Р Е Ц Е Н З И Я

от дн Ангел Борисов Дишлиев – професор в Химикотехнологичен и металургичен университет – София върху

дисертационен труд за придобиване на научната степен „доктор на науките“;
област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика;
професионално направление: 4.5. Математика (Математически анализ);
автор на дисертационния труд: проф. д-р Боян Георгиев Златанов, Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“ (ПУ), Факултет по математика и информатика (ФМИ), катедра Математически анализ;
тема на дисертационния труд: Приложения на двойки неподвижни точки и двойки точки на най-добро приближение

Със заповед № РД-21-1333 от 18.07. 2022 г. на Ректора на ПУ бях определен за член на научното жури за осигуряване на процедура за защита на посочения по-горе дисертационен труд. На първото заседание на журито бях избран за рецензент.

При изготвяне на рецензията ще се придържам към указанията, записани в Правилника за развитие на академичния състав (ПРАС) на ПУ.

1. Общо описание на представените материали

Представеният от проф. Боян Златанов комплект материали на електронен носител е в съответствие с чл. 36 (1) от ПРАС на ПУ. Комплектът съдържа сериозен брой документи, най-важните от които са:

- Дисертационен труд;
- Автореферат;
- Декларация за оригиналност и достоверност;
- Автобиография (Европейски формат);
- Копия на 18 броя научни статии, представени в пълен текст. Научните статии са свързани с темата на дисертационния труд. Претендентът за придобиване на научната степен „доктор на науките“ е член на авторските колективи на тези статии. Може да се установи, че дисертацията се основава на тези публикации;
- Справка за изпълнение на минималните национални изисквания;
- Списък на цитиранията;
- Други документи, които са свързани с процедурата по защита на дисертационния труд и са изискуеми от съответните правилници.

Разбира се основният документ е дисертационният труд, озаглавен „*Приложения на двойки неподвижни точки и двойки точки на най-добро приближение*“. Поместен на 313 стандартни страници. Състои се от:

- Предговор;
- Въведение;
- Пет глави (всяка съдържаща няколко параграфа);
- Заключение, съдържащо:

  -- основни приноси в дисертационния труд – скромно са посочени 6 основни приноси,

  -- списък на публикациите по дисертационния труд – общо 18 публикации,

-- декларация за оригиналност на резултатите;

-- апробация на резултатите - общо 5 участия в международни научни конференции със съобщения, които са публикувани в съответните научни томове на тези конференции (съобщавам конференциите, където са докладвани резултатите: TechSys 2021 - Engineering, Technologies and Systems; International Conference on Applications of Mathematics in Engineering and Economic; MATTEX);

- Библиография, включваща 132 заглавия.

2. Кратки биографични данни за докторанта

Кандидатът за придобиване на научната степен „доктор на науките“ завършва последователно във времето следните образователно квалификационни степени (ОКС):

Период от г. – до г.	ОКС	Квалификация и специализация	Училище
1986-1991	средно		Езикова гимназия „Георги Кирков“, гр. Пловдив
1991-1996	бакалавър магистър	Математика – Математически анализ; Учител по математика и информатика	СУ „Св. Климент Охридски“, ФМИ
1997-2001	доктор	Математика 4.5 (докторска програма „Математически анализ“)	ПУ „Паисий Хилендарски“, ФМИ

Таблица 1

Темата на дисертационния труд на д-р Б. Златанов за придобиване на образователната и научна степен **„доктор“** е: *„Геометрични свойства на някои класове Банахови пространства с безусловен базис“.* Дисертационният труд е в Област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика, Професионално направление 4.5. Математика, Докторска програма „Математически анализ“. Дисертацията е защитена успешно през 2001 г.

Професионалната реализация на кандидата е в ПУ. Заеманите длъжности, последователно във времето са посочени в следващата таблица:

Период от г. – до г.	Длъжност	Висше училище
1999 - 2001	Преподавател по математически анализ	ПУ „Паисий Хилендарски“
2001 - 2008	„асистент“, „старши асистент“, „главен асистент“	ПУ „Паисий Хилендарски“
2008 - 2019	„доцент“	ПУ „Паисий Хилендарски“
2019 - …	„професор“	ПУ „Паисий Хилендарски“
2015 - …	Заместник декан ФМИ	ПУ „Паисий Хилендарски“

Таблица 2

Академичните длъжности „доцент“ и „професор“ са в Област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика, Професионално направление 4.5. Математика (Математически анализ).

Нивото и достойнствата на изследователската работа на кандидата се определят най-точно и обективно чрез неговите постижения. Научното творчество на Боян Златанов се състои общо от 67 научни статии. Част от тези статии са представени за придобиване на ОНС „доктор“, за придобиване на НС „доктор на науките“, за заемане на академичната длъжност „доцент“, за заемане на академичната длъжност „професор“, а част от тях не са използвани. По-подробно тяхното разпределение (като бройки) е дадено в следващата таблица:

Научни публикации представени за участие в процедура за	Брой публикации
Доктор	4
Доцент	5
Професор	36
Доктор на науките	16
Не участват в процедури	6

Таблица 3

От дискутираните 67 научни статии, в списания с импакт фактор (IF) са публикувани 25 от тях. Броят на публикациите в списания с импакт ранг (SJR) е 33. Творчеството на кандидата може условно да се разпредели в няколко научни направления:

- Геометрични свойства в Банахови пространства;
- Неподвижни точки на оператори в Банахови пространства;
- Математически модели и приложение на математиката;
- Обучение по математика.

Едно от най-важните качества на научните трудове на всеки учен е ефектът, който неговото творчество предизвиква в научната общественост. Количествено това най-ярко се изразява чрез броя на цитиранията. Цитиранията се класифицират качествено чрез тяхното ниво. По-точно, чрез качествата на списанията, където са публикациите, в които е регистрирано цитирането.

Надлежно, съпроводено с пълно и точно описание, в съответната справка (Списък на всички забелязани цитирания) са посочени общо 248 цитирания на кандидата. Обект на цитиране са 53 научни труда на проф. Б. Златанов. Цитиранията са съгласно приетите стандарти, т.е. изключени са автоцитатите. Ще отбележа, че:

- От всичките цитирания 78 са в научни статии, публикувани в списания с IF. Само три от тези 78 цитирания са в публикации с участието на български учени.
- От всичките цитирания 115 са в научни статии, публикувани в списания с SJR.

В цитиране с номер 102 от Списък на всички забелязани цитирания (този списък се открива в документите на автора за участие в конкурса) не е отбелязан ранга на списанието *Mathematics,* който е SJR=0,244 (в годината на публикуване). Дължа следното уточнение: Съгласно изискванията на Правилника за приложение на Закона за развитие на академичния състав в Република България (ЗРАСРБ) една публикация притежава SJR, ако списанието (в което е публикувана) е индексирано за съответната година в SCOPUS и Web of Science. Споменатото по-горе списание не е индексирано в Web of Science. Въпреки това аз считам, че публикацията може да се отчете със съответния ранг. Освен това в годината на публикуване списанието е в квартил Q3, а не в квартил Q2, както е отбелязал автора.

