^m w(x)}{dx^m}$. Функциите*

$$e^{-sx} \odot w(ux), \ \ e^{-sx} \odot \frac{d^m w(ux)}{dx^m}$$

са интегруеми в несобствен смисъл в $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Тогава

$$N\left[\frac{d^m w(x)}{dx^m}\right] = \frac{d^m}{dx^m} N[w(x)]. \tag{24}$$

В **Параграф § 3.3** е приложена размитата трансформация на Natural за размитото линейното интегро-диференциалното уравнение на Volterra.

$$N\left[(FR)\int_0^x k_1(x-\tau) \odot w(\tau) d\tau\right] \oplus N\left[(FR)\int_0^x k_2(x-\tau) \odot w^{(m)}(\tau) d\tau\right] = \\ = N[g(x)]. \tag{25}$$

използвайки размитата конволюция (23) получаваме

$$un[k_1(x)] \odot N[w(x)] \oplus un[k_2(x)] \odot N[w^{(m)}(x)] = N[g(x)]. \tag{26}$$

Прилагаме Теорема 3.2.5 и от началните условия (21), получаваме

$$un[k_1(x)]n[\underline{w}(x,r)]+un[k_2(x)]\left[\frac{s^m}{u^m}n[\overline{w}(x,r)]-\sum_{q=1}^{m}\frac{s^{(q-1)}}{u^q}\overline{b}_{(m-q)}(r)\right]=n[\underline{g}(x,r)]$$

$$un[k_1(x)]n[\overline{w}(x,r)]+un[k_2(x)]\left[\frac{s^m}{u^m}n[\overline{w}(x,r)]-\sum_{q=1}^{m}\frac{s^{(q-1)}}{u^q}\underline{b}_{(m-q)}(r)\right]=n[\underline{g}(x,r)].$$

Следователно

$$\begin{aligned} &u^m n[k_1(x)]n[\underline{w}(x,r)]+s^m n[k_2(x)]n[\overline{w}(x,r)]= \\ &=u^{(m-1)}n[\underline{g}(x,r)]+n[k_2(x)]\sum_{q=1}^{m}s^{(q-1)}u^{(m-q-1)}\overline{b}_{(m-q)}(r), \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} &u^m n[k_1(x)]n[\overline{w}(x,r)]+s^m n[k_2(x)]n[\underline{w}(x,r)]= \\ &=u^{m-1}n[\overline{g}(x,r)]+n[k_2(x)]\sum_{q=1}^{m}s^{(q-1)}u^{(m-q-1)}\underline{b}_{(m-q)}(r), \end{aligned} \tag{28}$$

Глава 4. Размити трансформации за решаване на ЛЧРИДУВ

Четвърта глава се състои от 3 параграфа в които има отделни секции, за по-голяма яснота на изследването.

В **Параграф § 4.1** е направена постановка на задачата за линейното частно размито интегро-диференциално уравнение на Volterra (ЛЧРУДУВ).

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m}a_i\odot\tfrac{\partial^i w(x,t)}{\partial x^i}\oplus\sum_{j=1}^{n}b_j\odot\tfrac{\partial^j w(x,t)}{\partial t^j}\oplus c\odot w(x,t)= \\ &=g(x,t)\oplus(FR)\int_0^t k(t-s)\odot w(x,s)ds, \end{aligned} \tag{29}$$

с начални условия

$$\frac{\partial^i w(x,0)}{\partial t^j}=\psi_j(x),\quad i=0,1,...,n-1, \tag{30}$$

в гранични условия

$$\frac{\partial^i w(0,t)}{\partial x^i} = \varphi_i(t), \ \ i = 0, 1, ..., m-1, \tag{31}$$

където $k : [0,d] \to \mathbf{R}$ е непрекъсната функция, $g, \ w : [0,b]\times[0,d] \to E^1$, $\varphi_i : [0,d] \to E^1$, $\psi_j : [0,b] \to E^1$ са непрекъснати размити функции и a_i, $i = 1, 2, ...m$, b_j, $j = 1, 2, ...n$, c, са константи.

