Р Е Ц Е Н З И Я

от проф. д.м.н. Йохан Тодоров Давидов, ИМИ-БАН

относно материалите, представени за участие в конкурс
за заемане на академичната длъжност **„доцент“**
в Пловдивския университет „Паисий Хилендарски“,
по област на висше образование *4. Природни науки, математика и информатика*,
професионално направление *4.5 Математика*,
научна специалност *Геометрия и топология*

В конкурса за „доцент“, обявен в Държавен вестник, бр. 96 от 17.11.2023 г. и в интернет-страницата на Пловдивския университет „Паисий Хилендарски“ за нуждите на катедра „Алгебра и геометрия“ към Факултета по математика и информатика като кандидат участва гл. ас. д-р Ива Руменова Докузова от катедра „Алгебра и геометрия“, ФМИ, ПУ.

1. Общо представяне на получените материали

Предмет:

Със заповед №РД-21-387 от 16.02.2024 г. на Ректора на Пловдивския университет „Паисий Хилендарски" съм определен за член на научното жури на конкурс за заемане на академичната длъжност **„доцент“** в ПУ, област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5. Математика, научна специалност „Геометрия и топология”, обявен за нуждите на катедра „Алгебра и геометрия“ към Факултета по математика и информатика.

За участие в обявения конкурс е подал документи единствен кандидат – гл. ас. д-р Ива Руменова Докузова от катедра „Алгебра и геометрия“, ФМИ, ПУ.

Представеният от гл. ас. д-р Докузова комплект материали за участие в конкурса получих по електронната поща. Тези документи са в съответствие със Закона за развитие на академичния състав в Република България (ЗРАСРБ) и съответния Правилник на Пловдивския университет..

За участие в конкурса гл.ас. д-р Ива Руменова Докузова е приложила 15 научни труда, една монография, справка за цитирания на нейни трудове, два учебника, справка за участие в 3 научно-приложни и образователни проекта, справка за учебната ѝ дейност и научно ръководство на двама успешно защитил дипломанти, както и други документи, изисквани от Закона и Правилника.

Приемам за разглеждане 15 научни труда, които са извън дисертацията на кандидатката за научната и образователна степен „доктор“ и извън конкурса за получаване на научното звание „главен асистент“, както и представената монография, като освен тях при крайната оценка ще се отчитат и 2 учебника, участието на кандидатката в научно-изследователски и образователни проекти, работата ѝ със студенти.

Кандидката е представила списък от общо 22 научни статии, като по-нататък ще разгледам само представените за участие в конкурса 15 от тях.

Разпределението на научните трудове, представени за участие в конкурса, по рубриките в страната и в чужбина, е както следва: 7 труда в страната, 8 – в чужбина.

Представен е списък на общо 41 цитирания на работи на кандидатката, 29 от тях на публикации за участие в конкурса.

2. Кратки биографични данни на кандидатката

Ива Руменова Докузова е родена през 1971 г. Висшето си образование завършва през 1994 г. с магистърска степен във Факултета по математика и информатика на Пловдивския университет. След това една година, 1995 - 1996, е гимназиален учител в Самоков. В периода 1998 - 2009 г. е последователно асистент, старши асистент, главен асистент в ПУ "Паисий Хилендарски", Филиал "Любен Каравелов", Кърджали. През 2006 г. успешно защитава дисертация за получаване на научната и образователна степен "доктор" по научната специалност "Геометрия и топология" с тема на дисертацията от областта на диференциалната геомтрия. От 2009 г. до момента е гл. асистент в ПУ "Паисий Хилендарски", Факултет по математика и информатика, Пловдив, Катедра "Алгебра и геометрия".

3. Обща характеристика на дейността на кандидата

Учебно-педагогическа дейност

Оценката ми за учебно-педагогическа дейност на кандидатката е положителна. Тя се основава върху представената справка за нейната дейност със студенти, справката за аудиторната и извънаудиторната заетост на кандидатката, разработените от нея лекционни курсове и учебни помагала, както и представените два нейни учебника (единият от тях със съавтор).

