Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“
Факултет по математика и информатика

Катедра „Математически анализ“

ПЛАМЕНА ИВАНОВА МАРЧЕВА

Неподвижни точки и сходимост на итерационни методи за симултантна апроксимация на нули на полиноми

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертационен труд
за присъждане на образователната и научна степен
„ДОКТОР“
по област на висше образование:
4. Природни науки, математика и информатика;
професионално направление: 4.5. Математика;
докторска програма: Математически анализ

Научни ръководители:

проф. д.м.н. Петко Д. Пройнов

доц. д-р Стоил И. Иванов

Пловдив – 2023

Дисертационният труд е обсъден и насрочен за защита на разширен катедрен съвет на катедра „Математически анализ“ при Факултет по математика и информатика на Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“, проведен на 17.02.2023 г.

Дисертационният труд „Неподвижни точки и сходимост на итерационни методи за симултантна апроксимация на нули на полиноми“ се състои от увод, четири глави, заключение и библиография. Общият обем на дисертационния труд е 117 страници. Библиографията съдържа 108 заглавия. Списъкът на авторските публикации включва 3 заглавия.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на .... г. от ...... ч. в Заседателната зала на Нова сграда на Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“, гр. Пловдив.

Материалите по защитата са на разположение, за интересуващите се, в секретариата на ФМИ, Нова сграда на ПУ „Паисий Хилендарски“, бул. „България“ № 236, каб. 330, всеки работен ден от 8:30 до 17:00 часа.

Номерацията на теоремите, лемите, следствията и дефинициите в автореферата съвпада с тяхната номерация в дисертационния труд.

Съдържание

Актуалност и цел на дисертационния труд

Актуалност

Теорията на неподвижните точки и изследването на сходимостта на итерационни методи, с висок ред на сходимост, за апроксимиране на нули на полиноми оформят два обширни раздела от съвременната математика, които са тясно свързани помежду си. Те са едни от най-актуалните съвременни математически проблеми, тъй като намират множество приложения както в теоретични, така и в приложни изследвания. Едно от най-основните приложения на итерационните методи е числено решаване на полиномни уравнения с коефициенти в произволно нормирано поле и числено решаване на операторни уравнения в банахови пространства.

Проблема за намиране на теореми за съществуване, единственост и апроксимиране на неподвижни точки на изображения в метрични пространства добива актуалност през 1922 година, с първата публикация на Банах [2], в която той формулира своята знаменита теорема за неподвижни точки на свиващите изображения, известна като *принцип на Банах за свиващите изображения*. В наши дни тази област продължава да се развива интензивно и е в основата на редица методи за решаване на диференциални, интегрални и нелинейни операторни уравнения. Важно е да се отбележи, че първите дълбоки обобщения на теоремата на Банах са получени от Брадудър [6] (1968), Бойд и Вонг [5] (1969) и Чирич [11] (1971), а наскоро Пройнов и Николова [83] и Пройнов [72] получават теореми, с които обобщават множество теореми за неподвижни точки, в това число и споменатите три резултата. През 2006 и 2007, Пройнов [59, 62], използвайки понятията *контролна функция от висок ред* и *итерационно свиващо изображение*, получава теореми, които обобщават теоремата на Банах. Тези две работи се превръщат в отправна точка за една обща теория за сходимост на итерационни процеси от типа на Пикар, развита от Пройнов в периода 2009-2021 година, в статиите [63, 64, 66, 69, 67, 71, 73]. Всъщност, тази теория задава метод на изследване, който се заражда в статията [59] и може да се нарече *метод на функцията на началните условия*.

От друга страна, през последните 60 години, силно нараства интересът на математиците към изследването на сходимостта на итерационни методи за апроксимиране на нули на полиноми. През 1994 година Сендов, Андреев и Кюркчиев [94], а наскоро МакНаме [30] (2007 г.) и МакНаме и Пан [31] (2013 г.) публикуват монографии, които са посветени изцяло на този проблем. Подробен обзор на итерационните методи за нули на полиноми е направен в статията на Пан [43], от 1997 година.

През 1891 година Вайерщрас [102] предлага качествено нов подход за апроксимиране на нули на полиноми. Той публикува първия метод за *едновременна (симултантна) апроксимация* на всичките нули на комплексен полином (*метод на Вайерщрас*). Първата монография, изцяло посветена на методите за симултантна апроксимация на нули на полиноми, е публикувана през 1989 година от Петкович [46], макар че две години по-рано българският математик Любомир Илиев посвещава една глава от своята монография [20, Гл. 5] на тези методи. Следващите монографии, които засягат итерационните методи за симултантна апроксимация на всичките нули на даден полином, принадлежат на Сендов, Андреев и Кюркчиев [94, Гл. 4] (1994), Петкович, Херцег и Илич [52] (1997), Кюркчиев [26, Гл. 1, 2, 3, 6] (1998), Петков и Кюркчиев [45] (2000), МакНаме [30, Гл. 4] (2007), Петкович [48] (2008), Илиев и Кюркчиев [19, Гл. 6] (2010) и Чира [10] (2012).

Метод на Вайерщрас.

Както споменахме, през 1891 година, Вайерщрас [102] публикува първия метод за *симултантна апроксимация* на всичките нули на комплексен полином f, който се дефинира с итерационната формула

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - W(x^{(k)}), \tag{1}$$

където W се дефинира в $\mathbb{K}^n$ с $W(x) = (W_1(x), \dots, W_n(x))$ и

$$W_i(x) = \frac{f(x_i)}{a_o \prod_{j \neq i}(x_i - x_j)}\,, \tag{2}$$

където a_0 е старшият коефициент на f. В същата статия, Вайерщрас [102] доказва теорема за полулокална сходимост на метода (1), която не предоставя начални условия, гарантиращи сходимост, а само доказва тяхното съществуване. Като следствие от тази теорема се получава основната теорема на алгебрата, която гласи, че полето на комплексните числа е алгебрично затворено. Така Вайерщрас дава първото конструктивно доказателство на основната теорема на алгебрата. Независимо, че много автори причисляват работата на Вайерщрас към алгебрата, тя всъщност е една великолепна работа, която лежи на границата между математическия анализ, числените методи и алгебрата.

През 1913 година Кюршак [25] посочва, че аргументите на Вайерщрас, с които той доказва своята теорема, са в сила за произволно алгебрично затворено поле с абсолютна стойност, а не само за полето на алгебричните числа. Той доказва, че всяко такова поле може да бъде разширено до пълно алгебрично затворено поле с абсолютна стойност.

През 1960 година Дюран [14], през 1962 година Дочев [12] и през 1966 година, Кернер [22] и Прешич [58] преоткриват метода на Вайерщрас, поради което той е често срещан в литературата под името *метод на Вайерщрас-Дочев*, *метод на Дюран-Кернер* и др. Важно е да се отбележи обаче, че Дочев [12] доказва първата теорема за локална сходимост за метода на Вайерщрас. След това, теореми за локална сходимост на метода на Вайерщрас са доказани от Кюркчиев и Марков [24] (1983), Ванг и Чао [100] (1991), Хопкинс, Маршал, Шмид и Злобек [17] (1994), Тили [97] (1998), Хан [16] (2000), Ниел [40] (2001), Якобсон [104] (2002), Пройнов и Петкова [84] (2013) и Пройнов и Василева [88] (2015).

През 1980 година Прешич [57] е първият, след Вайерщрас, който публикува теорема за полулокална сходимост на метода. През следващите три десетилетия редица автори получават теореми за полулокална сходимост на метода при различни начални условия: Ченг [107, 108] (1982, 1987), Ванг и Чао [106, 101] (1993, 1995), Петкович, Карстенсен и Трайкович [49] (1995), Петкович [47] (1996), Петкович и Херцег [50] (1996), Петкович, Херцег и Илич [53] (1998), Батра [3] (1998), Хан [16] (2000), Петкович и Херцег [51] (2001). През 2006 година Пройнов [59, 60] публикува теорема за полулокална сходимост на този метод, която обобщава и подобрява всички предходни резултати в това направление. През 2014 година Пройнов и Петкова [86], използвайки идеи на Вайерщрас [102], получават теорема за полулокална сходимост на метода на Вайерщрас при съществено различни начални условия, която може да се разглежда като количествен вариант на резултата на Вайерщрас. Малко по-късно, Пройнов [66] представя обширно изследване на локалната и полулокална сходимост на метода на Вайерщрас, резултатите от което подобряват и допълват всички предходни резултати от този вид и така, поне за сега, поставят точка на това направление.

Модифициран метод на Вайерщрас.

