

РЕЦЕНЗИЯ

от проф. д-р Вежди Исмаилов Хасанов

Шуменски университет „Епископ Константин Преславски“

на дисертационен труд за присъждане на образователната и научна степен „доктор“

по: област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика

професионално направление 4.5. Математика

докторска програма „Математически анализ“

Автор: Пламена Иванова Марчева

Тема: Неподвижни точки и сходимост на итерационни методи за симултантна апроксимация на нули на полиноми

Научни ръководители: проф. д.м.н. Петко Д. Проинов – ПУ „Паисий Хилендарски“

доц. д-р Стоил И. Иванов – ПУ „Паисий Хилендарски“

1. Общо описание на представените материали

Със заповед № РД-21-431 от 23.02.2023 г. на Ректора на Пловдивския университет „Паисий Хилендарски“ (ПУ) съм определен за член на научното жури за осигуряване на процедура за защита на дисертационен труд на тема „Неподвижни точки и сходимост на итерационни методи за симултантна апроксимация на нули на полиноми“ за придобиване на **образователната и научна степен „доктор“** по: област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5. Математика, докторска програма Математически анализ. Автор на дисертационния труд е Пламена Иванова Марчева – докторант в редовна форма на обучение към катедра „Математически анализ“ на Факултета по математика и информатика на ПУ с научни ръководители проф. д.м.н. Петко Проинов и доц. д-р Стоил Иванов от ПУ „Паисий Хилендарски“.

Представеният от Пламена Марчева комплект материали е в съответствие с Чл.36 (1) от Правилника за развитие на академичния състав на ПУ, включва следните документи:

- молба до Ректора на ПУ за откриване на процедура за защита на дисертационен труд;
- автобиография в европейски формат;

- протокол от катедрения съвет, свързан с обсъждане на готовността за откриване на процедурата и предварително обсъждане на дисертационния труд;
- автореферат на български и английски езици;
- дисертационен труд;
- списък на научните публикации по темата на дисертацията;
- копия на научните публикации;
- списък на забелязаните цитирания;
- декларация за оригиналност и достоверност на приложените документи;
- справка за изпълнение на минималните национални изисквания за придобиване на ОНС „доктор“ в професионално направление 4.5. Математика;
- становище от научните ръководители за готовността за защита на представения дисертационен труд.

Пламена Марчева е приложила три публикации по дисертационния труд.

2. Кратки биографични данни за докторанта

Съгласно представената автобиография, Пламена Марчева е завършила висшето си образование през 2017 г. в ПУ „Паисий Хилендарски“, като придобива ОКС „бакалавър“ и професионална квалификация „инженер-физик“. През периода на следването си (2015 - 2026) придобива и допълнителна квалификация „учител по математика“. През 2018 след обучение в магистърска програма в ПУ е придобила и ОКС „магистър“ с квалификация „математик“.

Професионалната кариера на Пламена Марчева започва през 2017 г., като учител по математика в СУ „Черноризец Храбър“, гр. Пловдив (до юни 2019 г.). От септември 2022 г. е асистент в ПУ „Паисий Хилендарски“.

3. Актуалност на тематиката и целесъобразност на поставените цели и задачи

Темата на дисертационния труд е посветена на задачата за едновременно намиране на нулите на алгебричен полином f от n -та степен. Тази задача е тясно свързана с теорията за неподвижни точки на изображения и изследване на сходимостта на съответните итерационни методи. Теоремите за неподвижни точки на изображение са важен инструмент за доказване съществуването на решение на задачи от различни научни области. Независимо, че решаването на полиномни уравнения е частен случай на задачата за решаване на нелинейни уравнения, то едновременното търсене на всички нули на алгебричен полином привлича вниманието на не малко изследователи. Първият предложен метод за едновременно намиране на нулите на алгебричен полином се счита методът на Вайерщрас, публикуван през

1891 г. През 60-те години на миналия век, този метод е преоткрит от други изследователи, сред които е и българският математик Кирил Дочев. По това време Дочев и Бърнев предлагат една ускорена модификация на метода на Вайерщрас. Изследванията по тематиката остават актуални и в наши дни. Засиленият интерес върху темата и многобройните изследвания, понякога водят до предлагане на еквивалентни итерационни формули.

Целта на изследването е формулирана в решаване на четири задачи, които се отнасят до получаване на нови подобрени условия за локална и/или полулокална сходимост на една модификация на метода на Вайерщрас и метода на Дочев и Бърнев, конструиране на фамилия от методи от типа на Дочев и Бърнев с корекция и получаване на условия за локална и полулокална сходимост.

