Р Е Ц Е Н З И Я

от дн Ангел Борисов Дишлиев – професор в Химикотехнологичен и металургичен университет – София върху:

дисертационен труд за присъждане на образователната и научна степен „доктор“;
област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика;
професионално направление: 4.5. Математика;
докторска програма: Математически анализ;
автор на дисертационния труд: Мира Лъчезарова Спасова;
тема на дисертационния труд: Аналитични методи за решаване на някои класове размити интегро-диференциални уравнения;
научен ръководител: проф. д-р Атанаска Тенчева Георгиева от Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“

1. Общо описание на представените материали

Със заповед № РД-21-454 от 23.02. 2024 г. на Ректора на Пловдивски университет „Паисий Хилендарски" (ПУ) бях определен за член на научното жури за осигуряване на процедура за защита на посочения по-горе дисертационен труд. На първото заседание на журито бях избран за рецензент.

Представеният от докторанта Мира Спасова комплект материали на електронен носител е в съответствие с чл. 36 (1) от Правилника за развитие на академичния състав на ПУ. Основният документ разбира се е дисертацията.

Дисертационният труд е поместен на 107 стандартни страници. Състои се от:

- Увод;
- Четири глави (всяка съдържаща няколко параграфа);
- Заключение, което представлява:
  - авторска справка на приносите в рецензирания труд. Посочени са общо седем основни приноса;
  - списък на публикациите по дисертационния труд – общо 4 публикации, всичките в съавторство с научния ръководител;
  - декларация за оригиналност на резултатите;
  - цитирания – едно цитиране от чуждестранни автори в списание с ИФ;
  - апробация на резултатите - общо пет доклада на конференции, единият от които е в чужбина;
  - участия в проекти – общо три проекта с университетско значение;
  - декларация за оригиналност;
  - библиография, включваща 103 заглавия.

Освен дисертационния труд докторантът е приложил към документите по процедурата за придобиване на образователната и научна степен „доктор“:

- Автореферат;
- Декларация за оригиналност и достоверност;
- Автобиография (Европейски формат);
- Копия на четири броя научни статии, публикувани в пълен текст и които са свързани с темата на дисертационния труд. Авторите на тези публикации са М.

Спасова и научният й ръководител. Може да се допълни, че дисертацията се основава на тези публикации;
- Други документи, които са свързани с процедурата по защита на дисертационния труд и са изискуеми от съответните правилници. В рецензията няма да коментирам тези документи, като целта е да се концентрирам само върху съществените документи и постижения на кандидата. Макар, че „не ми е работа" все пак ще отбележа със задоволство, че количеството документи, което докторантът трябва да предостави преди защитата, е значително по-малко отколкото преди няколко години. Това безспорно е добре за тези млади хора, за природата и същевременно е зле за „бумащината".

2. Кратки биографични данни за докторанта

Младите хора имат сравнително кратка биография, а и все още не са се научили „да разтягат локуми", описвайки всяко вдишване и издишване в автобиографиите си. Кандидатът за придобиване на образователната и научна степен „доктор" завършва последователно образователно квалификационни степени (ОКС), посочени в следващата таблица:

Период от г. – до г.	ОКС	Квалификация	Училище
2009-2014	Средно		ЕГ „Бертолт Брехт", гр. Пазарджик
2014-2018	Бакалавър	Учител по математика, информатика и информационни технологии	ПУ „Паисий Хилендарски"
2018-2019	Магистър	Математик	ПУ „Паисий Хилендарски"
2020-2023	Доктор (редовна форма на обучение)	Доктор - докторска програма: Математически анализ	ПУ „Паисий Хилендарски"
01.03.2023	Отчислена с право на защита		ПУ „Паисий Хилендарски"

Таблица 1

Трудовата дейност на Мира до сега е както следва:

Период от г. – до г.	Заемана длъжност	Месторабота
2016-2017	Учител по информатика и информационни технологии	СУ „Черноризец Храбър", Гр. Пловдив
2018-до сега	Учител по математика и информационни технологии	Спортно училище гр. Пазарджик

Таблица 2

3. Актуалност на тематиката и целесъобразност на поставените цели и задачи

Известни учени (специалисти в приложната математика и информатиката) определят теорията на размитите множества (fuzzy sets) и свързаните с нея приложения за „трета вълна на интелектуалното програмиране". Теорията е създадена от американския учен Lotfi Zadeh в няколко основополагащи изследвания, стартирайки преди повече от половин век (първата работа е през 1965 г.). Споменатият американски учен излага основите на теорията, въвежда базовите понятия и което е най-важното - доказва необходимостта от използване на размитите множества и свързаната с тях логика като фундаментален математически апарат за моделиране на неточни, неопределени, качествено зададени твърдения и умозаключения (а не абсолютно точно, т.е. количествено). Научната общественост възприема новата теория не съвсем радушно. Преобладаващата част от учените (по онова време) възприемат теорията с определени „резерви“. Така например, през деветдесетте години на миналия век теорията и приложенията на тази модерна наука са премахнати (макар и за кратко) от учебните програми на няколко елитни американски университети. От друга страна, успоредно на тези „забрани“ се препоръчват и рекламират технологии, в които се използват методи, които се базират на теорията на размити множества. В идейно отношение размитата математика може да се разглежда от една страна като обобщение на класическата математика, а от друга - като противопоставяне на „точната“ математика. По този начин се въвежда и експлоатира по-адекватна форма за моделиране на природните явления и реалните процеси, предизвикани преди всичко от човешка намеса. Това се постига с фундаменталното предположение в тази теория, че понятието принадлежност на определен елемент към дадено множество (което в тази теория се нарича „размито множество“) може да се изменя „плавно“ от „безапелационно принадлежи“ до „безапелационно не принадлежи“. Оттук следват и специфичните за размитата математика твърдения, които имат променлива (в общия случай непрекъсната) степен на истинност: от абсолютно верни до абсолютно неверни. Това модерно научно направление се развива изключително бурно, което се изразява в многобройни научни статии (в реномирани научни списания), монографии, научни конференции, конгреси, работни срещи и пр. Тук ще припомня колоквиумите по Числени методи и приложения с председател на организационния съвет проф. Д. Байнов, провеждани ежегодно в ТУ – филиал град Пловдив. Тези колоквиуми се организираха в продължение на повече от десетина години - в края на миналия и началото на настоящия век. В тематичната насоченост на работата на споменатите колоквиуми декларативно едно от научните направления беше теория и приложения на размитите множества. Понастоящем са създадени теоретичните основи на теорията на размитата математика и предстоят широки приложения в практиката. През 1975 г. E. Mamdani заедно с група студенти, създава първото практическо приложение на новата теория - размит контролер за управление на парен котел. В началото на деветдесетте години на миналия век промишлените гиганти на Motorola, General Electric, Otis Elevator, Pacific Gas & Electric, Ford, IBM и др. инвестират в разработка на изделия, използващи в тяхната автоматизирана дейност размита математика. В резултат на крупните инвестиции се създават многобройни технически и промишлени разработки, базирани на размити механизми за управление. Като примери ще посочим: електролокомотиви, вертолети, автомобили, видеокамери, климатици, прахосмукачки, перални машини, фризери и др. Можем да кажем определено, че днес теорията на размитите множества и произтичащата от тях размита логика се използва масово като средство за формализация на неопределености в много програмни пакети. Тяхното предназначение е за анализ на кризисни ситуации, финансови пазари, политическа обстановка и др. Предпоставка за тяхната адекватност е съвременната сложност на процесите, произтичаща от ситуациите на неопределеност и непредсказуемост.

