ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ
„ПАИСИЙ ХИЛЕНДАРСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

КАТЕДРА „КОМПЮТЪРНИ ТЕХНОЛОГИИ“

РАДОСЛАВА САШКОВА ТЕРЗИЕВА

УСТОЙЧИВОСТ НА ДИФЕРЕНЦИАЛНИ И ДИФЕРЕНЧНИ УРАВНЕНИЯ С ИМПУЛСИ С ПРОДЪЛЖИТЕЛНО ДЕЙСТВИЕ

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертационен труд
за присъждане на образователната и научна степен „доктор“
в област 4. Природни науки, математика и информатика,
професионално направление 4.5. Математика,
докторска програма Диференциални уравнения
научен ръководител:
проф. д.м.н. Снежана Георгиева Христева

гр. Пловдив,
2023 г.

Дисертационният труд е обсъден и насрочен за защита на разширен катедрен съвет на катедра „Компютърни технологии“ при Факултета по математика и информатика на ПУ „Паисий Хилендарски“ на 18.10.2023 г.

Дисертационният труд „Устойчивост на диференциални и диференчни уравнения с импулси с продължително действие“ се състои от увод, три глави, заключение и библиография. Общият обем на дисертационния труд е 108 страници. Библиографията включва 81 източника. Броят на авторските публикации е 7.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на 04.12.2023 г. от 11:00 часа в Заседателната зала на ПУ „Паисий Хилендарски“.

Материалите по защитата са на разположение на интересуващите се в секретариата на ФМИ – каб. 330 в Нова сграда на ПУ „Паисий Хилендарски“, всеки работен ден от 8:30 до 17:00 часа.

Научно жури

Председател:

доц. д-р Кремена Стефанова (ПУ „П. Хилендарски“, Пловдив)

Членове:

1. проф. д-р Светослав Ненов (ХТМУ, София)
2. проф. д-р Цанко Дончев (УАСГ, София)
3. проф. Димитър Колев (Акад. на МВР, София)
4. проф. д.м.н. Снежана Христева-Краева (ПУ „П. Хилендарски“, Пловдив)

Номерацията на теоремите, лемите, забележките и дефинициите в автореферата съвпада с тяхната номерация в дисертационния труд.

Съдържание

Обща характеристика на дисертационния труд

През 60 - те години на миналия век импулсните системи са дефинирани от V. Millman и A. Myshkis. Въпреки това теорията за импулсните диференциални уравнения започва своето бързо развитие през 80 - те години и продължава да се развива и до наши дни. Изграждането на теорията на импулсните уравнения дава възможност много по-адекватно да се моделират някои процеси и феномени от реалния свят. Импулсните уравнения са използвани за моделиране в много различни области от науката и технологиите ([29], [68]).

Основните видове детерминирани импулси в литературата, известни досега са:

- *мигновени импулси*: стартират скокообразно във фиксирани моменти от време, като продължителността им е малка в сравнение с продължителността на целия процес. Моделите в тези ситуации се описват с т.нар. импулсни диференциални уравнения ([66], [54]);

- *импулси с продължително действие*: стартират скокообразно във фиксирани моменти от време, като продължават да действат в краен интервал, който не може да се пренебрегне. През 2013 г. E. Hernandez и D. O'Regan ([36]) дефинират за пръв път този нов клас диференциални уравнения. През 2017 г. излиза първата монография за диференциални уравнения с импулси с продължително действие ([8]), а по-късно, през 2018 г. и втората ([73]).

Един от основните проблеми за изследване при тези типове диференциални уравнения е устойчивостта на решенията им.

В края на XIX век А. Ляпунов изучава устойчивост на решенията на диференциални уравнения. Класическите непрекъснати функции на Ляпунов се използват за изследване на различни видове диференциални уравнения без импулси ([24], [52], [80]). За да се изучи устойчивостта на уравнения с импулси с продължително действие се използва

модифициран метод на Ляпунов. Тъй като решенията на диференциалните уравнения с импулси с продължително действие са частично непрекъснати функции, се използва подходяща дефиниция за класическите функции на Ляпунов, които са частично непрекъснати. През последните 5 години много автори прилагат частично непрекъснатите функции на Ляпунов за изучаване на диференциални уравнения с импулси с продължително действие ([9], [4], [31], [38], [27], [53]).

В дисертационния труд се изследват различни видове устойчивост на решенията на следните два основни **обекта**:

1. Диференчни уравнения.
2. Диференциални уравнения с импулси с продължително действие.

Цели и задачи на дисертационния труд

Основните **цели** на дисертационния труд за описаните два основни обекта са:

I. За диференчни уравнения:

   1. Да се разшири теорията за приближено намиране на решенията на диференчни уравнения с импулси с продължително действие.
   2. Да се допълни качествената теория за диференчни уравнения и по-конкретно теорията за устойчивост на решенията.

II. За диференциални уравнения с импулси с продължително действие:

   1. Да се допълни качествената теория за диференциални уравнения с импулси с продължително действие и по-конкретно теорията за устойчивост на решенията.
   2. Да се приложат част от получените достатъчни условия върху динамичен модел на невронни мрежи, където отделните неврони са подложени на импулси с продължително действие.

Целите на настоящия дисертационнен труд се постигат чрез решаване на следните **задачи**:

1. За диференчни уравнения с импулси с продължително действие– построяване и обосноваване на приближен метод за намиране на решенията на началната задача за диференчни уравнения с импулси с продължително действие.

2. За диференчни уравнения – получаване на нови достатъчни условия за:

   2.1. равномерна устойчивост;

   2.2. асимптотическа устойчивост;

   2.3. устойчивост с разлика в началното време;

   2.4. равномерна устойчивост с разлика в началното време;

   2.5. равномерна асимптотическа устойчивост с разлика в началното време.

3. За диференциални уравнения с импулси с продължително действие – получаване на нови достатъчни условия за:

   3.1. устойчивост по отношение на част от променливите;

   3.2. равномерна устойчивост по отношение на част от променливите;

   3.3. равномерна асимптотическа устойчивост по отношение на част от променливите;

   3.4. липшицова устойчивост;

   3.5. равномерна липшицова устойчивост.

4. Прилагане върху конкретен модел за невронни мрежи на получените достатъчни условия, за да се покаже тяхната ефективност.

Структура и обем на дисертационния труд

Дисертационният труд съдържа 108 страници и се състои от увод, три глави, авторска справка, перспективи за развитие, апробация на резултатите, публикации по темата, цитиране на резултатите от дисертационния труд, декларация за оригиналност и достоверност на дисертационния труд и библиография.

Първа глава съдържа помощни резултати и е посветена на диференчни и диференциални уравнения с импулси с продължително действие. Тя се състои от три параграфа:

- В параграф 1.1 описваме диференциални уравнения с импулси с продължително действие и разглеждаме примери, с които илюстрираме как се получават решенията на този тип уравнения. Посочени са някои феномени за диференциални уравнения с импулси с продължително действие: сливане на решението, умиране на решението, неединственост на решението, ненулево решение с нулева начална стойност. Всички тези феномени са илюстрирани с примери.

- В параграф 1.2 описваме устойчивостта на нулевите решения на диференциални уравнения с импулси с продължително действие и са разгледани примери.

- В параграф 1.3 представяме граничната задача за диференчни уравнения с импулси с продължително действие.

Във втора глава разглеждаме диференчни уравнения:

- В параграф 2.1 представяме метод за приближено намиране на решение на диференчни уравнения с импулси с продължително действие. За обобщение разглеждаме граничната задача.

- В параграф 2.2 получаваме достатъчни условия за равномерна устойчивост и равномерна асимптотическа устойчивост на нулевите решения на нелинейни неавтономни диференчни уравнения.

