

РЕЦЕНЗИЯ

от проф. д-р Димитър Ангелов Колев

Катедра "Фундаментални и общообразователни науки"

Факултет ПБЗН, Академия на МВР, София

E-mail: mkolev999@gmail.com

на дисертационен труд

УСТОЙЧИВОСТ НА ДИФЕРЕНЦИАЛНИ И ДИФЕРЕНЧНИ УРАВНЕНИЯ С
ИМПУЛСИ С ПРОДЪЛЖИТЕЛНО ДЕЙСТВИЕ,

за присъждане на образователната и научна степен "доктор" в област 4, природни
науки, математика и информатика; научна специалност Диференциални уравнения,
професионално направление 4.5, Математика.

на Радослава Сашкова Терзиева

редовен докторант към катедра "Компютърни технологии",

с научен ръководител

проф. д.м.н. Снежана Георгиева Христева-Краева

доклад No РД-20-1695/26.10.2023 г. от проф. д-р Ангел Атанасов Голев,

Декан на *Факултет по математика и информатика* и в съответствие на чл. 4 от
ЗРАСРБ, чл. 2 (2), чл. 30 (3) ППЗРАСРБ и чл. 37 (1) ПРАСПУ.

Със заповед РД-21-1866 на Ректора на ПУ „П. Хилендарски“ съм определен за член на
научно жури във връзка с процедурата за защита на дисертационния труд на тема „Устой-
чивост на диференциални и диференчни уравнения с импулси с продължително действие“
за придобиване на образователната и научна степен „доктор“ в област на висше образова-

ние 4. „Природни науки, математика и информатика”, научна специалност Диференциални уравнения, професионално направление 4.5, "Математика".

Във връзка с процедурата ми бяха предоставени следните документи:

- 1) Молба по образец до Ректора на ПУ.
- 2) Автобиография.
- 3) Протокол No 44 (2022/23) от заседание на Катедрен съвет на катедра "Компютърни технологии" за предварително обсъждане на дисертационния труд.
- 4) Становище от научния ръководител проф. д.м.н. Снежана Георгиева Христова-Краева.
- 5) Автореферат.
- 6) Декларация за оригиналност и достоверност.
- 7) Справка за спазване на специфичните изисквания на ФМИ при ПУ.
- 8) Списък на всички научни публикации и списък на научните публикации по темата на дисертационния труд.
- 9) Дисертационен труд.
- 10) Диплома за образователно-квалификационна степен „магистър“, издадена от Пловдивски университет "Паисий Хилендарски Факултет по математика и информатика, Серия ПУ-2015, Рег. No 5389 от 02 юли 2015 г.
- 11) Заповед No Pзз-658, 10.02.2016 г. за зачисляване в редовна докторантура.
- 12) Протокол за успешно издържан изпит за докторантски минимум.
- 13) Копия на публикациите по темата на дисертационния труд.

- 14) Дискът (CD) с всички задължителни документи е наличен - предаден в канцеларията на университета.

Представените материали съответстват на изискванията на Правилника за прилагане на ЗРАСРБ, ПРАС на ПУ и на Специфичните изисквания на ФМИ при ПУ „П. Хилендарски“.

1 Данни за докторантката

Г-жа Терзиева е завършила с отлични оценки, последователно, бакалавърска и магистърска програми на ФМИ, ПУ „П. Хилендарски“ през 2015 г. (диплома No 034711, издадена от МОН). Участвала е в 8 научни проекта. Има официално участие в една национална конференция и в 5 международни. Тя представя седем публикации по темата, две от които са публикувани в реномирани списания с IF. Съществуват 15 цитата до настоящия момент. Владее английски език, високо ниво.

2 Обща характеристика на дисертационния труд

Дисертационният труд е посветен на импулсни ОДУ и диференчни уравнения, съдържащи импулси с продължително действие (ДУИПД). Представеният труд е с обем от 108 страници. Състои се от увод, три глави, съдържащи дефиниции, твърдения с доказателства на някои от тях, интересни примери с множество графики, илюстриращи теорията и библиография от 81 статии, монографии и други пособия, цитирани от автора. Освен това, към дисертацията има приложения:

- Авторска справка за приносите.
- Перспективи за развитие.
- Аprobация на резултатите.

- Публикации по темата.
- Цитирания на резултатите от дисертационния труд.
- Декларация за оригиналност и автентичност.