В **Параграф § 4.2** е използвана размитата трансформация на Sumudu (РТС) за решаването на размити частни интегро-диференциални уравнения.

В **Подпараграф § 4.2.1** са дадени дефиниция за РТС за функция на две променливи и нейната обратна. Освен това са доказани, някои нейни основни свойства.

Дефиниция 4.2.1. Нека $w : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to E^1$ е непрекъсната размита функция и функцията $e^{-t} \odot w(x, vt)$ е интегруема относно t в $\mathbb{R}_+$. Тогава

$$(FR) \int_0^\infty e^{-t} \odot w(x, vt)dt,$$

се нарича размита трансформация на Sumudu за функция на две променливи и се означава с

$$W(x,v) = S_t[w(x,t)] = (FR) \int_0^\infty e^{-t} \odot w(x, vt)dt, \tag{32}$$

за $v \in [-\sigma_1, \sigma_2]$, където променливата v се съпоставя на променливата t в размитата функция и $\sigma_1, \ \sigma_2 > 0$.

Дефиниция 4.2.3. Размитата обратна трансформация на Sumudu за функция на две променливи се дава с формулата

$$S_t^{-1}[W(x,v)] = w(x,t) = \left(s_t^{-1}[\underline{W}(x,v,r)], s_t^{-1}[\overline{W}(x,v,r)]\right), \tag{33}$$

където

$$s_t^{-1}[\underline{W}(x,v,r)] = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{\delta-\imath\infty}^{\delta+\imath\infty} e^{\frac{t}{v}} \underline{W}(x,v,r)dv$$

$$s_t^{-1}[\overline{W}(x,v,r)] = \frac{1}{2\pi\imath}\int\limits_{\delta-\imath\infty}^{\delta+\imath\infty} e^{\frac{t}{v}}\overline{W}(x,v,r)dv$$

За всяко $r \in [0,1]$ функциите $\underline{W}(x,v,r)$ и $\overline{W}(x,v,r)$ са аналитични функции за всяко $Rev \geq \delta$, където δ е реална константа, която е избрана по подходящ начин.

Теорема 4.2.2. *Нека* c_1, c_2 *са произволни константи. Тогава*

$$\begin{aligned} S_t[c_1 \odot f(x,t) \oplus c_2 \odot g(x,t)] &= c_1 \odot S_t[f(x,t)] \oplus c_2 \odot S_t[g(x,t)] = \\ &= c_1 \odot F(x,v) \oplus c_2 \odot G(x,v). \end{aligned}$$

Теорема 4.2.3. *Нека* a *е произволна константа. Тогава*

$$S_t[e^{bt} \odot f(x,t)] = \frac{1}{1-bv}F\left(x, \frac{v}{1-bv}\right).$$

В **Подпараграф § 4.2.2** са дадени дефиниция и теорема за размита конволюция.

Дефиниция 4.2.4. Нека $k(t)$ и $w(x,t)$ са размити интегруеми функции. Тогава размитата конволюция на $k(t)$ и $w(x,t)$ относно t се дава с равенството

$$(k * w)(x,t) = (FR)\int\limits_0^t k(t-s) \odot w(x,s)ds. \tag{34}$$

където символа $*$ означава размитата конволюция относно t.

Теорема 4.2.6. *Нека* $k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *и* $w : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *са размити функции, за които съществува размитата двумерна трансформация наSumudu , т. е.* $s_t[k(t)] = K(v)$ *и* $S_t[w(x,t)] = W(x,v)$. *Тогава*

$$S_t[(k * w)(x,t)] = vs_t[k(t)] \odot S_t[w(x,t)]. \tag{35}$$

В **Подпараграф § 4.2.3** са получени основните свойства на РТС за функция на две променливи, свързани с частни размити производни.

