

# РЕЦЕНЗИЯ

от

д.т.н. Васил Георгиев Ангелов,

професор в Минно-геоложки университет „Св. Иван Рилски“

на дисертационен труд за присъждане на научна степен „доктор на науките“ в

Област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика,

Професионално направление: 4.5 Математика

Специалност: Математически анализ

**Автор:** професор д-р Боян Георгиев Златанов, ПУ „П. Хилендарски“, Пловдив

**Тема:** **Приложения на двойки неподвижни точки и двойки на най-добро приближение**

## 1. Предмет на рецензиране

Със заповед № РД-21-1333 от 18.07.2022 г. на Ректора на Пловдивския университет „Паисий Хилендарски“ (ПУ) съм определен за член на научното жури за осигуряване на процедура за защита на дисертационен труд на тема „**Приложения на двойки неподвижни точки и двойки на най-добро приближение**“ за придобиване на научната степен „доктор на науките“ на ПУ в област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5 Математика (специалност Математически анализ). Автор на дисертационния труд е професор д-р Боян Георгиев Златанов – катедра Математически анализ към Факултета по математика и информатика на ПУ „П. Хилендарски“.

Представеният от Боян Георгиев Златанов комплект материали на хартиен носител е в съответствие с Чл. 45 (4) от Правилника за развитие на академичния състав на ПУ и включва следните документи:

- молба до Ректора на ПУ за разкриване на процедурата за защита на дисертационен труд;
- автобиография в европейски формат;
- копие от диплома за образователната и научна степен „доктор“;
- протоколи от катедрени съвети, свързани с откриване на процедурата и с предварителното обсъждане на дисертационния труд;
- дисертационен труд;
- автореферат;
- списък на научните публикации по темата на дисертацията;
- копия на научните публикации;
- декларация за оригиналност и достоверност на приложените документи;
- справка за спазване на минималните национални изисквания.

Кандидатът е приложил 18 публикации за докторската дисертация.

## **2. Кратки биографични данни**

Боян Златанов е завършил ФМИ на СУ “Кл. Охридски“ (1991-1996). През 2001 г. става доктор по Математически анализ във ФМИ на ПУ “П. Хилендарски“ с дисертационен труд на тема „Геометрични свойства на някои класове банахови пространства с безусловен базис“, през 2008 г. – доцент, а през 2019 г. – професор.

## **3. Актуалност на тематиката и целесъобразност на поставените цели и задачи**

Актуалността на настоящия дисертационен труд е предпоставена от тематиката му. Теорията на неподвижните точки е с много различни приложения и се е превърнала в един от основните методи на нелинейния анализ. В дисертацията са разгледани обобщения на теоремата свиващите изображения на Банах, свързани с двойки неподвижни точки и техни приложения. Разгледани са обобщения на вариационния принцип на Екеланд. Предложена е техника за доказване на резултати за съществуване на двойки неподвижни точки за изображения със смесеното монотонно свойство с помощта на обобщението на вариационния принцип. Получени са резултати за съществуване и единственост на двойки точки на най-добро приближение с намиране оценките на грешката при последователни приближения. Илюстрирани са възможностите за намиране на точни решения на системи уравнения с помощта на обогатената теория на двойките неподвижни точки. Обобщени са понятията за двойки неподвижни точки и двойки точки на най-добро приближение в модулари функционални пространства. Дефиниран е нов клас от изображения, който е различен както от цикличните, така и от нецикличните изображения. Този клас, наречен полуциклични изображения, възниква по естествен начин при изследването на пазарно равновесие в дуополни пазари. Намерени са условия за съществуване и единственост на двойки неподвижни точки за полуциклични изображения. Конструирани са модели на дуополни пазари с помощта на полуциклични изображения, които съществено обобщават класическата теория на дуополните пазари. Получените резултати са илюстрирани с различни модели. Резултатите са обобщени за тройки неподвижни точки и тройки точки на най-добро приближение, както и за полуциклични изображения на три променливи, които по естествен начин възникват при моделиране на пазари, доминирани от три участници. Всички тези факти говорят за актуалността на поставените проблеми техните приложения.

## **4. Познаване на проблема**

Авторът има много статии, посветени на тази тематика, което показва сериозно вникване в проблематиката.

## 5. Методика на изследването

Избраната методика на изследване позволява постигане на поставената цел и получаване на адекватен отговор на задачите, решавани в дисертационния труд.

## 6. Характеристика и оценка на дисертационния труд

Дисертационният труд се състои от Въведение, пет глави и Литература.

