Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“
Факултет по математика и информатика

Катедра
„Математически анализ“

Боян Георгиев Златанов

Приложения на двойки неподвижни точки и двойки точки на най-добро приближение

АВТОРЕФЕРАТ

за присъждане на научна степен
„ДОКТОР НА НАУКИТЕ“
Област на висше образование:
4. Природни науки, математика и информатика
Професионално направление:
4.5. Математика
(Математически анализ)

Пловдив - 2022

Дисертационният труд е обсъден и насочен за защита на разширено заседание на катедра „Математически анализ“ на Факултета по математика и информатика при Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“ на 06.07.2022 г.

Дисертационният труд „Приложения на двойки неподвижни точки и двойки точки на най-добро приближение“ съдържа 314 страници. Състои се от предговор, въведение, 5 глави, заключение, библиография. Библиографията съдържа 133 източника. Списъкът на авторските публикации по дисертацията се състои от 18 заглавия.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на .... от .... в Заседателната зала на Нова сграда на Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“, гр. Пловдив, бул. „България“ № 236.

Материалите по защитата са на разположение на интересуващите се в Деканата на Факултета по математика и информатика, Нова сграда на Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“, кабинет 330, всеки работен ден от 8:30 до 17:00 часа.

Съдържание

Обща характеристика на дисертационния труд

В настоящия дисертационен труд са разгледани обобщения на теоремата на Банах за неподвижната точка, свързани с двойки неподвижни точки и техни приложения. Разгледано са обобщения на вариационния принцип на Екеланд, което е свързано с множества, породени от изображения със смесеното монотонно свойство. Предложена е техника за доказване на резултати за съществуване на двойки неподвижни точки за изображения със смесеното монотонно свойство с помощта на обобщението на вариационния принцип. Обогатени са резултати за съществуване и единственост на двойки точки на най-добро приближение с намиране оценките на грешката при използване на редици от последователни итерации. Доказано е за двойките неподвижни точки или точки на най-добро приближение (x, y), че трябва да удовлетворяват условието $x = y$, ако се използва класическият модел от [26]. Предложено е обобщение на понятията двойки неподвижни точки, двойки точки на най-добро приближение и наредена двойка от циклични изображения, което позволява наредената двойка (x, y) да се състои от две различни точки. Предложен е подход за свеждане на системи от уравнения към задача за двойки неподвижни точки или точки на най-добро приближение. Илюстрирани са възможностите за намиране на точни решения на системи от уравнения с помощта на обогатената теория на двойките неподвижни точки. Обобщени са понятията за двойки неподвижни точки, двойки точки на най-добро приближение в модуларни функционални пространства. Илюстрирани са възможности за решаване на системи уравнения с помощта на циклични изображения и модуларни функционални пространства, което е породено от системата от уравнения. Дефиниран е нов клас от изображения, който е различен както от цикличните, така и от нецикличните изображения. Този клас е наречен полуциклични изображения. Този клас възниква по естествен начин при изследването на пазарно равновесие в дуополни пазари. Намерени са условия за съществуване и единственост на двойки неподвижни точки за полуциклични изображения. Конструирани са модели на дуополни пазари с помощта на полуциклични изображения, които съществено обобщават класическата теория на дуополните пазари. Получените резултати са илюстрирани с различни модели. Идеите за обобщения на двойки неподвижни точки са доразвити с обобщения на тройки неподвижни точки и тройки точки на най-добро приближение, както и за полуциклични изображения на три променливи, които по естествен начин възникват при моделиране, на пазари доминирани от трима участника.

ВЪВЕДЕНИЕ

Теоремите за неподвижни точки, инициирани от Теоремата на Банах (Banach) за свиващите изображения [5], се оказват мощен инструмент в нелинейния анализ.

Теорията на неподвижните точки включва в себе си търсенето на комбинации от условия, както за прилежащото пространство X, така и за изображенията $T : X \to X$, които да осигурят, че T ще остави поне една точка от X неподвижна, т.е. $\xi = T(\xi)$ за някое $\xi \in X$. След публикацията [5] са открити множество обобщения и приложения на Теоремата на Банах за свиващите изображения.

Има две основни направления в обобщения на Теоремата на Банах за свиващите изображения. Първото е да се промени прилежащото пространство X, а второто е да се промени условието от свиващ тип.

Класически означения, които ще използваме

Ще означаваме множеството на естествените числа с $\mathbb{N}$ и множеството на реалните числа с $\mathbb{R}$. С главни латински букви A, B, C, X, Y, Z ще означаваме множества от произволна структура. Ще означаваме с малки латински букви x, y, z, w, u, v, t елементите на разглежданите множество. Ще означаваме с ρ функцията разстояние, дефинираща метрично пространство (X, ρ).