Участие в научно-изследователски проекти

Гл. ас. д-р Ива Руменова Докузова е участвала в 3 научно-изследователски проекта - два, финансирани от ПУ и един, финансиран по оперативната програма „Наука и образование за интелигентен растеж" на ЕС.

Наукометрични данни

Както споменах, Ива Докузова участва в конкурса с 15 статии, всичките на английски език. От тях 11 са в научни списания, 4 - в трудове на национални конференции; 3 статии са в списания с Impact Factor, 5 статии са в списания с SJR, 3 статии в списания без IF или SJR, които обаче са реферирани в Mathematical Reviews или Zentralblatt für Mathematik и 4 статии не попадат в тези категории. Девет от статиите са самостоятелни, две са с един съавтор, 4 са с двама съавтори. Приемам, че приносът на кандидатката в съвместните публикации е равностойно на останалите съавтори. Монографията е самостоятелно дело на кандидатката.

Бих искал да отбележа още, че не съм открил никакви случаи на плагиатство в статиите на Ива Докузова.

Кандидатката е представила справка за 41 цитирания на нейни работи като 29 се отнасят до статии, представени за участие в конкурса; това са цитиращите статии с номера 9 - 35 и 37, 38 в списъка на цитиранията. От общия брой цитирания 5 цитиращи статии са в списания с IF, 5 - с SJR, 7 - в списания, индексирани в Scopus, 2- са референирани в MR или Zbl. От цитиранията на статии на Докузова за участие в конкурса 2 цитиращи статии са в списания с

IF, 4 - с SJR, 6 - в списания, индексирани в Scopus, 2- са реферирани в MR или Zbl .

Ива Докузова е представила справка за участие с доклади в 17 научни конференции след конкурса за „главен асистент“ (10 от тях са международни)

4. Преглед на получените резултати.

В статиите с номера 1 и 3 в списъка на публикациите по конкурса се разглежда структура на почти произведение J върху гладко многообразие M, съвместима с Риманова или псевдо-Риманова метрика g, в смисъл че $g(JX, JY) = g(X, Y)$. Това условие за съвместимост е аналогично на условието една почти комплексна структура да е съвместима с Риманова метрика, т.е. многообразието да е почти Ермитово, но разликата е съществена. В случая на съвместима структура на почти произведение основната билинейна форма $\omega(X, Y) = g(JX, Y)$ е симетрична, докато за съвместима почти комплексна структура тя е анти-симетрична. При зададени векторни полета a и b върху M, с помощта на свързаността на Леви-Чивита и векторните полета a и b, се дефинира нова симетрична свързаност $\overline{\nabla}$ (която, разбира се, не е метрична). В частен разговор кандидатката обясни, че идеята за въвеждане на новата свързаност като трансформация на свързаността на Леви-Чивита най-общо казано произлиза от статии върху холоморфни проективни трансформации и от резултати в докторската ѝ дисертация за почти комплексни многообразия с условие за съвместимост $g(JX, JY) = -g(X, Y)$. За новата свързаност $\overline{\nabla}$ се показва, че удовлетворява равенството

$$(\overline{\nabla}_X\omega)(Y, Z) + (\overline{\nabla}_Y\omega)(Z, X) + (\overline{\nabla}_Z\omega)(X, Y) = 0, \tag{1}$$

при условие, че свързаността на Леви-Чивита ∇ удовлетворява аналогично равенство. Връщайки се към аналогията с почти Ермитовия случай, може да се каже, че равенство (1) за свързаността на Леви-Чивита е аналог на условието почти Ермитовото многообразие да е почти Келерово, т.е. втората му фундаментална форма ω да е затворена: $d\omega = 0$. В статии 1 и 3 са установени връзки между геометрични свойства на свързаностите $\overline{\nabla}$ и ∇ и са пресметнати геометрични характеристики на $\overline{\nabla}$ (тензор на кривината, тензор на Ричи) в случая, когато векторното поле a е нула.