Отбелязвам, че номерацията на литературата по-долу е съгласно автореферата.

Глава I е озаглавена „Двойки неподвижни точки в частично наредени метрични пространства“. Тя съдържа някои обобщения на известни резултати [11], [26], свързани с двойки неподвижни точки в частично наредени пълни метрични пространства. Направено е обобщение на вариационния принцип на Екеланд, което се използва при доказателствата за съществуване на двойки неподвижни точки на изображения със смесено монотонно свойство в частично наредени метрични пространства.

В Глава II “Оценка на грешката за двойки точки на най-добро приближение“ е развита техника за получаване на оценка на грешката за точки на най-добро приближение за двойки точки на най-добро приближение за някои класове изображения на базата на резултати от [51]. Намерена е оценка на грешката за двойки неподвижни точки и двойки точки на най-добро приближение за циклични свиващи изображения. Направени са приложения за решаване на: интегрални уравнения от типа на Фредхолм в пространство от функции със сумируем квадрат, линейни алгебрични уравнения, трансцендентни уравнения и др. Примерите за решаване на две линейни алгебрични уравнения с две неизвестни ги считам за неуспешни. В края на Глава II са направени обобщения за двойки точки на най-добро приближение за  $p$ -циклични изображения с приложение за решаване на една конкретна система.

В Глава III “Двойки точки на най-добро приближение в модулари функционални пространства“ се обобщава идеята за точки на най-добро приближение в модулари функционални пространства и се дават приложения за интегрални оператори в пространства на Орлич с функционален модулар. До основните резултати се достига, като се минава през обобщение на няколко възлови лема при изследване на точки на най-добро приближение в модулари функционални пространства. Понятието „точка на най-добро приближение за циклични свиващи изображения“ е пренесено от метрични пространства в модулари функционални пространства. Доказани са поредица от спомагателни резултати, които водят до първия резултат за точки на най-добро приближение в модулари функционални пространства – Теорема 3.1. По-нататък се прави приложение на точките на най-добро приближение в модулари пространства на Орлич за един клас интегрални уравнения. След това са доказани

теорема за двойки неподвижни точки и двойки точки на най-добро приближение в модулари функционални пространства (съответно Теорема 18 и Теорема 19). Дадени са и приложения на доказаните теореми.

В Глава IV „Приложение на двойки неподвижни точки и двойки точки на най-добро приближение на полуциклични изображения в изследването на пазарно равновесие в дуополни пазари“ са разгледани различни приложения на развития дотук апарат. Започва се с разглеждане на описания дуополен пазарен модел и условията за неговото равновесие. Обобщени са понятията от предишните глави с цел прилагането им към съществуващите модели. Въведено е понятието двойки неподвижни точки за полуциклични изображения. Намерени са оценки за грешката. Разгледан е модел на пазар с две конкуриращи се фирми, всяка от които произвежда единствена стока, като стоките са взаимозаменяеми. Изследван е линеен и нелинеен модел. Дадени са различни обобщения на тези модели, които се получават с въвеждане на повече фактори, което задълбочава изследванията на автора.

В Глава V „Тройки неподвижни точки и тройки точки на най-добро приближение“ са обобщени понятията от предишните глави. Специално внимание е отделено на обобщена циклична свиваща двойка от тройки изображения, на полуциклични наредени тройки от изображения и на съществуване и единственост на пазарно равновесие в олигополия с трима участника.

## **7. Приноси и значимост на разработката за науката и практиката**

В общи линии приемам претенциите на автора за направените приноси и ги обобщавам по следния начин:

- I. Вариационният принцип на Екеланд е обобщен за изображения със смесеното монотонно свойство с цел намиране на условия за съществуване и условия за единственост на двойки неподвижни точки за класове от изображения със смесеното монотонно свойство. Разширени са класовете от задачи, за които съществуват двойки неподвижни точки. Получената оценка на грешката за точки на най-добро приближение е използвана за намиране на оценка на грешката за двойки и тройки точки на най-добро приближение.
- II. Доказано е, че за разглежданите досега циклични изображения двойките неподвижни точки или двойките точки на най-добро приближение  $(x, y)$  трябва да удовлетворяват условието  $x = y$ . Обобщено е понятието за наредени двойки от циклични изображения, като са дефинирани нов тип изображения и точки,

наречени съответно модифицирани циклични изображения и модифицирани двойки точки. Този нов клас от изображения може да се използва и за решаване на несиметрични системи от уравнения. Дадени са примери за намиране на точни решения на системи от трансцендентни уравнения, за които приближените методи, използвани в Maple 18.00, не могат да открият точното решение.