- В параграф 2.3 изследваме устойчивост с разлика в началното време за неавтономни диференчни уравнения. Този тип устойчивост включва промяна, както в началното време, така и в началните стойности.

В трета глава разглеждаме диференциални уравнения с импулси с продължително действие и различни видове устойчивост на нулевото решение.

- В параграф 3.1 получаваме достатъчни условия за три вида устойчивост по отношение на част от променливите: устойчивост, равномерна устойчивост и равномерна асимптотическа устойчивост. Устойчивост по отношение на част от променливите е обобщение на устойчивост. Устойчивост на нулевото решение по отношение на част от променливите изисква при достатъчно малка норма на началната стойност, нормата на решението да остава произволно малка спрямо някоя от променливите.

- В параграф 3.2 с помощта на модифицирани функции на Ляпунов изследваме липшицова устойчивост. Получаваме достатъчни условия за липшицова устойчивост, равномерна липшицова устойчивост и глобална равномерна липшицова устойчивост. Липшицовата устойчивост показва горна граница на решението, зависеща от началната стойност.

- В параграф 3.3 дефинираме модел на невронни мрежи, които са обект на импулсни въздействия с продължително действие. Получаваме достатъчни условия за липшицова устойчивост на равновесната точка на невронните мрежи. Теоретичните резултати илюстрираме с примери за нелинейни невронни мрежи.

В авторската справка отбелязваме накратко основните резултати, получени в дисертационния труд.

В перспективи за развитие посочваме възможните бъдещи насоки за развитие.

В апробация на резултатите изброяваме международните и националните конференции, на които са докладвани част от резултатите. Също така отбелязваме и научните проекти, по които са проведени част от изследванията в дисертационния труд.

В декларация за оригиналност и достоверност на дисертационния труд заявяваме, че резултатите и приносите в дисертационния труд са оригинални и не са заимствани от изследвания и публикации на други автори.

Библиографията съдържа 81 заглавия на научни статии и монографии, които са използвани при изследванията, свързани с дисертационния труд.

При решаване на уравненията и графичното представяне на решенията им е използвана компютърната алгебрична система (CAS) Wolfram Mathematica.

За всички заимствани резултати в дисертационния труд са посочени съответните първоизточници в квадратни скоби.

Глава 1. Кратък обзор на диференциални и диференчни уравнения с импулси с продължително действие

Първа глава съдържа три параграфа на 22 страници. Тя е посветена на диференчни и диференциални уравнения с импулси с продължително действие.

Ще разгледаме само диференциалните уравнения с импулси с продължително действие (ДУИПД).

Нека са дадени две растящи редици $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{s_i\}_{i=1}^{\infty}$ такива, че $0 < ... < s_i < t_i < s_{i+1}, i = 1, 2, \ldots$ и $\lim_{k\to\infty} s_k = \infty$.

Нека $t_0 \in [0, s_1) \bigcup (\bigcup_{k=0}^{\infty}[t_k, s_{k+1}])$, без ограничение на общността може да смятаме, че $t_0 \in [0, s_1)$.

Разглеждаме началната задача за нелинейно диференциално уравнение с импулси с продължително действие (виж [8], [13], [70] и др.)

$$\begin{aligned} &x^{'}(t) = f(t, x(t)), \text{ при } t \in \cup_{k=0}^{\infty}(t_k, s_{k+1}] \\ &x(t) = \phi_k(t, x(t), x(s_k - 0)), \text{ при } t \in (s_k, t_k] \\ &x(t_0) = x_0, \end{aligned} \tag{1}$$

където $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f : \bigcup_{k=0}^{\infty}[t_k, s_{k+1}] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\phi_k : [s_k, t_k] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

(H1) Функцията $f \in C(\bigcup_{k=0}^{\infty}([t_k, s_{k+1}] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ и $f(t, 0) \equiv 0$.

(H2) За всяко фиксирано $t \in [s_k, t_k]$ и $y \in \mathbb{R}^n$, алгебричното уравнение $x = \phi_k(t, x, y)$ има единствено решение $x = \phi_k(t, y), \phi_k \in C([s_k, t_k] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ и $\phi_k(t, 0) \equiv 0$.

Ако условие (H2) е изпълнено, то началната задача за ДУИПД (1) може да се запише в следния вид:

$$\begin{aligned} &x^{'}(t) = f(t, x(t)), \text{ при } t \in \cup_{k=0}^{\infty}(t_k, s_{k+1}] \\ &x(t) = \phi_k(t, x(t_k - 0)), \text{ при } t \in (s_k, t_k] \\ &x(t_0) = x_0, \end{aligned} \tag{2}$$

Ще използваме следните класове:

$$K = \{a \in C[\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+] : \ a \text{ е строго растяща и } a(0) = 0\},$$

$$S_\rho = \{x \in \mathbb{R}^n : \ ||x|| \leq \rho, \ \rho > 0\}.$$

Ще използваме класа Λ от функции на Ляпунов и производната на Дини за функцията $V(t, x) \in \Lambda(J, \Delta)$ ([8]).

Глава 2. Диференчни уравнения

В **тора глава** съдържа три параграфа на 24 страници. В нея е предложен метод за приближено решаване на диференчни уравнения с импулси с продължително действие. Изследвани са устойчиви свойства на решенията на нелинейни диференчни уравнения, като са получени нови достатъчни условия за устойчивост и устойчивост с разлика в началното време. Изследванията са направени с използването на метод на Ляпунов и дискретни функции на Ляпунов.

Ще разгледаме само достатъчните условия за устойчивост с разлика в началното време на ненулево решение (УРНВ).

Нека $\mathbb{Z}$ е множеството на целите числа, $a, b \in \mathbb{Z}$ и $a < b$. Дефинираме множеството $\mathbb{Z}[a, b] = [a, a+1, a+2, \ldots, b]$. Ще отбележим, че $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{Z}[0, \infty)$.

Разглеждаме неавтономното диференчно уравнение

$$\Delta y(n) = f(n, y(n)), n \geq n_0 \tag{3}$$

с начално условие

$$y(n_0) = \phi_0, \tag{4}$$

където $\Delta y(n) = y(n) - y(n-1), n, n_0 \in \mathbb{Z}^+, y, \phi_0 \in \mathbb{R}^k, f : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$.

Ще отбележим, че n_0 ще наричаме начално време, а ϕ_0 - начална стойност.

Предполагаме, че за всяко $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ и $\phi_0 \in \mathbb{R}^k$ началната задача (3), (4) има единствено решение $y(n) = y(n; n_0, \phi_0)$, при $n \geq n_0$ (За достатъчни условия за съществуване на решение, виж, например [3]).

Дефиниция 2.3.1. Решението $y^*(n)$ се нарича устойчиво с разлика в началното време (УРНВ), ако $\forall \epsilon > 0$ съществуват $\delta = \delta(\epsilon, N_0) > 0$ и $\Delta = \Delta(\epsilon, N_0) > 0$ такива, че при $\phi_0 \in \mathbb{R}^k : ||\phi_0 - \psi_0|| < \delta$ и $n_0 \in \mathbb{Z}^+ : |n_0 - N_0| < \Delta$ е изпълнено $||y(n+\eta) - y^*(n)|| < \epsilon$, където $n \in \mathbb{Z}[N_0, \infty)$, $y(n) = y(n; n_0, \phi_0)$ е решение на (3), дефинирано при $n \in \mathbb{Z}[n_0, \infty)$ и $\eta = n_0 - N_0$.

Теорема 2.3.1. (УРНВ) Нека са изпълнени следните условия:

1. Функцията $y^*(n) = y(n; N_0, \psi_0)$, $n \in \mathbb{Z}[N_0, \infty), N_0 \in \mathbb{Z}^+$, $\psi_0 \in \mathbb{R}^k$ е дадено решение на (3), (4).