4. Познаване на проблема

При разработването на настоящия дисертационен труд са използвани 108 библиографски източника. Всички литературни източници са на английски език, с изключение на два, които са съответно на български и сръбски езици. Над 30 публикации са от последните 10 години, като прави впечатление, че по-голямата част от тях са с участието на български изследователи. В увода на дисертационния труд е направен подробен литературен обзор по тематиката, като за целта умело са използвани, включените в библиографията източници. Освен това в литературата са включени и около 10 монографии по тематиката, което е признак, че темата е актуална и авторът на настоящия труд добре познава състоянието на проблема.

5. Характеристика и оценка на дисертационния труд

Дисертационният труд е от 117 стр. и включва списък с означения, увод, четири глави, заключение и библиография.

В увода е направена обосновка на разработената тема, подробно е представено състоянието на проблема и са формулирани целта и задачите на изследването. Представени са в резюме проведените изследвания и получените резултати във всяка глава. Представянето на състоянието на проблема включва пълно описание на итерационните методи, които са обект на изследване, със съответните им свойства и условия за сходимост. Уводът дава ясна представа за състоянието на проблема и за набелязаните задачи в дисертационния труд.

Първа глава има реферативен характер. Тук са изложени някои основни понятия и твърдения за конусно нормирани пространства, които са основен инструмент при доказване на сходимост на изследваните итерационни методи в дисертацията. Главата съдържа

основни дефиниции и теореми от изградената от проф. Пройнов теория за сходимост на итерационни методи от вида $x_{k+1} = Tx_k$, $k = 0, 1, \dots$ в продължение на над 10 години. Някои от основните понятия от тази теория са: *функция на началните условия; квази-хомогенна функция и контролна функция*

Втора глава е посветена на решаването на първата задача от поставената цел на изследването в дисертационния труд, а именно изследване на локалната и полулокалната сходимост на следния итерационен метод:

$$x^{(k+1)} = T(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

където

$$T(x) = (T_1(x), T_2(x), \dots, T_n(x)), \quad T_i(x) = \frac{x_i^2}{x_i + W_i(x)}, \quad W_i(x) = \frac{f(x_i)}{a_0 \prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}. \quad (2)$$

Този метод за едновременно намиране на нулите на алгебричен полином f от n -та степен, в случай на прости нули, различни от нула, е предложен от Неджибов през 2016 г. Изследван е от Неджибов в поредица от публикации и е наречен обратен метод на Вайерщрас. Тук в дисертацията метода се нарича модификация на метода на Вайерщрас. Изследвана е сходимостта и са подобрени съществуващите резултати за локална (Теорема 2.1 и 2.2) и полулокална сходимост (Теорема 2.3). По-добрите резултати са в две насоки: първо, разширени са околностите на вектор корена ξ за избор на началното приближение като са използвани три вида функции на началните условия

$$E(x) = \left\| \frac{x - \xi}{\Delta(\xi)} \right\|_p, \quad E(x) = \left\| \frac{x - \xi}{\Delta(x)} \right\|_p, \quad E_f(x) = \left\| \frac{W(x)}{\Delta(x)} \right\|_p \quad (3)$$

и второ, получени са по-прецизни оценки на грешката. В тази глава е направен и сравнителен анализ на изследвания метод с класическия метод на Вайерщрас в теоретичен и изчислителен аспект и са посочени предимствата на метода на Вайерщрас.

В трета глава е изследван методът на Дочев и Бърнев – итерационна формула (1) с компоненти на итерационната функция T :

$$T_i(x) = x_i - \frac{f(x_i)}{g'(x_i)} \left(2 - \frac{f'(x_i)}{g'(x_i)} + \frac{1}{2} \frac{f(x_i)}{g'(x_i)} \frac{g''(x_i)}{g'(x_i)} \right), \quad g(z) = a_0 \prod_{j=1}^n (z - x_j). \quad (4)$$

С използване на техниката, чрез функции на началните условия, са получени два резултата (Теорема 3.1 и 3.2) за локална сходимост, с които се подобряват и допълват съществуващите до момента резултати. Получени са нови по-добри оценки на грешката и асимптотичната константа.

Последната четвърта глава е посветена на една фамилия от методи с ускорена сходимость. Тези методи още се наричат методи с корекция, които се получават чрез комбиниране на два метода, в резултат на което се получават методи с по-висок ред на сходимость. Тази техника е приложена от Нурейн за метода на Ерлих чрез комбиниране съответно с методите на Нютон и Вайерщрас. В тази глава новопостроената фамилия от методи с корекция

$$x^{(k+1)} = \mathfrak{F}(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (5)$$

където $\mathfrak{F}(x) = (\mathfrak{F}_1(x), \mathfrak{F}_2(x), \dots, \mathfrak{F}_n(x))$,

$$\mathfrak{F}_i(x) = x_i - 2\mathcal{W}_i(x) + \mathcal{W}_i^2(x) \left(\frac{f'(x_i)}{f(x_i)} - \sum_{j \neq i} \frac{1}{x_i - \Omega_j(x)} \right), \quad \mathcal{W}_i(x) = \frac{f(x_i)}{a_0 \prod_{j \neq i} (x_i - \Omega_j(x))} \quad (6)$$

се базира на метода на Дочев и Бърнев, който е комбиниран с произволен метод с итерационна функция $\Omega(x) = (\Omega_1(x), \Omega_2(x), \dots, \Omega_n(x))$. Получени са резултати за локална (Теорема 4.1 и 4.2) и полулокална (Теорема 4.3) сходимость в общия случай и за някои конкретни частни случаи.