През 2016, Неджибов [34] публикува два метода, които се явяват модификации на метода на Вайерщрас (1). Първият от тях съвпада с метода на Вайерщрас (1), когато f има само ненулеви корени, т.е. когато $f(0) \neq 0$, вторият, който занапред ще наричаме *модифициран метод на Вайерщрас*, се дефинира със следната итерационна редица:

$$x^{(k+1)} = T(x^{(k)}), \qquad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{3}$$

където T е дефинирана в $\mathbb{K}^n$ с $T(x) = (T_1(x), \ldots, T_n(x))$ и

$$T_i(x) = x_i^2/(x_i + W_i(x)), \tag{4}$$

а $W_i(x)$ е корекцията на Вайерщрас, дефинарана с (2).

В последните години, в поредица от статии, Неджибов [34, 35, 36, 38, 37, 39] доказа теореми за локална сходимост при различни начални условия както и теорема за полулокална сходимост на модифицирания метод на Вайерщрас (3).

Метод на Дочев и Бърнев.

Вторият метод за симултантна апроксимация в литературата е конструиран от българските математици Дочев и Бърнев [13] през 1964 г. *Методът на Дочев и Бърнев* се дефинира, чрез следната итерационна редица:

$$x^{(k+1)} = T(x^{(k)}) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

където T е дефинирана в $\mathbb{K}^n$, чрез $T(x) = (T_1(x), \ldots, T_n(x))$ с

$$T_i(x) = x_i - \frac{f(x_i)}{g'(x_i)} \left(2 - \frac{f'(x_i)}{g'(x_i)} + \frac{1}{2} \frac{f(x_i)}{g'(x_i)} \frac{g''(x_i)}{g'(x_i)} \right), \tag{6}$$

а полинома g е дефиниран с $g(z) = c_o \prod_{j=1}^{n} (z - x_j)$. През 1972, Прешич [56] преоткрива метода на Дочев и Бърнев (5) като дефинира итерационната функция $T\colon \mathcal{D} \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ в следната еквивалентна форма:

$$T_i(x) = x_i - W_i(x) \left(1 - \sum_{j \neq i} \frac{W_j(x)}{x_i - x_j} \right), \tag{7}$$

където $W_i(x)$ е *корекцията на Вайерщрас*, дефинирана с (2).

През 1974, Милованович [32] дава едно елегантно извеждане на метода (5), а през 1983 г. методът (5) е преоткрит и от Танабе [96], поради което става широко известен под името *метод на Танабе* (виж [48] и цитираната литуратура). Всъщност, това че итерационните функции (6) и (7) са еквивалентни е доказано едва през 2016 г. от Пройнов [67, Теорема 4.1].

Локалната сходимост на метода на Дочев-Бърнев (5) е изследвана за първи път от Семерджиев и Патева [93]. През 1982 г. Кюркчиев [23] (виж също [94, Теорема 19.1]) доказва теорема, която подобрява резултатата на гореспоменатите автори. През 2011 г. Тосева, Кюркчиев и Илиев [98, Теорема А] доказват теорема за локална сходимост за метода (5), работейки с итерационната функция (7), но поради еквивалентността на (7) и (6) този резултат се оказва следствие от теоремата на Кюркчиев. Съвсем наскоро, Павков, Кабаджов, Иванов и Иванов [44] получават теореми за локална сходимост на една фамилия от симултантни методи, въведена от Иванов [21] (2017), която включва като частен случай, метода на Дочев и Бърнев.

Теореми за полулокална сходимост на метода на Дочев и Бърнев (Танабе) (5) са доказани от Station Петкович, Херцег и Илич [52, 53] и Илич и Херцег [18]. През 2016 г. Пройнов [67, Теорема 4.5] доказва теорема за полулокална сходимост на метода на Дочев и Бърнев (5), която обобщава и подобрява всички предходни резултати от този вид, а Иванов [21] доказва теорема за полулокална сходимост на споменатата фамилия от симултантни методи, която включва метода на Дочев и Бърнев.

Метод на Ерлих (Бьорш-Зупан).

Следващият симултантен метод в литературата е конструиран от Ерлих [15] през 1967 г. и може да се дефинира чрез следната итерационна редица:

$$x^{(k+1)} = F(x^{(k)}) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

където F се дефинира в $\mathbb{K}^n$ с $F(x) = (F_1(x), \ldots, F_n(x))$ и

$$F_i(x) = x_i - f(x_i) \left(f'(x_i) - f(x_i) \sum_{j \neq i} \frac{1}{x_i - x_j} \right)^{-1}. \tag{9}$$

През 1970 година Бьорш-Зупан [4] публикува следния симултантен метод:

$$x^{(k+1)} = G(x^{(k)}) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

където G е дефинирана в $\mathbb{K}^n$ с $G(x) = (G_1(x), \ldots, G_n(x))$ и

$$G_i(x) = x_i - W_i(x) \left(1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j(x)}{x_i - x_j} \right)^{-1}. \tag{11}$$

През 1982, Вернер [103] доказа, че итерационните функции (9) и (11) са еквивалентни (виж също Карстенсен [7]).

Теореми за локална и полулокална сходимост, които подобряват всички предходни резултати за метода на Ерлих (Бьорш-Зупан) са получени от Пройнов [68, 67, 70], Иванов [21] и Павков, Кабаджов, Иванов и Иванов [44].

Методи с ускорена сходимост.

През 1977 г. Нурейн [41, 42] конструира два симултантни метода от четвърти ред на сходимост, които са базирани на методите на Ерлих (8) и Бьорш-Зупан (10). По-точно, единият се дефинира с $x^{(k+1)} = \mathcal{F}(x^{(k)})$, където $\mathcal{F}$ е дефинирана в $\mathbb{K}^n$ с $\mathcal{F}(x) = (\mathcal{F}_1(x), \ldots, \mathcal{F}_n(x))$ и

$$\mathcal{F}_i(x) = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i) - f(x_i) \displaystyle\sum_{j \neq i} \frac{1}{x_i - x_j + f(x_j)/f'(x_j)}}, \tag{12}$$

а другия се дефинира с $x^{(k+1)} = \mathcal{G}(x^{(k)})$, където $\mathcal{G}$ е дефинирана в $\mathbb{K}^n$ с $\mathcal{G}(x) = (\mathcal{G}_1(x), \ldots, \mathcal{G}_n(x))$ и

$$\mathcal{G}_i(x) = x_i - \frac{W_i(x)}{1 + \displaystyle\sum_{j \neq i} \frac{W_j(x)}{x_i - x_j - W_i(x)}}. \tag{13}$$

Очевидно, всеки от тези методи се получава чрез комбиниране на две итерационни функции. Първият се получава чрез комбиниране на итерационната функция на Ерлих (9) с тази на знаменития метод на Нютон, а вторият е получен чрез комбиниране на итерационната функция на Бьорш-Зупан (11) с итерационната функция на Вайерщрас (2) затова, в наши дни, тези методи са известни (виж напр. [48, Глава 1]) под имената:

- Метод на Ерлих с корекция на Нютон;
- Метод на Бьорш-Зупан с корекция на Вайерщрас.

През 2006, Пройнов [61] публикува теорема за полулокална сходимост на метода (13), а съвсем наскоро Пройнов и Василева [91] доказват теореми за локална и полулокална сходимост на метода (12) и така всички предходни резултати за тези два метода са продобрени.

След тези работи на Нурейн, много автори (виж напр. [54, 99, 55, 80, 27, 78]) започват да използват тази идея и да конструират и изследват различни методи с ускорена сходимост, които в настоящия дисертационен труд ще наричаме *симултантни методи с корекция*. През 1987, Ванг и Ву [99] са първите, които конструират и изследват метод с произволна корекция, която обаче не води до ускоряване на сходимостта на методите. Съвсем наскоро, Пройнов и Василева [92] конструират фамилия от симултантни методи от типа на Ерлих, с произволна корекция и произволен ред на сходимост, и изследват локалната и полулокалната и сходимост, а през

2023, Пройнов и Иванов [79] конструират и изследват една фамилия от симултантни методи от типа на Сакурай, Торий и Шугиура, с произволна корекция и произволен ред на сходимост, за кратни нули на полиноми.