Геометричните обекти и проблемите, разглеждани в статия 2, са подобни на тези в статии 1 и 3, но за случая на многообразие, снабдено с почти комплексна структура J и псевдо-Риманова метрика g с условие за съвместимост $g(JX, JY) = -g(X, Y)$. В този случай многообразията, за които свързаността на Леви-Чивита и формата $\omega(X, Y) = g(JX, Y)$ удовлетворяват равенство (1) са наречени квази-Келерови от Борисов и Ганчев (1986 г.). За сравнение - квази-Келеровите почти Ермитови многообразия се дефинират чрез равенството $(\nabla_X\omega)(Y, Z) + (\nabla_{JX}\omega)(JY, Z) = 0$ (Gray, Hervella, 1980). Обаче за почти Ермитови многообразия формата ω е анти-симетрична, докато в псевдо-Римановия случай тя е симетрична. Да отбележим още, че метриката g и неизродената симетрична форма ω са от неутрална сигнатура (n, n) (формата ω често се нарича асоциирана метрика).

Макар в статия 4, както и в други от представените статии, да се говори за тримерни многообразия, всъщност става дума за отворени множества в $\mathbb{R}^3$. Но съществена част от разглежданията зависят не от наличието на глобални координати, а от наличието на глобален репер от векторни полета, на които знаем скобките на Ли. Затова някои от примерите са групи на Ли със зададен репер от лявоинвариантни векторни полета.

В статиите 4, 5, 6, 10, 12, 13, 15 в отворено множество в $\mathbb{R}^3$ е зададена Риманова метрика g, чиято матрица е кръгообразна (circulant) с първи ред (A, B, B), $A > B > 0$, както и $(1, 1)$-тензор q, чиято матрица е кръгообразна с първи ред $(0, 1, 0)$, така че q е изометрия и $q^3 = Id$. В споменматите статии се изучават геометрични свойства на двойката тензори (g, q).

В статия 4, с помощта на функциите A и B и на тензора q се дефинира в явен вид симетрична неизродена билинейна форма f със сигнатура $(1, -1, -1)$ и положителна детерминанта. Това е формата $f(x, y)) = g(x, qy) + g(qx, y)$. За произволни гладки функции α и β се разглежда билинейната симетрична форма $g_1 = \alpha.g+\beta.f$. В първата теорема на статията, Теорема 2.1, се твърди, че ако ∇ и $\dot{\nabla}$ са свързаностите на Леви-Чивита на метриките g и g_1 и ако $\nabla q = 0$, то $\dot{\nabla}\ q = 0$ тогава и само тогава, когато $grad\,\alpha = grad\,\beta.S$, където S е $(1, 1)$-тензорът, чиято матрица е кръгообразна с първи ред $(-1, 1, 1)$. Приблемът тук е, че формата g_1 може да е изродена в някои точки, т.е. g_1 може да не е метрика. По-точно, g_1 е изродена форма в точките x, където $\alpha(x) = \beta(x)$ или $\alpha(x) + 2\beta(x) = 0$. За щастие след формулировката на споменатата теорема, в Лема 2.2 авторите се ограничават до случая $\alpha(x) > \beta(x) > 0$ за всяко x, в който случай g_1 е положително дефинитна форма. Освен това в Теорема 2.4 се предполага, че g и g_1 са положително дефинитни и при това предположение е намерена връзка между ъглите, които сключват вектор $w \in \mathbb{R}^3$ и неколинеарен с него вектор qw, изчислени относно метриките g и g_1.

Формата g_1 се появява и в статия 5, където е означена с $\overline{g}$. В тази статия върху функциите α и β са наложени условията $\alpha(x) \neq \beta(x)$ и $\alpha(x)+2\beta(x) \neq 0$ за всяко x. При тези условия формата $\overline{g}$ е неизродена, като авторите са посочили условия върху функциите α и β, при които $\overline{g}$ е положително дефинитна или недефинитна метрика В статията авторите пресмятат тензора на кривината на свързаността ∇ на Леви-Чивита на метриката g при условие, че свързаността на Леви-Чивита на $\overline{g}$ е плоска. И една забележка. На втората страница на статията се твърди, че е очевидно, че тензорите q, $\widetilde{q}$, f, S и Φ са паралелени относно ∇. Според мен това не само не е очевидно, а дори не е вярно в общия случай. Условието за паралелност на който и да е от тези тензори води до съотношения между частни производни на функциите A и B, чрез които е дефинирана метриката g, а тези съотношения може и да не са изпълнени в общия случай. Правя тази забелжка, която не оказва влияние върху основния резултат на статията само, за да обърна внимание на авторите да бъдат попрецизни в бъдещата си работа.