Теорема 4.2.7. *Нека* $w : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to E^1$ *е непрекъсната функция. Функциите*

$$e^{-t} \odot w(x, vt), \quad e^{-t} \odot \frac{\partial^n w(x, vt)}{\partial t^n}$$

са интегруеми относно t *в* $\mathbb{R}_+$. *Тогава*

$$S_t \left[\frac{\partial^n w(x,t)}{\partial t^n} \right] = \frac{\partial^n}{\partial t^n} S_t[w(x,t)], \tag{36}$$

където $n \in \mathbb{N}$.

В **Подпараграф § 4.2.3** се използва метода на РТС за изследваното уравнение, което се свежда до размито обикновено диференциално уравнение.

Прилагаме РТС относно променливата t и получаваме

$$S \left[\sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial^i w(x,t)}{\partial x^i} \right] \oplus S \left[\sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial^j w(x,t)}{\partial t^j} \right] \oplus S[c \odot w(x,t)] =$$
$$= S[g(x,t)] \oplus S \left[(FR) \int_0^t k(t-s) \odot w(x,s) ds \right],$$

Използваме началните условия (30) и получаваме система обикновени диференциални уравнения от m-ти ред .

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \frac{d^i \underline{W}(x,v,r)}{dx^i} + \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{v^j} + c - vs[k(t)] \right) \underline{W}(x,v,r)] =$$
$$= s[\underline{g}(x,t,r)] + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{j} \frac{b_j}{v^k} \, \underline{\psi}_{j-k}(x,r),$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \frac{d^i \overline{W}(x,v,r)}{dx^i} + \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{v^j} + c - vs[k(t)] \right) \overline{W}(x,v,r)] =$$
$$= s[\overline{g}(x,y,r)] + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{j} \frac{b_j}{v^k} \, \underline{\psi}_{j-k}(x,r).$$

В **Параграф § 4.3** е изследвана размитата трансформация на Natural (РТН) за решаването на размити частни интегро-диференциални уравнения.

В **Подпараграф § 4.3.1** са дадени дефиниция за размита двумерна трансформация на Natural (РДТН) за функция на две променливи и нейната обратна.

Дефиниция 4.3.1. [15] Нека $w : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to E^1$ е непрекъсната размита функция. Допускаме, че размитата функция

$$e^{-(sx+pt)} \odot w(ux, vt)$$

е интегруема в несобствен смисъл в $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Тогава

$$(FR)\int_0^{\infty}(FR)\int_0^{\infty} e^{-(sx+pt)} \odot w(ux, vt)dxdt$$

се нарича размита двумерна трансформация на Natural и се означава с

$$W[(s,p);(u,v)] = N[w(x,t)] = (FR)\int_0^{\infty}(FR)\int_0^{\infty} e^{-(sx+pt)} \odot w(ux, vt)dxdt, \tag{37}$$

където $s,\ p > 0$ и $u,\ v > 0$ са променливи на трансформацията.

Дефиниция 4.3.2. [15] Размитата двумерна обратна трансформация на Natural се дава с формулата

$$\begin{gathered} N^{-1}\left[W[(s,p);(u,v)]\right] = w(x,y) = \\ = \left(n^{-1}[\underline{W}[(s,p);(u,v,r)]], n^{-1}[\overline{W}[(s,p);(u,v,r)]]\right), \end{gathered}$$

където

$$n^{-1}[\underline{W}[(s,p);(u,v,r)]] = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{\gamma-\imath\infty}^{\gamma+\imath\infty} e^{\frac{sx}{u}}du \frac{1}{2\pi\imath}\int_{\delta-\imath\infty}^{\delta+\imath\infty} e^{\frac{py}{v}}\underline{W}[(s,p);(u,v,r)]dv,$$

и

$$n^{-1}[\overline{W}[(s,p);(u,v,r)]] = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{\gamma-\imath\infty}^{\gamma+\imath\infty} e^{\frac{sx}{u}}du \frac{1}{2\pi\imath}\int_{\delta-\imath\infty}^{\delta+\imath\infty} e^{\frac{py}{v}}\overline{W}[(s,p);(u,v,r)]dv.$$

За всяко $r \in [0,1]$ функциите $\underline{W}[(s,p);(u,v,r)]$ и $\overline{W}[(s,p);(u,v,r)]$ са аналитични функции за всяко $Reu \geq \gamma$ и $Rev \geq \delta$, където γ и δ са реални константи, които са избрани по подходящ начин.