Ясно е, че броят на цитиранията е монотонно растяща, стъпаловидна и целочислена функция във времето, с други думи променлива величина. Освен това е възможно някои от цитиранията да не са открити (например цитирания в списания на китайски език и др. подобни). Следователно числото 248 можем да приемем за долна граница на цитиранията на проф. Б. Златанов. Така например, от предаването на дисертационния труд, до написване на настоящата рецензия се появиха допълнително следните цитати, които не са отразени в списъка от цитирания на кандидата:

Цитирана публикация на кандидата: ***S. Karaibryamov, B. Tsareva, B. Zlatanov. Optimization of the Courses in Geometry by the Usage of Dynamic Geometry Software Sam, The Electronic Journal of Mathematics and Technology, Volume 7, Number 1, (2013) 22-51.***

Цитирания:

- J. C. Silva, Implementation of an Educational Software to Reinforce the Learning of Geometry and Measurement in High School Students. Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, 2023.
- Samuel Boateng, PhD Thesis, An Investigation of Students' Learning of Integral Calculus with Maple Software and Paper-Pencil Strategies in the Western Region of Ghana, University of Agder, Kristiansand & Grimstad, Norway, 2022
- Sava Grozdev, Veselin Nenkov, Tatiana Madjarova, Poncelet-Gergonne Circle, Symmetric Polynomials and Baricentric Coordinates, International Journal of Computer Discovered Mathematics (IJCDM), Volume 7, 338–343, 2022
- Sava Grozdev, Veselin Nenkov, Tatiana Madjarova, Poncelet-Gergonne Circle of a Triangle, Moving Between Two Fixed Circles, International Journal of Computer Discovered Mathematics (IJCDM), Volume 7, 324–337, 2022

Цитирана публикация на кандидата: ***V. Ivanova, B. Zlatanov, Implementation of fuzzy functions aimed at fairer grading of students'tests, Education Sciences, Volume 9, Issue 3, September 2019, Article number 214***

Цитирания:

- Beyza Esin Özseven, Naim Çağman. A Novel Student Performance Evaluation Model Based on Fuzzy Logic for Distance Learning. International Journal of Multidisciplinary Studies and Innovative Technologies, 6(1), 29-37 (2022). DOI:10.36287/ijmsit.6.1.29
- Daniel Doz, Darjo Felda, Mara Cotič, Combining Students' Grades and Achievements on the National Assessment of Knowledge: A Fuzzy Logic Approach, Axioms, 11(8), Article number 359, 2022 (Web of Science, IF=1.824, Q2, SCOPUS, SJR=0.441, Q3)

Цитирана публикация на кандидата: ***V. Ivanova, B. Zlatanov, Application of Fuzzy Logic in Online Test Evaluation in English as a Foreign Language at University Level,*** AIP ***Conference Proceedings, 2172, Article number 040009, 2019***

Цитирания:

- Daniel Doz, Darjo Felda, Mara Cotič, Combining Students' Grades and Achievements on the National Assessment of Knowledge: A Fuzzy Logic Approach, Axioms, 11(8), Article number 359, 2022 (Web of Science, IF=1.824, Q2, SCOPUS, SJR=0.441, Q3)

Към научната дейност на кандидата за придобиване на научната степен можем да добавим още, че същият е научен ръководител на поне един успешно защитил докторант във ФМИ на ПУ. Информацията, с която разполагам, е за д-р Атанас Илчев (бях член на неговото жури). Темата на докторската дисертация на А. Илчев е: *„Върху някои класове циклични оператори с двойки точки на най-добро приближение".*

3. Основни количествени и качествени показатели за дейността на кандидата за придобиване на научна степен

Дейността на кандидата ще разгледам в няколко аспекта:

3.1. Публикации за участие в конкурса: Списъкът на тези публикации включва 18 научни статии.

Две от посочените 18 статии са „използвани" от проф. Б. Златанов в конкурса за заемане на академичната длъжност „професор". Тези две публикации (както споменава авторът) са включени в рецензираната процедура само за облекчение на читателя. Въведените в тях техники се използват съществено в две от главите.

Ще коментирам останалите 16 научни труда. От тях 14 са излезли от печат и 2 са в процедура за отпечатване, която не е завършила до момента на изготвяне на настоящата рецензия. Три от публикациите са в научни трудове на конференции (по-точно в трудовете на *MATTEX CONFERENCE PROCEEDING: 2018, 2020, 2022)*, а останалите 13 са публикувани в реномирани научни списания. От коментираните 16 публикации 8 са в списания с импакт фактор. Всички статии, които са публикувани в научни списания, са реферирани в Scopus и Web of Science и почти всички притежават импакт ранг. За качеството на тези 13 научни статии можем косвено да съдим от високата класификация на списанията, в които те са публикувани, а именно:

Класификация на списанията	Брой публикации на кандидата	Сумарен показател	Усреднен показател
Impact factor	8	$\Sigma_{IF} = 14{,}559$	IF=1,820
Q1 (JCR) (JCR - Journal Citation Reports)	4	$\Sigma_{SJR} = 3{,}001$	SJR=0,750 (SJR - Scimago Journal Rank)
Q2 (JCR)	4	$\Sigma_{SJR} = 1{,}462$	SJR=0,366
Q3 (JCR)	0	$\Sigma_{SJR} = 0{,}000$	SJR=0,000
Q4 (JCR) без IF	1	$\Sigma_{SJR} = 0{,}127$	SJR=0,127
AIP Conference Proceedings, без IF	3	$\Sigma_{SJR} = 0{,}554$	SJR=0,185
Web of Science; SCOPUS без IF и без SJR	1	$\Sigma_{SJR} = 0{,}000$	SJR=0,000

Таблица 4

Посочените от мен в горната таблица числови данни „леко“ се разминават с данните, предоставени от кандидата. Ще посоча следните причини за тези разлики:

- В моите числови данни са изключени първите две публикации от списъка на кандидата (Списък на научните публикациите по темата на дисертационния труд), тъй като, както казах по-горе, те участват в процедурата за заемане на академичната длъжност „професор“. Възможно е кандидатът също да е изключил тези публикации при изчисляване на неговия актив във връзка с удовлетворяване на минималните национални изисквания;
- Две от статиите са публикувани в списанието Axioms, което получи IF на 28 юли 2022 година, а документите по процедурата са предадени на 8 юли. Поради тази причина авторът е използвал моментното им индексиране в SCOPUS с SJR и WoS без IF;
- В представените от мен данни са включени публикациите, които са в процес на отпечатване. Убеден съм, че тези трудове в близко време ще бъдат публикувани, поради което не съм ги пренебрегнал;
- Кандидатът не е отчел, че списанието: *International Journal of Pure and Applied Mathematics* притежава ранг Q4 и SJR=0,127 (в годината на публикуване на неговия научен труд).

Ще посоча няколко авторитетни научни списания, в които кандидатът за придобиване на научната степен „доктор на науките“ е публикувал свои трудове:

- *Applied Mathematics and Computation;*

- *Journal of Fixed Point Theory and Applications;*
- *Nonlinear Analysis: Modelling and Control;*
- *Fixed Point Theory.*

Съобразно броя на авторите, публикациите можем да разпределим както е показано в таблицата:

Брой автори	Брой публикации
1	4
2	6
3	3
4	2
5	1

Таблица 5

3.2. Цитирания на научните трудове на кандидата: В процедурата за придобиване на научната степен „доктор на науките“ кандидатът участва с 20 цитирания (от общо 248). Тези цитирания можем да разпределим както следва:

- 19 цитирания са в статии, които са публикувани в списания, които са отразени в базата данни Web of Science и Scopus;
- 1 цитиране е в публикация в списание, отразено в Zentralblatt Math.

Публикациите на кандидата, които са цитирани общо 20 пъти, са осем на брой.