Цел на дисертационния труд

Целта на настоящия дисертационен труд е да се изпълнят следните задачи:

Задача 1. *Да се изследва сходимостта на модифицираният метод на Вайерщрас* (3) *и да се получат теореми за локална и полулокална сходимост, които обобщават, подобряват и допълват всички предходни резултати в това направление.*

Задача 2. *Да се изследва локалната сходимост на метода на Дочев и Бърнев* (5) *и да се получат теореми, които обобщават, подобряват и допълват досегашните резултати от този вид.*

Задача 3. *Да се конструира една фамилия от симултантни методи от типа на Дочев и Бърнев с корекция. Да се получат теореми за локална и полулокална сходимост на новоконструираната фамилия, както и на някои нейни конкретни членове.*

Задача 4. *Да се направи числена реализация на всички изследвани методи, като получените теореми за полулокална сходимост да се приложат за компютърно доказване на тяхната сходимост.*

Кратко изложение на получените резултати

Настоящият дисертационен труд е посветен на изследване сходимостта на модифицирания метод на Вайерщрас (3) и на една, новоконструирана фамилия от симултантни методи от типа на Дочев и Бърнев, с ускорена сходимост, която включва, като частен случай, класическия метод на Дочев и Бърнев (5).

Дисертационният труд се състои от увод, четири глави, заключение и библиография. Заключението включва: резюме на получените резултати, списък на публикациите по дисертационния труд, апробация на получените резултати и декларация за оригиналност.

Ще изложим, накратко, съдържанието на дисертационния труд по глави и параграфи.

Глава 1. Обща теория за сходимост на итерационни процеси в конусно нормирани пространства

Тази глава има реферативен характер и е посветена на общата теория за сходимост на итерционни процеси в конусно нормирани пространства, въведена от Пройнов [63, 64, 66, 69, 67, 71, 73] в периода 2009-2021 г.

В **Параграф 1.1** са изложени някои основни понятия от теорията на полетата и теорията на конусно нормираните пространства, които лежат в основата на настоящия дисертационен труд.

В **Параграф 1.2** са представени някои неравенства в $\mathbb{K}^n$, които играят важна роля в доказателствата на нашите резултати.

Занапред, с $\mathbb{K}[z]$ ще означаваме пръстена на полиномите, на една променлива, над полето $\mathbb{K}$. Също така, считаме че векторното пространство $\mathbb{R}^n$ е снабдено с частична наредба $\preceq$, дефинирана с $x \preceq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i$ за всички $i \in I_n$ и векторното пространство $\mathbb{K}^n$ е снабдено с p-норма $\|\cdot\|_p$ и с конусна норма $\|\cdot\|$, дефинирани с

$$\|x\| = (|x_1|, \ldots, |x_n|) \quad \text{и} \quad \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \qquad (1 \leq p \leq \infty).$$

Освен това дефинираме функциите $d\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^n$ и $\delta\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$ чрез

$$d(x) = (d_1(x), \ldots, d_n(x)) \;\; \text{с} \;\; d_i(x) = \min_{j \neq i} |x_i - x_j| \;\; \text{и} \;\; \delta(x) = \min_{i \neq j} d_i(x) \tag{14}$$

и за два вектора $x \in \mathbb{K}^n$ и $y \in \mathbb{R}^n$ използваме означението x/y за вектор в $\mathbb{R}^n$ дефиниран с $x/y = (|x_1|/y_1, \cdots, |x_n|/y_n)$ при условие че y има само ненулеви координати. За дадено p $(1 \leq p \leq \infty)$, винаги определяме число q чрез $1 \leq q \leq \infty$ с $1/p + 1/q = 1$ и за числото $n \in \mathbb{N}$, дефинираме числата $a = (n-1)^{1/q}$ и $b = 2^{1/q}$.

Основната цел на **Параграф 1.3** е да представи някои основни резултати от теорията на Пройнов [63, 64, 66, 69, 67, 71, 73] за сходимост на итерационни процеси от типа на Пикар $x_{k+1} = Tx_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$,където $T : D \subset X \to X$ е итерационна функция в конусно метрично пространство X над телесно векторно пространство. Основна роля в тази теория играе понятието *функция на началните условия.*

Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$. Вектор $\xi \in \mathbb{K}^n$ се нарича *векторен корен* на полинома $f \in \mathbb{K}[z]$, ако $f(z) = a_0 \prod_{i=1}^n (z - \xi_i)$ за всяко $z \in \mathbb{K}$, където $a_0 \in \mathbb{K}$. Нека $\xi \in \mathbb{K}^n$ е векторен корен на f. Примери за функции на началните условия, които се използват при доказване на теореми за сходимост на методи за едновременна апроксимация на нули на полиноми са:

- Функция $E\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$, дефинирана с равенството

$$E(x) = \left\| \frac{x - \xi}{d(\xi)} \right\|_p . \tag{15}$$

- Функция $E\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}_+$, дефинирана с равенството

$$E(x) = \left\| \frac{x - \xi}{d(x)} \right\|_p . \tag{16}$$

- Функция $E_f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$, дефинирана с равенството

$$E_f(x) = \left\| \frac{W_f(x)}{d(x)} \right\|_p . \tag{17}$$

Всички формулирани по-горе функции на началните условия се използват в настоящия дисертационен труд за доказване на основни резултати.

През 2021 година, Пройнов [73] доразвива своята теория със следващите дефиниции, които използваме за доказателството на теоремите за локална сходимост в Параграф 2.2 на Глава 2, в Глава 3 и Глава 4.

Дефиниция 1.14 ([73]). Функцията $F\colon D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ се нарича *итерационна функция от първи вид в точка* $\xi \in \mathcal{D}$, ако съществува квази-хомогенна функция $\phi\colon J \to \mathbb{R}_+$ от точен ред $m \geq 0$ такава, че за всеки вектор $x \in \mathbb{K}^n$ с $E(x) \in J$ е в сила $x \in D$ и $\| F(x) - \xi \| \preceq \phi(E(x)) \|x - \xi \|$, където функцията $E\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$ е дефинирана с (15). Функцията ϕ ще наричаме *контролна дункция* на F.

Дефиниция 1.15 ([73]). Функцията $F\colon D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ се нарича *итерационна функция от втори вид в точка* $\xi \in \mathbb{K}^n$, ако съществува ненулева квази-хомогенна функция $\beta\colon J \to \mathbb{R}_+$ такава, че за всеки вектор $x \in \mathcal{D}$ с $E(x) \in J$ е в сила $x \in D$ и $\| F(x) - \xi \| \preceq \beta(E(x)) \|x - \xi \|$, където функцията $E\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}_+$ е дефинирана с (16). Функцията β се нарича *контролна функция* на F.

В **Параграф 1.4** са представени няколко теореми на Пройнов [69], които дават възможност да трансформираме теореми за локална сходимост от първи и втори вид в такива за полулокална сходимост. Ще отбележим, че теоремите за полулокална сходимост са теореми с компютърно проверими начални условия и оценки на грешките, което им придава голяма практическа стойност.

Глава 2. Нови резултати за един модифициран метод на Вайерщрас

Тази глава се състои от пет параграфа и е посветена на изследване сходимостта на модифицирания метод на Вайерщрас (3).

В **Параграф 2.1** е изследвана локалната сходимост от първи вид на модифицирания метод на Вайерщрас (3). В този параграф е представен и първия основен резултат в дисертационния труд, който подобрява и допълва всички предходни резултати от вида за този метод:

Теорема 2.1. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, който има n прости нули в $\mathbb{K}$ такива, че $f(0) \neq 0$, $\xi \in \mathbb{K}^n$ е векторен корен на f и $1 \leq p \leq \infty$. Нека също $x^{(0)} \in \mathbb{K}^n$ е начално приближение, удовлетворяващо условието*

$$E(x^{(0)}) = \left\| \frac{x^{(0)} - \xi}{\Delta(\xi)} \right\|_p < \frac{1}{b} \quad \text{и} \quad \Phi(E(x^{(0)})) < 2, \tag{18}$$

където функцията $\Delta \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^n$ е дефинирана с

$$\Delta(x) = (\Delta_1(x), \ldots, \Delta_n(x)) \quad \text{и} \quad \Delta_i(x) = \min\{|x_i|, d_i(x)\} \quad (i \in I_n), \tag{19}$$

а реалната функция Φ е дефинирана с

$$\Phi(t) = \frac{1+t}{1-t} \left(1 + \frac{a\,t}{(n-1)(1-bt)} \right)^{n-1}.$$

Тогава итерационната редица (3) е коректно дефинирана и сходяща квадратично към ξ с оценки на грешката за всяко $k \geq 0$

$$\|x^{(k+1)} - \xi\,\| \preceq \lambda^{2^k}\, \|x^{(k)} - \xi\,\| \quad \text{и} \quad \|x^{(k)} - \xi\,\| \preceq \lambda^{2^k - 1}\, \|x^{(0)} - \xi\,\|, \tag{20}$$

където $\lambda = \phi(E(x^{(0)}))$ с ϕ, дефинирана чрез

$$\phi(t) = \frac{\psi(t) - 1 + t}{1 - t - t\,\psi(t)} \quad \text{и} \quad \psi(t) = \left(1 + \frac{a\,t}{(n-1)(1-bt)} \right)^{n-1}. \tag{21}$$

В сила е и следната оценка на асимптотичната константата:

$$\limsup_{k \to \infty} \frac{\|x^{(k+1)} - \xi\|_p}{\|x^{(k)} - \xi\|_p^2} \leq \frac{a+1}{\widetilde{\Delta}(\xi)}, \tag{22}$$

където $\widetilde{\Delta}(\xi) = \min\{\delta(\xi), \gamma(\xi)\}$, $\delta(\xi) = \min_{i \neq j} |\xi_i - \xi_j|$ и $\gamma(\xi) = \min_{i \in I_n} |\xi_i|$.