2. Функцията $V : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^+$, $V(n, 0) = 0$ при $n \in \mathbb{Z}[N_0, \infty)$ е непрекъсната по втория си аргумент и

   (i) $b(||u||) \leq V(n, u), n \in \mathbb{Z}[N_0, \infty), u \in \mathbb{R}^k$, където $b \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ е ненамаляваща функция, за която $b(s) > 0$, при $s > 0$;

   (ii) за всяко $n \in \mathbb{Z}[N_0, \infty)$ и $y \in \mathbb{R}^k : y - y^*(n) \in S_\rho$ е изпълнено

   $$V(n, y - y^*(n)) - V(n-1, y - y^*(n) - f(n+\eta, y) + f(n, y^*(n))) \leq 0,$$

   където $\rho > 0$ са дадени и $|\eta| < A, A > 0$.

Тогава решението $y^*(n)$ е УРНВ.

Ще разгледаме пример, за да илюстрираме получените теоретични резултати.

Пример 2.3.1

Разглеждаме нелинейното неавтономно диференчно уравнение

$$\Delta y(n) = n^4 (1 - y(n))^3, \tag{5}$$

с начално условие

$$y(0) = 0. \tag{6}$$

Нека $V(n,y) = y^2$. Означаваме $f(n,y) = n^4(1-y)^3$, където $y \in \mathbb{R}$. Разглеждаме решението $y^*(n) \equiv 1, n \in \mathbb{Z}^+$ на (5). Тогава

$$\begin{aligned}
&V(n, y - y^*(n)) - V(n-1, y - y^*(n) - f(n+\eta, y) + f(n, y^*(n)))\\
&= (y-1)^2(1 - (1 + (n+\eta)^4(y-1)^2)^2)\\
&= -(y-1)^4(n+\eta)^4(2 + (n+\eta)^4(y-1)^2) < 0
\end{aligned}$$

Решението $y^*(n) = 1$ е УРНВ.

Глава 3. Диференциални уравнения с импулси с продължително действие

Т**рета глава** съдържа 3 параграфа на 30 страници. В нея са разгледани диференциални уравнения с импулси с продължително действие и са получени достатъчни условия за различни видове устойчивост.

Ще разгледаме само липшицова устойчивост.

Дефиниция 3.2.1 Нулевото решение на (2) се нарича

- липшицово устойчиво, ако съществува $M \geq 1$ и за всяко $t_0 \geq 0$ съществува $\delta = \delta(t_0) > 0$ такова, че при $x_0 \in \mathbb{R}^n$, за което $||x_0|| < \delta$, е изпълнено неравенството $||x(t; t_0, x_0)|| \leq M||x_0||$, при $t \geq t_0$;
- равномерно липшицово устойчиво, ако съществуват $M \geq 1$ и $\delta > 0$ такива, че за всяко $t_0 \geq 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$, за което $||x_0|| < \delta$, е изпълнено неравенството $||x(t; t_0, x_0)|| \leq M||x_0||$, при $t \geq t_0$;
- глобално равномерно липшицово устойчиво, ако съществува $M \geq 1$ такова, че за всяко $t_0 \geq 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$, за което $||x_0|| < \infty$, е изпълнено неравенството $||x(t; t_0, x_0)|| \leq M||x_0||$, при $t \geq t_0$.

За получаване на достатъчни условия за липшицова устойчивост използваме помощната начална задача за скаларното ДУИПД:

$$\begin{aligned}
&u^{'}(t) = g(t, u(t)), \text{ при } t \in \cup_{k=0}^{\infty}(t_k, s_{k+1}]\\
&u(t) = \psi_k(t, u(s_k - 0)), \text{ при } t \in (s_k, t_k]\\
&u(t_0) = u_0,
\end{aligned} \tag{7}$$

където $g : \cup_{k=0}^{\infty}[t_k, s_{k+1}] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \psi_k : [s_k, t_k] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(H3) Функцията $g(t,u) \in C(\bigcup_{k=0}^{\infty}[t_k, s_{k+1}] \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $g(t,0) = 0$ и функциите $\psi_k : [s_k, t_k] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ са ненамаляващи по отношение на втория си аргумент и $\psi_k(t,0) = 0$.

Теорема 3.2.3. Нека са изпълнени условията

1. В сила са условията (H1), (H2) и (H3).
2. Съществува функция $V(t,x) \in \Lambda(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ и
   (i) неравенствата
   $$b(||x||) \leq V(t,x) \leq a(||x||), \quad x \in S_\rho, t \in \mathbb{R}^+$$
   са изпълнени, където $b \in K([0,\rho])$, $a \in M([0,\rho])$, $\rho > 0$;
   (ii) неравенството $D^+V(t,x) \leq g(t, V(t,x))$ е изпълнено при $t \in \bigcup_{k=0}^{\infty}(t_k, s_{k+1}), x \in S_\rho$;
   (iii) за всяко $k = 1, 2, \ldots$ е изпълнено неравенството
   $$V(t, \phi_k(t,y)) \leq \psi_k(t, V(s_k - 0, y)), \quad t \in (s_k, t_k], \quad y \in S_\rho.$$
3. Нулевото решение на (7) е равномерно липшицово устойчиво (равномерно глобално липшицово устойчиво).

Тогава нулевото решение на (2) е равномерно липшицово устойчиво (равномерно глобално липшицово устойчиво).

В § 3.3 е изследван специален динамичен модел на невронни мрежи, подложени на импулси с продължително действие, където смущенията на импулсите започват своето действие в фиксирана точка и остават активни в даден краен интервал.

Изучаваме общия случай, когато активиращите функции не са липшицови (в литературата е изследван само случая, когато са липшицови).

Разглеждаме следния модел за невронни мрежи с импулси с продължително действие, който се основава на модела на Hopfield:

$$\begin{aligned} &x_i'(t) = -c_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)f_j(x_j(t)) + I_i(t), \ t \in \cup_{k=0}^{\infty}(t_k, s_{k+1}], \\ &x_i(t) = \Phi_{k,i}(t, x_i(s_k - 0)), \ \text{при } t \in (s_k, t_k], \ i = 1, 2, \ldots n \\ &x_i(t_0) = x_i^0, \end{aligned} \tag{8}$$

където:

- n е броят на невроните в мрежата;
- $x_i(t)$ съответства на мембранния потенциал на i-тия неврон във време t;
- $a_{ij}(t),\ i,j = 1,2,\ldots,n$, е връзка от тип синапсис между i-тия и j-тия неврон в момент t;
- с $f_j(x_j)$ се означават активиращата функции на j-тия неврон;
- $I_i(t)$ е външно въздействие върху i-тия неврон;
- функциите $\phi_{k,i}(t,x_i),\ k = 1,2,\ldots$ са импулсни функции, които показват големината импулсното въздействие на i-тия неврон в интервала $(s_k, t_k]$.

Дефиниция 3.3.1 Векторът $x^* \in \mathbb{R}^n,\ x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ е равновесна точка на ДУИПД (8), ако са изпълнени уравненията

$$0 = -c_i(t)x_i^* + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)f_j(x_j^*) + I_i(t),\ \text{при } t \in \cup_{k=0}^{\infty}(t_k, s_{k+1}] \tag{9}$$

и

$$x_i^* = \phi_{k,i}(t, x_i^*),\quad \text{при } t \in (s_k, t_k],\ i = 1,2,\ldots,n. \tag{10}$$

Условие А1. ДУИПД (8) има равновесна точка $x^* \in \mathbb{R}^n$.