3.3. Справка за изпълнение на минималните национални изисквания: Изпълнението на минималните национални изисквания от кандидата за придобиване на научната степен „доктор на науките“ е показано в следващата таблица:

Национални показатели	Минимален брой точки	Представени материали от кандидата	Постигнати точки от кандидата
А. Дисертационен труд за присъждане на ОНС „доктор“	**50**	Дисертационен труд	**50**
Б. Дисертационен труд за присъждане на НС „доктор на науките“	**100**	Дисертационен труд	**100**
Г. Научни публикации (извън хабилитационния труд или съответните му научни публикации)	**100**	Научни публикации в списания, реферирани в Web of Science, Scopus и Zentralblatt Math: Q1 4 публикации х 75 т.=300 т.; Q2 4 публикации х 60 т.=240 т.; Q3 0 публикации х 45 т.= 0 т.; Q4 0 публикация х 36 т.= 0 т.; SJR 4 публикации х 30 т.=120 т.; Zentralblatt Math 1 публикация х 18 т.= 18 т.; Общо 678 т.	**678**
Д. Цитирания в научни издания	**100**	Представени са цитирания в публикации, отпечатани в списания, които са реферирани както следва: Web of Science и Scopus 19 цитирания х 8 т.=152 т.; Zentralblatt Math 1 цитиране х 4 т.= 4 т.; Общо 156 т.	**156**
ОБЩО	**350**		**934**

Таблица 6

Ще направя три забележки във връзка с числовите данни, представени в тази секция на рецензията:

Забележка 1. В последната колона от реда на показател Г от горната таблица 6, посоченият от мен брой точки (678) не съвпада с точките (618), които кандидатът е заявил в съответната справка, озаглавена Справка за изпълнение на минималните национални изисквания по ЗРАСРБ. Това разминаване се дължи на обстоятелството, които описах в секция 3.1 на рецензията (непосредствено след Таблица 4). Все пак ще уточня, че посоченият в рецензията брой точки е по-голям от представените от автора.
Забележка 2. В показател Д на таблица 6 са отчетени само 20 цитирания, от които 19 са в списания, реферирани от Web of Science и Scopus, както и едно цитиране в списание, реферирано от Zentralblatt Math. Останалите (забелязани) 228 цитирания не са отчетени в справката за изпълнение на минималните изисквания. Това вероятно се дължи на факта, че „загубените точки“ не са необходими за удовлетворяване на минималните национални изисквания.
Забележка 3. От таблица 6 се вижда, че всеки един показател на минималните национални изисквания е изпълнен от кандидата (дори при условие, че не са отчетени всички негови постижения). Ще отбележа, че (сумарно), минимално изискуемите точки от показателите, отнасящи се за „доктор на науките“, са изпълнени от кандидата повече от два пъти.

ПУ и в частност ФМИ нямат допълнителни минимални изисквания за придобиване на научната степен „доктор на науките“. Това обстоятелство се дължи на факта, че ЗРАСРБ отмени наличието на допълнителни изисквания на университетите за придобиване на образователна и научна степен „доктор“ и за научна степен „доктор на науките“.

4. Актуалност на тематиката и целесъобразност на поставените цели и задачи

Известно е важното (а в много случаи принципно) значение на теоремата на Banach за свиващите оператори в много математически науки. Нейната роля е фундаментална, както в теоретичен аспект (основно в придобиването на нови теоретични знания под формата на достатъчни условия за съществуване на решения на общи математически задачи или за съществуване на определени качества на тези решения), така и в приложен аспект (при намиране на решенията или техни приближения за конкретни математически задачи, например диференциални уравнения или диференциални неравенства). Може определено да се каже, че в някои случаи тази теорема представлява основен метод за решаване на различни математически задачи като:

- намиране на решения (или техни приближения) на широк кръг уравнения и неравенства (алгебрични, диференциални, интегрални, интегро-диференциални, функционални и т.н.);
- оценка на грешката при замяна на неизвестното (търсено) решение с конкретно негово приближение;

- определяне на специфични качества на решенията на уравненията или неравенствата (като периодичност, ограниченост, асимптотична еквивалентност и др.).

Привеждането на даден проблем (например някой от изброените по-горе задачи) до решаването на абстрактно уравнение от вида $Tx = x$, където T е свиващ оператор в подходящо избрано метрично пространство) в много случаи е трудна, а при някои проблеми и невъзможна задача. Поради това се търсят различни обобщения на метода на неподвижната точка за свиващи оператори. Намирането на такива обобщения продължава да е съвременна актуална задача и струва ми се тази тематика ще остане „вечна“.

В представения дисертационен труд се обобщава и обогатява в някои частни случаи неизчерпаемата тема за свиващите изображения и съответните им неподвижни точки и точки на най-добро приближение.

С гордост ще отбележа, че значима група от български изследователи се включиха устремно в развитието на този дял на математическия анализ и неговите многобройни приложения (например във фундаменталната и качествена теория на класове диференциални уравнения). В това отношение представителите на ПУ са в челните редици на българските математици. Ще спомена имената на: Петко Пройнов, Боян Златанов, Снежана Христова, Андрей Захариев, Христо Кискинов, Атанас Илчев, Стоил Иванов и др. (Възможно е да съм пропуснал някой от колегите, но това не е направено с умисъл).

Известно е, че математиката и в частност математическия анализ се развива не само заради многобройните приложения в практиката. Науката се развива и заради самата нея. Изграждането на много теории, по-голямата част от които ще „отпаднат“ по обективни причини във времето, е способ да се съхрани жизнеността на познанието и неговия стремеж за развитие.

В края на тази точка ще резюмирам моето убеждение, че резултатите в дисертацията са актуални и са в синхрон със съвременните и класически тенденции в математическия анализ. Мястото на представените изследвания в дисертацията ще бъде определено от интересът, който те ще предизвикат в математическата общественост.

5. Познаване на проблема

Защитавам становището, че всеки отделен изследовател (колкото и да е талантлив и работоспособен) не е в състояние да се запознае и усвои всички публикувани резултати по дадена научна тема (дори и в сравнително „тясно“ научно направление). Основните причини за това са:

- наличието на сравнително многобройни източници, съдържащи информация по изследваната тема (в глобален мащаб);
- външно наложен ограничен достъп до информацията (например: някои от източниците са технически недостъпни, други са финансово недостъпни, трети източници са недостъпни от езикова гледна точка и т.н.);
- съществуване на повторяемост или „прекомерна близост“ между някои изследвания, поради което част от тях се игнорират от потребителя (или от научното общество);

- липса на научен интерес от страна на конкретния изследовател към определени аспекти на теорията (макар и свързани с неговите изследвания) и др.

Поради посочените по-горе причини, познаването на даден научен проблем от страна на конкретен изследовател би трябвало да означава, че той притежава определен набор от научни сведения по темата (не всички), които:

- имат необходимото качество, дълбочина и обхват;
- са достатъчно за конкретния изследовател да вникне в съдържанието на съществена част от научните резултати по темата. Това също означава, че изследователят е в състояние да осъществява самостоятелни научни тълкувания на резултатите и последващи научни търсения.

Считам, че колегата Б. Златанов познава детайлно моментното състояние (както и историческото развитие) на разглежданите научни проблеми и съответните математически обекти на изследване в представения за рецензиране научен труд. До този извод достигам, като имам предвид:

- В началото на дисертационния труд е направено сериозно, богато на съдържание и основополагащо въведение в темата на дисертацията. Там услужливо са посочени основни дефиниции и резултати на водещи автори, на които се базират изследванията на автора;
- При четенето, дори и при първичното запознаване с научния труд, не е необходимо използването на допълнителна, въвеждаща, справочна литература по темата. С други думи, началото на дисертационния труд притежава качеството на учебно помагало (за напреднали). Това обстоятелство е удобно за професионалния читател без предварителна подготовка по темата на дисертацията. Освен това въведението показва, че така да се каже „*авторът е на ти*“ с постигнатото в изследваната теория;
- Свободното владеене на терминологията, основните дефиниции и твърдения по темата и освен това умението да се съчетават специфични свойства и качества на различни математически обекти е основание за изказаното от мен твърдение за високата професионална компетентност на кандидата за придобиване на научната степен по въпросите, разгледани в дисертацията;
- Представени са достатъчно конкретни приложения, които още веднъж ни убеждават в достоверността и полезността на представените резултати;
- Посочената използвана литература и някои коментари върху произведенията на други автори представляват потвърждение на съпричастността на автора към разглежданите научни проблеми. Тук ще отбележа, че литературата (или както е прието да се казва „библиографията“) към дисертацията съдържа само научни трудове, които имат пряко отношение към изследванията на автора. Няма литературни източници, които са поставен „по някакви външни заслуги“;
- Множеството съществени забележки и следствия (някои от тях със самостоятелен интерес), които доизясняват и допълват теоретичните резултати на автора на дисертационния труд, дават основание да считам, че теорията на тези сложни математически обекти е осмислена дълбоко;
- На няколко места в рецензирания труд се вижда, че авторът създава собствена технология на изследване. Освен това умее творчески да преобразува известни

резултати и методи на изследване на други автори. Притежава способността разумно да поставя оптимални ограничения върху разглежданите обекти, а в някои случаи да преодолява трудности от технически характер.