Метриката g и $(1, 1)$-тензорът q от статии 4 и 5 се изучават и в статия 6. Доказано е, че $\nabla q = 0$ точно тогава, когато $grad\,A = grad\,B.S$ (означенията са както по-горе). Ако x е допирателен вектор, който не е собствен вектор на q, за ъгъла между x и qx е показано, че е между 0 и $\frac{2\pi}{3}$. Нека x е допирателен вектор, такъв че x, qx, q^2x е ортонормиран базис на съответното допирателно пространство. При предположението, че тензорът q е паралелен, е пресметнато, че секционната кривина на произволна двумерна площадка $span\{u, v\}$ е пропорционална на секионната кривина на площадката $span\{x, qx\}$ с коефициент на пропорционалност рационална функция, намерена в явен вид, от коефициентите на u и v относно базиса x, qx, q^2x. В статията чрез функциите A и B е посочен в явен вид вектор x, за който x, qx, q^2x е ортонормиран базис. Ако беше пресметната секционната кривина на $span\{x, qx\}$ за това конкретно x, спомената формулата за секционната кривина на произволна площадка би имала по-голяма стойност.

Статия 10 според мен е най-добрата и има най-интересни резултати измежду представените статии в тематиката, която обсъждаме. В нея се въвеждат три класа многообразия: класът $\mathcal{L}_0$ се определя с условието $\nabla q = 0$, класът $\mathcal{L}_1$- с условието $R(x, y, gz, qu) = R(x, y, z, u)$, класът $\mathcal{L}_2$ - с $g(R(qx, qy, qz, qu) = g(R(x, y, z, u)$, където R е тензорът на кривината на метриката g и $R(x, y, z, u) = g(R(x, y)z, u)$. Тези класове могат да се разглеждат като аналог на Келеровите кривинни тъждества на A. Gray в Ермитовата геометрия, ако тензорът q се интерпретира като аналог на почти комплексната структура. Класът $\mathcal{L}_0$ е аналог на класа от Келерови многообразия, $\mathcal{L}_1$ - на класа на Gray $\mathcal{AH}_1$, $\mathcal{L}_2$ - на класа $\mathcal{AH}_3$. Възниква естественият въпрос дали аналогът на класа $\mathcal{AH}_2$ би представлявал интерес, т.е. дали си струва да се изучават и многообразията, за които $R(qx, qy, z, u) + R(qx, y, qz, u) + R(qx, y, z, qu) = R(x, y, z, u)$. Класът $\mathcal{L}_0$ е характеризиран в статия 6. Класовете $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ се характеризират чрез тъждества на компоненти на тензора на кривината относно стандартните координати в $\mathbb{R}^3$ (което е естествено). За мен много по-нтересна е получената характеризация чрез свойства на тензора на Ричи. Да напомним, че понеже събитията се развиват в тримерно многообразие, тензорът на Ричи напълно определя тензора на кривината. Специално ще отбележа резултата, в който се доказва, че едно многообразие е от класа $\mathcal{L}_2$ тогава и само тогава, когато тензорът на Ричи ρ удволетворява равенство от вида $\rho = \alpha.g + \beta.f$, където α и β са гладки функции. От този резултат следва, че класът $\mathcal{L}_2$ съдържа Айнщайновите многообразия. От друга страна, както е показано в статията, тензорът на Ричи на многообразие от класа $\mathcal{L}_1$ е изроден, следователно метриката на многообразие от този клас не е Айнщайнова, ако не е Ричи плоска. В статията са установени и други кривинни свойства на разглежданите класове. Дадени са и конкретни примери на многообразия от тези класове, за които са пресметнати тензора на кривината, тензорът на Ричи и секционни кривини.