Тематиката и съдържанието на дисертационния труд отговарят на професионалното направление и на специалността. Всички съпътстващи документи съответстват на законовите изисквания по процедурата за защита на дисертационен труд за придобиване на образователната и научна степен „доктор“.

3 Актуалност на изследването

Импулсните диференциални уравнения дискутирани в дисертационния труд, се появяват за първи път през 60-те години на миналия век в трудовете на V. Millman, A. Myshkis. Малко по-късно през 90-те години D. Bainov и V. Lakshmikantham продължават изследванията в тази област на математиката. Оказва се, че този клас уравнения описват множество дискретни процеси във физиката, биологията, медицината, екологията и съвременните технологии. Съществуват два вида импулсни диференциални уравнения: уравнения с мигновени импулси и уравнения с импулси с продължително действие. Вторият вид уравнения бяха изследвани за първи път през 2013 г. от E. Hernandez и D. O'Regan. През 2017 бе публикувана първата монография върху тази тема: R. Agarwal, S. Hristova, D. O'Regan, *Non-Instantaneous Impulses in Differential Equations*, Springer, 2017. От този момент нататък се появило множество публикации, посветени на въпросната тема. Тези заглавия са цитирани от кандидатката в библиографията.

4 Цел на дисертационния труд

Основната цел на дисертационния труд е изследване устойчивостта на решенията на два вида уравнения: ДУИПД и диференчни уравнения с импулси с продължително действие. За ДУИПД целта е да бъдат получени нови критерии за (равномерна) устойчивост по отношение на част от променливите и (равномерна) липшицова устойчивост. Следващата цел е приложението на ДУИПД за динамични модели на невронни мрежи с неврони подложени на импулси с продължително действие.

Целта за диференчни уравнения с импулси с продължително действие е да бъдат намерени критерии за равномерна устойчивост, асимптотическа устойчивост, равномерна устойчивост с разлика в началното време. Друга интересна цел е да бъде развит приближен метод за решаване на начална задача.

5 Оценка на дисертационния труд и на приносите

Изследвана е устойчивостта на решенията на тези уравнения с помощта на един модифициран метод на Ляпунов. Първо е разгледана начална задача за нелинейно ДУИПД. Показани са интересни свойства на изследваните уравнения:

- 1) Посоченият по-горе клас от импулсни диференциални уравнения ДУИПД съдържа уравнения, чиито решения имат различни свойства в сравнение с класическите ОДУ (КОДУ). В изследваните ДУИПД имаме случаи на сливане на решенията. Това свойство е илюстрирано чрез Пример 1.1.3, като за решенията са показани съответните графики. Този илюстриращ пример показва, че за всяка импулсна функция, която не зависи от $x(s_k - 0)$, има сливане на решенията при $t > s_1$, т.е. те се сливат от известна точка нататък.
- 2) За разлика от КОДУ, наличието на импулси в някои случаи води до "умиране" на решенията (Пример 1.1.4), т.е. под "умиране" разбираме, че решението в примера приема

ненулеви стойности в затворен интервал, а извън този интервал то не съществува въпреки ненулевото начално условие.

3) Вижда се, че за разлика от КОДУ, началната задача на ДУИПД може да има много решения за една и съща начална стойност (Пример 1.1.5).

4) Нарушава се твърдението, че в едно КОДУ нулевата начална стойност води до нулево решение. Показано е, че това може да бъде нарушено за ДУИПД.

В Секция 1.3 са разгледани диференчни уравнения с импулси с продължително действие и приближено намиране на решение. Представява интерес случая, когато неизвестната функция е включена в двете страни на нелинейното уравнение. За приближено решаване се използва метода на горното и долното решение, комбиниран с монотонно - итеративна техника. Тази техника позволява да се конструират две монотонни редици от горни и долни решения на нелинейното диференчно уравнение с импулси с продължително действие. Цитирани са източниците, където е използван този метод. По-нататък е получена формула за решение на гранична задача за линейни диференчни уравнения с импулси с продължително действие. Чрез използването на монотонно - итеративната техника и метода на горните и долните решения е получена теорема за съществуване на екстремални решения на нелинейни уравнения.

Секция 2.2 е посветена на устойчивост (равномерна) и асимптотическа устойчивост (равномерна) за диференчни уравнения.

По-нататък в Секция 2.3 е разгледана устойчивост с "разлика в началното време" на диференчни уравнения, което е интересен въпрос. Примери 2.3.1 и 2.3.2 илюстрират много ясно представената теория.