В края на тази точка ще резюмирам моето убеждение, че резултатите в дисертацията са актуални и са в синхрон със съвременните тенденции в теорията на размитите интегрални уравнения. Мястото на представените изследвания в дисертацията след достатъчно време ще бъде определено от интересът, който те ще предизвикат в математическата общественост.

4. Познаване на проблема

Считам, че докторантът познава:

- математическите обекти на изследване в представения за рецензиране научен труд;
- историческото развитие на разглежданите научни проблеми;
- моментното състояние на това сравнително ново математическо направление;
- някои насоки, в които предстои да се развива теорията на размитата математика;
- конкретни възможности за приложение на постигнатите теоретични резултати;

Най-важното според мен е, че Мира Спасова е в състояние да осъществява самостоятелни научни търсения.

До тези изводи достигам, като имам предвид:

- Направените предварително от автора сериозни, богати на съдържание и основополагащи увод и въведение (Глава 1) в темата на дисертацията. Посочени са основни дефиниции и резултати на водещи наши и чуждестранни автори, на които се базират изследванията. Представени са достатъчно конкретни приложения на разглежданите типове интегрални уравнения, които още веднъж ни убеждават в достоверността на представените резултати;
- При четенето, дори и при първичното запознаване с научния труд, не е необходимо използването на допълнителна, въвеждаща, справочна литература по темата. С други думи, началото на дисертационния труд притежава качеството на учебно помагало (ще уточня - за напреднали).
- От една страна горното обстоятелство е удобно за професионалния читател без предварителна подготовка по темата на дисертацията, а от друга - потвърждава изказаното по-горе мнение за детайлното познаване на генезиса на размитите множества, числа, функции, производни, интеграли, някои класове уравнения и съответните свойства и операции с тези обекти;
- Свободното владеене на терминологията и основните дефиниции по темата и умението да се съчетават определящи качества на различни математически обекти е основание за изказаното от мен твърдение за компетентност на докторанта по въпросите, разгледани в дисертацията;
- Дълбокото вникване в същността на размитите множества и произхождащата от тях алтернативна размита математика (оперираща с понятия, които носят свойствата на неопределеност, неточност и наличие на елементи на качествено определяне на описаните чрез тези понятия обекти, явленията и процесите) и съществената разлика с класическата математика ме убеждава в добрата предварителна научна подготовка на докторанта по темата на дисертацията. Тук вероятно заслуга има и научния ръководител;

- Посочената използвана литература и някои коментари върху произведенията на други автори представляват потвърждение на съпричастността на автора към разглеждания клас интегрални уравнения;
- Множеството съществени забележки и следствия (някои от тях със самостоятелен интерес), които доизясняват и допълват теоретичните резултати на автора на дисертационния труд, дават основание да считам, че теорията на тези сложни математически обекти е осмислена дълбоко;
- На няколко места в рецензирания труд се вижда, че докторантът умее творчески да прилага известни резултати и методи на изследване на други автори. Притежава качеството разумно да допълва и приспособява ограниченията, наложени на разглежданите обекти, а в някои случаи да преодолява сериозни трудности от технически характер.

Отговарям и на станалия напоследък стандартен въпрос, отнасящ се за оригиналност на резултатите:

В дисертацията липсват елементи на повторяемост и плагиатство от чужди изследователи.

Завършвам с резюме на направеното изложение по точката: Мира познава задълбочено обсъжданите в дисертацията научни проблеми и притежава необходимите знания и умения за водене на самостоятелни изследвания.

5. Методика на изследването

Основен апарат на провеждане на изследванията в рецензирания труд са методи и някои научни факти от няколко математически науки:

- реален математически анализ (повсеместното използване на анализа при формулиране на всички дефиниции и твърдения, както и при извършване на съответните доказателства в рецензирания труд);
- функционален анализ (използват се основни идеи от тази наука при проведените формулировки и доказателства в дисертацията – така например методът за разлагане на Adomian и декомпозиционният метод на Sumudu са приложими към широко множество от функционални уравнения. Освен това част от изследванията се провеждат в абстрактни пространства (например Банахови). Следователно можем да считаме, че техниката на функционалния анализ се използва в дисертацията);
- интервален анализ (в различните му разновидности се използва като основен апарат на аритметичните действия между размити множества и размити числа, представяне на дадените и търсените размити функции и действията между тях, намиране на подходящи производни на този тип функции и интеграли от тях);
- фундаментална теория на някои типове интегрални уравнения (теореми за съществуване и единственост на решения на класове такива уравнения са базова отправна информация при изследванията в дисертацията);
- качествена теория на интегралните уравнения (използване на различни свойства на решенията на изучаваните класове интегрални уравнения е информация, която се цели да се адаптира за съответните размити уравнения).

Както във всички дисертации по математика (с които съм се запознал досега), така и тук, не се използва единствен (изолиран) математически метод и само този метод, който се прилага върху подходящи обекти с цел откриване на нови факти. Използването на различни знания, методи, идеи от няколко математически науки и т.н., подходящото им творческо съчетаване, с цел постигане на нови резултати - това е схемата, по която се извършват изследванията в рецензирания дисертационен труд. Ще отбележа, че този начин на разкриване на нови теоретични и приложни факти е труден и е присъщ на изследователите с изграден творчески потенциал.

Мисля, че този подход при набелязване на целите и задачите за разрешаване, методите на изследователска работа са предадени на докторанта от неговия научен ръководител.

6. Характеристика и оценка на дисертационния труд

Уводът на дисертационния труд има информационен характер. Стартира се с посочване на необходимостта от изучаване на многобройните типове уравнения, съдържащи търсената функция под знака на интеграла (които по-нататък най-общо ще наричаме интегрални уравнения). В частност към този широк клас уравнения се включват и размитите интегро-диференциални уравнения, които са основен обект на изследване в дисертацията. Ясно е формулирана и основната причина за използване на размитите интегрални уравнения, като моделиращ математически апарат – а именно: „неточността“ (или “несигурността“, „непълнотата“ и т.н.) на изходните начални данни и съответните дефиниращи функции. Направен е кратък (по-скоро встъпителен) исторически преглед на развитието на фундаменталната и качествена теория на размитите интегрални уравнения. Посочени са някои основни методи за тяхното решаване.

Втората част на увода съдържа целите, които си поставя автора и пътя, по който да ги постигне. С други думи, набелязани са последователните конкретни математически задачи, чрез които се реализират поставените цели. Накратко целите са както следва:

- Да се адаптира и създаде математически апарат, необходим за гарантиране на съществуване и единственост на решенията на начални задачи за определени класове линейни и нелинейни размити интегро - диференциални уравнения;
- Да се подготви подходяща техника и да се докажат предварителни свойства на математическия апарат, които са необходими за решаване на начални и гранични задачи за размити частни интегро-диференциални уравнения;
- Да се конструират декомпозиционни методи за намиране на приближени решения на размито интегро-диференциално уравнение на Volterra-Fredholm;
- Да се адаптират аналитични методи, които използват размитите трансформации на Sumudu и Natural за намиране на решения на линейно размито интегро-диференциално уравнение на Volterra и линейно частно размито интегро-диференциално уравнение на Volterra.