Отговарям и на станалия напоследък стандартен въпрос, отнасящ се за оригиналност на резултатите: *В дисертацията липсват елементи на повторяемост и плагиатство от чужди изследователи*.

6. Методика на изследването

Основен апарат на провеждане на изследванията в рецензирания труд са методите и някои научни факти от няколко математически науки:

- Реален математически анализ;
- Функционален анализ (предоставя основния апарат на приведените формулировки и доказателства в дисертацията);
- Метод на свиващите изображения в пълни метрични пространства (този метод, използван многократно в дисертацията, изнасям извън функционалния анализ поради изключителните му приложения в научните изследвания по математика);
- Основни идеи и методи за частично наредени метрични пространства;
- Теория на двойки неподвижни точки;
- Теория на тройки неподвижни точки
- Циклични изображения, неподвижни точки и точки на най-добро приближение;
- Вариационен принцип на Ekeland;
- Модуларни пространства и неподвижни точки в модуларни пространства;
- Теория, моделиране и основни задачи за олигополни пазари и др.

В заключение на тази секция ще подчертая, че както в почти всички дисертации **по математика**, така и тук, не се използва някакъв конкретен математически метод (и само този метод), който се прилага върху подходящи обекти с цел откриване на нови факти. Прилагането на различни знания и методи, съчетаването им с цел постигане на нови резултати, е схемата, по която се извършват изследванията в рецензирания дисертационен труд. Ще отбележа, че този начин на разкриване на нови факти е труден и е присъщ на изследователите с обхватен творчески потенциал.

7. Съдържание, характеристика и оценка на дисертационния труд: Ще коментирам последователно обособените основни части на дисертационния труд.

Предговор: Има общ информационен характер. Посочени са основните обекти на изследване. Разгледани са обобщения на теоремата на Banach за неподвижната точка, свързани с двойки неподвижни точки и точки на най-добро приближение, както и някои техни приложения. Разглежданията са доразвити с естествени обобщения, отнасящи се за тройки неподвижни точки и тройки точки на най-добро приближение, както и за полуциклични изображения на три променливи, Изтъкнати са най-важните резултати, постигнати от автора в дисертацията.

Въведение: Представлява важна и неделима част от дисертационния труд. Изключително разумно, удобно, акуратно и в достатъчен обем са дадени необходимите предварителни факти: означения, дефиниции, теореми, следствия, източници, автори и т.н., които имат отношение към последващите разглеждания. Чрез тези сведения, създадените или развити от автора на дисертационния труд, изучаваните математически теории и техните приложения са представени професионално, следвайки принципа на „причинно-следствената връзка“. По-този начин резултатите са изложени елегантно и същевременно разбираемо - дори за не достатъчно подготвения по темата читател. Постигната е и още една цел: потребителят на резултатите или любопитния читател е напълно убеден, кои от представените резултати са лично творчество на претендента за придобиване на научната степен или на колектива, в който той участва.

Както е известно, теоремата на Banach за неподвижната точка представлява „база“ за създаване на множество теореми и алгоритми за намиране на неподвижни точки за различни специфични оператори, дефинирани (най-общо) в различни пространства с определени качества. По същество при тези новополучени теореми и алгоритми се установяват подходящи:

- условия, свързани с работното пространство X, като се използват неговите специфични характеристики;
- условия, свързани със свиващия оператор T, действащ в пространството X, т.е. $T: X \to X$, базирани на неговите свойства.

Целта е комбинацията от тези два типа условия да гарантира съществуването на поне една неподвижна точка ξ $(T\xi = \xi)$.

Едно от обобщенията на теоремата на Banach, което кандидатът за придобиване на научната степен използва в своите изследвания, принадлежи на G. Hardy и T. Rogers. Нека с $\rho(x, y)$ е означено разстоянието между произволни елементи x и y от пълното метрично пространство X. Тогава операторът $T: X \to X$ притежава единствена неподвижна точка, ако класическото неравенство на свиващия оператор (известно от теоремата на Banach) е заменено с по-общото неравенство

$$\rho(Tx,Ty) \le \alpha\rho(x,y) + \beta\big(\rho(Tx,x)+\rho(Ty,y)\big) + \gamma\big(\rho(Tx,y)+\rho(Ty,x)\big),$$

където реалните константи α, β, γ са положителни и удовлетворяват неравенството $\alpha + 2\beta + 2\gamma < 1$.

Понятието двойка неподвижни точки за даден оператор е въведено от V. Lakshmikantham и ученици през 1987 г. Нека операторът $F: X \times X \to X$. Наредената двойка $(x, y) \in X \times X$ се нарича двойка неподвижни точки за F, ако

$$x = F(x, y) \quad \text{и} \quad y = F(y, x).$$

Изследванията на автори (от школата на V. Lakshmikantham) за съществуване и единственост на двойка неподвижни точки първоначално са проведени за оператори в частично наредени спрямо конус Банахови пространства. По-късно това понятие е разпространено и за оператори в частично наредени метрични пространства (A. Ran и M. Reurings, 2004 г.). Идеята е доразвита от V. Berinde и M. Borcut за тройка неподвижни точки. За целта, нека операторът $F: X \times X \times X \to X$. Наредената тройка $(x, y, z) \in X \times X \times X$ се нарича тройка неподвижни точки за оператора F, ако са изпълнени равенствата:

$$x = F(x, y, z), \quad y = F(y, x, y) \quad \text{и} \quad z = F(z, y, x).$$

В последствие през 2016 г. W. Kirk, P. Srinivasan и P. Veeramani въвеждат и изучават циклични изображения и неподвижни точки за такива изображения. Ще казваме, че операторът $T: X \to X$ е цикличен, ако съществуват множества $A, B \subset X$, за които имаме

(i) $$T: A\cup B \to A\cup B,\ T(A)\subseteq B \text{ и } T(B)\subseteq A.$$

В дисертацията на страница 10^8 определянето на цикличния оператор T е неясно. (Предварително ще уточня, че в рецензията ще използвам символа n^k, който означава: ред k от страница n, считано отгоре. Символът n_k е с подобен смисъл – в този случай номерацията на реда е отдолу). На посоченото по-горе място е написано: $T: A\subset X \subseteq B,\quad T: B\subset X \subseteq A$. Вероятно символът „$\subseteq$“ трябва да се замени със символа „$\to$“. По-нататъшно обобщение е свързано с понятието наредена двойка циклични изображения (F, G). В случая определящи са изискванията:

(ii) $$F: A\times A \to B \quad \text{и} \quad G: B\times B \to A.$$

Възможно е дадено циклично изображение $T: A\to B$ да не притежава неподвижна точка. Тогава е логично да се търси този елемент $x\in A$, който в някакъв смисъл се намира най-близо до образа си Tx. Следвайки тази логика A. Eldred и P. Veeramani през 2006 г. въвеждат понятието точки на най-добро приближение. Точката $\xi\in A$ се нарича точка на най-добро приближение за цикличното изображение T в A, ако

(iii) $$\rho(\xi, T\xi) = dist(A, B) = \inf\left\{\rho(x, y):\ x\in A,\quad y\in B\right\}.$$

Лесно се съобразява, че ако двете множества A и B имат непразна обща част, то точката на най-добро приближение е същевременно неподвижна точка за изображението T. Естествено обобщение на споменатата по-горе дефиниция е понятието двойка точки $(x, y)\in A\times A$ на най-добро приближение на оператора $F: A\times A\to B$. В случая се предполага, че

$$\rho(x, F(x, y)) = \rho(y, F(y, x)) = dist(A, B).$$

Както е отбелязал авторът, за практическите приложения не е достатъчно да се знае, че неподвижна точка съществува за даден, конкретно изследван оператор. Необходимо е да се конструира процедура (обикновено итерационна) за приближено намиране на неподвижната точка (ако е единствена). Важна характеристика на приближените методи е намирането на горна оценка на априорната и/или апостериорната грешка. От там се определя и скоростта на „сближаване“ между неподвижната точка и итерационната редица от приближения. На този въпрос в дисертацията е отделено сериозно внимание и са проведени достатъчно количество удовлетворителни изследвания.