6. Приноси и значимост на разработката за науката и практиката

Приносите на автора в настоящия дисертационен труд имат научен и научно-приложен характер. В заключението на труда, авторът формулира приносите в седем точки, с които аз съм напълно съгласен. В резюме, за изследваните итерационни методи са получени два типа условия за локална сходимость, чрез които се разширява околността на вектор корена ξ за избор на началното приближение. Това в известен смисъл улеснява подбора на началното приближение, при който се гарантира съответния ред на сходимость на разглеждания метод. Третият тип, получени условия, са за полулокална сходимость, които имат по-голямо практическо значение, тъй като предоставят изчислително проверяеми начални условия. Поставените задачи за постигане на целта на изследването считам, че са постигнати.

7. Преценка на публикациите по дисертационния труд

Основните резултатите от дисертационния труд са включени в три публикации. И трите публикации са в съавторство с единия или другия ръководител. Поради това, че няма разделителен протокол за приноса на съавторите в публикациите, считам участието на всеки един като равностойно. Две от публикациите са свързани с изпълнение на Проект ДН 12/12 към Фонд „Научни изследвания“.

Статия №1 от представения списък с публикации съдържа основни резултати от Глава 2 и е публикувана в списание “Symmetry”, който е от втори квантил (Q2) на базата данни Web of Science. Втората е включена в специализиран сборник с доклади на международна

конференция (Родос, Гърция), издание на AIP Conference proceedings, който е с SJR. Третата публикация съдържа резултати от Глава 4 и е включена в сборник с доклади от конференция за млади учени, издание на Съюза на учените – Пловдив. Резултатите са докладвани на три международни конференции в чужбина и една в страната. Освен това публикация № 1 има и две цитирания от чужди автори. Съгласно минималните национални изисквания в Правилника за прилагане на ЗРАС в РБ необходимите и натрупаните по група показатели точки са както следва:

Група показатели	Минимални точки	Натрупани точки
А – дисертационен труд	50	50 т.
Г 7 – научни публикации - в издание с IF от Q2 на WoS - в издание с SJR	30	Общо 90 т. 3*20=60 3*10=30
Д 11 - цитирания	-	2*2*4=16 т.

Следователно минималните национални изисквания са преизпълнени.

Не съм забелязал наличие на плагиатство, както в публикациите така и в дисертационния труд на Пламена Марчева.

8. Автореферат

Авторефератът е от 32 стр. и съдържанието му коректно отразява поставените задачи в дисертационния труд, постигнатите резултати и приноси на автора.

9. Критични забележки и препоръки

Имам няколко критични забележки върху дисертационния труд и автореферат, които предимно са от техническо естество, а други – терминологични, но всичките те не омаловажават постигнатите добри резултати. Следват някои от забележките:

- Срещат на няколко места грешки при набора на текста – например на стр. 26, ред 11.
- Във формула (0.22) на стр. 16, q не е дефинирано до този момент.
- На стр. 22, ред 1, за $\|x\|_{\infty}$ се употребява „максималната норма ...“. Тази норма въобще не е максимална.
- В дефиниция 1.5 (iv) първото и третото неравенства не са съгласувани.
- На стр. 29 последния ред в дефиницията на δ, j е излишно.
- Лема 1.6 не е цитирана точно.

- Във второто неравенство на (1.31) е пропусната норма.
- Има неточност в последния абзац на автореферата.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дисертационният труд *съдържа научни и научно-приложни резултати, които представляват оригинален принос в науката* и отговарят на всички изисквания на Закона за развитие на академичния състав в Република България (ЗРАСРБ), Правилника за прилагане на ЗРАСРБ и съответния Правилник на ПУ „Паисий Хилендарски“. Съдържанието на дисертационния труд и публикациите показват, че докторантката Пламена Иванова Марчева притежава задълбочени теоретични знания и професионални умения по професионално направление 4.5. Математика.

Поради гореизложеното, давам своята *положителна оценка* за проведеното изследване, постигнати резултати и приноси, в представения дисертационния труд и *предлагам на почитаемото научно жури да присъди образователната и научна степен „доктор“* на Пламена Иванова Марчева в област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5. Математика, докторска програма „Математически анализ“.

15.03.2023 г.

Рецензент:

(проф. д-р Вежди Хасанов)