Условие А2. Активиращите функции са локално липшицови, т.е. съществува положително число $L_i,\ i = 1,2,\ldots,n$ и $\lambda > 0$ такова, че $|f_i(u) - f_i(v)| \le L_i|u - v|,\ i = 1,2,\ldots,n$, при $u, v \in \mathbb{R}:\ |u - x_i^*| \le \lambda, |v - x_i^*| \le \lambda$, където точката $x^* \in \mathbb{R}^n$ е равновесна точка от условие А1.

Условие А3. Съществуват положителни числа $M_{i,j},\ i,j = 1,2,\ldots,$ n такива, че $|a_{i,j}(t)| \le M_{i,j}$, при $t \in [0, s_1] \bigcup \cup_{k=1}^{\infty}(t_k, s_{k+1}]$.

Условие А4. Съществува число $B > 0$ такова, че $c_i(t) \ge B$ при $t \in [0, s_1] \bigcup \cup_{k=1}^{\infty}(t_k, s_{k+1}],\ i = 1,2,\ldots,n$ и е изпълнено неравенството

$$B \ge 0.5 \max_{i=1,2,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} M_{ij}\ L_j + 0.5 \sum_{i=1}^{n} \max_{j=1,2\ldots,n} M_{ij}L_j. \tag{11}$$

Условие А5. За всяко $k = 1,2,\ldots$ и $x \in \mathbb{R}^n:\ ||x - x^*|| \le \lambda$ е изпълнено неравенството

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(\Phi_{k,i}(t,x_i) - \Phi_{k,i}(t,x_i^*)\Big)^2 \le \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^*)^2, \qquad t \in [s_k, t_k],$$

където x^* е равновесната точка от условие A1 и λ е числото, дефинирано в A2.

В дисертационния труд са разгледани два случая на активиращи функции, които са липшицови и които не са липшицова.

Ще се спрем само на случая на активиращи функции, които не са липшицови. В този случай въвеждаме условието:

Условие A6. Съществува функция $\xi \in C([0, s_1] \bigcup \cup_{k=1}^{\infty}(t_k, s_{k+1}], \mathbb{R})$ такава, че за всяка точка $x: \ x - x^* \in S_\lambda$ и $t \in [0, s_1] \bigcup \cup_{k=1}^{\infty}(t_k, s_{k+1}]$ е изпълнено неравенството

$$(x_i - x_i^*)\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(t)(f_j(x_j) - f_j(x_j^*))\Big) \leq \xi(t) \sum_{j=1}^{n} \Big(x_j - x_j^*\Big)^2, \qquad (12)$$

където $i = 1, 2, \ldots, n$, x^* е равновесна точка от условие A1.

Теорема 3.3.2 Нека са изпълнени условията:

1. В сила са условия A1 и A6.

2. Функциите $c_i \in C(\cup_{k=0}^{\infty}(t_k, s_{k+1}], \mathbb{R}^+)$, $i = 1, , \ldots, n$.

3. Импулсните функции $\Phi_{k,i} \in C([s_k, t_k] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ и съществува положително число λ такова, че за всяко $x \in \mathbb{R}^n: \ x - x^* \in S(\lambda)$ е изпълнено неравенството

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(\Phi_{k,i}(t, x_i) - \Phi_{k,i}(t, x_i^*)\Big)^2 \leq \mu_k(t) \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^*)^2, \qquad t \in [s_k, t_k],$$

   където x^* е равновесна точка.

4. Съществува $p \in C^1([0, \infty), \mathbb{R}^+): \ 0 < \alpha \leq p(t) \leq \beta, \ t \geq 0$ такова, че $p(t) \leq p(s_k)$ при $t \in [s_k, t_k]$ и нулевото решение на скаларното ДУИПД (7) с $g(t, u) = 2\gamma(t)u$ и $\psi_k(t, u) = \mu_k(t)u$ е равномерно липшицово устойчиво (равномерно глобално липшицово устойчиво), където

$$\gamma(t) = -\min_{i=1,2,\ldots,n} c_i(t) + n\xi(t) + 0.5\frac{p'(t)}{p(t)}, \ t \in \cup_{k=0}^{\infty}(t_k, s_{k+1}].$$

Равновесната точка x^* на (8) е равномерно липшицово устойчива (равномерно глобално липшицово устойчива).

Пример 3.3.4. За опростяване на изчисленията, ще разгледаме невронна мрежа от две единици, т.е. $n = 2$. Нека $t_0 \in [0,1)$, $s_k = k$, $t_k = k + 0.5$, $k = 1, 2, \ldots$ Разглеждаме нелинейното ДУИПД

$$
\begin{aligned}
&x_1'(t) = -e^{-t}x_1(t) - \frac{0.5}{t+1}f_1(x_1(t)) + \frac{1}{t+1}f_2(x_2(t)) + 0.5e^{-t} - \frac{1}{t+1}\\
&x_2'(t) = -\frac{1}{t+1}x_2(t) - \frac{1}{t+1}f_2(x_2(t)) + \frac{1}{t+1}, \qquad \text{при } t \in \cup_{k=0}^{\infty}(t_k, s_{k+1}],\\
&x_1(t) = \frac{1}{t}x_1(s_k - 0) + 0.5\frac{t-1}{t}\\
&x_2(t) = \frac{1}{t}x_2(s_k - 0), \qquad \text{при } t \in (s_k, t_k],
\end{aligned}
\tag{13}
$$

където активиращите функции са функциите $f_1(u) = \sqrt{2}\, erf^{-1}(2u-1)$ и $f_2(u) = \cos(u)$, $c_1(t) = e^{-t}$, $c_2(t) = \frac{1}{t+1}$, $I_1(t) = 0.5e^{-t} - \frac{1}{t+1}$, $I_2(t) = \frac{1}{t+1}$, $\Phi_{1,k}(t,u) = \frac{1+t}{t}u - \frac{0.5}{t}$, $\Phi_{2,k}(t,u) = \frac{u}{t}$ и

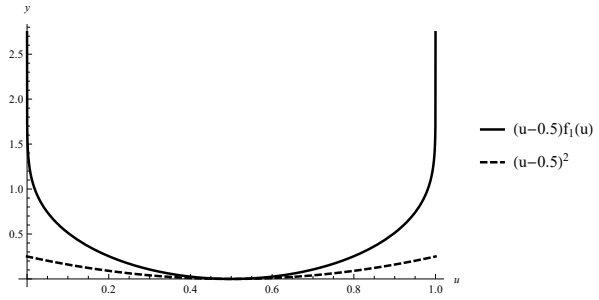
$$
A(t) = \begin{pmatrix} -\frac{0.5}{t+1} & \frac{1}{t+1} \\ 0 & -\frac{1}{t+1} \end{pmatrix}
$$

Тогава равновесната точка е $x_1^* = 0.5, x_2^* = 0$.

От неравенството $(u-0.5)f_1(u) \geq (u-0.5)^2$, $u \in \mathbb{R}$ (виж Фигура 1), получаваме

$$
-\frac{0.5}{t+1}(u-0.5)f_1(u) \leq -\frac{0.5}{t+1}(u-0.5)^2 \leq \frac{0.5}{t+1}(u-0.5)^2, \quad u \in \mathbb{R}. \tag{14}
$$

От неравенство (14) и $|cos(u) - 1| \leq |u|$, $u \in \mathbb{R}$ (виж Фигура 2)



Фигура 1: Графика на функциите $(u-0.5)\sqrt{2}\ erf^{-1}(2u-1)$ и $(u-0.5)^2$.