Третата част на увода представлява обзор на дисертационния труд. Накратко е синтезирано съдържанието на отделните глави и прилежащите им параграфи.

Първата глава на дисертацията има въвеждащо–информационен характер. Най-напред са дадени основните дефиниции за размити множества и операции между тях. По-нататък с помощта на размитите множества (като специален техен клас) са дефинирани размитите числа. Представени са различни типове размити числа, като:

триъгълни, трапецовидни, Гаусови и др., както и техните геометрични интерпретации. Въвеждането на аритметичните операции между размитите числа се основава на интервалния анализ и така наречените „нива“ на размитите числа (които нива по същество представляват интервали с променливи граници, в зависимост от желаното ниво). Посочени са основни свойства на аритметичните операции между размити числа и което е специфично и полезно: изтъкнати са различията с аритметиката в класическия реален случай. Чрез Хаусдорфовата метрика е дефинирано понятието разстояние между две размити числа. Операцията „изваждане“ в интервалния анализ има разслояващ характер. В едно от направленията на развитие на тази наука операцията изваждане се възприема в теоретико-множествен смисъл, в друго направление е в смисъл на Hukuhara, а в трето - в обобщен смисъл на Hukuhara и пр. Това обстоятелство е дискутирано в дисертацията, като са отбелязани предимствата и недостатъците на всички тези „разлики“ и тяхната връзка.

Чрез размитите числа са описани размитите функции (или както проф. Б. Сендов ги наричаше „дебели“ функции). Дадени са дефинициите за ограничени и непрекъснати размити функции. В уводната глава основно място е отредено на описанието на различни видове производни на размити функции. В съответните дефиниции се използва обобщената разлика на Hukuhara. Посочена е връзка между производната на размита функция и производните на съответните долни и горни функции на ниво. Дадена е дефиницията на размит интеграл на Henstock. Като частен случай се получава и интегралът на Riemann, при който δ мрежата на разбиване на интеграционния интервал се дефинира чрез константна функция, т.е. $\delta = const$. Дадени са основните свойства на интеграла на Henstock, които са подобни на свойствата на Римановия интеграл от класическа (числова) функция на един аргумент. Посочени са няколко „работещи“ свойства на несобствения интеграл от размита функция в смисъл на Riemann. Подобни въпроси са разгледани и за размити функции на два аргумента.

Накрая на главата е разгледан размит аналог на модела на Volterra за растеж на популация, в рамките на дадена затворена система. Този модел се описва с размито нелинейното интегро-диференциално уравнение на Volterra, което ще дискутираме по-нататък

Няма да пропусна да изразя своята гордост от факта, че редица български учени, а също и школите, създадени от тях, получиха основополагащи твърдения в няколко „прохождащи“ за онова време математически теории, каквито са: интервалния анализ, теорията на Хаусдорфовата метрика и теорията на размитите множества. По тези теми са публикувани и няколко монографии, които предизвикаха сериозен интерес. Ще добавя, че изследванията на българските математици стартираха още през седемдесетте години на миналия век, т.е. в началото на изграждането на споменатите математически теории. Тук ще съобщя имената на Б. Сендов и С. Марков, с които имах възможността да работя по тези теми.

Втората глава е базова в дисертацията, тъй като в нея са представени идеите на основния работещ подход за решаване на начални задачи за класове размити интегро-диференциални уравнения. Конкретно, изучава се сложна и пределно обща начална задача за размито интегро-диференциално уравнение от вида:

$$\sum_{j=0,\dots,k} p_j \odot u^{(j)}(x) = g(x) \oplus (FR) \int_a^x K_1(x,s) \odot G_1\big(u(s)\big) ds$$
$$\oplus (FR) \int_a^b K_2(x,s) \odot G_2\big(u(s)\big) ds, \qquad \text{(A)}$$
$$u^{(j)}(a) = b_j, \quad j = 0,1,\dots,k-1,$$

където: символът (FR) означава, че интегралът, който следва след него е в смисъл на Riemann; знаците $\odot$ и $\oplus$ са за операциите умножение и събиране в размитата аритметика, E^1 е множеството на размитите числа; $k \in N$ е естествено число, показващо реда на най-високата производна в разглежданото уравнение, числовите константи $a,\ b \in R$; размитите константи $b_0, \dots, b_{k-1} \in E^1$, числовите функции $p_j\colon [a,b] \to R$ и $K_1, K_2\colon [a,b] \times [a,b] \to R$ са непрекъснати в дефиниционните си множества; размитите функции $g, u\colon [a,b] \to E^1$ също са непрекъснати в интервала $[a,b]$; операторите $G_1, G_2\colon E^1 \to E^1$ са непрекъснати в E^1. Основните етапи в изследванията, в които се конструира методът на решаване, се предхождат от:

- Представяне на списък от лесно проверяеми естествени условия върху елементите на изследваното уравнение и съответните начални условия. Тези изисквания се налагат с цел да се гарантира съществуването на изследваните математически обекти;
- Размитите числа и функции, които участват в записа на уравнение (A), се представят в параметрична форма;
- Получават се изходни варианти на уравнения, в които участват съответно долната и горната функция на ниво на неизвестната размита функция в (A);
- Изходните уравнения се преобразуват чрез многократни интегрирания (на брой колкото е редът на старшата производна в изучаваното уравнение), като се използват началните условия и известни формули и равенства от анализа.

По-този начин се достига до получаване на явна параметрична форма на изходното уравнение. По-точно получени са две (традиционни, т.е. не размити) интегро-диференциални уравнения, които се удовлетворяват съответно от долната и горната функции на параметричното представяне на търсената функция.

Оттук нататък стартират основните изследвания по темата. Към споменатите две уравнения (за които още веднъж ще подчертаем, че не са размити) авторът на дисертационния труд прилага метода на разлагане на Adomian за точно или приблизително намиране на решенията им. Методът се състои във формално представяне на неизвестните функции чрез безкраен функционален ред. В случая се счита, че неизвестните функции са долната $\underline{u}(x,r)$ и горната $\overline{u}(x,r)$ функции на ниво на търсената функция $u(x)$. Формалните редове имат обичайната форма:

$$\underline{u}(x,r) = \sum_{i=1,2,\dots} \underline{u_i}(x,r), \quad \overline{u}(x,r) = \sum_{i=1,2,\dots} \overline{u_i}(x,r). \qquad \text{(B)}$$

Членовете на формалните редове (B), които се отнасят за долната $\underline{u}(x,r)$ и горната $\overline{u}(x,r)$ функции на ниво се определят последователно чрез рекурентни формули. Рекурентните формули се получават след заместване на редовете в уравненията за $\underline{u}(x,r)$ и $\overline{u}(x,r)$. Всички тези преобразувания са възможни при допълнителни изисквания към качествата на участващите функции и константи в записа на изходното уравнение (A).

Важна част от разглежданията на автора се отнасят до посочването на условия, гарантиращи съществуване и единственост на решението на уравнение (A). Отново този въпрос се свежда до съществуване и единственост на долната и горната функции на ниво (B).