В **Подпараграф § 4.3.2** са дадени основни свойства на РДТН.

Теорема 4.3.2. *Нека* c_1, c_2 *са произволни константи. Тогава*

$$\begin{aligned} N[c_1 \odot f(x,t) \oplus c_2 \odot g(x,t)] &= c_1 \odot N[f(x,t)] \oplus c_2 \odot N[g(x,t)] = \\ &= c_1 \odot F[(s,p),(u,v)] \oplus c_2 \odot G[(s,p),(u,v)]. \end{aligned}$$

Теорема 4.3.4. *Нека* a *и* b *са произволни константи. Тогава*

$$N[e^{(-ax-bt)} \odot f(x,t)] = F[(s+a, p+b);(u,v)].$$

В **Подпараграф § 4.3.3** са дадени дефиниция и теорема за размита конволюция.

Дефиниция 4.3.4. Нека $k(t)$ и $w(x,t)$ са размити интегруеми функции. Тогава размитата конволюция на $k(t)$ и $w(x,t)$ относно t се дава с равенството

$$(k * w)(x,t) = (FR)\int_0^t k(t-s) \odot w(x,s)ds,$$

където символът $*$ означава размитата конволюция относно t.

Теорема 4.3.7. *Нека* $k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *и* $w : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *са размити функции, за които съществува размитата двумерна трансформация на Natural, т. е.* $n[k(t)] = K[p;v]$ *и* $N[w(x,t)] = W[(s,p);(u,v)]$. *Тогава*

$$N[(k * w)(x,t)] = vn[k(t)] \odot N[w(x,t)]. \tag{38}$$

В **Подпараграф § 4.3.4** са получени нови резултати за РДТН размити частни производни от m-ти ред.

Теорема 4.3.8. *Нека* $w : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to E^1$ *е размита функция. За всяко* $x > 0$ *и* $m \in \mathbb{N}$ *съществува непрекъсната частна* gH*-производна от* $(m-1)-$*ви ред, относно* x *и съществува* $\frac{\partial^m w(x,t)}{\partial x^m}$. *Функциите*

$$e^{-(sx+pt)} \odot w(ux, vt), \quad e^{-(sx+pt)} \odot \frac{\partial^m w(ux,vt)}{\partial x^m}$$

са интегруеми в несобствен смисъл в $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. *Тогава*

$$N\left[\frac{\partial^m w(x,t)}{\partial x^m}\right] = \frac{\partial^m}{\partial x^m} N[w(x,t)]. \tag{39}$$

В **Подпараграф § 4.3.5** се използва двумерната размита трансформация на Natural за намирането на точното решение на ЛРЧИДУВ.
Прилагаме РДТН за уравнеие (29) и получаваме

$$N\left[\sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial^i w(x,y)}{\partial x^i}\right] \oplus N\left[\sum_{j=1}^{k} b_j \frac{\partial^j w(x,y)}{\partial y^j}\right] \oplus N[c \odot w(x,y)] =$$
$$= N[g(x,y)] \oplus N\left[(FR)\int_0^t k(t-s) \odot w(x,s)ds\right].$$

Използваме размитата конволюция () и намираме

$$N\left[\sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial^i w(x,y)}{\partial x^i}\right] \oplus N\left[\sum_{j=1}^{k} b_j \frac{\partial^j w(x,y)}{\partial y^j}\right] \oplus N[c \odot w(x,y)] =$$
$$= N[g(x,y)] \oplus vN[k(t)] \odot N[w(x,t)].$$