В **Параграф 2.2** е изследвана локалната сходимост от втири вид на метода (3).

Преди да форумулираме основния резултат, дефинираме функциите γ и β, както следва

$$\gamma(t) = \left(1 + \frac{a\,t}{n-1}\right)^{n-1} \quad \text{и} \quad \beta(t) = \frac{\gamma(t) - 1 + t\,\gamma(t)}{1 - t\,\gamma(t)}\,. \tag{23}$$

Следващата теорема, която подобрява резултат на Неджибов [39], е основният резултат в този параграф.

Теорема 2.2. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, който има n прости нули в $\mathbb{K}$ и ξ е векторен корен на f. Нека $x^{(0)} \in \mathbb{K}^n$ е начално приближение с различни и ненулеви координати, което удовлетворява налното условие*

$$E(x^{(0)}) = \left\| \frac{x^{(0)} - \xi}{\Delta(x^{(0)})} \right\|_p < \eta \quad \textit{и} \quad \Phi(E(x^{(0)})) \leq 2, \tag{24}$$

където реалната функция Φ е дефинирана с $\Phi(t) = (1 + (2+b)t)\,\gamma(t) c\, \gamma$, дефинирана чрез (23), а η е единственото решение на уравнението $t\,\gamma(t) = 1$ в интервала $[0, \infty)$. Тогава, итерационната редица (3) е коректно дефинирана и Q-квадратично сходяща към ξ със следните оценки на грешката за всяко $k \geq 0$:

$$\|x^{(k+1)} - \xi\,\| \preceq \theta\,\lambda^{2^k}\, \|x^{(k)} - \xi\,\| \quad \textit{и} \quad \|x^{(k)} - \xi\,\| \preceq \theta^k\,\lambda^{2^k-1}\, \|x^{(0)} - \xi\,\|, \tag{25}$$

където $\lambda = \phi(E(x^{(0)}))$, $\theta = \psi(E(x^{(0)}))$, $\phi = \beta/\psi$ и $\psi(t) = 1 - bt(1 + \beta(t))$. Освен това, е в сила оценката на асимптотичната константа (22).

В **Параграф 2.3** е получена следната теорема за полулокална сходимост на метода (3):

Теорема 2.3. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, и нека $x^{(0)} \in \mathbb{K}^n$ е начално приближение с различни ненулеви координати, което удовлетворява началното условие*

$$E_f(x^{(0)}) = \left\| \frac{W(x^{(0)})}{\Delta(x^{(0)})} \right\|_p < \frac{R(1 + (b-1)R)}{(1 + bR)(1 + (a+b-1)R)}\,, \tag{26}$$

където R е дефинирано с $R = \frac{\sqrt[n-1]{h} - 1}{b\,(\sqrt[n-1]{h} - 1) + a/(n-1)}$, а числото h е дефинирано с

$$h = \frac{3b - a - 1 + \sqrt{(3b - a - 1)^2 + 8(b+1)(a + 1 - b)}}{2(b+1)}\,.$$

Тогава f притежава само прости нули в $\mathbb{K}$ и итерационната редица (3) *е коректно дефинирана и сходяща квадратично към векторен корен ξ на f.*

В **Параграф 2.4** са приведени числени примери, които показват приложимостта на Теорема 2.3.

В **Параграф 2.5** е представено теоретично и числено сравнение на класическия метод на Вайерщрас и модифицирания метод на Вайерщрас.

Глава 3. Нови резултати за метода на Дочев и Бърнев

Трета глава се състои от два параграфа и е посветена на изследване локалната сходимост на метода на Дочев и Бърнев (5).

В **Параграф 3.1** е доказна теорема за локална схосимост от първи вид. Преди да формулираме теоремата, дефинираме функции ϕ и μ, чрез

$$\phi(t) = (\mu(t)-1)^2 + \frac{at^2\,\mu(t)^2}{(1-t)(1-bt)} \quad \text{и} \quad \mu(t) = \left(1 + \frac{a\,t}{(n-1)(1-b\,t)}\right)^{n-1}. \tag{27}$$

Теорема 3.1. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, който има n прости нули в $\mathbb{K}$, $\xi \in \mathbb{K}^n$ е векторен корен на f и $1 \leq p \leq \infty$. Нека $x^{(0)} \in \mathbb{K}^n$ е начално приближение, удовлетворяващо*

$$E(x^{(0)}) < 1/b \quad \text{и} \quad \Phi(E(x^{(0)})) < 2, \tag{28}$$

където E е дефинирана с (15), *а Φ е дефинирана с*

$$\Phi(t) = \mu(t)\left(1 + \frac{at^2}{(1-t)(1-bt)}\right)$$

с μ дефинирана, чрез (27). *Тогава итерационната редица на Дочев и Бърнев* (5) *е коректно дефинирана и Q-кубично сходяща към ξ със следните оценки на грешката за всяко $k \geq 0$:*

$$\|x^{(k+1)} - \xi\,\| \preceq \lambda^{3^k}\,\|x^{(k)} - \xi\,\| \quad \text{и} \quad \|x^{(k)} - \xi\,\| \preceq \lambda^{(3^k-1)/2}\,\|x^{(0)} - \xi\,\|, \tag{29}$$

където $\lambda = \phi(E(x^{(0)}))$ и ϕ е дефинирана с (27). *Освен това имаме и следната оценка на асимптотичната константа:*

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\|x^{(k+1)} - \xi\|_p}{\|x^{(k)} - \xi\|_p^3} \leq \frac{a}{\delta(\xi)^2}\,, \tag{30}$$

където δ е дефинирана с (14).

В **Параграф 3.2** е доказан вторият основен резултат в тази глава, който е теорема за локална сходимост от втори вид за метода на Дочев и Бърнев (5).

За нуждите на теоремата, дефинираме функция β чрез

$$\beta(t) = (\mu(t) - 1)^2 + \frac{a\, t^2\, \mu(t)^2}{1 - t}\,, \text{ където } \mu(t) = \left(1 + \frac{a\, t}{n - 1}\right)^{n-1} \tag{31}$$

и функциите Ψ и ψ както следва:

$$\Psi(t) = 1 - bt - \beta(t)(1 + bt) \quad \text{и} \quad \psi(t) = 1 - bt(1 + \beta(t)). \tag{32}$$

Теорема 3.2. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, който има n прости нули в $\mathbb{K}$, $\xi \in \mathbb{K}^n$ е векторен корен на f и $1 \leq p \leq \infty$. Нека, също така, $x^{(0)} \in \mathcal{D}$ е вектор, удовлетворяващ началното условие*

$$E(x^{(0)}) < 1 \quad \text{и} \quad \Psi(E(x^{(0)})) \geq 0, \tag{33}$$

където E е дефинирана с (16), *а Ψ е дефинирана с* (32). *Тогава методът на Дочев и Бърнев* (5) *е коректно дефиниран и Q-кубично сходяща към ξ със следните оценки на грешката за всяко $k \geq 0$:*

$$\|x^{(k+1)} - \xi\,\| \preceq \theta\lambda^{3^k}\, \|x^{(k)} - \xi\,\| \quad \text{и} \quad \|x^{(k)} - \xi\,\| \preceq \theta^k\lambda^{(3^k-1)/2}\, \|x^{(0)} - \xi\,\|, \tag{34}$$

където $\lambda = \phi(E(x^{(0)}))$, $\theta = \psi(E(x^{(0)}))$, $\phi = \beta/\psi$ и ψ е дефинирана с (32).

Глава 4. Нова фамилия от методи с ускорена сходимост

Четвърта глава се състои от шест параграфа и е посветена на изследване сходимостта на една новоконструирана фамилия от симултантни методи от типа на Дочев и Бърнев, с ускорена сходимост.

В **Параграф 4.1** е конструирана една нова фамилия от симултантни методи, която наричаме *метод на Дочев и Бърнев с корекция*, и е изследвана локалната и сходимост от първи вид.