Идеите за оценка на грешките при замяна на единствените точки на най-добро приближение с елементи на съответните сходящи итерационни редици се доразвива в модуларни функционални пространства. Накратко ще опиша това понятие с помощта на следващите забележки:

Забележка 4: Нека:

- Ω е непразно множество;

- M_∞ е пространството от всички разширени измерими функции, т.е. всички функции $f:\Omega \to [-\infty, \infty]$;
- $\rho : M_\infty \to [0, \infty]$ е изпъкнала, четна функция.

Тогава ρ е регулярен изпъкнал псевдомодулар, ако:

- $\rho(0) = 0$;
- ρ е монотонна, т.е.
$$(\forall f, g \in M_\infty) : \left(|f(\omega)| \le |g(\omega)|,\ \omega \in \Omega \right) \Rightarrow \rho(f) \le g(g);$$
- ρ е ортогонално сабадитивна, т.е.
$$(\forall f \in M_\infty)(\forall A, B \in \Sigma,\ A \cap B \ne \varnothing) \Rightarrow \rho(f 1_{A \cup B}) \le \rho(f 1_A) + \rho(f 1_A),$$
където Σ е сигма-алгебра над Ω и 1_A е характеристичната функция за множеството A;
- ρ притежава свойството на Fatou, т.е.
$$(\forall f \in M_\infty)\left(\forall \{f_n\} : |f_n(\omega)| \uparrow |f(\omega)|,\ \omega \in \Omega \right) \Rightarrow \rho(f_n) \uparrow \rho(f);$$
- ρ е порядково непрекъсната в E, т.е.
$$\left(\forall \{g_n\},\ g_n \in E\right) : \left(|g_n(\omega)| \downarrow 0 \right) \Rightarrow \rho(g_n) \downarrow 0,$$
където E е линейното пространство от всички прости функции с носители върху пръстен P.

Забележка 5: ρ е регулярен изпъкнал модулар, ако от равенството $\rho(f) = 0$ следва $f = 0$ почти навсякъде.

Забележка 6: Модуларно функционално пространство наричаме линейното пространство $\left\{ f \in M_\infty,\ |f(\omega)| < \infty \text{, почти навсякъде } \right\}$, когато от $\rho(\lambda f) \to 0$ следва $\lambda \to 0$.

Теорията на модуларните пространства е инициирана от H. Nakano във връзка с теорията на наредените пространства, която идея е доразвита J. Musielak и W. Orlicz. Изучаването на геометрията на модуларните функционални пространства стартира с изследванията на W. Kozlowski.

Във въведението на дисертацията е разгледан и така наречения дуополен пазар. Разгледаният математически модел на споменатия пазар отговаря на множество естествени предположения, най-важните от които са следните:

- двама (и само двама) производители (търговци) се съревновават на пазара за едни и същи клиенти;
- стоката, която произвеждат производителите, от пазарна гледна точка е неразличима;
- поведението на производителите е рационално, т.е. целта на всеки от тях е да получи максимална печалба, при условие, че неговият конкурент има постоянно по обем производство и поддържа несменяема цена.

При някои естествени допълнителни предположения, моделът има вида
$$P(x+y) + xP'(x+y) - c_1'(x) = 0;$$
$$P(x+y) + yP'(x+y) - c_2'(x) = 0,$$

където

- x и y са производствените количества от стоката, съответно на първия и втория производител. Следователно, общата продукция, която се реализира на пазара, е $x+y$;
- функцията $P=P(x+y)$ представлява пазарната цена;
- функциите $c_1(x)$ и $c_2(x)$ показват разходите на първия и втория производител в зависимост от количеството произведена продукция.

Накрая ще отбележа, че дуополният модел представлява „брилянтна“ илюстрация на приложенията на теорията на двойка неподвижни точки.

Основно, върху посочените във въведението понятия, твърдения и кръг от неразрешени въпроси са съсредоточени изследванията в дисертационния труд.

Първата глава: Изследва се въпросът за съществуване на двойки неподвижни точки в частично наредени метрични пространства. Изучават се изображения, които притежават смесено монотонно свойство. Да разгледаме изображението (оператора) $F:X\times X\to X$, където $(X,\leq)$ е частично наредено множество. Изображението F притежава смесено монотонно свойство, ако са валидни неравенствата:

$$\left(x_1,x_2,y\in X,\ x_1\leq x_2\right)\Rightarrow\ F\left(x_1,y\right)\leq F\left(x_2,y\right);\ \left(y_1,y_2,x\in X,\ \ y_1\leq y_2\right)\Rightarrow\ F\left(x,y_1\right)\geq F\left(x,y_2\right).$$

Резултатите са получен чрез модификация и обобщение на вариационния принцип на Ekeland за изображения със смесеното монотонно свойство.

Най-напред, основното предположение върху качествата на оператора F (съответстващо на свойствата на свиваща оператор) е както следва:

$$\left(\exists\alpha=const\in[0,1)\right):\ \left(\forall x,y,u,v\in X;\ \ x\geq u,\ y\leq v\right)\Rightarrow$$
$$\rho\left(F(x,y),F(u,v)\right)+\rho\left(F(y,x),F(v,u)\right)\leq\alpha\rho(x,u)+\alpha\rho(y,v).$$

Тогава, ако съществува наредена двойка (x,y), такава че $x\leq F(x,y)$ и $y\geq F(y,x)$, то съществува двойка неподвижни точки (x,y) на F. Посочени са условия, при които неподвижната точка е единствена.

Друг резултат в тази глава е свързан с оператор F (със смесено монотонно свойство), притежаващ свиващо свойство, т.е. неравенство от вида

$$\left(\exists\alpha=const\in[0\ ,\ 1/2)\right):\ \left(\forall x,y,u,v\in X;\ \ x\geq y,\ y\leq v\right)\Rightarrow$$
$$\rho\left(F(x,y),F(u,v)\right)\leq\alpha\rho\left(x,F(x,y)\right)+\alpha\rho\left(u,F(u,v)\right).$$

Тогава, отново съществува неподвижна точка (x,y) на оператора F (ако $x\leq F(x,y)$ и $y\geq F(y,x)$). Единствеността се гарантира при същите изисквания.

Подобен резултат е получен от автора на дисертационния труд за изображение със смесено монотонно свойство при следното свиващо ограничение:

$$\left(\exists\alpha=const\in[0,1/2)\right):\ \left(\forall x,y,u,v\in X;\ \ x\geq y,\ y\leq v\right)\Rightarrow$$
$$\rho\left(F(x,y),F(u,v)\right)\leq\alpha\rho\left(x,F(u,v)\right)+\alpha\rho\left(u,F(x,y)\right).$$

Обобщение на резултатите, посочени по-горе в тази глава, се дава чрез теорема, отнасяща се за изображение $F: X \times X \to X$, където $(X, \leq)$ е частично наредено пространство. Предполага се:

- $\left(\exists \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0,\ \gamma \geq 0,\ \ \alpha+\beta+\gamma \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right)\right):\ \left(\forall x, y, u, v \in X;\ \ x \geq y,\ y \leq v\right) \Rightarrow$

$$\rho\left(F(x,y), F(u,v)\right)$$
$$\leq \alpha\left(\rho(x,u)+\rho(y,v)\right)+\beta\left(\rho\left(x, F(x,y)\right)+\rho\left(u, F(u,v)\right)\right)+\gamma\left(\rho\left(x, F(u,v)\right)+\rho\left(u, F(x,y)\right)\right);$$

- $x \leq F(x,y)$ и $y \geq F(y,x)$.