От теоремите за размити частни производни от m-ти ред и началните условия, получаваме

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{a_i s^i}{u^i} + \sum_{j=1}^{k} \frac{b_j p^j}{v^j} + vn[k(t)] + c\right) n[\underline{w}(x,t,r)] =$$
$$= n[\underline{g}(x,t,r)] + \sum_{i=1}^{m}\sum_{q=1}^{i} \frac{a_i s^{(q-1)}}{u^q} n\left[\underline{\varphi}^{(i-q)}(t,r)\right] + \sum_{j=1}^{k}\sum_{q=1}^{j} \frac{b_j p^{(q-1)}}{v^q} n\left[\underline{\psi}^{(j-q)}(x,r)\right],$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{a_i s^i}{u^i} + \sum_{j=1}^{k} \frac{b_j p^j}{v^j} + vn[k(t)] + c\right) n[\overline{w}(x,t,r)] =$$
$$= n[\overline{g}(x,t,r)] + \sum_{i=1}^{m}\sum_{q=1}^{i} \frac{a_i s^{(q-1)}}{u^q} n\left[\overline{\varphi}^{(i-q)}(t,r)\right] + \sum_{j=1}^{k}\sum_{q=1}^{j} \frac{b_j p^{(q-1)}}{v^q} n\left[\overline{\psi}^{(j-q)}(x,r)\right].$$

Заключение

Резюме на получените резултати

По мнение на автора основните приноси в настоящия дисертационен труд са:

1. Намерени са достатъчни условия за съществуване и единственост на решението на нелинейно размито интегро-диференциално уравнение на Voltera-Fredholm.

2. Конструиран е размит аналитичен метод, използващ метода на разлагане на Adomian за намиране на приближеното решение на нелинейно размито интегро-диференциално уравнение на Volterra-Fredholm. Намерени са достатъчни условия за сходимостта на метода и е получена оценка на грешката.

3. Конструирана е размита трансформация на Sumudu. Намерени са достатъчни условия за съществуване на трансформацията и прилагането ѝ за обикновени и частни размити производни.

4. Конструиран е размит аналитичен метод, който е комбинация от размитата трансформацията на Sumudu и метода на разлагане на Adomian за намиране на приближеното решение за нелинейното размито интегро-диференциално уравнение на Volterra-Fredholm.

5. Конструирана е размита трансформация на Natural за намиране на точното решение на линейно размито интегро-диференциално уравнение на Volterra с конволюционно ядро. Намерени са достатъчни условия за съществуването на трансформацията и връзката ѝ с трансформациите на Laplace и Sumudu.

6. Конструиран е размит аналитичен метод, който използва размития вариант на трансформацията на Sumudu за намиране на точното решение на линейно частно размито интегро-диференциално уравнение на Volterra.

7. Конструирана е размита двумерна трансформация на Natural за намиране на точното решение на линейно частно размито интегро-диференциално уравнение на Volterra. Намерени са достатъчни условия за съществуването на трансформацията и прилагането ѝ за размити частни производни.

Връзките между приносите, целите, задачите, мястото на описание в дисертационния труд, публикациите и докладите по темата са следните:

Приноси	Цел	Задачи	Параграфи	Публикации	Доклади
1	1	а	2.1.4	1	1
2	2	б	2.1.3, 2.1.4, 2.1.5	3	3
3	3	в	2.2, 4.2	2, 3	2, 3
4	2	в	2.3	3	3
5	3	г	3.2, 3.3		5
6	3	д	4.2	2	2
7	3	е	4.3	4	4

Списък на публикациите

Основните резултати от настоящия дисертационен труд са публикувани и цитирани в следните научни статии:

1. **Georgieva A., Spasova M.**, Solving nonlinear Volterra-Fredholm fuzzy integro-differential equations by using Adomian decomposition method, *AIP Conference Proceedings 2333, 080005 (2021)*,
View online: https://doi.org/10.1063/5.0041602,
(Web of Science, SJR=0.189, 2021).
2. **Georgieva A., Spasova M.**, Solving partial fuzzy integro-differential equations using fuzzy Sumudu transform method, *AIP Conference Proceedings 2321, 030010 (2021)*; View online: https://doi.org/10.1063/5.0040137, (Web of Science, SJR=0.189, 2021).
3. **Georgieva A., Spasova M.**, Sumudu decomposition method for solving Volterra-Fredholm fuzzy integro-differential equations, *AIP Conference Proceedings 2505, 070003 (2022)*,
View online: https://doi.org/10.1063/5.0100648.,
(Web of Science, SJR=0.164, 2022).
4. **Georgieva A., Spasova M.**, Solution of partial fuzzy integro-differential equations by double natural transform, *AIP Conference Proceedings 2459, 030012 (2022)*, View online: https://doi.org/10.1063/5.0083628, (Web of Science, SJR=0.164, 2022).

Цитати:

a. **Jamal N.,Sarwar M., Agarwal P., Mlaiki N., Aloqaily A.**, Solutions of fuzzy advection-difusion and heat equations by natural Adomian

decomposition method, *International Journal of Legal Medicine* Sci Rep 13, 18565, (2023), View online: https://https://doi.org/10.1038/s41598-023-45207-y (IF = 2.1, 2022).

Апробация на получените резултати

А) Доклади на международни конференции

1. **Georgieva A., Spasova M.**,
   Solving nonlinear Volterra-Fredholm fuzzy integro-differential equations by using Adomian decomposition method, 46 International Conference Applications of Mathematics in Ingenering and Economics (AMEE'20), Sozopol, Bulgaria, 8 - 13 June 2020.
2. **Georgieva A., Spasova M.**,
   Solving partial fuzzy integro-differential equations using fuzzy Sumudu transform method, 7th International Conference New Trends in the Applications of Differential Equations in Sciences (NTADES'20), St. Konstantin and Elena, Bulgaria, 1-4 September 2020.
3. **Georgieva A., Spasova M.**,
   Sumudu decomposition method for solving Volterra-Fredholm fuzzy integro-differential equations, 47 International Conference Applications of Mathematics in Ingenering and Economics (AMEE'21), Sozopol, Bulgaria, 7 - 13 June 2021.
4. **Georgieva A., Spasova M.**,
   Solution of partial fuzzy integro-differential equations by double natural transform, 8th International Conference New Trends in the Applications of Differential Equations in Sciences (NTADES'21), St. Konstantin and Elena, Bulgaria, 6 - 9 September 2021.
5. **Georgieva A., Spasova M.**,
   Fuzzy Sumudu Transform to Solve Convolution Type Volterra Fuzzy Integro-Differential Equations, Second International E-Conference on Mathematical and Statistical Science: A Selcuk Meeting (ICOMSS'23), Selcuk, Turkiye, 5 - 7 June 2023.

Б) Участие в проекти

1. Научен проект Съвременни изследвания на някои класове диференциални и диференчни уравнения: КР-06-N32/7.

2. Научен проект МУ19-ФМИ-009 към НПД на ПУ на тема: “Моделиране чрез математика и информатика и симбиозата им с ИКТ”, 2019-2020
3. Научен проект МУ21-ФМИ-007 към НПД на ПУ на тема: “Симбиоза между математиката и информатиката (СМИ във ФМИ)”, 2021-2022

Декларация за оригиналност

от **Мира Лъчезарова Спасова**,
редовен докторант към кат. "Математически анализ"
при Факултет по математика и информатика
на Пловдивски университет "Паисий Хилендарски"

Във връзка с провеждането на процедура за придобиване на образователната и научна степен "доктор" в Пловдивски университет "Паисий Хилендарски" и защита на представения от мен дисертационен труд, декларирам:

Резултатите и приносите на проведеното дисертационно изследване,

представени в дисертационния ми труд на тема "Аналитични методи за решаване на някои класове размити интегро-диференциални уравнения", са оригинални и не са заимствани от изследвания и публикации, в които нямам участие.