Ясно е, че практически решението на уравнението (A) не може да се намери точно чрез приложения метод на Adomian. Както казахме по-горе, долната и горната функция на ниво се намират чрез решаване на изброимо много рекурентни уравнения, решенията на които попълват редовете, посочени в (B). Направеното заключение по естествен път води до извода за приближено апроксимиране на функциите $\underline{u}(x,r)$ и $\overline{u}(x,r)$ чрез техните частични суми:

$$\underline{s_n}(x,r) = \sum_{i=1,2,\dots n} \underline{u_i}\,(x,r), \qquad \overline{s_n}(x,r) = \sum_{i=1,2,\dots n} \overline{u_i}(x,r). \tag{C}$$

Намерени са достатъчни условия, от които произтича сходимостта на редовете (B). В подходящо Банахово пространство е получена оценка на грешката между точното и приближеното решения, т.е. оценени са:

$$\left\|\underline{u}(x,r) - \underline{s_n}(x,r)\right\| \text{ и } \|\overline{u}(x,r) - \overline{s_n}(x,r)\|.$$

Втората (основна) тема, разгледана във втора глава на дисертацията, е посветена на размития декомпозиционен метод на Sumudu. За кратко се отклонявам и заявявам, че не мога да видя основателна причина изследванията по тази (втора0 тема да не са представени в отделна глава. За да се представи методът напълно обосновано са дадени подходящи въвеждащи предварителни понятия и доказани необходими твърдения, отнасящи се за размитата трансформация на Sumudu. Трансформацията изобразява оригинала $w(x)$ в образа $W(u)$ и има вида:

$$W(u) = W_S(u) = S[w(x)] = (FR)\int_0^\infty e^{-x} w(ux)dx, \tag{D}$$

където $w: R^+ \to E^1$ е непрекъсната размита функция и интегралът в (D) съществува. Формула (D) е аналог на класическата трансформация на Sumudu. Представени са достатъчни условия за коректност на трансформацията. Основното предположение е, че оригиналната размита функция $w = w(x)$ е от подходящо избран експоненциален ред α, т.е.:

$$(\exists M = const > 0)(\exists \alpha = const > 0)(\exists X = const > 0){:}\;\; (\forall x > X) \\ \Rightarrow D(w(x), 0) \le Me^{\alpha x}, \tag{E}$$

където със символа D е означено разстоянието в смисъл на Hausdorff. По-внимателен поглед към трансформацията (D) показва, че тя е „близка“ до трансформацията на Laplace:

$$W(u) = W_L(u) = L[w(x)] = (FR)\int_0^\infty e^{-sx} w(x)dx. \tag{F}$$

Това обстоятелство дава основание да се предполага, че свойствата на тези две трансформации също са „близки“. Доказани са няколко свойства на размитата трансформация на Sumudu, като: линейност на трансформацията; образ на експоненциално затихване или растене на оригинала; образ на периодичен оригинал и др. Резултатите са подобни на класическите резултати, известни за числови функции и съответните класически трансформации на Sumudu. Освен това свойствата наподобяват свойствата на оператора на Laplace. Доказателствата, както и в предишни изследвания, се извършват по части - последователно с долната и горната функции на ниво. Специална секция е отделена за изследване на размитата конволюция на две функции, която наподобява класическата конволюция, както при оператора на Sumudu, така и при оператора на Laplace. Имаме:

$$(v * w)(x) = (FR) \int_0^x v(x-s) w(s) ds,$$

където размитите функции $v, w: R^+ \to E^1$. Потвърдено е, че (както при числовите функции) образът чрез трансформацията на Sumudu на конволюцията на две размити функции е произведение на техните образи. Към подготвителните резултати в тази втора част на втората глава е показано, че производната от фиксиран ред n на трансформацията на Sumudu на достатъчно пъти диференцируема размита функция е равна на трансформацията на производната от ред n на дадената размита функция. Разбира се едно от базовите изисквания тук е трансформацията да съществува. В същинската част на тази втора тема се изгражда фундаменталната теория на следната начална задача за размито интегро-диференциално уравнение на Volterra - Fredholm:

$$w^{(n)}(x) = g(x) \oplus (FR) \int_0^x K_1(x-s) \odot G_1\big(w(s)\big) ds \oplus (FR) \int_0^b K_2(x-s) \odot G_2\big(u(s)\big) ds;$$
$$w^{(i)}(0) = b_i, \quad i = 0,1, \dots, n-1, \qquad \text{(G)}$$

където: $n \in N$ е естествено число; числовите функции $K_1, K_2: [0, b] \to R$; размитата функция $g: [0, b] \to E^1$; операторите $G_1, G_2: E^1 \to E^1$ са непрекъснати в E^1; размитите константи $b_0, \dots, b_{n-1} \in E^1$, константата $b \in R^+$. Разработеният алгоритъм за намиране на решението на размитото уравнение (G) може да се разбие на следните етапи, като се спазва тяхната последователност на реализиране:

- Към двете страни на уравнението се прилага размитата трансформация на Sumudu;
- Извършват се преобразования, като се използват свойства на трансформацията, отнасящи се за образи на производни и конволюции на размити функции;
- Чрез параметричната форма на участващите в разглежданото уравнение размити числа и размити функции, както и на началните условия, уравнение (E) се свежда до система от две традиционни (числови) интегро – диференциални уравнения от типа на Volterra – Fredholm;
- За последната системата е приложен метода на разлагане на Adomian за традиционни уравнения. Както казахме преди, идеята на метода е неизвестните функции да се представят формално в безкрайни функционни редове;
- Елементите на редовете се намират чрез изброимо много рекурентни формули;

- Накрая е приложена обратната трансформация на Sumudu и е получено долното и горното решения на изходното уравнение (E);
- От последното размито решение на дискутираното уравнение (което по принцип е недостижимо - поради изброимо многото рекурентни формули) е възможно да се намери приближено решение, като частична сума на въпросните редове.

В **Трета глава** се конструира и прилага размитата трансформация на Natural за намиране на точното решение на сравнително по-тесен клас размити уравнения, по-точно: размито линейно интегро-диференциално уравнение на Volterra от първи род с конволюционно ядро. Производната на неизвестната функция е от типа на Hukuhara. Конкретно, изучава се следната начална задача:

$$\int_0^x K_1(x-s) \odot w(s)ds \oplus \int_0^x K_2(x-s) \odot w^{(n)}(s)ds = g(x) \tag{H}$$

$$w^{(i)}(0) = b_i, \quad i = 0,1,\dots,n-1,$$

където: $n \in N$; функциите $K_1, K_2: [0,b] \to R$; размитата функция $g: [0,b] \to E^1$; размитите константи $b_0, \dots, b_{n-1} \in E^1$, константата $b \in R^+$.