получаваме неравенствата

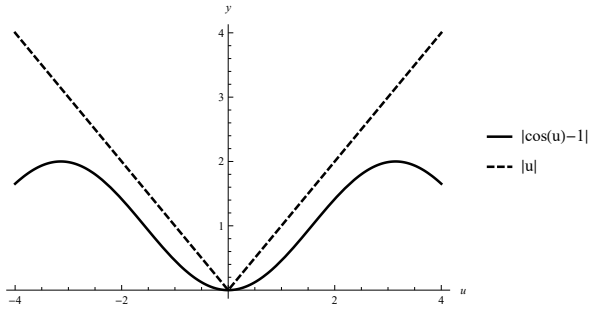
$$
\begin{aligned}
&(x_1-0.5)\Big(a_{1,1}(t)(f_1(x_1)-f_1(0.5))+a_{1,2}(t)(f_2(x_2)-f_2(0))\Big)\\
&=(x_1-0.5)\Big(a_{1,1}(t)f_1(x_1)+a_{1,2}(t)(f_2(x_2)-1)\Big)\\
&=-\frac{0.5}{t+1}(x_1-0.5)f_1(x_1)+\frac{1}{t+1}(x_1-0.5)(f_2(x_2)-1)\Big)\\
&\le\frac{0.5}{t+1}\Big(x_1-0.5\Big)^2+\frac{1}{t+1}(x_1-0.5)(\cos(x_2)-1)\\
&\le\frac{0.5}{t+1}\Big(x_1-0.5\Big)^2+\frac{1}{t+1}\ |(x_1-0.5)||x_2|\\
&\le\frac{1}{t+1}\Big(x_1-0.5\Big)^2+\frac{0.5}{t+1}x_2^2\\
&\le\frac{1}{t+1}\Big((x_1-0.5)^2+x_2^2\Big).
\end{aligned}
\tag{15}
$$

От неравенството $u(\cos(u)-1)\le u^2$ (виж Фигура 3) следва, че

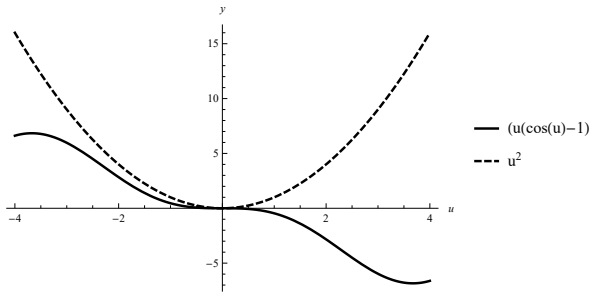
$$
\begin{aligned}
&x_2\Big(a_{2,1}(t)(f_1(x_1)-f_1(0.5))+a_{2,2}(t)(f_2(x_2)-f_2(0))\Big)\\
&=-\frac{1}{t+1}x_2(\cos(x_2)-1)\le\frac{0.5}{t+1}x_2^2\\
&\le\frac{1}{t+1}\Big((x_1-0.5)^2+x_2^2\Big).
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Условие A6 е изпълнено, при $\xi(t)=\frac{1}{t+1}$.

Разглеждаме функцията $p(t)=1.1+\cos(t),\ 0.1<p(t)\le 1.1$, при $t\ge 0$. Неравенството $p(t)\le p(s_k)$ е изпълнено при $t\in[s_k,t_k]$.



Фигура 2: Графика на функциите $|cos(u) - 1|$ и $|u|$.



Фигура 3: Графика на функциите $u(\cos(u) - 1)$ и u^2.

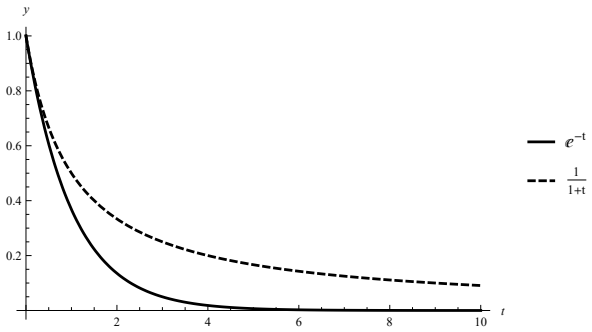
Също така, прилагайки неравенството $e^{-t} \leq \frac{1}{1+t}$ (виж Фигура 4), получаваме

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= -\min_{i=1,2} c_i(t) + 2\xi(t) + 0.5\frac{p'(t)}{p(t)} = -e^{-t} + 2\frac{1}{1+t} + 0.5\frac{\sin(t)}{1.1+\cos(t)} \\ &\leq 1 + 0.5\frac{\sin(t)}{1.1+\cos(t)} \leq 1.05, \qquad t \in (t_k, s_k], \qquad k = 1, 2, \ldots.\end{aligned} \tag{17}$$

Условие 3 на Теорема 3.4.2. е изпълнено за $\mu_k(t) = \frac{1}{t^2}$, защото

$$\sum_{i=1}^{2} \Big(\Phi_{k,i}(t, x_i) - \Phi_{k,i}(t, x_i^*)\Big)^2 = \frac{1}{t^2}\Big((x_1 - 0.5)^2 + x_2^2\Big), \qquad t \in [s_k, t_k]$$

.

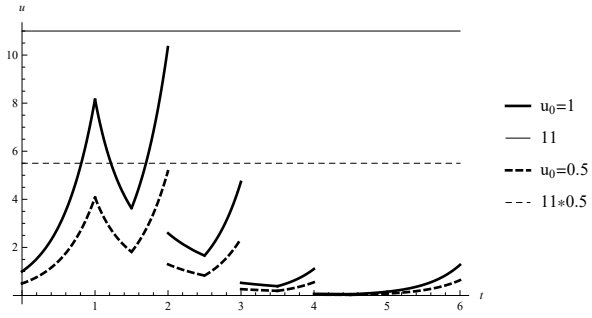


Фигура 4: Графика на функциите e^{-t} и $\frac{1}{1+t}$.

Тогава помощно скаларното уравнението (7) се свежда до

$$\begin{aligned} &u^{'} = 2.1u \text{ при } t \in [t_0, 1] \cup_{k=1}^{\infty} (k+0.5, k+1], \\ &u(t) = \frac{1}{t^2} u(s_k - 0)) \text{ при } t \in (k, k+0.5], k = 1, 2, \ldots, \\ &u(t_0) = u_0. \end{aligned} \tag{18}$$

Нулевото решение на (18) е равномерно липшицово (виж Фигура 5) с $M = 11$ и $\delta = 1$. От Теорема 3.3.2. следва, че равновесната точка на (13) е равномерно липшицово устойчива.



Фигура 5: Графика на решението на (18)

Авторска справка за приноси

Дисертационният труд съдържа научни и научно-приложни резултати в теорията на диференчните и диференциалните уравнения с импулси с продължително действие. Те могат да се обединят в три основни групи:

А) За диференчни уравнения:

А1) Обоснован е метод за приближено решаване на диференчни уравнения с импулси с продължително действие.

А2) Получени са достатъчни условия, както за равномерна устойчивост, така и за равномерна асимптотическа устойчивост за диференчни уравнения, чрез функции на Ляпунов.

А3) Получени са достатъчни условия за три вида устойчивост с разлика в началното време: устойчивост, равномерна устойчивост, равномерна асимптотическа устойчивост.

Б) За диференциални уравнения с импулси с продължително действие:

Б1) Получени са достатъчни условия за три вида устойчивост по отношение на част от променливите (устойчивост, равномерна устойчивост, равномерна асимптотическа устойчивост).

Б2) Получени са достатъчни условия за липшицова устойчивост, равномерна липшицова устойчивост и глобално равномерна липшицова устойчивост, използвайки обобщение на функциите на Ляпунов.

Б3) Класическият модел на Hopfield за невронни мрежи е модифициран по подходящ начин, за да моделира адекватно ситуацията, когато отделните неврони са подложени на импулси с продължително действие.

В)Ефективно са съчетани теоретичните изследвания с използването на CAS Wolfram Mathematica за илюстрация на получените резултати и за приложимост на получените достатъчни условия.