III. Обобщено е понятието за точка на най-добро приближение в модулари функционални пространства. Използвайки възможните обобщения на модул на изпъкналост в модулари функционални пространства, са доказани обобщения на ключовите за тематиката резултати на Елдред и Веермани. Техниката за изследване на точки на най-добро приближение в модулари функционални пространства, разработена в [50], е приложена при изследване на двойки точки на най-добро приближение в модулари функционални пространства. Дадени са примери за решаване на системи от уравнения, за които с приближените методи, използвани в алгебричната компютърна система Maple 18.00, не може да се намери точно решение.

IV. Въведено е понятието за наредена двойка полуциклични изображения, което по естествен начин възниква при изследване на пазарно равновесие в олигополни пазари. Представен е нов модел за изследване на съществуване и единственост на пазарно равновесие в дуополни пазари, който се основава на функциите на реакция. Показани са предимствата му пред класическия модел за максимизиране на функциите на печалба, чрез отпадане на необходимостта от диференцируемост, изследване по контура на множествата на възможни производства и получаване на условия за устойчивост на процеса от последователни промени на производствата.

V. Разгледана е възможност за обобщение на част от изследваните задачи в глави 2-5 за тройки неподвижни точки, тройки точки на най-добро приближение и тяхното приложение при изследване на олигополни пазари с трима участника с помощта на полуциклични изображения на три променливи.

Общо хубаво впечатление правят различните приложения в икономически задачи.

## **8. Преценка на публикациите по дисертационния труд**

Публикациите могат да бъдат класифицирани по вид (статии – 12 броя; доклади – 6 броя), по значимост (статии в издания с импакт-фактор – 8 броя, от които 3 са Q1, 5 – Q2), по място на публикуване (статии в реферирани международни списания – 12 броя, доклади в трудове на международни научни конференции в чужбина – 3 броя; доклади в трудове на международни научни конференции в България – 3 броя), по брой на съавторите (самостоятелни – 6 броя; с един съавтор – 6 броя; с двама съавтори – 3 броя; с трима и повече съавтори – 3 броя). Всички статии са на английски.

## **9. Лично участие на автора**

Общото изложение на резултатите в дисертацията показва единство, което не буди съмнение за основното лично участие на дисертанта в проведеното изследване, както и заключението, че формулираните приноси и получени резултати, са негова лична заслуга.

## **10. Автореферат**

Авторефератът е направен съгласно изискванията на Правилника на ПУ “П. Хилендарски“ и отразява основните резултати, постигнати в дисертационния труд.

## **11. Критични забележки и препоръки**

Смятам, че е обърнато прекалено внимание на прилагането на получените в дисертацията методи за решаване на линейни алгебрични системи с две неизвестни. Това олекотява изследванията, които определено са приложими към нелинейни системи.

## **12. Лични впечатления**

Познавам Боян Златанов от няколко години професионално и имам хубави впечатления от неговите резултати и научни интереси.

## **13. Препоръки за бъдещо използване на дисертационните приноси и резултати**

Препоръчвам на проф. Златанов да продължава изследванията си.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Дисертационният труд съдържа **научни, научно-приложни и приложни резултати, които представляват оригинален принос в науката и няма елементи на плагиатство.** Те отговарят на всички изисквания на Закона за развитие на академичния състав в Република България (ЗРАСРБ), Правилника за прилагане на ЗРАСРБ и съответния Правилник на ПУ „П. Хилендарски“. Представената дисертация напълно съответства на минималните национални изисквания, приети във връзка с Правилника на ПУ з приложение на ЗРАСРБ.

Дисертационният труд показва, че Боян Георгиев Златанов притежава задълбочени теоретични знания и професионални умения по научна специалност Математически анализ, като демонстрира качества и умения за провеждане на изследвания с получаване на оригинални и значими научни приноси.

Поради това давам своята **положителна оценка** за проведеното изследване, представено от рецензираните по-горе дисертационен труд, автореферат, постигнати резултати и приноси, и **предлагам на уважаемото научно жури да присъди научната степен „доктор на науките“ на Боян Георгиев Златанов в област на висше образование: 4. Природни науки,математика и информатика, Професионално направление 4.5 Математика, (специалност Математически анализ).**

29.08. 2022 г.

Рецензент: .....

професор д.т.н. Васил Ангелов