В Глава 3, 3.1 е разгледана устойчивост по отношение на част от променливите, участващи в нелинейни ДУИПД. Тук са дефинирани различни видове устойчивост спрямо част от променливите на решенията на нелинейните ДУИПД. Получени са достатъчни условия за устойчивост, равномерна устойчивост и асимптотическа равномерна устойчивост по от-

ношение на част от променливите. Получените резултати са илюстрирани с примери. В Пример 3.1.2 е дадено едно сравнение между ДУИПД и същото без импулси.

В Секция 3.2 е разгледана Липшицова устойчивост. Доказани са основните резултати, Теорема 3.2.1 - 3.2.4.

В Секция 3.3 са представени изследвания свързани с невронни мрежи. Това е една съвременна теория, развиваща се бързо през последните години. Формулирана е основната задача свързана с известен модел за невронна мрежа, носещ името на Hopfield, формула (3.3.1), отнасяща се за n броя неврони в мрежата. С помощта на Пример 3.3.2 е илюстрирано решението на задача за ОДУ без импулси и съответна задача с импулси. Показана е интересна разлика в решенията. Разгледани са случаи с Липшицови активиращи функции. Дискутирана е устойчивостта. Теорема 3.3.1 дава друг интересен резултат при наличието на 5 условия, че равновесната точка на ДУИПД е глобално равномерно липшицово устойчива. След това са разгледани случаи, когато активиращите функции не са Липшицови.

Приносите на автора са следните:

Получен е метод за приближено решаване на ДУИПД. Получени са достатъчни условия за липшицова устойчивост, равномерна липшицова устойчивост и глобално равномерна липшицова устойчивост, използвайки обобщение на функциите на Ляпунов. Достатъчните условия за устойчивост с разлика в началното време са доказани също с помощта на функции на Ляпунов. Изследвани са задачи, свързани с невронни мрежи.

Отбелязваме, че докторантката е участвала в 8 научни проекта, свързани дискутираните проблеми в дисертационния труд. Освен това, тя има участие в една национална конференция и в 5 международни.

Публикациите по темата са 7, две от които имат IF и съществуват 15 цитата до настоящия момент.

6 Оценка на публикациите и на личния принос на докторантката

Представената литература съдържа 81 научни публикации, монографии и учебни пособия, цитирани в дисертационния труд, измежду които седем са тити с участие на докторантката. Съгласно Специфичните изисквания на ФМИ при ПУ за придобиване на образователната и научна степен "доктор" в професионално направление 4.5 "Математика", кандидатката трябва да има поне 3 публикации в рецензирани издания, едно от които да е списание. Това изискване е изпълнено, като две от статиите са публикувани в списания с импакт-фактор. Преценяваме, че представените в дисертационния труд резултати са получени с активното лично участие на докторантката. От представените резултати се вижда, че тя притежава необходимите знания и умения за провеждане на сериозни научни изследвания в областта на качествената теория на диференциалните уравнения. По наше мнение представеният дисертационен труд както и публикациите с участие на докторантката съдържат оригинални резултати и имат достатъчно високо научно ниво.

7 Забележки и препоръки

Отбелязваме следните въпроси към кандидатката:

- 1) На стр. 22 и 55 има условия (H1) и (H2), където е използвано едно и също означение за различни условия. Същото се отнася за стр. 65, където имаме означение (H1) и (H2) с различно съдържание. На стр. 69 имаме аналогично означение (H3), което е използвано на друго място преди това?
- 2) На стр 65, 3.2.1 в условие (H1) имаме функция $f \in C(\dots)$, която се появява, а не е показано ясно къде се използва?

- 3) Имаме въпрос към докторантката дали е възможно при тези уравнения, ДУИПД, да се получи т. нар. "избухване" (blow up) на решението, т.е. преди достигане точката, в която има импулс решението да клони асимптотически към безкрайност, което означава, че не може да се продължи? Дали такъв случай е възможен?

Заклучение.

Взимайки под внимание бележките дадени по-горе нашето предварително заключение е, че темата на дисертацията е интересна от съвременна гледна точка. Постигнати са интересни резултати за посочените диференциални уравнения. В заключение оценяваме позитивно изследването, както и активите на кандидатката и предлагаме на уважаемото научно жури да присъди образователната и научна степен "доктор" в област 4, природни науки, математика и информатика, научна специалност Диференциални уравнения, професионално направление 4.5, Математика.

10.11.2023 г.

Автор на рецензията:

проф. д-р Димитър Колев