Връзките между приносите, целите, задачите и публикациите са дадени в таблицата

Приноси	Цели	Задачи	Параграфи	Публикации
А1	I.1	1	2.1	3
А2	I.2	2.1, 2.2	2.2	1
А3	I.2	2.3, 2.4, 2.5	2.3	2
Б1	II.1	3.1, 3.2, 3.3	3.1	4
Б2	II.1	3.4, 3.5	3.2	6
Б3	II.2	4	3.3	7
В	I, II	2, 3, 4	1.1, 1.2, 2.2, 2.3, 3.1, 3.2, 3.3	1, 2, 4, 5, 6, 7

Апробация на резултатите

А) Доклади на национални конференции:

- Устойчивост и функции на Ляпунов за диференчни уравнения, научна сесия с международно участие, посветена на *70-годишнината на съюза на учените в България*, Пловдив, България, 31 октомври 2014г.

Б) Доклади на международни конференции:

- Устойчивост с разлика в началното време на диференчни уравнения, юбилейна международна научна конференция *„25 години факултет математика и информатика“*, Велико Търново, България, 27–28 ноември 2015 г.;

- Lipschitz stability of differential equations with non-instantaneous impulses, the 24th conference *„Applied and industrial mathematics“*, Craiova, Romania, 15 – 18 september 2016;

- Stability with respect to part of variables of nonlinear differential equations with non-instantaneous impulses, 44th international conference *„Applications of Mathematics in Engineering and Economics“*, Sozopol, Bulgaria, 8–13 june 2018;

- Lipschitz stability of neural networks with non-instantaneous impulses, international conference *„13th Annual Meeting of the Bulgarian Section of SIAM“*, Sofia, Bulgaria, 18–20 december 2018г;

- Overview of different types of stability of the solutions of differential equations with non-instantaneous impulses, 2nd international conference *„Matematical and statistical sciences“*, Konya, Turkey, 5 – 7 june 2023 (online).

Публикации по темата

1. **Р. Терзиева**, С. Христова, Устойчивост и функции на Ляпунов за диференчни уравнения, *Научни трудове на съюза на учените XII*, 2015г., 256-259.

2. Е. Мадамлиева, **Р. Терзиева**, С. Христова, Устойчивост с разлика в началното време на диференчни уравнения, *Трудове на ВТУ. Факултет Математика и информатика*, 2015г, 101 – 106.

3. (SJR 0.139) S. Hristova, **R. Terzieva**, Monotone-iterative technique for the periodic boundary value problem for difference equations with non-instantaneous impulses, *Int. J. Pure Appl. Math.*, **11** (1), 2017, 25-38, DOI: 10.12732/iejpam.v11i1.3.

4. (SJR 0.165) S. Hristova, **R. Terzieva**, Stability with respect to part of variables of nonlinear differential equations with non-instantaneous impulses, *AIP Conf. Proc.* **2048** (1),2018, DOI: 10.1063/1.5082080.

5. (SJR 0.127) **R. Terzieva**, Some phenomena for non-instantaneous impulsive differential equation, *Int. J. Pure Appl. Math.* 119 (3), 2018, 483-490, DOI: 10.12732/ijpam.v119i3.8.

6. (Impact Factor: 0.335) S. Hristova, **R. Terzieva**, Lipschitz stability of differential equations with non-instantaneous impulses, *Adv. Differ. Equ.*, **322**, 2016, DOI: 10.1186/s13662-016-1045-6.

7. (Impact Factor: 1.338) R. Agarwal, S. Hristova, D. O'Regan, **R. Terzieva**, Stability properties of neural networks with non-instantaneous impulses, *Math. Biosci. Eng.* 16(3), 2019, DOI: 10.3934/mbe.2019058.

Цитирания на резултатите от дисертационния труд

Списък на забелязаните цитирания на публикуваните резултати от дисертацията:

Статия [4] е цитирана в:

- Т. Костадинов, Осцилационни, асимптотични и устойчиви свойства на дискретни и непрекъснати диференциални уравнения, *Дисертационнен труд за ОНС Доктор*, Пловдив, 2020;
- Т. Костадинов, Осцилационни, асимптотични и устойчиви свойства на дискретни и непрекъснати диференциални уравнения, *Автореферат за ОНС Доктор*, Пловдив, 2020.

Статия [5] е цитирана в:

- (IF 1.77) L. Bai, J. Nieto, J. Uzal, On a delayed model with non-instantaneous impulses, *Commun. Pure Appl. Anal.*, **19**, (4), 2020, 1915–1930, DOI: 10.3934/cpaa.2020084;
- (IF 1.31) Thabet Abdeljawad, Pshtiwan Othman Mohammed, Hari Mohan Srivastava, Eman Al-Sarairah, Artion Kashuri and Kamsing Nonlaopon, Some novel existence and uniqueness results for the Hilfer fractional integro-differential equations with non-instantaneous impulsive multi-point boundary conditions and their application, *AIMS Mathematics*, textbf8,(2), 2022, 3469–3483, DOI: 10.3934/math.2023177.

Статия [6] е цитирана в:

- (SJR 0.181) D. Chalishajar, A. Kumar, Total controllability of the second order semi-Linear differential equation with infinite delay and non-instantaneous impulses, *Math. Comput. Appl.*, **23** (3), 2018, DOI: 10.3390/mca23030032;
- (IF 1.856) P. Chen , Z. Xin, X. Zhang, Lipschitz stability of nonlinear ordinary differential equations with non-instantaneous impulses in ordered Banach spaces, *Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2020, DOI: https://doi.org/10.1515/ijnsns-2019-0255;

- (SJR 0.139) T. Kostadinov, K. Ivanova, Eventual stability with two measures for nonlinear differential equations with non-instantaneous impulses, *Int. J. Pure Appl. Math.*, **116** (3), 2017, 751–764, DOI:10.12732/ijpam.v116i3.21;

- (SJR 0.541) A. Kumar, K. Ramesh, A. Kumar, D. Chalishajar, Numerical approach to the controllability of fractional order impulsive differential equations, *Demonstratio Mathematica*, **53** (1), 2020, DOI: 10.1515/dema-2020-0015;

- (IF 1.13) Li Qien, Luo Danfeng, Luo Zhiguo, Zhu Quanxin, On the Novel Finite-Time Stability Results for Uncertain Fractional Delay Differential Equations Involving Noninstantaneous Impulses, *Math. Probl. Eng.*, **2019** 2019, DOI: 10.1155/2019/9097135;

- (IF 2.11) B. Sundaravadivoo, Controllability analysis of nonlinear fractional order differencial systems with state delay and non-instantaneous impulsive effects, *Discrete Contin Dyn Syst Ser S.*, **13**, (9), 2020, 2561–2573, DOI: 10.3934/dcdss.2020138;

- (IF 1.5) B. Vadivoo, R. Raja, J. Cao, G. Rajchakit, A. Seadawy, Controllability criteria of fractional differential dynamical systems with non-instantaneous impulses, *IMA J. Math. Control. Inf.*, 2019, **37** (3), 777—793, DOI: 10.1093/imamci/dnz025;

- (IF 1.72) P. Wang, M. Guo and J. Bao, Finite-time stability of non-instantaneous impulsive set differential equations, *J. Appl. Anal. Comput.*, **13** (2), 2020, 954–968, DOI:10.11948/20220244.

Статия [7] е цитирана в:

- А. Добрева, Компютърно симулиране и изследване на модели хищник жертва с три популации, *Сб. Доклади на Научна конференция „Иновационни ИКТ за дигитално научноизследователско пространство по математика, информатика и педагогика на обучението“*, 2019 г.