Тогава съществува неподвижна точка (x,y) на разглеждания оператор. При определени условия неподвижната точка е единствена. Лесно се вижда, че предходните три твърдения се получават от последната теорема при съответно анулиране на две от константите α, β, γ.

Ще отбележа, че остава открит въпросът за съществуване на други класове оператори със смесеното монотонно свойство, за които са валидни аналогични резултати за съществуване и единственост на двойки неподвижни точки, които се установяват чрез подходящи вариационни техники.

Втора глава: Основната цел на тази глава е да се получат „априорни“ и „апостериорни“ оценки на грешката за точките на най-добро приближение. Техниката за намиране на оценките от посочения тип за различни класове изображения се базира на изследвания на автора. Ще си позволя по-подробно да опиша основния резултат, чрез който са получени оценките: Нека:

- $(X, \|.\|)$ е равномерно изпъкнало Банахово пространство;
- $A \subset X$ и $B \subset X$, A, B са затворени и изпъкнали непразни множества;
- $T: A \cup B \to A \cup B$ и T е циклично изображение (за подробности виж (i));
- $(\exists k,\ 0<k<1): (\forall x \in A,\ \forall y \in B)\ \Rightarrow\ \rho(Tx, Ty) \leq k\rho(x,y)+(1-k)dist(A,B)$.

Тогава:

- Съществува единствена точка на най-добро приближение за оператора T (за подробности относно точката на най-добро приближение вижте (iii) от рецензията). Освен това, точките на най-добро приближение удовлетворяват равенствата:
$$\xi = T^2\xi = T^4\xi = \ldots \in A \qquad \text{и} \qquad T\xi = T^3\xi = T^5\xi = \ldots \in B.$$
Резултатът принадлежи на A. Eldred и P. Veeramani;
- Валидна е априорна оценка (резултатът е на Б. Златанов):
$$\left\|\xi - T^{2n}x\right\| \leq \frac{\|x-Tx\|}{1-k^{2/q}}\left(\frac{\|x-Tx\|-d}{Cd}k^{2n}\right)^{1/q};$$
- Валидна е апостериорна оценка (резултатът е на Б. Златанов):
$$\left\|\xi - T^{2n}x\right\| \leq \frac{\left\|T^{2n-1}x-T^{2n}x\right\|}{1-k^{2/q}}\left(\frac{\left\|T^{2n-1}x-T^{2n}x\right\|-d}{Cd}k\right)^{1/q},$$

където $d = dist(A,B)$, C и q са специфични константи, отнасящи се за свойствата на модула на изпъкналост на Банаховото пространство $(X,\|.\|)$.

В следващите изследвания в тази глава техниката на автора е разпространена върху типове изображения със специфични „свойства на свиване“. Изображенията са предмет на изследване от други автори (в частта отнасяща се за съществуване и единственост на двойки точки на най-добро приближение). Ще посоча получените от автора оценки за класовете изображения:

- Оценка на грешката за двойки точки на най-добро приближение за циклични свиващи изображения (F,G), за които е валидно свиващото свойство:

$$(\exists \alpha > 0, \beta > 0,\ \alpha + \beta < 1):\ \big(\forall (x,y) \in A \times A,\ \forall (u,v) \in B \times B\big) \Rightarrow$$
$$\rho\big(F(x,y), G(u,v)\big) \le \alpha\rho(x,u) + \beta\rho(y,v) + (1-\alpha-\beta)dist(A,B).$$

  Бих си позволил да препоръчам Теорема 3.2 на стр. 76 от дисертацията (а също така и Теорема 8 на стр. 18 от автореферата) да се редактира така, че да съдържат само твърденията, свързани с намерените от автора оценки;

- Оценка на грешката за двойки точки на най-добро приближение за циклични свиващи изображения (F,G), за които е валидно свиващото свойство:

$$(\exists \alpha > 0, \beta > 0,\ \alpha + \beta < 1):\ \big(\forall (x,y) \in A \times A,\ \forall (u,v) \in B \times B\big) \Rightarrow$$
$$\rho\big(F(x,y), G(u,v)\big) \le \alpha\rho(x,u) + \beta\rho(y,v).$$

Интерес представлява теорията за неподвижни точки и точки на най-добро приближение за наредени двойки от наредени двойки от изображения:

$$\big((F,f),\ (G,g)\big),\ F: A_1 \times A_2 \to B_1,\ \ f: A_1 \times A_2 \to B_2,\ G: B_1 \times B_2 \to A_1,\ \ g: B_1 \times B_2 \to A_2,$$

където $A_1, A_2, B_1, B_2 \subset X$. Дадени са понятията:

- циклична свиваща наредена двойка,
- модифицирана неподвижна двойка точки,
- модифицирана двойка точки на най-добро приближение,
- итерационни редици и др.

Основните резултати се отнасят за:

- съществуване и единственост на двойките точки на най-добро приближение за циклична свиваща наредена двойка;
- съществуване и единственост на неподвижна двойка точки за циклична свиваща наредена двойка;
- сходимост на итерационните редици към съответните елементи (координати) на тези точки на най-добро приближение;
- сходимост на итерационните редици към съответните елементи на тези неподвижни точки;
- априорни и апостериорни оценки на грешката на приближенията от итерационните редици.

Въпросът за съществуване и единственост на двойки неподвижни точки и двойки точки на най-добро приближение е разгледан и за p–циклични свиващи изображения. Намерени са съответните априорни и апостериорни оценки на грешките на приближенията.

Представени са достатъчен брой конкретни примери (обикновено това са системи алгебрични уравнения), илюстриращи приложенията на основните резултати. Ще отбележа, че в някои от случаите класическите компютърни програми (Maple 18.00) са безсилни.

Трета глава: Идеята за точки на най-добро приближение се обогатява и развива за модуларни функционални пространства (за подробности виж Забележка 6 от рецензията). Нека ρ е ненулев регулярен изпъкнал модулар, L_ρ е модуларно функционално пространство. Модуларно разстояние между множествата $A,B \subset L_\rho$ се дефинира както следва

$$d\rho(A,B) = \inf\left\{\rho(x,y);\ x \in A,\ y \in B\right\}.$$

Нека операторът $T : A \cup B \to A \cup B$ е цикличното изображение. Точката $\xi \in A$ се нарича точка на най-добро приближение за този оператор, ако $\rho(\xi, T\xi) = d\rho(A,B)$. Изображението T се нарича циклично свиващо изображение, ако

$$(\exists k \in (0,1)) : (\forall x \in A,\ \forall y \in B) \Rightarrow \rho(Tx - Ty) \le k\rho(x-y) + (1-k)d\rho(A,B).$$

Валидно е следното твърдение: Нека:

- ρ е равномерно непрекъснат функционален модулар, който притежава определени качества (които няма да конкретизирам в рецензията);
- Множествата $A,B \subseteq L_\rho$ са затворени и изпъкнали и $A \cup B$ е ограничено;
- $T : A \cup B \to A \cup B$ е цикличното свиващо изображение.

Тогава съществува единствена точка $x \in A$, която е точка на най-добро приближение за оператора T в A, $T^2 x = x$. Точката на най-добро приближение е граница на редицата $\left\{T^{2n} x_0\right\}$ за произволно начално приближение $x_0 \in A$.