Нека $\Omega\colon \mathscr{D} \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ е произволна итерационна функция, тогава дефинираме следната фамилия от методи:

$$x^{(k+1)} = \mathcal{T}(x^{(k)}), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{35}$$

където $\mathcal{T}$ е дефинирана с $\mathcal{T}(x) = (\mathcal{T}_1(x), \ldots, \mathcal{T}_n(x))$ и

$$\mathcal{T}_i(x) = x_i - 2\mathcal{W}_i(x) + \mathcal{W}_i(x)^2 \left(\frac{f'(x_i)}{f(x_i)} - \sum_{j \neq i} \frac{1}{x_i - \Omega_j(x)}\right),$$

а $\mathcal{W}_i(x)$ е дефинирана с $\mathcal{W}_i(x) = f(x_i)/(a_0 \prod_{j \neq i} (x_i - \Omega_j(x)))$.

Нека, за произволна квази-хомогенна функция $\omega \colon J \to \mathbb{R}_+$ от точна степен $m \geq 0$ и $n \geq 2$, дефинираме функцията $\gamma \colon J \to \mathbb{R}_+$ със следното равенство

$$\gamma(t) = t\,(1 + \omega(t)^q)^{1/q}\,. \tag{36}$$

Като използваме функцията γ, дефинираме функцията ϕ, чрез следното равенство

$$\phi(t) = (\mu(t) - 1)^2 + \frac{a\,\mu(t)^2 \omega(t)\,t^2}{(1-t)(1-\gamma(t))} \quad \text{с} \quad \mu(t) = \left(1 + \frac{a\,t\,\omega(t)}{(n-1)(1-\gamma(t))}\right)^{n-1}. \tag{37}$$

Теорема 4.1. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, който има n прости нули в $\mathbb{K}$, $\xi \in \mathbb{K}^n$ е векторен корен на f, и нека $\Omega \colon \mathscr{D} \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ е итерационна функция от първи вид в ξ с контролна функция $\omega \colon J \to \mathbb{R}_+$ от точна степен $m \geq 0$. Нека $x^{(0)} \in \mathbb{K}^n$ е начално приближение, удовлетворяващо условията*

$$E(x^{(0)}) \in J, \quad \gamma(E(x^{(0)})) < 1 \quad \text{и} \quad \Phi(E(x^{(0)})) < 2, \tag{38}$$

където E е дефинирана с (15), γ е дефинирана с (36), а Φ е дефинирана по следния начин

$$\Phi(t) = \mu(t)\left(1 + \frac{a\,\omega(t)\,t^2}{(1-t)(1-\gamma(t))}\right) \tag{39}$$

с μ, дефинирана чрез (37). Тогава итерационната редица (35) е коректно дефинирана и сходяща към ξ с Q-ред $r = m + 3$ и със следните оценки на грешката за всяко $k \geq 0$:

$$\|x^{(k+1)} - \xi\,\| \preceq \lambda^{r^k}\, \|x^{(k)} - \xi\,\| \quad \text{и} \quad \|x^{(k)} - \xi\,\| \preceq \lambda^{\frac{r^k - 1}{r-1}}\, \|x^{(0)} - \xi\,\|, \tag{40}$$

където $\lambda = \phi(E(x^0))$, а ϕ е дефинирана с (37). Освен това имаме следната оценка на асимптотичната константа:

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\|x^{(k+1)} - \xi\|_p}{\|x^{(k)} - \xi\|_p^r} \leq \frac{a}{\delta(\xi)^{\,r-1}} \lim_{t\to 0^+} \frac{\omega(t)}{t^m}\,, \tag{41}$$

където δ е дефинирана с (14).

В **Параграф 4.2** е получена теорема за локална сходимост от втори вид за метода (35).

Преди да формулираме тази теорема, за произволна квази-хомогенна функция $\omega\colon J \to \mathbb{R}_+$ от точна степен $m \geq 0$, дефинираме функцията γ както следва:

$$\gamma(t) = \begin{cases} t\,(1+\omega(t)), & \textit{ако} \;\; \Omega \;\; \textit{не е идентитета}, \\ 0, & \textit{ако} \;\; \Omega \;\; \textit{е идентитета}. \end{cases} \tag{42}$$

Като използваме функцията γ, дефинираме функция β както следва:

$$\beta(t) = (\mu(t)-1)^2 + \frac{a\,\mu(t)^2\omega(t)\,t^2}{(1-t)(1-\gamma(t))}\,, \tag{43}$$

където μ е дефинирана с (37).

Следващата теорема е основният резултат в този параграф.

Теорема 4.2. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, който има n прости нули в $\mathbb{K}$, $\xi \in \mathbb{K}^n$ е векторен корен на f, и нека $\Omega\colon \mathscr{D} \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ е итерационна функция от втори вид в ξ с контролна функция $\omega\colon J \to \mathbb{R}_+$ от точна степен $m \geq 0$. Нека $x^{(0)} \in \mathbb{K}^n$ е начално приближение с различни координати, удовлетворяващо началното условие*

$$E(x^{(0)}) \in J \cap [0,1), \quad \gamma(E(x^{(0)})) < 1 \quad \textit{и} \quad \Psi(E(x^{(0)})) \geq 0, \tag{44}$$

където функцията E е дефинирана с (16), а функцията Ψ е дефинирана, чрез (32) с β дефинирана с (43). Тогава итерационната редица (35) е коректно дефинирана и сходяща към ξ с Q-ред $r = m + 3$ и със следните оценки на грешката за всяко $k \geq 0$

$$\|x^{(k+1)} - \xi\,\| \preceq \theta\,\lambda^{r^k}\,\|x^{(k)} - \xi\,\| \;\textit{и}\; \|x^{(k)} - \xi\,\| \preceq \theta^k\,\lambda^{\frac{r^k-1}{r-1}}\,\|x^{(0)} - \xi\,\|, \tag{45}$$

където $\lambda = \phi(E(x^{(0)}))$, $\theta = \psi(E(x^{(0)}))$, ψ е дефинирана с (32) с β, дефинирана чрез (43), а $\phi = \beta/\psi$.

В **Параграф 4.3**, като следствия от Теорема 4.1 и Теорема 4.2, са получени теореми за локална сходимост от първи и втори вид на следните членове на фамилията (35):

(i) **Метод на Дочев-Бърнев (DB)**, ако $\Omega(x) = x$.

(ii) **Метод на Дочев-Бърнев с корекция на Вайерщрас (DBW)**, ако Ω е итерационната функция на Вайерщрас, дефинирана с (2).

(iii) **Метод на Дочев-Бърнев с корекция на Нютон (DBN)**, ако Ω е итерационната функция на Нютон $\Omega_i(x) = x_i - f(x_i)/f'(x_i)$.

(iv) **Метод на Дочев-Бърнев с корекция на Ерлих (DBE)**, ако Ω е итерационната функция на Ерлих, дефинирана в $\mathbb{K}^n$ с (9).

(v) **Метод на Дочев-Бърнев с корекция на Халей (DBH)**, ако Ω е итерационната функция на Халей, дефинирана в $\mathbb{K}^n$ с

$$\Omega_i(x) = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \frac{f''(x_i)}{f'(x_i)}\right)^{-1}.$$

В **Параграф 4.4** е получена следната теорема за полулокална сходимост на метода на Дочев и Бърнев с корекция (35):

Теорема 4.3. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$ и функцията $\Omega\colon \mathscr{D} \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ е итерационна функция от втори вид с контролна функция $\omega\colon J \to \mathbb{R}_+$ от точна степен $m \geq 0$. Нека, също така, $x^{(0)} \in \mathbb{K}^n$ е начално приближение с различни координати, удовлетворяващо началните условия: $E_f(x^{(0)}) < 1/(1+\sqrt{a})^2$, $h(E_f(x^{(0)})) \in J$, $\gamma(h(E_f(x^{(0)}))) < 1$ и $\Psi(h(E_f(x^{(0)}))) \geq 0$, където функциите E_f, γ и Ψ са дефинирани с* (17), (42) *и* (32), *с β, дефинирана чрез* (43), *а h е дефинирана с*

$$h(t) = 2t \Big/ \left(1 - (a-1)t + \sqrt{(1-(a-1)t)^2 - 4t}\right). \tag{46}$$

Тогава f има само прости нули в $\mathbb{K}$ и методът (35) *е коректно дефиниран и сходящ към векторен корен ξ на f с Q-ред $r = m + 3$.*

В **Параграф 4.5**, като следствие от Теорема 4.3, са получени теореми за полулокална сходимост на горепосочените конкретни членове на фамилията (35).

В Параграф 4.6 са разгледани два числени примера, които показват приложимостта на Теорема 4.3 и акцентират върху поведението на разгледаните конкретни членове на фамилията (35).