Операторът на Natural изобразява размитата оригинална функция $w(x)$ в размития образ - функцията $W(s,u)$. Имаме:

$$W(s,u) = W_N(s,u) = N[w(x)] = (FR)\int_0^\infty e^{-sx} w(ux)dx, \tag{I}$$

където $w: R^+ \to E^1$ е непрекъсната размита функция и интегралът в (I) съществува. Ясно е, че трансформациите на Laplace и Sumudu са частни случаи на (I). Получават се съответно при $u = 1$ и $s = 1$. Дадени са най-важните качества на оператора на Natural, които са необходими при изграждане на алгоритъма за решаване на уравнението (H):

1. Дадена е връзката на оператора на Natural $W_N(s,u)$ с операторите на Laplace $W_L(s)$ (виж (F)) и Sumudu $W_S(u)$ (виж (D)). При естествени ограничения са валидни равенствата:

$$W_N(s,u) = \frac{1}{u} W_L\left(\frac{s}{u}\right) = \frac{1}{s} W_S\left(\frac{u}{s}\right);$$

2. Посочена е обратната трансформация, като е дадена и формата на функциите на ниво;
3. Представени са достатъчни условия за съществуване на трансформацията на Natural. Най-важното условие е оригиналът да е от експоненциален ред (виж (E));
4. Дадени са няколко образа на оператора за оригинали, които са често срещани елементарни функции;
5. Формулирани са и са доказани основни свойства на оператора. Например, при определени условия са валидни равенствата:

$$N[c_1 \odot w_1(x) \oplus c_2 \odot w_2(x)] = c_1 \odot N[w_1(x)] \oplus c_2 \odot N[w_2(x)]\ ;$$

$$N[w(ax)] = \frac{1}{a} W\left(\frac{s}{a}, u\right); \qquad N[e^{-ax} \odot w(ax)] = W(s+a,u) \ \text{ и др;}$$

6. Представен е образът на конволюцията на две размити непрекъснати функции;
7. Посочен е образът на производната от произволен ред на размита функция. Производната е в смисъл на Hukuhara. При естествени ограничения е получен очакван резултат, а именно:

$$N\left[\frac{d^m w(x)}{dx^m}\right] = \frac{d^m}{dx^m}\, N[w(x)];$$

8. Намерени са полезни връзки между образа на размита функция и образите на нейните долната и горната функции на ниво.

След предварителните бележки, кратко съдържание на които се вижда по-горе, авторът е предложил алгоритъм за намиране на решението на задачата (H). Основните етапи в алгоритъма са както следва:

1. Към двете страни на уравнението, посочено в (H) е приложен операторът на Natural;
2. Новополученото уравнение е преобразувано с помощта на свойствата на дискутираната трансформация;
3. Намерени са алгебрични уравнения за долната и горната функции на ниво;
4. Решенията на изходната задача са получени чрез обратната трансформация на Natural.

Четвърта глава е посветена на разработване на алгоритъм за намиране на решението на размито частно интегро-диференциално уравнение на Volterra от специален клас. Методът, представен в дисертацията, включва размитата трансформация на Sumudu за функция на две променливи и размитата двумерна трансформация на Natural. Разглежда се уравнението:

$$\sum_{i=1,\dots,m} a_i \odot \frac{\partial^i w(x,t)}{\partial x^i} \oplus \sum_{j=1,\dots,n} b_j \odot \frac{\partial^j w(x,t)}{\partial t^j} \oplus c \odot w(x,t) \tag{J}$$

$$= g(x,t) \oplus (FR)\int_0^t K(t-s) \odot w(x,s)ds$$

с начални и гранични условия от вида:

$$\frac{\partial^j w(x,0)}{\partial t^j} = \psi_j(x), \quad 0 \le x \le b, \quad j = 0,1,\dots,n-1; \tag{K}$$

$$\frac{\partial^i w(0,t)}{\partial x^i} = \varphi_i(t), \quad 0 \le t \le d, \quad i = 0,1,\dots,m-1,$$

където: $m, n \in N$ са естествени числа; константите $a_1, \dots, a_m,\ b_1, \dots, b_n,\ c \in R$; константите $b, d \in R^+$; числовата функция $K: [0,d] \to R$ е непрекъсната; размитата функция $g: [0,b] \times [0,d] \to E^1$ е непрекъсната; размитите функции $\psi_j: [0,b] \to E^1$ и $\varphi_i: [0,d] \to E^1$ са непрекъснати. Разработеният метод се прилага върху задачата (J), (K). В идеен аспект изследванията тук не се различават съществено от тези в предходните глави, поради което няма да ги разглеждаме.

7. Приноси и значимост на разработката за науката и практиката

Приносите са формулирани коректно от докторанта и са поместени на няколко места в документите за защита - например в Заключението към дисертацията, също така в Автореферата и др. Достиженията в дисертационния труд можем да причислим към тематичното обогатяване на фундаменталната теория, качествената теория и приближените методи за намиране на решенията на специални класове размити обикновени и частни интегро-диференциалните уравнения. Съгласен съм с всички приноси, декларирани от кандидата за придобиване на образователната и научна степен. Въпреки че ще повторя част от предходната точка 6 на рецензията, то накратко ще опиша приносите, които са получени в първата част на втора глава. Според мен тези приноси са съществени и освен това дават представа за постиженията в следващите две глави на дисертацията:

- Дадена е постановката на разглежданата начална задача за размито интегро-диференциално уравнение от широк клас;
- Решението на размитото уравнение е сведено до решаване на двойка начални задачи за традиционни (не размити) интегро-диференциални уравнения. Неизвестните функции в традиционните уравнения са долна и горна функция на ниво за размитото решение на изходното уравнение;
- Долната и горната функция на ниво са представени формално като функционни редове;
- Приложен е методът на Adomian за намиране на членовете на споменатите функционни редове;
- Доказана е сходимост на дискутираните редове;
- Намерена е оценка на грешката при замяна на долната и горна функции на ниво с частични суми на съответните им редове.

Според мен изследванията в дисертацията са достатъчно дълбоки и важни, поради което те ще заемат достойно и трайно място в науката.

8. Преценка на публикациите по дисертационния труд

Дисертационният труд се основава на 4 научни публикации с участието на докторанта. Всяка от тези публикации е от двама автори (докторанта и неговия научен ръководител). Всичките научни трудове са публикувани в *AIP Conference Proceedings* Съответните доклади са изнесени на конференциите:

- *International Conference Applications of Mathematics in Ingenering and Economics* (два доклада);
- *International Conference New Trends in the Applications of Differential Equations in Sciences* (два доклада).

Два от докладите са проведени през 2021 г., когато списанието притежава SJR=0,189, а останалите два доклада са през 2022 г., когато списанието е с SJR=0,164.

Както се вижда, публикациите са сравнително отскоро, поради което е твърде рано да се очаква цитирания на получените научни достижения. Досега е забелязано едно цитиране от чуждестранни автори, което е поместено в реномирано списание.

Изрично ще подчертая, че публикационната активност на докторанта, свързана с неговата докторантура, е повече от задоволителна. Публикациите не са много на брой, но са публикувани в престижно научно издание, поради което същите щателно се отразяват от различни вторични бази данни. Следователно, рецензираните научни достижения лесно се следят от интересуващата се научната общественост. Това обстоятелство според мен ще доведе до използване на резултатите и тяхното цитиране в близко бъдеще.

Част от резултатите в дисертационния труд са използвани в работата по три научни проекти. Два от споменатите проекти са на университетско ниво, а единият е на национално ниво.

Резултати от дисертацията са докладвани на 5 научни форуми. Четири от тях са на споменатите по-горе в тази точка конференции и един на конференцията:

Second International E-Conference on Mathematical and Statistical Science: A Selcuk Meeting (ICOMSS'23), Selcuk, Turkey.