10.02.2024 г. ДЕКЛАРАТОР:
гр.Пловдив /Мира Спасова/

Библиография

[1] **Abbasbandy S., Hashemi M.**, *A series solution of fuzzy integro-differential equations*, J. Fuzzy Set Valued Anal., 00066, (2012).

[2] **Ahmad J., Nosher H.**, *Solution of Different Types of Fuzzy Integro-Differential Equations Via Laplace Homotopy Perturbation Method*, J. Sci. Arts, 17, 5, (2017).

[3] **Ali M.R.**, *Approximate solutions for fuzzy Volterra integro-differential equations*, Journal of Abstract and Computational Mathematics, 3(1):11–22, (2018).

[4] **Anastassiou G. A.**, *Fuzzy Mathematics ,Approximation Teory*, Springer, Berlin, Germany, (2010).

[5] **Behzadi S. S., Allahviranloo T., Abbasbandy S.**, *Solving fuzzy second-order nonlinear Volterra-Fredholm integro-differential equations by using Picard method*, Neural Computing and Applications, 21, 337-346, (2012).

[6] **Biswas, S., Roy, T. K.**, *Generalization of Seikkala derivative and differential transform method for fuzzy Volterra integro - differential equations*, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 34(4):2795–2806, (2018).

[7] **Bo T. L., Xie L., Zheng X. J.**, *Numerical approach to wind ripple in desert*, Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 8:223–228, (2007).

[8] **Buckley J., Eslami E., Feuring T.**, *Fuzzy Integral Equations, in: Fuzzy Mathematics in Economics and Engineering*, Studies in Fuzziness and Soft Computing, Springer,Physica-Verlag, Heidelberg, vol.91, 229-241, (2002).

[9] **Bushnaq S., Ullah Z., Ullah A., Shah, K.**, *Solution of fuzzy singular integral equation with Abel's type kernel using a novel hybrid method*, Advances in Difference Equations, (1), 13, (2020).

[10] **Chalco-Cano Y., Roman-Flores H.**, *On New Solutions of Fuzzy Differential Equations*, Chaos, Solitons and Fractals, 38:112-119, (2008).

[11] **Chalishajar D., Ramesh R.**, *Controllability for impulsive fuzzy neutral functional integro-differential equations*, AIP Conf. Proc., 12159, 030007, (2019).

[12] **Georgieva A.**, *Double Fuzzy Sumudu Transform to Solve Partial Volterra Fuzzy Integro-Differential Equations, Mathematics*, 8:692, (2020).

[13] **Georgieva A.**, *Application of double fuzzy Natural transform for solving fuzzy partial equations*, AIP Conf. Proc., 2333, 080006-1–080006-8, (2021).

[14] **Georgieva A., Alidema A.**, *Adomian decomposition method for solving two-dimensional nonlinear Volterra fuzzy integral equations*, AIP Conference Proceedings. 2048, 050009, (2018).

[15] **Georgieva A., Spasova M.**, *Solving partial fuzzy integro-differential equations using fuzzy Sumudu transform method*, AIP Conference Proceedings. 2321, 030010, (2021).

[16] **Georgieva A., Spasova M.,** *Solving nonlinear Volterra-Fredholm fuzzy integro-differential equations by using Adomian decomposition method*, AIP Conference Proceedings, 2333, 080005, (2021).

[17] **Georgieva A., Spasova M.**, *Solution of partial fuzzy integro-differential equations by double natural transform*, AIP Conference Proceedings 2459, 030012, (2022).

[18] **Georgieva A., Spasova M.**, *Sumudu decomposition method for solving Volterra-Fredholm fuzzy integro-differential equations*, AIP Conference Proceedings 2505, 070003, (2022).