Заключение

Резюме на получените резултати

Основните приноси в настоящия дисертационен труд са:

1. Получени са две нови теореми за локална сходимост, с априорни и апостериорни оценки на грешката и оценка на асимптитичната константа на един модифициран метод на Вайерщрас (Теорема 2.1 и Теорема 2.2). Получените теореми подобряват и допълват всички предходни резултати от този вид за този метод.

2. Получена е теорема за полулокална сходимост за модифицирания метод на Вайерщрас (Теорема 2.3), която подобрява и допълва предходните резултати от този вид. Тази теорема е от голямо практическо значение, тъй като предоставя изчислително проверими начално условие и оценка на грешката.

3. На базата на получените резултати е направено теоретично и числено сравнение на модифицирания метод на Вайерщрас с класическия метод на Вайерщрас (Параграф 2.5). Дадени са числени примери, в които теоремата за полулокална сходимост е приложена за компютърно доказване на квадратичната сходимост на двата метода (Параграф 2.4).

4. Получени са две теореми за локална сходимост на метода на Дочев и Бърнев (Теорема 3.1 и Теорема 3.2), при два различни вида начални условия, с оценки на грешката, както и оценка на асимптотичната константа. Първата от тях обобщава, подобрява и допълва всички предходни резултати от този вид, а другата е първа по рода си в математическата литература.

5. Конструирана е една фамилия от симултантни методи от типа на Дочев и Бърнев (*метод на Дочев и Бърнев с корекция*), с ускорена сходимост.

6. Получени са две теореми за локална сходимост на метода на Дочев и Бърнев с корекция (Теорема 4.1 и Теорема 4.2), както и теореми за локална сходимост от първи и от втори вид за четири конкретни метода, получени чрез използване на най-знаменитите итерационни функции в литературата, а именно тези на Вайерщрас, Нютон, Ерлих и Халей. Доказано е, че редът на сходимост на първите два метода е четвърти, а на другите два, пети.

7. Получена е теорема за полулокална сходимост за метода на Дочев и Бърнев с корекция (Теорема 4.3), както и за споменатите четири конкретни метода. Дадени са числени примери, в които тези резултати се прилагат за компютърно доказване на сходимостта на четирите метода, при зададен полином и зададено начално приближение.

Списък на публикациите по дисертационния труд

Основните резултати от дисертационния труд са публикувани в следните три научни статии:

1. Plamena I. Marcheva, Stoil I. Ivanov, Convergence analysis of a modified Weierstrass method for the simultaneous determination of polynomial zeros, Symmetry, 12(9): Article No. 1408, 19 pages, 2020, **Q2 (IF 2.713)**. https://doi.org/10.3390/sym12091408

2. Plamena I. Marcheva, Stoil I. Ivanov, On the semilocal convergence of a modified Weierstrass method for the simultaneous computation of polynomial zeros, AIP Conf. Proc., 2425: Article No. 420012, 4 pages, 2022. **(SJR 0.177)**. https://doi.org/10.1063/5.0082007.

3. Petko D. Proinov, Plamena I. Marcheva, A new family of Dochev-Byrnev type iterative methods with accelerated convergence, Sci. Works Union Sci. Bulg., 23(Series B) page 93–97, 2022. **ISSN: 2534–9376**.

Връзките между приносите, целите, задачите, мястото на описание в дисертационния труд и направените публикации по темата са следните:

Принос	Цел	Задачи	Параграф	Публикации
1	1	1	2.1, 2.2	1
2	1	1	2.3	1, 2
3	1	1, 4	2.4, 2.5	1, 2
4	1	2	3.1, 3.2	3
5	1	3	4.1	3
6	1	3	4.1, 4.2, 4.3	3
7	1	3, 4	4.4, 4.5	3

Апробация на получените резултати

А) Доклади на семинари и конференции

- Plamena I. Marcheva and Stoil I. Ivanov, Local convergence of modified Weierstrass method for the simultaneous determinantion of polynomial zeros, 9th International eurasian conference on mathematical sciences and applications (IECMSA 2020), Skopje, North Macedonia, August 25-28, 2020. http://www.iecmsa.org/program/ (page 8)

- Plamena I. Marcheva and Stoil I. Ivanov, On the semilocal convergence of a modified Weierstrass method for the simultaneous computation of polynomial zeros, 18th International conference of numerical analysis and applied mathematics, Rhodes, Greece, September 25-28, 2020. http://history.icnaam.org/icnaam_2020/ICNAAM

- Plamena I. Marcheva, On the convergence of a Weierstrass type method for the simultaneous approximation of polynomial zeros, 1-st Western Balkan Conference in Mathematics and Applications, (WBCMA2021), Prishtina, Kosovo. http://fwbcma2021.ilirias.com/
- Plamena.I. Marcheva, A new family of Dochev-Byrnev type iterative methods with accelerated covergence, IXth International conference of young scientists, Plovdiv, Bulgaria, July 14th, 2022.

Б) Участие в проекти

- Проект ДН 12/12 „Изследване на итерационни методи с висок ред на сходимост за апроксимиране на нули на полиноми и неподвижни точки на квази-свиващи изображения в метрични пространства“ към Фонд „Научни изследвания“ при МОН, 2017-2020.

Декларация за оригиналност

от **Пламена Иванова Марчева**,
редовен докторант към катедра „Математически анализ“
при Факултет по математика и информатика
на Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“

Във връзка с провеждането на процедура за придобиване на образователната и научна степен „доктор“ в Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“ и защита на представения от мен дисертационен труд, декларирам:

Резултатите и приносите на проведеното дисертационно изследване, представени в дисертационния ми труд на тема „Сходимост на итерационния метод на Халей за индивидуална и едновременна апроксимация на нули на полиноми“, са оригинални и не са заимствани от изследвания и публикации, в които нямам участие.

13.02.2023 г. ДЕКЛАРАТОР:
гр.Пловдив /Пламена Иванова Марчева/

Библиография

[1] Aberth, O. Iteration methods for finding all zeros of a polynomial simultaneously. *Math. Comp. 27* (1973), 339–344.

[2] Banach, S. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux équations intégrales. *Fund. Math. 3*, 1 (1922), 133–181.

[3] Batra, P. Improvement of a convergence condition for Durand-Kerner iteration. *J. Comput. Appl. Math. 96* (1998), 117–125.

[4] Börsch-Supan, W. Residuenabschätzung für Polynom-Nullstellen mittels Lagrange Interpolation. *Numer. Math. 14* (1970), 287–296.

[5] Boyd, D. W., and Wong, T. S. W. On nonlinear contractions. *Proc. Amer. Math. Soc. 20*, 2 (1969), 458–464.

[6] Browder, F. E. On the convergence of successive approximations for nonlinear functional equations. *Indag. Math. 30* (1968), 27–35.

[7] Carstensen, C. On quadratic-like convergence of the means for two methods for simultaneous rootfinding of polynomials. *BIT 33* (1993), 64–73.

[8] Cholakov, S. I. Local and semilocal convergence of Wang-Zheng's method for simultaneous finding polynomial zeros. *Symmetry 11* (2019), Article N?. 736, 15 pages.

[9] Cholakov, S. I., and Vasileva, M. T. A convergence analysis of a fourth-order method for computing all zeros of a polynomial simultaneously. *J. Comput. Appl. Math. 321* (2017), 270–283.

[10] Cira, O. *The Convergence Simultaneous Inclusion Methods.* Matrix Rom, Bucuresti, 2012.

[11] Ćirić, L. B. Generalized contractions and fixed-point theorems. *Publ. Inst. Math. 26* (1971), 19–26.

[12] Dochev, K. Modified Newton method for simultaneous approximation of all roots of a given algebraic equation. *Phys. Math. J. Bulg. Acad. Sci. 5* (1962), 136–139.

[13] Dochev, K., and Byrnev, P. Certain modifications of Newton's method for the approximate solution of algebraic equations. *USSR Comput. Math. Math. Phys. 4*, 5 (1964), 174–182.

[14] Durand, E. *Solutions numeriques des equations algebriques, Racines d'un polynome: Equations du type* $F(x) = 0$, vol. 1. Masson, Paris, 1960.

[15] Ehrlich, L. A modified Newton method for polynomials. *Commun. ACM 10* (1967), 107–108.

[16] Han, D. The convergence of the Durand-Kerner method for simultaneously finding all zeros of a polynomial. *J. Comput. Math. 18* (2000), 567–570.

[17] Hopkins, M., Marshall, B., Schmidt, G., and Zlobec, S. On a method of weierstrass for the simultaneous calculation of the roots of a polynomial. *Z. Angew. Math. Mech. 74* (1994), 295–306.

[18] Ilić, S., and Herceg, D. Safe convergence of Tanabe's method. *Novi Sad J. Math. 28*, 3 (1998), 51–60.