В заключение на тази точка от рецензията ще отбележа, че научните публикации, с които докторанта участва в защитата на дисертационния труд, надвишават минималните национални изисквания. За нагледност, в следващата таблица са представени минималните национални изисквания и съответните показатели, постигнати от докторанта:

Група показатели	Минимален брой точки, изисквани от закона	Представен материали от кандидата	Брой точки на кандидата
А. Дисертационен труд	50	Дисертационен труд: Аналитични методи за решаване на някои класове размити интегро-диференциални уравнения	50
Г. Научни публикации	30	Публикации: - 4 публикации в списания с класификация в SJR: ⇒ 4x30=120 точки.	120

Таблица 3

9. Лично участие на докторанта

Всеки научен труд се базира на работата на няколко учени (които може да не са свързани в работен колектив и да не са автори на представените изследвания). Тук ще локализирам „философските си разсъждения“ и ще посоча най-важните изследователи, които участват в работата по даден дисертационен труд:

- **Научният ръководител**, който съгласно приетата практика (макар, че не е задължително), е автор на:
    1. избора на използваните и изследвани математически обекти – възможно е и въвеждане на нови такива;
    2. тамата на дисертацията;
    3. селектиране на подходяща научна литература по темата на дисертацията
    4. постановките на част от задачите, които представляват съдържанието на дисертационния труд и трябва да се решат последователно в съответните изследвания;
    5. методи за решаване на задачите, в това число: отправни базови изследвания, възможни варианти за решения и др.;
    6. очаквани резултати и определяне на мястото им в научната литература;

7. евентуални приложения на постигнатите резултати и др.;

- **Докторантът**, който е отговорен за цялата дисертация е длъжен:
  1. задълбочено и целенасочено да се запознае с изходната информация по темата на дисертацията;
  2. технически да се подготви за написване и последващо оформление на дисертационния труд;
  3. на базата на предварително определените основни задачи да достигне до конкретно формулиране на произхождащите от тях теореми и твърдения;
  4. да участва пряко в доказателствата на твърденията, при това неговото участието да е решаващо в научната работа в някои (а защо не в повечето) части на дисертацията;
  5. да извърши „подреждане на съдържанието на изследването“, което се състои в преценка на резултатите, които са включени в дисертацията, и отпадането на някои предварително постигнати резултати, които са странични и така да се каже размиват „теорията на размитите уравнения“ или пък нарушават логическата нишка на повествованието в труда;
  6. да осъществи задължителен вторичен преглед на ограниченията (условията), гарантиращи верността на твърденията, който включва осъвършенстването им и намиране на евентуални връзки с подобни условия в изследванията на други автори и др.;
  7. евентуално сравняване на резултатите с други известни изследвания по темата (ако е възможно и има такива). Откриване на предимства и недостатъци;
  8. създаване на подходящи примери, илюстриращи теорията и др.

За мен е без съмнение, че посочените по горе задължения на докторанта без уговорки могат да бъдат преписани като изпълнени от обсъждания кандидат за придобиване на докторската степен. Друга моя задача е да преценя относителния дял на участието на докторанта в този (по принцип) общ труд и още повече в базовите публикации. Не разполагам с документ (протокол, споразумение или др.), който да установява, класифицира или разпределя степента на участие на всеки един от двамата съавтори при изработване на четирите им общи публикации, които са представени в настоящата защита. Поради това считам, че участието на докторанта при достигането до представените общи резултати е еквивалентно на неговия съавтор.

Окончателното ми мнение по тази точка от рецензията е, че:

Приносите на Мира Спасова в рецензираните научни трудове са съществени и решаващи.

10. Автореферат

Авторефератът напълно отговаря на изискванията на Правилника за развитие на академичния състав на ПУ. В него са посочени:

- кратък исторически преглед на развитието на теорията на размитите множества и произтичащите от тях интегрални уравнения;

- основни цели на дисертационния труд;
- основни задачи, разгледани в дисертацията;
- кратко описание на структурата на дисертационния труд;
- последователно (следващо изследванията в дисертацията) са дадени основните дефиниции и понятия;
- последователно (съгласно изложението в дисертационния труд) са формулирани основните ограничения и произтичащите от тях основни и помощни твърдения, получени от докторанта;
- основни приложения на теоретичните резултати на базата на конкретни примери;
- основни изводи и заключения, произтичащи от дисертационния труд, т.е. приносите на докторанта;
- авторски публикации по темата на дисертацията – 4 публикации;
- цитати – 1 цитат;
- апробация на получените резултати, състояща се в:
  - научни доклади на конференции - 5 доклада;
  - участие в проекти – 3 проекта;
- декларация за оригиналност
- библиография.

Още веднъж ще отбележа, че изводите, направени от докторанта, отразяват коректно постигнатото в предложения за рецензиране дисертационен труд. В автореферата и в дисертацията тези изводи са оформени в частта, озаглавена „Заключение“.

Материалът (в автореферата) е изложен така, че читателят може да придобие пълна и адекватна представа за резултатите в дисертацията.

11. Критични забележки и препоръки

Нямам съществени критични бележки и коментари, които биха могли да променят моето положително мнение за дисертационния труд на Мира Спасова. Действително:

- Темата на дисертацията е съвременна и така да се каже „хит“ в научните изследвания по математически анализ и интегро-диференциални уравнения не само у нас, но и в световен мащаб;
- Конкретните задачи, реализиращи целите, са избрани правилно и решени последователно в естествен порядък и сполучливо;
- Доказателствата можем да „обобщим“, като пълни и представени в достатъчни академични подробности;
- Някои конкретни реализации на твърденията са оформени умело, като самостоятелни твърдения под формата на конкретни приложения;
- Допълнително осмисляне на представените условия и твърдения може да се постигне чрез внимателно проследяване на приложените примерни реализации.

Като обща препоръка към оформянето на дисертацията ще посоча, че докторантът не е изяснил до каква степен прилаганите методи и още повече ограниченията върху изследваните обекти, при които са изпълнени определени качества на съответните решения, са заимствани от други изследователи. Например, условията в теореми 2.1.1 и 2.1.2 срещат ли се в аналогични изследвания? Тази бележка не се отнася само за цитираните две твърдения.

Бих си позволил следната препоръка, която отразява моето субективно мнение. Това означава, че препоръката може да не е съществена. За целта да разгледаме началната задача (А), записана по-горе в рецензията. Ще отбележим, че:

- Производната на неизвестната функция е от ред k – произволно естествено число;
- Интегралите, които участват в записа на уравнението, са както с променливи и така и с постоянни граници (от типа на Volterra и Fredholm);
- Неизвестната функция участва в интегралите нелинейно;
- Ядрата са от най-общ вид;
- Накрая да не забравим, че част от константите и функциите са размити.

Продължаваме:

- Едва ли има природен или изкуствен феномен, който се моделира с толкова сложно уравнение. Изучаването на „отдалечени“ от потребностите на хората обекти е излишно. Работещите, ценните идеи можем да представим върху сравнително по-прости уравнения. Нека потребителят използва нашите идеи, а не получените формули - като справочник;
- При толкова „накачулени сложнотии“ е възможно и допустимо да се изпусне важното, идейното, същността на работещия алгоритъм. Както се казва: „От многото дървета, може да не се види гората“;
- Преди време един мой учител (спестявам му името) ме съветваше така: „Недей да разглеждаш и доказваш „всичко“ по дадена тема - остави малко и за другите. Иначе как ще те цитират“.