[19] **Hooshangian L.**, *Nonlinear Fuzzy Volterra Integro-differential Equation of N-th Order: Analytic Solution and Existence and Uniqueness of Solution*, Int. J. Industrial Mathematics, 11, 1, (2019).

[20] **Xu L., He J. H., Liu Y.**, *Electrospun nanoporous spheres with Chinese drug*, nt. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 8:199–202, (2007).

[21] **Kang, S. M., Iqbal, Z., Habib, M., Nazeer, W.**, *Sumudu decomposition method for solving fuzzy integro-differential equations*, Axioms, 8(2):74–18, (2019).

[22] **Majid Z., Rabiei F., Hamid F., Ismail F.**, *Fuzzy Volterra Integro-Differential Equations Using General Linear Method*, Symmetry, 11:381-291, (2019).

[23] **Mikaeil, N., Khakrangin S., Allahviranloo T.**, *Solving fuzzy Volterra integro-differential equation by fuzzy differential transform method*, In Proceedings of the 7th Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology, Aix-Les-Bains, France, 18–22 July (2011).

[24] **Sekar S., Thirumurugan A. S.**, *Numerical investigation of the fuzzy integro - differential equations by He's Homotopy perturbation method*, Malaya Journal of Matematik, 7(3):468–471, (2019).

[25] **Shakeri F., Dehghan M.**, *Solution of a model describing biological species living together using the variational iteration method*, Math. Comput. Model., 48:685–699, (2008).

[26] **Sindu Devi, S., Ganesan, K.**, *Fuzzy Picard's method for derivatives of second order*, Journal of Physics, 1–7, (2018).

[27] **Smithson M. J., Verkuilen J.,**, *Applications in the Social Sciences. Quantitative Applications in the Social Sciences*, Fuzzy Set Theory: 112, (2006).

[28] **Sun F. Z., Gao M., Lei S. H., Zhao Y. B., Wang K., Shi Y. T., Wang, N. H.**, *The fractal dimension of the fractal model of dropwise condensation and its experimental study*, Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 8:211–222,(2007).

[29] **Syropoulos A., Grammenos T.**, *A Modern Introduction to Fuzzy Mathematics, John Wiley and Sons*, 384 Pages, ISBN: 978-1-119-44528-9, (2020).

[30] **Tunc C., Tunc O.**, *New qualitative criteria for solutions of Volterra integro-differential equations*, Arab Journal of Basic and Applied Sciences, 25(3):158–165, (2018).

[31] **Wang H., Fu H. M., Zhang H. F., Hu Z. Q.**, *A practical thermodynamic method to calculate the best glass-forming compositio for bulk metallic glasses*, Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 8:171–178, (2007).

[32] **Wasques V.**, *Fuzzy Differential Equations via Interactive Arithmetic: Applications in Biomathematics*, Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matematica, Estatistica e Computacao Cientifica, 219, (2019).

[33] **Watugala K. G.**, *Sumudu transform a new integral transform to solve differential equations and control engineering problems*, Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech., 24:35-43, (1993).

[34] **Беллман Р., Заде Л.**, *Вопросы принятия решений в расплывчатых условиях. Вопросы анализа и процедуры принятия и решений*, М., Мир, (1976).

[35] **Орловски С.**, *Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации*, Наука Москва, 207 стр., (1984).

Благодарности

Изказвам своята най-сърдечна благодарност към научния ми ръководител проф. д-р Атанаска Георгиева за получените знания, умения, подкрепа и търпението, които ми оказа при разработването и оформянето на дисертационния труд.

Благодарности

Резултатите в дисертационния труд са част от изследванията по няколко проекта, един от които е:

Проект № КП-06 ПН 62/1, Математическо и информационни моделиране на динамични процеси - нови теоретични резултати, методи за изследвания и приложения, проф. дмн Снежана Христова, 2022 - (действащ).