Идеите и подходът за доказване на горното основополагащо твърдение са използвани при следващите резултати на автора, свързани с в модуларни функционални пространства на Orlicz. Функцията M се нарича функция на Orlicz, ако е четна, изпъкнала, непрекъсната, ненамаляваща в интервала $[0,\infty)$, $M(0) = 0$ и $M(t) > 0$ при $t \neq 0$. Нека $L^0(\Omega)$ е пространството от всички измерими функции, дефинирани върху измеримото пространство Ω и които приемат реални стойности. Модуларът на Orlicz се дефинира както следва

$$\tilde{M}(f) = \int_\Omega M(f(t))\,d\mu(t).$$

За модуларното функционално пространство $L_{\tilde{M}}$, породено от M, са конструирани подмножества A и B на $L_{\tilde{M}}$ и циклично свиващо изображение T, $T : A \cup B \to A \cup B$, така че изображението притежава единствена точка на най-добро приближение в A. Тази точка е гранична за редицата от четните „степени“ на оператора T, независимо от началното приближение от A. Ще отбележа, че предложените ограничения в споменатата конструкция са доста на брой. Трудно се проследява тяхната необходимост. Представеният пример отговаря на част от тези въпроси, но трябва да се има предвид, че конкретната илюстрираща конструкция (както би трябвало да се очаква) се отнася за сравнително прост случай.

Към приносите в тази глава ще приведа и изследванията на автора върху двойка свиващи изображения в модуларни пространства. При определени условия е отговорено положително на въпроса за съществуване и единственост на наредена двойка точки на най-добро приближение: По-точно нека:

- ρ е модулар със специфични свойства;
- Множествата $A, B \subseteq L_\rho$ са затворени, ограничени и изпъкнали;
- Операторите $F: A\times A \to B$ и $G: B\times B \to A$ са циклична свиваща двойка (F,G).

Тогава

- Съществува единствена наредена двойка точки $(x,y)\in A\times A$ такава, че:

$$x = G\left(F(x,y),F(y,x)\right);\ x = G\left(F(y,x),F(x,y)\right);$$
$$\rho\left(x-F(x,y)\right)+\rho\left(y-F(y,x)\right)=2d_\rho(A.B).$$

  (Това означава, че (x,y) е единствена наредена двойка точки на най-добро приближение за оператора F в множеството A);
- $\left(F(y,x),F(x,y)\right)$ е единствена наредена двойка точки на най-добро приближение за оператора G в множеството B.

Изследвани са модуларни пространства и дефинирани в тях свиващи изображения от типа на R. Kannan. Нека A е непразно подмножество на модуларното функционално пространство L_ρ. Изображението $F: A\times A \to A$ се нарича свиващо от типа на R. Kannan, ако

$$\left(\exists \alpha = const,\ 0<\alpha<\tfrac{1}{2}\right):\ (\forall x,y,u,v\in A)\ \Rightarrow$$
$$\rho\left(F(x,y)-F(u,v)\right)\le \alpha\left(\rho\left(x-F(x,y)\right)+\rho\left(u-F(u,v)\right)\right).$$

Намерени са условия за съществуване и единственост на неподвижна точка за такива изображения.

Нека $A, B \subseteq L_\rho$. Операторите $F: A\times A\to B$ и $G: B\times B \to A$ се наричат циклична свиваща двойка (F,G) от типа на Kannan, ако

$$\left(\exists \alpha = const,\ 0<\alpha<\tfrac{1}{2}\right):\ (\forall\ \ x,y\in A;\ \ \forall\ \ u,v\in B)\ \Rightarrow$$
$$\rho\left(F(x,y)-G(u,v)\right)\le \alpha\left(\rho\left(x-F(x,y)\right)+\rho\left(u-G(u,v)\right)\right)+(1-2\alpha)d_\rho(A,B).$$

Струва ми се, че на стр. 173_7 в дисертацията (и на съответното място в автореферата) изразът „$F(u,v)$“ би трябвало да се замени с „$G(u,v)$“, както е написано по-горе в определението на свиваща двойка оператори от типа на Kannan.

Нека (F,G) е циклична свиваща двойка изображения от типа на Kannan. Представени са условия за съществуване и единственост на наредена двойка точки $(x,y)\in A\times A$, които са най-добро приближение за оператора F. Освен това $\left(F(y,x),F(x,y)\right)$ е единствена наредена двойка точки на най-добро приближение за оператора G в множеството B.

Четвърта глава: Намерено е изключително полезно приложение на двойки неподвижни точки и двойки точки на най-добро приближение на полуциклични изображения в изследването на пазарно равновесие в дуополни пазари.

Пета глава: През 2011 г. V. Berinde и M. Borcut въвеждат и изследват понятието тройки неподвижни точки: В дисертацията авторът обобщава това понятие. Нека $A_i, B_i,\ i=1,2,3$ са подмножества на метричното пространството (X,ρ) (общо шест подмножества). Наредената двойка (всеки елемент на която се състои от наредени тройки) изображения $(F,G)=\left((F_1,F_2,F_3),(G_1,G_2,G_3)\right)$ се нарича циклична, ако

$$F_i : A\times A\times A = A^3 \to B_i \text{ и } G_i : B\times B\times B = B^3 \to A_i .$$

Точката $(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in A^3$ се нарича тройка неподвижни точки за наредената двойка от наредени тройки от изображения, ако $\xi_i = F_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$. Точката $(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in A^3$ се нарича тройка на най-добро приближение за оператора F, ако

$$\rho\left(\xi_i, F_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\right) = dist(A_i,B_i) = d_i .$$

Наредената циклична двойка от тройки изображения (F,G) се нарича свиваща двойка от тип **едно**, ако

$$\left(\exists \alpha_i^j = const \in [0,1);\ \alpha_1^j+\alpha_2^j+\alpha_3^j<1,\ i,j=1,2,3\right):$$

$$\left(\forall \left(x_i^1,x_i^2,x_i^3\right)\in A^3,\ \left(y_i^1,y_i^2,y_i^3\right)\in B^3\right)\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1,2,3}\rho\left(F_i\left(x_i^1,x_i^2,x_i^3\right), G_i\left(y_i^1,y_i^2,y_i^3\right)\right)\le \sum_{i,j=1,2,3}\alpha_i^j\rho\left(x_i^j,y_i^j\right).$$

Ако в горното описание на свиваща двойка от тип едно последното неравенство заменим с неравенството

$$\sum_{i=1,2,3}\rho\left(F_i\left(x_i^1,x_i^2,x_i^3\right), G_i\left(y_i^1,y_i^2,y_i^3\right)\right)\le \sum_{i,j=1,2,3}\alpha_i^j\rho\left(x_i^j,y_i^j\right)+\sum_{j=1,2,3}\left(1-\alpha_1^j-\alpha_2^j-\alpha_3^j\right)d_j ,$$

то наредената циклична двойка от тройки изображения (F,G) се нарича свиваща двойка от тип **две**.

В дисертацията са представени условия за съществуване на неподвижна точка $(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in(A_1\cap B_1)\times(A_2\cap B_2)\times(A_3\cap B_3)$ за обобщена циклично свиваща двойка изображения (F,G) от тип едно. Неподвижната точка е идентична за всеки един от операторите F и G. Намерени са априорни и апостериорни оценки на грешката при замяна на координатите на неподвижната точка с членове на съответните итерационни редици.

Важен резултат (обобщаващ изследванията на други автори) представляват набор от достатъчни условия за съществуване на точки на най-добро приближение за всеки един от елементите на обобщена циклично свиваща двойка изображения (F,G) от тип две, дефинирани в изпъкнало Банахово пространство. Намерени са априорни и апостериорни оценки на грешката при замяна на координатите на неподвижните точки с членове на съответните итерационни редици.

Като приложение на резултатите в тази глава е изучен въпросът за съществуване и единственост на пазарно равновесие в олигополия с три фирми.