Мисля, че моята препоръка е ясна и затова няма да я изказвам строго.

Изследванията, които са проведени в секция 2.1.4, се отнасят само за единственост на решението, поради което е естествено терминът „съществуване“ да отпадне от заглавието на тази секция.

Забелязах неясноти и технически грешки в текста на дисертацията (които на брой са поносимо много). Предадох ги на автора с единствена цел: Ако реши да преобразува дисертацията в монографичен труд тези забележки да са от полза. Освен това считам, че направените забележки нямат място в текста на рецензията, тъй като те по никакъв начин няма да променят дисертационния труд – той е „хвърлен камък“. Освен това е възможно да се придобие грешна представа за качествата на рецензираното изследване (с други думи, резултатите да се принизят), което е несправедливо.

12. Лични впечатления

Познавам Мира Спасова от преди няколко години. Тогава ни свърза общата работа по акредитацията на докторски програми по математика в няколко висши училища. След предварителна среща и запознаване с нея, по моя препоръка тя беше избрана от Постоянната комисия по природни науки математика и информатика към Националната агенция за оценяване и акредитация като експерт от квотата на докторантите в България. С поставените ѝ задачи тя се справи отлично.

Моите впечатления, които придобих по време на запознаване с нейното научно творчество, са основание да твърдя следното:

- Докторантът притежава подходяща специализирана научна подготовка по темата на дисертационния труд. Ще повторя, че темата изисква дълбоки специфични познания в няколко математически дисциплини (реален математически анализ, функционален анализ, интервален анализ, размита математика, интегрални уравнения и др.);
- Мира е талантлив и трудолюбив млад математик. Това съчетание на качества според мен ще доведе до надстройване на получените от нея достижения, което е предпоставка за научно кариерно израстване;
- Тя е старателна и притежава „сериозна заинтересованост“ от дискутираните математически обекти, както и със свързаните с тях теории;
- Струва ми се, че М. Спасова притежава потребност (желание) за работа. Това се усеща от начина на изложение в дисертацията. Тази нейна амбиция е „моторът“ за нейното израстване.

13. Препоръки за бъдещо използване на резултатите

Струва ми се, че едва ли аз съм най-подходящият специалист, който да чертае перспективите и да дава насоките за развитие на изследванията в дискутираното по-горе модерно и бих добавил доста трудно за постигане на резултати научно направление. Въпреки това ще си позволя да направя следните предложения за евентуални следващи изследвания по темата:

Първо: Би трябвало (ако е възможно, а също така и разумно) основните твърдения, които са валидни за „традиционните“ диференциални, интегрални, интегро-диференциални и други подобни типове уравнения, да се „преформулират“ и докажат за техни „размити аналози“. (По-нататък изброените класове уравнения за краткост ще наричаме само „уравнения“). Освен това, терминът „традиционни“ (а също така и „класически“) ще използваме за уравнения, във формулировката на които параметрите са числови константи и функции. Тези преформулирани размити аналогови задачи (образно казано) представляват „море“ от постановки и нерешени проблеми. Разнообразието се дължи на следните фактори:

- многообразието от типове на класически уравнения, които се обобщава;
- съответните типове размити уравнения, които представляват обобщенията;
- съдържанията на задачите, които се формулират и решават;
- метриките, които се използват в размитите аналози и т.н.;

Малка част от тези аналогови задачи са решени. Освен това, засега липсва ясна класификация на следните проблеми:

- кои от класическите задачи се пренасят непосредствено (с леки допълнения, които имат редакционен характер) върху съответните размити уравнения;
- кои от задачите изискват налагането на допълнителни сериозни и специфични ограничения;
- кои известни задачи не могат да се решат при този нов клас уравнения, защо и др.

Второ: Би трябвало да се поставят и изследват специфични феномени, които се отнасят само за размитите уравнения. Това всъщност са „важните и печеливши“

изследвания. Точно в този тип изследвания трябва да се проведат и дълбоките анализи на този интересен клас уравнения. Като пример бих посочил задачата:

Задача 1: *Да се намерят условия, които гарантират, че „дебелината" (разстоянието между горната и долната функция на нивото на търсената размита функция, която се явява решение на размито уравнение от даден тип) с неограниченото нарастване на времето монотонно или строго монотонно расте или пък (което е по-важно) намалява или (което е най-интересно) тази дебелина клони към 0.*

Изборът на разстояние (метрика) в горната задача също е дискусионна задача. Формулираната задача „не е изсмукана от пръстите". Струва ми се, че тя лежи в основата на успешни (даващи положителен резултат) изследвания за устойчивост на решенията на размитите уравнения. Действително, при изследване на някои типове устойчивост на решенията обикновено се очаква те (решенията) да клонят към 0 с неограничено нарастване на независимата променлива (обикновено тази променлива се приема за времето). Ако дебелината на размитата функция расте с времето това „очакване" няма да се случи.

Трето: Би трябвало да се създаде фундаменталната и качествена теория на размитите уравнения с импулсни въздействия. В последствие разбира се и приближени методи за намиране на решенията на такива класове уравнения. Като нагледен пример ще разгледаме размит импулсен модел на Volterra във фиксирани моменти на импулсно въздействие. Размитият модел (без импулси) е разгледан от докторанта (виж стр. 35 на дисертацията, уравнение (1.5.2)). Импулсният модел (класически или размит) има вида:

$$\begin{aligned}&\frac{dP}{dt} = aP - bP^2 - cP\int_0^t P(\tau)d\tau, \quad t \neq t_i;\\ &\Delta P(t_i) = P(t_i + 0) - P(t_i) = I_i,\ i = 1,2,\ldots;\\ &P(0) = P_0,\end{aligned} \tag{P}$$

където:

- $P = P(t)$ е количеството на популацията в момента $t \geq 0$;
- a е коефициент на раждаемост;
- b е коефициентът на струпване;
- c е коефициентът на токсичност;
- P_0 е началното количество на популацията;
- $t_1, t_2, \ldots,\ \ 0 < t_1 < t_2 < \cdots$, са фиксирани моменти на импулсни въздействия,
- $I_1, I_2, \ldots$ са големините на импулсните въздействия.

Ясно е, че ако $I_i > 0$, то в момента t_i имаме добавяне на биомаса към популацията и ако $I_i < 0$, то се отнема биомаса в този момент. В общия случай е невъзможно да се получат точните стойности на параметрите $a, b, c, P_0, I_1, I_2, \ldots$ на модела, но е възможно да се определят техни допустими граници на изменение. Тогава е естествено е да се предполага, че посочените параметри са размити числа, т.е. принадлежат на E^1, като техните r нивата са съответно:

$$a(r) = [a_1, a_2];\ b(r) = [b_1, b];\ c(r) = [c_1, c_2];\ P_0(r) = [P_{01}, P_{02}];\ I_i(r) = [I_{i1}, I_{i2}], i = 1,2, \ldots$$

Следователно, описаният по-горе модел (P) най-общо може да се разглежда като размито импулсно интегро-диференциално уравнение с фиксирани моменти на импулсно въздействие. Ще спомена, че още по-общ е моделът, когато импулсните моменти са променливи. За такива и подобни уравнения фундаменталната теория е в начален етап на изграждане, а качествената им теория не е зачената. Съответното „море“ от задачи за описаните уравнения (в което има място за всички китайци) най-напред включва въпросите за съществуване, единственост, форма на техните решения и други аналогични въпроси. Получаване на достатъчни условия, установяващи традиционни качества на решенията, като: непрекъсната зависимост, монотонност, ограниченост, устойчивост, асимптотична устойчивост, устойчивост при постоянно действащи смущения и т.н. са следващата група задачи, които трябва да се решат. Тук ще си позволя да формулирам следната конкретна задача:

Задача 2: *Разглеждаме (P), когато $c = 0$. В този случай полученият от (P) модел се нарича логистичен модел на Verhulst. Да се намерят условия за периодичност на решението.*

Струва ми се, че ще се окаже, че за да съществуват периодични решения импулсните въздействия $I_1, I_2, \ldots$ трябва да са реални константи (а не размити числа).