В статия 12 за многообразия от класовете $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ е пресметната секционната кривина на площадки от вида $span\{x, qx\}$, където x е допирателен вектор, такъв че x, qx, q^2x е ортонормиран базис на съответното допирателно пространстви.

В статия 13 тензорите f и q са означени с $\widetilde{g}$ и Q, но ние ще запазим старите означения. Дефинирани са тензорите $F(x, y, z) = (\nabla_x f)(y, z)$, $\theta(z) = Trace\{x \to F(x, x, z)\}$, $\theta^*(z) = Trace\{x \to F(x, qx, z)\}$. Ако тензора f възприемем като симетричен аналог на втората основна форма на почти Ермитово многообразие, то θ и θ^* могат да се разглеждат като варианти на аналога на формата на Ли. В статия 13 са пресметнати компонентите на тензорите F, θ и θ^*. Намерена е връзка между тензорите на Ричи на метриките g и f. Разгледан е конкретен пример върху група на Ли, за който са установени редица кривинни свойства.

Означенията в статия 15 са като тези в статия 13, но и тук ще се придържаме към старите означения. В статия 15 е намерена връзка между тензорите на

Ричи на метриките g и f. Показано е, че многообразие, снабдено с двойката тензори (f, q), е от клас $\mathcal{L}_0$, съответно, $\mathcal{L}_2$ тогава и само тогава, когато многообразието, разгледано с двойката (g, q) е от същия клас. Прави впечатление липсата на връзка на класовете $\mathcal{L}_1$, определени от (f, q) и (g, q). За двойката (f, q) са установени кривинни свойства, като новото тук е, че метриката f е недефинитна и при разглежданията, свързани със свойствата на кривина, трябва да се има предвид, че има изотропни вектори и изотропни двумерни площадки. Статията завършва с конкретни пресмятания за (f, q) върху групата на Ли от статия 13.

Тематиката на статии 4, 5 и 6 е развита в статия 8 в случая, когато тензорът q е с кръгообразна матрица с първи ред $(0, -1, 0)$, така че q е изометрия и $q^3 = -Id$. Измежду резултатите в статията ще отбележа пресмятането на всички компоненти на тензора на кривината на метриката g.

Постановката и резултатите в статия 7 са подобни на тези в статия 5, но сега разглежданията са върху отворени множества на $\mathbb{R}^4$, а q е изометрия, удовлетворяваща условието $q^4 = Id$. Естествено, по-високата размерност води до някои технически усложнения.

Разглежданията в статия 7 са продължени в статия 9. Основният резултат е пресмятането на секционни кривини при условието $R(qx, qy, qz, qu) = R(x, y, z, u)$. Тук специално ще отбележа интересния пример върху група на Ли на Римановo многообразие с кръгообразна метрика g и тензор q и пресмятането на кривината на това многообразие

В статия 11 двойката тензори (g, q) е разгледана върху две групи на Ли, определени от конкретно зададена алгебри на Ли (за тензора q в статията се използва означението Q). Пресметнати са компонентите на тензора на кривината. За структурата на почти произведение $P = q^2$ са намерени условия за принадлежност на класа $\mathcal{W}_1$, въведен от М. Стайкова и К. Грибачев (1992 г.).

В статия 14 двойката тензори (g, q) е както в статиите 7, 9, 11, като в нея се изучава геометрията на недефинитната метрика $\widetilde{g}(u, v) = g(u, q^2 v)$, асоциирана с (g, q). Нека u е допирателен вектор, за който u, qu, q^2u, q^3u е g-ортонормиран базис (такъв вектор съществува, както е забелязано от Д. Разпопов). Авторите установяват, че векторът u е пространствено-подобен $(\widetilde{g}(u, u) > 0)$, времеподобен $(\widetilde{g}(u, u) < 0)$ или изотропен $(\widetilde{g}(u, u) = 0)$ точно тогава, когато ъгълът между u и q^2u е, съответно, в интервала $(0, \frac{\pi}{2})$, в интервала $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ или е 0. Те показват, че в подходящи координати, "хиперсферата" $\widetilde{g}(v, v) = a$ е тримерният хиперболоид $x'^2 + y'^2 - z'^2 - t'^2 = a$. Те също така намират вида на сечението на "хиперсферата" $\widetilde{g}(v, v) = a$ с тримерното пространство $span\{u, qu, q^2u\}$. Наример, ако $a = 0$, това сечение е конус или се състои от две прави. Освен това те установяват вида на "окръжностите", които са сеченията на "хиперсферата" с двумерните пространства $span\{u, qu\}$ и $span\{u, q^2u\}$. Получените резултати, макар и с несложни доказателства, правят приятно впечатление със своя геометричен характер.