8. Приноси и значимост на разработката за науката и практиката

Както казах по-горе, приносите в дисертацията са формулирани коректно от кандидата в Заключението към дисертацията. Приносите можем да причислим към тематичното обогатяване и разширяване на методите на неподвижната точка, точките на най-добро приближение и техните приложения в различни пространства. Предложени са нови твърдения, а също така и разширения и обобщения на известни теореми и методи. Тези резултати са илюстрирани „богато“ с конкретни и разнообразни приложения. Това е един много важен (за мен) факт, който ме убеждава в полезността на изследванията на автора.

Трудно могат да се изброят всички приноси в дисертационния труд, поради това ще се спра само на тези, които предизвикват по-сериозно моето внимание:

- Получени са условия за съществуване и условия за единственост на двойки неподвижни точки за класове от изображения със смесеното монотонно свойство. Разработената техника се основава на обобщения на вариационния принцип на Ekeland;
- Намерени са оценки на грешката за двойки и тройки точки на най-добро приближение с използване на методите на итерационните приближения;
- Доказано е за двойките неподвижни точки или точки на най-добро приближение (x, y), че трябва да удовлетворяват условието $x = y$;
- Дефинирани са модифицирани циклични изображения и модифицирани двойки точки. Посочени са възможности за приложения на този клас от изображения при решаване на несиметрични системи от уравнения;
- Изследвани са двойки точки на най-добро приближение в модуларни функционални пространства. Илюстрирано е тяхното приложение при решаване на системи от уравнения;
- Дефиниран е нов клас от изображения, наречен полуциклични изображения. Намерени са условия за съществуване и единственост на двойки неподвижни точки за полуциклични изображения;
- Изследван е въпросът за съществуване и единственост на пазарно равновесие в дуополни пазари. Предложената техника допуска значително съкращаване на ограничителните класически условия на модела на пазара (така например, отпада необходимостта от диференцируемост на функцията на печалбата).

Според мен изследванията в дисертационния труд са достатъчно дълбоки и важни, поради което те ще заемат достойно и трайно място в науката.

9. Преценка на личното участие на кандидата в публикациите по дисертационния труд

Дисертационният труд се основава на 18 научни публикации с участието на кандидата, от които 16 приемам за рецензиране (две от публикациите са използвани в предходни процедури, поради което ги приемам за сведение). Както отбелязах в Таблица 5 самостоятелните публикации са 4, а останалите са със съавтори. Участието на кандидата за придобиване на научната степен в изследователската работа по тези съвместни публикации може да се приеме за еквивалентно на работата на останалите негови съавтори. Нямам допълнителна информация, която да противоречи на изказаното твърдение. Изрично ще подчертая, че публикационната активност на кандидата, свързана с дисертационния труд, е повече от задоволителна. Публикациите са достатъчно на брой и по-голямата част са публикувани в реномирани научни списания, които щателно се отразяват от различни вторични бази данни. Това означава, че те лесно се откриват и следят от интересуващата се научна общественост. Това обстоятелство според мен ще доведе до „широкото“ използване на резултатите и тяхното още по-активно цитиране в близко бъдеще.

10. Автореферат

Авторефератът напълно отговаря на изискванията на Правилника за развитие на академичния състав на ПУ, както и на ЗРАСРБ и Правилника за прилагане на ЗРАСРБ. В него са посочени:

- Съдържание на дисертацията. В съдържанието е допуснато повторение на секцията *„Апробация на получените резултати“* (виж стр. 4_2 и стр. 4_3 от Автореферата, а също стр. 7_3 и стр. 7_4 от Дисертацията);
- Въведение, съдържащо основни дефиниции, твърдения, техники, които се използват в изследователската работа по темата на дисертацията);
- Последователно (следващо изложението по глави в представения за рецензиране дисертационен труд) са дадени основните дефиниции и понятия;
- Последователно (съгласно изложението по глави в дисертацията) са формулирани съществените ограничения и произтичащите от тях основни и помощни твърдения, получени от автора;
- Основни приложения на теоретичните резултати на базата на конкретни примери;
- Основни приноси на дисертационния труд;
- Авторски публикации по темата на дисертацията;
- Апробация на представените резултати;
- Библиография.

Материалът (в автореферата) е изложен така, че читателят може да придобие пълна и адекватна представа за резултатите в дисертацията. Струва ми се, че на няколко места изложението би трябвало да е по-подробно.

Ще обърна внимание на факта, че номерацията (на теореми, леми, забележки, дефиниции и пр.) в автореферата се различава от номерацията на техните оригинали в дисертационния труд. Това затруднява възможността за съпоставяне на записите на двата документа. Освен това, пълният списък на библиографията от дисертацията би трябвало без съкращения да се пренесе и в автореферата (поради съображенията изразени по-горе, макар че в автореферата може да не се цитират всички литературни източници).

11. Критични забележки и препоръки

Нямам съществени критични бележки и коментари, които биха могли да променят моето положително мнение за дисертационния труд на Боян Златанов. Действително:

- Темата на дисертацията може да се определи (и) като съвременна. Макар, че водещите учени в световен мащаб отделят „ресурс“ и сериозно „внимание“ на този мощем математически апарат повече от един век, то основополагащите идеи на

неподвижните точки остават сред най-интензивно развиващите се направления на математиката и нейните приложения;
- Конкретните задачи, реализиращи целите на предложените за рецензиране трудове, са избрани и решени последователно в естествен порядък и сполучливо;
- Доказателствата макар и не така „лесни за разбиране“ можем да „обобщим“, като пълни и представени в достатъчна академична подробност (въпреки, че на места са доста „стегнато“ написани). Можем да заключим, че вникването в твърденията и съответните им доказателства изискват добра подготовка и сериозно внимание от страна на читателя;
- Ясно си личи изградения самостоятелен стил на работа на автора;
- Някои конкретни реализации на твърденията (например, свързани с популярни пространства, множества и оператори) са оформени умело, като самостоятелни твърдения под формата на теореми, приложения и следствия;
- Допълнително осмисляне на условията може да се постигне чрез внимателно проследяване на приложените примерни реализации.

12. Лични впечатления

Познавам Боян Златанов от десетина години по повод на следните съвместни дейности:
- няколко общи участия в научни журита (включително и на негов докторант);
- няколко акредитации на специалности и докторски програми във ФМИ на ПУ - аз като наблюдаващ процедурите от страна на НАОА, а проф. Б. Златанов като заместник-декан на ФМИ.

Моите впечатления са за изграден учен и преподавател във ВУ с богат опит (повече от 20 години). Предполагам, че колегите от ФМИ на ПУ споделят моето мнение, а също така са запознати и с редица други негови положителни качества (също е възможно и с някои отрицателни такива), поради което проф. Б. Златанов е избран за заместник-декан (струва ми се за втори мандат).

Считам неговите лични човешки качества за „богатство“, което трябва да се уважава и подражава. Ще посоча някои от тях:
- войнстваща, непримирима честност;
- откровеност и неприкритост;
- поемане на лична отговорност и защитаване на справедливостта.

Някой може да каже, че „*малко пресолявам манджата*“, аз пък ще отговоря: „*казвам това, което знам и виждам“*.

Заключение

Дисертационният труд съдържа научни и научно-приложни резултати, които представляват оригинален принос в науката. Представените документи и изследвания отговарят на всички изисквания на ЗРАСРБ, Правилника за прилагане на ЗРАСРБ и съответния Правилник на ПУ „Паисий Хилендарски“ за придобиване на научната степен „доктор на науките“.

На основание на казаното по-горе убедено давам своята **положителна оценка** за проведеното изследване, представено в рецензираните по-горе дисертационен труд, автореферат и научни публикации.

Предлагам на почитаемото научно жури да присъди научната степен „доктор на науките“ на проф. д-р Боян Георгиев Златанов в Област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика; Професионално направление: 4.5. Математика (Математически анализ).

01.09. 2022 г.

Рецензент: ....

(проф. дн Ангел Дишлиев)