Четвърто: Тук се изкушавам да посоча (според мен) най-атрактивната група задачи. Към тази група причислявам задачите за намиране на условия за съществуване на специфични качества на решенията, произтичащи от импулсните въздействия. Като примери ще посоча: непрекъсната зависимост и устойчивост на решенията на размити импулсни уравнения от:

- импулсните моменти;
- големините на импулсните въздействия;
- импулсните хиперповърхнини (при някои класове импулсни размити уравнения с променливи импулсни моменти) и т.н.

За да не съм „голословен“ ще формулирам една такава специфична задача (в разказен стил). За целта ще използвам отново модела (P). Да разгледаме смутената на (P) размита импулсна начална задача:

$$\begin{aligned} &\frac{dQ}{dt} = aQ - bQ^2 - cQ\int_0^t Q(\tau)d\tau, \quad t \neq \theta_i; \\ &\Delta Q(t_i) = Q(\theta_i + 0) - Q(\theta_i) = I_i; \\ &Q(0) = P_0, \end{aligned} \tag{Q}$$

където импулсните моменти са $\theta_1, \theta_2, \ldots,\ \ 0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots$. Разликите между задачите (P) и (Q) са само импулсните моменти, т.е. можем да предполагаме, че в основната задача (P) са смутени импулсните моменти, в резултат на което получаваме задача (Q). Ще казваме, че решението на основната задача (P) зависи непрекъснато от импулсните моменти, ако:

$$(\forall\varepsilon = const > 0)(\forall T = const > 0)(\exists\delta = \delta(\varepsilon, T) > 0):$$

$$(\forall \theta_1, \theta_2, \dots,\ \ 0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots;\ |\theta_1 - t_1| < \delta,\ |\theta_2 - t_2| < \delta, \dots) \qquad \text{(R)}$$
$$\Rightarrow\ \rho\big(\{(t, P(t));\ \ 0 \le t \le T\},\ \{(t, Q(t));\ \ 0 \le t \le T\}\big) <\ \varepsilon.$$

В дефиниционння израз (R) са използвани символите: с помощта на $G_P = \{(t, P(t));\ \ 0 \le t \le T\}$ и $G_Q = \{(t, Q(t));\ \ 0 \le t \le T\}$ са означени съответно графиките на размитите функции $P(t)$ и $Q(t)$ в интервала $[0, T]$; с ρ е означена подходяща метрика между графиките G_P и G_Q. Например, избраната метрика може да е Хаусдорфова. В този случай ще отбележа, че тъй като размитите функции $P(t)$ и $Q(t)$ са прекъснати в точките на импулсни въздействия, то намирането на Хаусдорфовото растояние между техните графики е „тънка“ задача, изискваща задълбочени предварителни изследвания. Съответната задача, произтичаща от дефиницията (R), вече можем да формулираме както следва:

Задача 3: *Да се намерят достатъчни условия, при които решението на размита импулсна начална задача за даден клас уравнения зависи непрекъснато от импулсните моменти.*

Ще кажа: каква проста и изящна формулировка на Задача 3 и каква „мъка“ е необходима за нейното решаване. Ще обърна внимание на още една специфична особеност при размитите импулсни уравнения. Тъй като импулсните въздействия по същество представляват прибавяне в определени моменти на размити числа към изследваното решение (размита функция), то след всяко въздействие „дебелината“ на решението импулсно (мигновено, скокообразно) се увеличава. Нарастване на дебелината на решението в глобален смисъл (например при $t\epsilon[0, T]$, където T е сравнително голяма положителна константа) е недопустимо при изследвания за непрекъсната зависимост или за устойчивост на решенията (във втория случай $T = \infty$). Поради това е наложително да се предложат такива условия, при наличие на които дебелината на решението монотонно намалява „непрекъснатата част“ на решенията, т.е. между импулсните моменти. По този начин е възможно да се компенсира „раздалечаването“ на долната и горна функция на ниво в глобален смисъл.

Пето: Би трябвало да се направи сравнително пълна характеристика на работещите приближените методи за намиране на решенията на размити уравнения, които по същество са аналози на популярните методи, предназначени за класическите уравнения. Изучаваните размити уравнения би трябвало да са значително по-прости и сортирани по класове в сравнение с разглежданите в дисертацията. Характеристиката трябва да включва: кои от класическите методи за апроксимиране на решенията остават в сила и за решенията на съответните размити уравнения; какви допълнителни условия и защо трябва да се изискват; стеснява ли се класът на размитите уравнения, за които е валиден даден апроксимационен метод; възникват ли допълнителни трудности при размитите уравнения и пр.

Шесто: Въвеждането и изследването на конкретни модели от различните науки (не само природните и инженерните науки, а също и икономическите, социалните и др), а също така и моделирането на обекти от практиката чрез размити уравнения безспорно ще издигне моделирането на по-високо ниво. Това е от една страна, а от друга - ще спомогне за появяването на нови теоретични задачи, които ще доведат до въвеждането и изследването на нови класове моделни размити уравнения.

Заключение

Направените по-горе в рецензията бележки и анализи ми дават основание да направя следните общи изводи:

1. Научните трудове (дисертацията и съответните научни публикации) съдържат нови теоретични изследвания. Получените резултати развиват и обогатяват математическото познание. Те са оригинален принос на кандидата за придобиване на образователната и научна степен „доктор“;
2. Получените резултати са тясно свързани с математическия анализ, т.е. отговарят на докторската програма, по която е представен дисертационния труд;
3. Изследванията на докторанта са публикувани в реномирани издания (AIP Conference Proceedings), които са отразени в базата данни Web of Science и Scopus;
4. Достиженията на кандидата изпълняват, а по някои показатели значително надхвърлят изискванията на Закона за развитие на академичния състав в Република България (ЗРАСРБ) и Правилника за прилагане на ЗРАСРБ относно придобиване на образователната и научна степен „доктор“;
5. Не установих плагиатство.

На основание на казаното по-горе давам своята **положителна оценка** за проведеното изследване, представено в рецензираните по-горе дисертационен труд, автореферат и научни публикации. Предлагам на Научното жури да присъди образователната и научна степен „доктор“ на Мира Лъчезарова Спасова по:

- област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика;
- професионално направление: 4.5. Математика;
- докторска програма: Математически анализ.

05.04. 2024 г.

Рецензент: ....

(проф. дн Ангел Дишлиев)