- Т. Костадинов, Осцилационни, асимптотични и устойчиви свойства на дискретни и непрекъснати диференциални уравнения, *Дисертационнен труд за ОНС Доктор*, Пловдив, 2020.

- Т. Костадинов, Осцилационни, асимптотични и устойчиви свойства на дискретни и непрекъснати диференциални уравнения, *Автореферат за ОНС Доктор*, Пловдив, 2020.

Литература

[1] Е. Мадамлиева, Р. Терзиева, С. Христова, Устойчивост с разлика в началното време на диференчни уравнения, *Трудове на ВТУ. Факултет Математика и информатика*, 2015г, 101 – 106.

[2] Р. Терзиева, С. Христова, Устойчивост и функции на Ляпунов за диференчни уравнения, *Научни трудове на Съюза на учените*, **XII**, 2015г., 256-259.

[3] R. Agarwal, *Difference equations and inequalities*, National University of Singapore, Singapore, 2000.

[4] R. Agarwal, S. Hristova, D. O'Regan, Ulam type stability results for non-instantaneous impulsive differential equations with finte state delay, *Dynam. Syst. Appl.*, **28**,1, 2019, 47-61

[5] R. Agarwal, S. Hristova, D. O'Regan, R. Terzieva, Stability properties of neural networks with non-instantaneous impulses, *Math. Biosci. Eng.*, **16**(3), 2019, DOI: 10.3934/mbe.2019058.

[6] R. Agarwal, S.Hristova, D. O'Regan, Iterative techniques for the initial value problem for Caputo fractional differential equations with non-instantaneous impulses, *Appl. Math. Comput.*, **334**, 2018, 407-421.

[7] R. Agarwal, S. Hristova, D. O'Regan, Non-instantaneous impulses in Caputo fractional differential equations, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **20**, (3), 2017, 595-622.

[8] R. Agarwal, S. Hristova, D. O'Regan, *Non-Instantaneous Impulses in Differential Equations*, Springer, 2017.

[9] R. Agarwal, S. Hristova, D. O'Regan, Practical stability of differential equations with non-instantaneous impulses, *Differ. Equ. Appl.*, **9**, 4, 2017, 413-432.

[10] R. Agarwal, D. O'Regan, S. Hristova, M. Cicek, Practical stability with respect to initial time difference for Caputo fractional differential equations, *Commun. Nonl. Sci. Numer. Simul.*, **42**, 2017, 106-120.

[11] R. Agarwal, S. Hristova, D. O'Regan, Stability of solutions to impulsive Caputo fractional differential equations, *Electr. J. Diff. Eq.*, (58), 2016, 1–22.

[12] R. Agarwal, D. O'Regan, S. Hristova, Stability of Caputo fractional differential equations with non-instantaneous impulses, *Commun. Appl.Anal.*, **20**, 2016, 149-174.

[13] R. Agarwal, D. O'Regan, S. Hristova, Stability by Lyapunov like functions of nonlinear differential equations with non-instantaneous impulses, *Appl. Math. Comput*, 2015.

[14] R. Agarwal, S. Hristova, A. Golev, K. Stefanova, Monotone-iterative method for mixed boundary value problems for generalized difference equations with maxima, *J. Appl. Math. Comput.*, **43**, (1), 2013, 213-233.

[15] R. Agarwal, S. Hristova, Strict stability in terms of two measures for impulsive differential equations with 'supremum', *Appl. Anal.*, **91**, (7), 2012.

[16] H. Aka, R. Alassar, V.Covachev, Z. Covacheva, and A. Al-Zahrani, Continuous-time additive Hopfield-type neural networks with impulses, *Math. Anal. Appl.*, **290**, (2), 2004, 436-451.

[17] H. Aka, R. Alassar, Y. Shebadeh, and V. Covachev, Neural Networks: Modelling with Impulsive Differential Equations, *Proc. Dyn. Syst. Appl.*, 2004, 32-47.

[18] M. Akhmetov, A. Zafer, Stability of the zero Solution of impulsive differential Equations by the Lyapunov second method, *J. Math. Anal. Appl.*, **248**, 2000, 69–82.

[19] L. Bai, J. J. Nieto, J. M. Uzal, On a delayed epidemic model with non-instantaneous impulses, *April 2020*, **AIMS Math.**, **19** 4, (2020), 1915-1930.

[20] D.D. Bainov, S.G. Hristova, The method of quasilinearization for the periodic boundary value problem for systems of impulsive differential equations, *Appl. Math. Comput.*, **117**, (1), 73-85, 2001.

[21] D. Bainov, I. Stamova, Lipschitz stability of impulsive functional-differential equations, *ANZIAM J.*, **42** , (4), 2001, 504–514.

[22] D. Bainov, S. Simeonov, *Systems with Impulsive Effect: Stability, Theory and Applications*, Ellis Haarwood Series in Mathematics and its Applications, Ellis Horwood, Chichester, 1989.

[23] J. Bao, P. Wang, C. Gao, Stability criteria for differential equations with initial time difference, *Acta Math. Appl. Sinica*, **35**, (4), 2012, 608-616.

[24] R. Bellman, *Stability Theory of Differential Equations*, Dover Publ., 2008.

[25] N.T. Carnevale, M.L. Hines, *The NEURON Book*, Cambridge, UK, Cambridge University Press, 2009.

[26] D. Chalishajar , A. Kumar, Total controllability of the second order semi-linear differential equation with infinite delay and non-instantaneous impulses, *Math. Comput. Appl.*, **23**, (3) 2018.

[27] Y. Chen, K. Meng, Stability and solvability for a class of optimal control problems described by non-instantaneous impulsive differential equations, *Adv. Differ. Equ.*, **524** (2020).

[28] F. Dannan, S. Elaydi,Lipschitz stability of nonlinear systems of differential equations, *J. Math. Anal. Appl.*, **113**, 1986, 562–577.

[29] A. D'Onofrio , Stability Proporties of Pulse Vaccination Strategy in SEIR Epidemic Model, *Math. Biosciences*,**179**, 2002, 57–72.

[30] S. Elaydi , *An introduction to difference equations*, San Antonio, Dept. Math., Trinity University, 2005.

[31] M. Feckan, S. Hristova, K. Ivanova, Practical stability of differential equations with state dependent delay and non-instantaneous impulses, *Commun. Math. Anal.*, **22**, 2, 2019, 1–17.

[32] M. Feckan, J. Wang, Y. Zhou, Periodic solutions for nonlinear evolution equations with non-istantaneous impulses, *Nonauton. Dyn. Syst.*, **1**, 2014, 93–101.

[33] A. Golev, S. Hristova, Sv. Nenov, Monotone-Iterative Method for Solving Antiperiodic Nonlinear Boundary Value Problems for Generalized Delay Difference Equations with Maxima, *Abstr. Appl. Anal.*, **2013**, 2013.

[34] K. Gopalsamy, Stability of artificial neural networks with impulses, *Appl. Math. Comput*, **154**, 2004, 783-813.

[35] J. Henderson, S. Hristova, Eventual practical stability and cone valued Lyapunov functions for differential equations with "maxima *Commun. Appl. Anal.*, **14**, (3), 2010, 515–526.

[36] E. Hernandez, D. O'Regan, On a new class of abstract impulsive differential equations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **141**, 2013, 1641–1649.

[37] Hopfield J., Neural networks and physical systems with emergent collective computationalabilities, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **79**, 1982, 2554-2558.

[38] S. Hristova, K. Ivanova, H-stability of differential equations with non-instantaneous impulses,*Dynamic Syst. Appl.*, **28**, 4, 2019, 837-84.

[39] S. Hristova, R. Terzieva, Stability with respect to part of variables of nonlinear differential equations with non-instantaneous impulses, *AIP Conference Proceedings*, **2048** (1), 2018.