[19] Iliev, A., and Kyurkchiev, N. *Nontrivial Methods in Numerical Analysis: Selected Topics in Numerical Analysis.* Lambert Acad. Publ., Saarbruecken, 2010.

[20] Iliev, L. *Laguerre Entire Functions.* Pub. House of the Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, 1987.

[21] Ivanov, S. I. A unified semilocal convergence analysis of a family of iterative algorithms for computing all zeros of a polynomial simultaneously. *Numer. Algor. 75* (2017), 1193–1204.

[22] Kerner, I. Ein gesamtschrittverfahren zur berechnung von nullstellen von polynomen. *Numer. Math. 8* (1966), 290–294.

[23] Kjurkchiev, N. V. Some iterative schemes of Dochev type with an increased rate of convergence. *, Annu. Univ. Sofia Fac. Math.Méc. 76*, 9 (1982), 3–10.

[24] Kjurkchiev, N. V., and Markov, S. Two interval methods for algebraic equations with real roots. *Pliska Stud. Math. Bulg. 5* (1983), 118–131.

[25] Kürschak, J. über limesbildung und allgemeine körpertheorie. *J. Reine Angew Math. 142* (1970), 211–2253.

[26] Kyurkchiev, N. Initial Approximations and Root Finding Methods. In *Mathematical Research*, vol. 104. Wiley, Berlin, 1998.

[27] Machado, R. N., and Lopes, L. G. Ehrlich-type methods with King's correction for the simultaneous approximation of polynomial complex zeros. *Mathematics and Statistics 7*, 4 (2019), 129–134.

[28] Marcheva, P. I., and Ivanov, S. I. Convergence analysis of a modified Weierstrass method for the simultaneous determination of polynomial zeros. *Symmetry 12* (2020), Article No. 1408, 19 pages.

[29] Marcheva, P. I., and Ivanov, S. I. On the semilocal convergence of a modified Weierstrass method for the simultaneous computation of polynomial zeros. *AIP Conf. Proc. 2425* (2022), Article No. 420012, 4 pages.

[30] McNamee, J. M. *Numerical Methods for Roots of Polynomials. Part I*, vol. 14 of *Studies in Computational Mathematics.* Elsevier, Amsterdam, 2007.

[31] McNamee, J. M., and Pan, V. *Numerical Methods for Roots of Polynomials. Part II*, vol. 16 of *Studies in Computational Mathematics.* Elsevier, Amsterdam, 2013.

[32] Milovanović, G. A method to accelerate iterative processes in banach space. *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. 461*, 497 (1974), 67–71.

[33] Mir, N. A., Shams, M., Rafiq, N., Akram, S., and Rizwan., M. Derivative free iterative simultaneous method for finding distinct roots of polynomial equation. *Alex. Eng. J. 59* (2020), 1629–1636.

[34] Nedzhibov, G. Convergence of the modified inverse Weierstrass method for simultaneous approximation of polynomial zeros. *Commun. Numer. Anal.* (2016), 74–80.

[35] Nedzhibov, G. Local convergence of the inverse Weierstrass method for simultaneous approximation of polynomial zeros. *Int. J. Math. Anal. 10* (2016), 1295–1304.

[36] Nedzhibov, G. On local convergence analysis of the inverse wdk method. *MATTEX 2016 Conf. Proc. 1* (2016), 118–126.

[37] Nedzhibov, G. Improved local convergence analysis of the inverse weierstrass method for simultaneous approximation of polynomial zeros. *MATTEX 2018 Conf. Proc. 1* (2018), 66–73.

[38] Nedzhibov, G. New local convergence theorems for the inverse weierstrass method for simultaneous approximation of polynomial zeros. *Ann. Acad. Rom. Sci. Ser. Math. Appl. 10* (2018), 266–279.

[39] Nedzhibov, G. On semilocal convergence analysis of the inverse weierstrass method for simultaneous computing of polynomial zeros. *Ann. Acad. Rom. Sci. Ser. Math. Appl. 11* (2019), 247–258.

[40] Niell, A. The simultaneous approximation of polynomial roots. *Comput. Math. Appl. 41* (2001), 1–14.

[41] Nourein, A. An improvement on Noureins method for the simultaneous determination of the zeros of a polynomial (an algorithm). *J. Comput. Appl. Math. 3* (1977), 109–110.

[42] Nourein, A. An improvement on two iteration methods for simultaneous determination of the zeros of a polynomial. *Int. J. Comput. Math. 6* (1977), 241–252.

[43] Pan, V. Y. Solving a polynomial equation: some history and recent progress. *SIAM Rev. 39* (1997), 187–220.

[44] Pavkov, T. M., Kabadzhov, V. G., Ivanov, I. K., and Ivanov, S. I. Local convergence analysis of a one parameter family of simultaneous methods with applications to real-world problems. *Algorithms 16*, 2 (2023), Article No. 103, 18 pages.

[45] Petkov, M., and Kyurkchiev, N. *Numerical Methods for Solving of Nonlinear Equations,*. University Publishing 'St. Kliment Ohridski', Sofia, 2000. (in Bulgarian).

[46] Petković, M. *Iterative Methods for Simultaneous Inclusion of Polynomial Zeros*, vol. 1933 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1989.

[47] Petković, M. On initial conditions for the convergence of simultaneous rootfinding methods. *Computing 57* (1996), 163–177.

[48] Petković, M. *Point Estimation of Root Finding Methods*, vol. 1933 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 2008.

[49] Petković, M., Carstensen, C., and Trajković, M. Weierstrass formula and zero-finding methods. *Numer. Math. 69* (1995), 353–372.

[50] Petković, M., and Herceg, D. Point estimation and safe convergence of rootfinding simultaneous methods. *Scientific Review 21–22* (1996), 117–130.

[51] Petković, M., and Herceg, D. Point estimation of simultaneous methods for solving polynomial equations. *J. Comput. Appl. Math. 136* (2001), 283–307.

[52] Petković, M., Herceg, D., and Ilić, S. *Point estimation theory and its applications*. Institute of Mathematics, Novi Sad, 1997.

[53] Petković, M., Herceg, D., and Ilić, S. Safe convergence of simultaneous methods for polynomial zeros. *Numer. Algorithms 17* (1998), 313–331.

[54] Petković, M., and Stefanović, L. On some improvements of square root iteration for polynomial complex zeros. *J. Comput. Appl. Math. 15* (1986), 13–25.

[55] Petković, M., Tričković, S., and Herceg, D. On euler-like methods for the simultaneous approximation of polynomial zeros. *Japan J. Indust. Appl. Math. 15* (1998), 295–315.

[56] Prešić, M. *An iterative procedure for determination of k roots of a polynomial*. PhD Thesis, University of Belgrade, Belgrade, 1972. (in Serbian)
http://elibrary.matf.bg.ac.rs/handle/123456789/338.

[57] Prešić, M. A convergence theorem for a method for simultaneous determination of all zeros of a polynomial. *Publ. Inst. Math. 28* (1980), 159–165.

[58] Prešić, S. Un procédé itératif pour la factorisation des polynômes. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sèr. A 262* (1966), 862–863.

[59] PROINOV, P. D. Fixed point theorems in metric spaces. *Nonlinear Anal. 64* (2006), 546–557. .

[60] PROINOV, P. D. A new semilocal convergence theorem for the Weierstrass method from data at one point. *C. R. Acad. Bulg. Sci. 59*, 2 (2006), 131–136.

[61] PROINOV, P. D. Semilocal convergence of two iterative methods for simultaneous computation of polynomial zeros. *C. R. Acad. Bulg. Sci. 59*, 7 (2006), 705–712. http://www.proceedings.bas.bg/PDF0/6_07-01.pdf.

[62] PROINOV, P. D. A generalization of the Banach contraction principle with high order of convergence of successive approximations. *Nonlinear Anal. 67* (2007), 2361–2369.

[63] PROINOV, P. D. General local convergence theory for a class of iterative processes and its applications to Newton's method. *J. Complexity 25*, 1 (2009), 38–62.

[64] PROINOV, P. D. New general convergence theory for iterative processes and its applications to Newton-Kantorovich type theorems. *J. Complexity 26*, 1 (2010), 3–42.

[65] PROINOV, P. D. A unified theory of cone metric spaces and its applications to the fixed point theory. *Fixed Point Theory Appl. 2013:103* (2013).

[66] PROINOV, P. D. General convergence theorems for iterative processes and applications to the Weierstrass root-finding method. *J. Complexity 33* (2016), 118–144.

[67] PROINOV, P. D. A general semilocal convergence theorem for simultaneous methods for polynomial zeros and its applications to Ehrlich's and Dochev-Byrnev's methods. *Appl. Math. Comput. 284* (2016), 102–114.