Монографията на кандидатката е с обем от 104 страници, със списък на литературата от 64 заглавия (6 страници). Монографията е разделена на две глави. В първа глава, както в статии 7-9, се разглеждат Риманова метрики в отворени подмножества на $\mathbb{R}^4$, зададени с кръгообразна матрица и изометрия q

с $q^4 = Id$ и кръгообразна матрица. Материалът в първата глава почти изцяло е от статии в списъка за конкурса, които вече разгледахме. Нови са параграфите 5.1 и 6. В параграф 5.1 е показано, че тензорът на Ричи ρ на многообразия, за които $R(qx, qy, qz, qu) = R(x, y, z, u)$, удволетворява равенство от вида $\rho = \alpha.g + \beta.f$, където α и β са гладки функции, подобно на тримерния случай в статия 10. В параграф 6 за структурата на почти произведение $P = q^2$ са намерени условия за принадлеж-ност на класовете, въведени от М. Стайкова и К. Грибачев (в статия 11 това е направено само за класа $\mathcal{W}_1$). Резултатите във втората глава на монографията не се съдържат в статите за конкурса. В нея е зададена Риманова метрика g с косо-кръгообразна матрица. С подобна матрица е зададен и $(1,1)$-тензор S, за който $S^4 = -Id$. Сега пак имаме две структури върху многообразието - едната се задава с двойката тензори (g, S) и асоциираната неутрална метрика $\widetilde{g}(x, y) = g(x, Sy) + g(Sx, y)$, а другата е почти Ермитовата структура $(g, J = S^2)$. За първата структура са установени редица кривинни свойства, за установяването на които е извършена сериозна изчислителна дейност. Специално ще отбележа конструираните два примера върху групи на Ли и конкретното изчисление на кривината върху тях. Подобно на статия 14, намерена е геометричнита форма на "хиперсферата" $\widetilde{g}(v, v) = a$ и нейни сечения с двумерни и тримерни подпространства на допирателното пространство от специален вид. За почти Ермитовата структура е намерено условието за локална конформна Келеровост. Предполагам, че кандидатката ще продължи изследването на тази структура - намиране на условия за принадлежност към класовете на Gray-Hervella, удовле-творяване на Келеровите кривинни тъждества на Gray, и т.н, в това направление има широко поле за бъдеща работа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Документите и материалите, представени от гл.ас. д-р Ива Руменова Докузова, отговарят на всички изисквания на Закона за развитие на академичния състав в Република България (ЗРАСРБ), Правилника за прилагане на ЗРАСРБ и съответния Правилник на ПУ „Паисий Хилендарски“. Постигнатите от нея резултати в научно- изследователската и учебната дейност съответстват на специфичните изисквания на Факултета по математика и информатика, приети във връзка с Правилника на ПУ за приложение на ЗРАСРБ.

След запознаване с представените в конкурса материали и научни трудове, намирам за основателно да дам своята положителна оценка и да препоръчам на Научното жури да изготви доклад-предложение до Факултетния съвет на Факултета по математика и информатика за избор на гл.ас. д-р Ива Руменова Докузова на академичната длъжност "доцент" в ПУ „П. Хилендарски“ по професионално направление 4.5. Математика, научна специалност „Геометрия и топология”.

27.03. 2024 г. Рецензент:

(проф. д.м.н. Йохан Давидов)