[40] S. Hristova, K. Ivanova, T Kostadinov, Generalized exponential stability of differential equations with non-instantaneous impulses, *AIP Conference Proc.*, **1910**, (040005), 2017.

[41] S. Hristova, R. Terzieva, Monotone-iterative technique for the periodic boundary value problem for difference equations with non-instantaneous impulses, *Int. J. Pure Appl. Math.* **11**, (1), 2017, 25-38.

[42] S. Hristova, R. Terzieva, Lipschitz stability of differential equations with non-instantaneous impulses, *Adv. Differ. Equ.*, **322**, 2016.

[43] S. Hristova, K. Stefanova, Practical stability of impulsive differential equations with "supremum" by integral inequalities, *Europian J. Pure Appl. Math.*, **5**, (1), 2012, 30–44.

[44] S. Hristova, A. Georgieva, Practical Stability in terms of Two Measures for Impulsive Differential Equations with "Supremum", *Inter. J. Diff. Eq.*, 2011.

[45] S.G. Hristova, Integral stability in terms of two measures for impulsive functional differential equations, *Math. Comput. Modell.*, **51**, (1-2), 2010, 100-108

[46] S. Hristova, Stability on a cone in terms of two measures for impulsive differential equations with "supremum", *Appl. Math. Lett.*, **23**, (5), 2010, 508–511.

[47] S. Hristova, *Qualitative investigations and approximate methods for impulsive equatios*, Nova Sci. Publ. Inc., New York, 2009.

[48] S.G. Hristova, Nonlinear delay integral inequalities for piecewise continuous functions and applications, *J. Ineq. Pure Appl. Math.*, **5**, (4), 2004, 1-14.

[49] S.G. Hristova, G.K. Kulev, Quasilinearization of a boundary value problem for impulsive differential equations, *J. Comput. Appl. Math.*, **132**, (2), 2001, 399-407.

[50] Y. Huang, H. Zhang, Z. Wang, Dynamical stability analysis of multiple equilibrium points in time-varying delayed recurrent neural networks with discontinuous activation functions, *Neurocomputing*, **91**, 2012, 21–28.

[51] R. King, S. Garrett, G. Coghill, On the use of qualitative reasoning to simulate and identify metabolic pathways, *Bioinformatics*, **21**, (9), 2005, 2017–2026.

[52] V. Kolmanovsky, A. Myshkis, *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, Boston, London, 1999.

[53] T. Kostadinov, S. Hristova, Eventual stability with respect to part of variables of nonlinear differential equations with non-instantaneous impulses, *J. Math. Ext.*, **14**, 1, (2020), 171-188.

[54] V. Lakshmikantham, D. Bainov, P. Simeonov, *Theory of Impulsive Differential Equations*, World Scientific, Singapore, 1989.

[55] V. Lakshmikantham, S. Leela, *Differential and Integral Inequalities* , **I, Academic Press**, New York, 1969.

[56] C. Li, G. Feng, Delay-interval-dependent stability of recurrent neural networks with time-varying delay, *Neurocomputing*, **72**, 2009, 1179–1183.

[57] Y. Liao, J. Wang, A note on stability of impulsive differential equations, *Boundary Value Probl.*, 2014, DOI: 10.1186/1687-2770-2014-6.

[58] Z. Lin, W. Wei, J. Wang, Existence and stability results for impulsive integro-differential equatons, *Facta Univer. (Nis), ser. Math. Inform.*, **29**, No 2, 2014, 119–130.

[59] W. McCulloch, W. Pitts, A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity, *Bill. Math. Bioph.*, **5**, 1943, 115-133.

[60] F. McRae, Perturbing Lyapunov functions and stability criteria for initial time difference, *Appl. Math. Comput.*, **117**, (2-3), 2001, 313-320.

[61] D. Pandey, S. Das, N. Sukavanam, Existence of solutions for a second order neutral differential equation with state dependent delay and not instantaneous impulses, *Intern. J. Nonlinear Sci.*, **18**, (2), 2014, 145–155.

[62] P.Y.H. Pang, R.P. Agarwal, Monotone iterative methods for a general class of discrete boundary value problems, *Comput. Math. Appl.*, 1994, 243–254.

[63] C. V. Pao, Monotone iterative methods for finite difference system of reaction-diffusion equations, *Numerische Math.*, 1985, 571-586.

[64] M. Pierri, D. O'Regan, V. Rolnik, Existence of solutions for semi-linear abstract differential equations with not instantaneous impulses, *Appl. Math. Comput.*, **219**, 2013, 6743–6749.

[65] A. Rahimi, B. Recht, Weighted sums of random kitchen sinks: Replacing minimization with randomization in learning, *Adv. Neural Information Processing Syst.*, **21**, 2008, 1313-1320.

[66] A. Samoilenko, N. Perestyuk, *Impulsive differential equations (Translated from Russian)*, world Scientific Series on Nonlinear Science. Series A: Monographs and Treaties, 14 World Scientific Publishing Co, Inc, River Edge, NJ, 1995.

[67] M. Shaw, C. Yakar, Generalized variation of parameters with initial time difference and a comparison result in term Lyapunov-like functions, *Int. J. Non-linear Diff. Eq.,Th. Methods, Appl.*, **5**, 1999, 86-108.

[68] R. Shi, L. Chen, Stage – Structured Impulsive SI Model for Pest Management, *Discr. Dyn. Nature and Society*, 2007.

[69] A. Soliman, On stability of perturbed impulsive differential systems, *Appl. Math. Comput.*, **133**, 2002, 105—117.

[70] A. Sood, S. Srivastava, On stability of differential systems with noninstantaneous impulses, *Math. Probl. Eng.*, **2015**, 2015.

[71] I. Stamova, G. Stamov, *Applied Impulsive Mathematical Models*, Springer (2016).

[72] R. Terzieva, Some phenomena for non-instantaneous impulsive differential equation, *Int J Pure Appl Math* **119** (3), 2018, 483-490.

[73] J.R. Wang. M Feckan, Non-Instantaneous Impulsive Differential Equations, Basic theory and computation, *IOP Publishing Ltd.*, 2018.

[74] J. Wang. M Feckan, A general class of impulsive evolution equations, *Topol Methods Nonlinear Anal.*, 2015.

[75] J. Wang, Z. Lin, A class of impulsive nonautonomous differential equations and Ulam – Hyers–Rassias stability, *Math. Meth. Appl. Sci*, **38**, (5), 2015, 868–880.

[76] J. Wang, X. Li, Periodic BVP for integer/fractional order nonlinear differential equations with non-instantaneous impulses, *J. Appl. Math. Comput.*, **46**, (1-2), 2014, 321–334.

[77] Z. Wang, Y. Zang, Existence and stability of solutions to nonlinear impulsive differential equations in β-normed space, *Elect. J. Diff. Eq.* **83**, 2014, 1–10.

[78] P. Wang, Sh. Tian, Wu Yonghong, Monotone iterative method for first-order functional difference equations with nonlinear boundary value conditions, *Appl. Math. Comp.*, **203**, (1), 2008, 266-272.

[79] R.I. Watson, *The great psychologists. (4th edition)*, New York: J.B. Lippincott Co., 1978.

[80] T. Yoshizawa, *Theory by Lyapunov's Second Method*, Tokyo: The Math. Sc. of Japan, 1966.

[81] S. Zhang, M. Chen, A new Razumikhim theorem for delay difference equations, *Comput. Math. Appl.*, **10-12**, 1998, 405-412.

Благодарности

Резултатите в дисертациония труд са част от изследванията по няколко проект, един от които е:

- Проект № КП-06 ПН 62/1, Математическо и информационно моделиране на динамични процеси - нови теоретични резултати, методи за изследвания и приложения,проф. дмн С. Христова, 2022 - (действащ).