[68] PROINOV, P. D. On the local convergence of Ehrlich method for numerical computation of polynomial zeros. *Calcolo 53* (2016), 413–426.

[69] PROINOV, P. D. Relationships between different types of initial conditions for simultaneous root finding methods. *Appl. Math. Lett. 52* (2016), 102–111.

[70] Proinov, P. D. On the local convergence of Gargantini-Farmer-Loizou method for simultaneous approximation of multiple polynomial zeros. *J. Nonlinear Sci. Appl. 11:9* (2018), 1045–1055. http://dx.doi.org/10.22436/jnsa.011.09.03.

[71] Proinov, P. D. Unified convergence analysis for Picard iteration in n-dimensional vector spaces. *Calcolo 55:6* (2018), 1–21.

[72] Proinov, P. D. Fixed point theorems for generalized contractive mappings in metric spaces. *J Fixed Point Theory Appl. 22:21*, 1 (2020), 27 pages.

[73] Proinov, P. D. Two classes of iteration functions and Q-convergence of two iterative methods for polynomial zeros. *Symmetry 13* (2021), Article No. 371, 29 pages.

[74] Proinov, P. D., and Cholakov, S. I. Semilocal convergence of Chebyshev-like root-finding method for simultaneous approximation of polynomial zeros. *Appl. Math. Comput. 236* (2014), 669–682.

[75] Proinov, P. D., and Ivanov, S. I. On the convergence of Halley's method for multiple polynomial zeros. *Mediterranean J. Math. 12* (2015), 555–572.

[76] Proinov, P. D., and Ivanov, S. I. On the convergence of Halley's method for simultaneous computation of polynomial zeros. *J. Numer. Math. 23*, 4 (2015), 379–394.

[77] Proinov, P. D., and Ivanov, S. I. Convergence analysis of Sakurai-Torii-Sugiura iterative method for simultaneous approximation of polynomial zeros. *J. Comput. Appl. Math. 357* (2019), 56–70.

[78] Proinov, P. D., and Ivanov, S. I. Local and semilocal convergence of an accelerated Sakurai-Torii-Sugiura methodnmethod with Newton's correction. In *ICAAMM2019–Proceedings Book* (Istanbul Gelisim University: Istanbul, 2019), pp. 31–36.

[79] Proinov, P. D., and Ivanov, S. I. A new family of Sakurai-Torii-Sugiura type iterative methods with high order of convergence. *J. Comput. Appl. Math.* (2022), under review.

[80] Proinov, P. D., Ivanov, S. I., and Petković, M. On the convergence of Gander's type family of iterative methods for simultaneous approximation of polynomial zeros. *Appl. Math. Comput. 349* (2019), 168–183.

[81] Proinov, P. D., and Marcheva, P. I. A new family of Dochev-Byrnev type iterative methods with accelerated convergence. *Sci. Works Union Sci. Bulg. 23*, Series B (2022), 93–97.

[82] Proinov, P. D., and Nikolova, I. A. Iterative approximation of fixed points of quasi-contraction mappings in cone metric spaces. *J. Ineq. Appl. 2014* (2014), Article No.226.

[83] Proinov, P. D., and Nikolova, I. A. Approximation of point of coincidence and common fixed points of quasi-contraction mappings using the jungck iterations cheme. *Appl. Math. Comput. 264* (2015), 359–365.

[84] Proinov, P. D., and Petkova, M. D. Convergence of the Weierstrass method for simultaneous approximation of polynomial zeros. *Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci. 66* (2013), 809–818.

[85] Proinov, P. D., and Petkova, M. D. Convergence of the two-point Weierstrass root-finding method. *Japan J. Indust. Appl. Math. 31*, 2 (2014), 279–292.

[86] Proinov, P. D., and Petkova, M. D. A new semilocal convergence theorem for the Weierstrass method for finding zeros of a polynomial simultaneously. *J. Complexity 30* (2014), 366–380.

[87] Proinov, P. D., and Petkova, M. D. Local and semilocal convergence of a family of multi-point Weierstrass-type root-finding methods. *Mediterranean J. Math. 17*, Article No.107 (2020), 20.

[88] Proinov, P. D., and Vasileva, M. T. On the convergence of a family of Weierstrass-type root-finding methods. *C. R. Acad. Bulg. Sci. 68*, 6 (2015), 697–704.

[89] Proinov, P. D., and Vasileva, M. T. On the convergence of high-order Ehrlich-type iterative methods for approximating all zeros of a polynomial simultaneously. *J. Inequal. Appl. 2015:336* (2015).

[90] Proinov, P. D., and Vasileva, M. T. On a family of Weierstrass-type root-finding methods with accelerated convergence. *Appl. Math. Comput. 273* (2016), 957–968.

[91] Proinov, P. D., and Vasileva, M. T. Local and semilocal convergence of nourein's iterative method for finding all zeros of a polynomial simultaneously. *Symmetry 12* (2020), Article No.1801, 25 pages.

[92] Proinov, P. D., and Vasileva, M. T. A new family of high-order ehrlich-type iterative methods. *Mathematics 9*, 16 (2021), Article No.1855, 25 pages.

[93] Semerdzhiev, K., and Pateva, S. n the numerical method for simultaneous determination of all roots of a given algebraic equation. *Univ.Travaux. Sci. 15*, 1 (1977), 263–274.

[94] Sendov, B., Andreev, A., and Kjurkchiev, N. Numerical Solution of Polynomial Equations. In *P. Ciarlet, J. Lions (Eds.), Handbook of Numerical Analysis*, vol. III. Elsevier, Amsterdam, 1994, pp. 625–778.

[95] Sun, F., and Kosmol, P. A new simultaneous method of fourth order for finding complex zeros in circular interval arithmetic. *J. Comput. Appl. Math. 130* (2001), 293–307.

[96] Tanabe, K. Behavior of the sequences around multiple zeros generated by some simultaneous methods for solving algebraic equations. *Tech. Rep. Inf. Process Numer. Anal. 4*, 2 (1983), 1–6. (in Japanese).

[97] Tilli, P. Convergence conditions of some methods for the simultaneous computation of polynomial zeros. *Calcolo 35* (1998), 1403–1414.

[98] Toseva, D., Kyurkchiev, N., and Iliev, A. On some iterative algorithms for polynomial factorization. *C. R. Acad. Bulg. Sci. 64*, 10 (2011), 1403–1414.

[99] Wang, D., and Wu, Y. Some modifications of the parallel halley iteration method and their convergence. *Computing 38* (1987), 75–87.

[100] Wang, D., and Zhao, F. On the determination of a safe initial approximation for the Durand–Kerner algorithmn. *J. Comput. Appl. Math. 38* (1991), 447–456.

[101] Wang, D., and Zhao, F. The theory of Smale's point estimation and its applications. *J. Comput. Appl. Math. 60* (1995), 253–269.

[102] Weierstrass, K. Neuer Beweis des Satzes, dass jede ganze rationale Function einer Veränderlichen dargestellt werden kann als ein Product aus linearen Functionen derselben Veränderlichen. *Sitzungsber. Königl. Preuss. Akad. Wiss. Berlinn II* (1891), 1085–1101. https://biodiversitylibrary.org/page/29263197.

[103] Werner, W. On the simultaneous determination of polynomial roots. *Lecture Notes Math. 953* (1982), 188–202.

[104] Yakoubsohn, J.-C. Simultaneous computation of all the zero-clusters of univariate polynomial. In *Foundations of computational mathematics*. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2002, pp. 433–455.

[105] Zabrejko, P. *K-metric and K-normed linear spaces: survey.* Collect. Math. 48. 1997.

[106] Zhao, F., and Wang, D. The theory of Smale's point estimation and the convergence of Durand-Kerner program. *Math. Numer. Sinica 15* (1993), 196–206.

[107] Zheng, S. On convergence of the Durand-Kerner's method for finding all roots of a polynomial simultaneously. *Kexue Tongbao 27* (1982), 1262–1265.

[108] Zheng, S. On convergence of a parallel algorithm for finding the roots of a polynomial. *J. Math. Res. Exp. 7* (1987), 657–660.

Благодарности

Изказвам своите най-искрени благодарности на моите научни ръководители, проф. Пройнов и доц. Иванов, които ме въведоха в математическия анализ и итерационните методи. Благодаря им за дадените знания и умения, проявената отзивчивост и оказаната всеотдайна подкрепа през целия период на обучение и работа върху дисертационния труд. Благодаря на близките ми, колегите и приятелите за добрите думи, с които ме мотивираха да следвам целите си. Благодаря на родителите и децата си, които извървяха пътя заедно с мен.