Ще означаваме с ρ функционалния модулар, който дефинира функционалното модуларно пространство L_ρ. Тъй като метриката $\rho(\cdot,\cdot)$ е функция на две променливи, а функционалният модулар $\rho(\cdot)$ е функция на една променлива и още повече двете понятия се използват в различни глави, няма да възникне недоразумение.

С $X \times Y$ ще означаваме декартовото произведение на множествата X и Y.

Разстояние между две подмножества $A, B \subset X$, където (X, ρ) е метрично пространство, се дефинира с функцията $\operatorname{dist}(A, B) = \inf\{\rho(x, y) : x \in A, y \in B\}$.

Частично наредени метрични пространства и изображения със смесеното монотонно свойство

Следвайки [11, 26], ако X е множество и $\preceq$ е частична наредба в X, то множеството $(X, \preceq)$ се нарича частично наредено множество.

Определение 1. *([11, 26]) Нека $(X, \preceq)$ е частично наредено множество и нека $F : X \times X \to X$. Казваме, че изображението (функцията) F притежава смесеното монотонно свойство, ако*

$$\text{за всеки две } x_1, x_2, y \in X, \quad \text{удовлетворяващи } x_1 \preceq x_2 \text{ е в сила неравенството}$$
$$F(x_1, y) \preceq F(x_2, y)$$

и

$$\text{за всеки две } y_1, y_2, x \in X, \quad \text{удовлетворяващи } y_1 \preceq y_2 \text{ е в сила неравенството}$$
$$F(x, y_1) \succeq F(x, y_2).$$

Следвайки [11, 26] нека $(X, \rho, \preceq)$ е частично наредено метрично пространство. В декартовото произведение $X \times X$ ще казваме, че $(u, v) \preceq (x, y)$, ако $x \succeq u$ и $y \preceq v$ са изпълнени едновременно. Така дефинираната наредба превръща декартовото произведение $(X \times X, \preceq)$ в частично наредено множество. Снабдяваме $(X \times X, \preceq)$ с метриката $\rho_1((x, y), (u, v)) = \rho(x, u) + \rho(y, v)$ за всеки две $(x, y), (u, v) \in X \times X$.

Двойки неподвижни точки в частично наредени метрични пространства

Едно направление за обобщаване на теоремите за неподвижни точки е понятието двойки неподвижни точки, въведено в [26], където са изследвани изображения със смесеното монотонно свойство в частично наредени спрямо конус банахови пространства. По-късно тази идея е доразвита за изображения със смесеното монотонно свойство в частично наредени метрични пространства [11].

Определение 2. *([11, 26]) Нека X е множества и нека $F : X \times X \to X$. Наредената двойка $(x, y) \in X \times X$ се нарича двойка неподвижни точки за F, ако $x = F(x, y)$ и $y = F(y, x)$.*

Авторите в [11] усъвършенстват техниката от [26] с цел да обобщят резултатите от [26]. Те представят по-лесна за прилагане техника при изследване на съществуване и единственост на двойки неподвижни точки, която техника се използва широко в момента.

Вариационен принцип на Екеланд

Екеланд (Ekeland) доказва вариационен принцип в [18]. В последователност от статии [19, 20] той обогатява резултатите. По-късно Екеланд представя по-елегантно доказателство [21], която техника ще използваме. В същата публикация [21], са представени различни приложения на вариационния принцип в различни клонове на математиката.

Вариационният принцип на Екеланд има множество обобщения и приложения в различни сфери на математиката [13, 16].

Равномерно изпъкнали банахови пространства

Резултатите за точки на най-добро приближение изискват прилежащото пространство да бъде нормирано, а не само метрично.

Когато прилежащото пространство е банахово пространство $(X, \|\cdot\|)$ винаги ще приемаме, че разстоянието между елементите му е породено от нормата $\|\cdot\|$, т.е. $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Ще означаваме единичната сфера и единичното кълбо в банаховото пространство $(X, \|\cdot\|)$ съответно с S_X и B_X.

Предположението, че прилежащото банахово пространство $(X, \|\cdot\|)$ е равномерно изпъкнало играе съществена роля при изследване на съществуване и единственост на точките на най-добро приближение.

Определение 3. *([15]) Нека $(X, \|\cdot\|)$ е банахово пространство. За всяко $\varepsilon \in (0, 2]$ дефинираме модула на изпъкналост за $\|\cdot\|$ чрез*

$$\delta_{\|\cdot\|}(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : x, y \in B_X, \|x - y\| \geq \varepsilon\right\}.$$

Казваме, че нормата е равномерно изпъкнала, ако $\delta_X(\varepsilon) > 0$ за всяко $\varepsilon \in (0, 2]$. В този случай, наричаме банаховото пространство $(X, \|\cdot\|)$ равномерно изпъкнало банахово пространство.

Лема 1. *([22]) Нека A е непразно, затворено изпъкнало подмножество и B е непразно затворено подмножество в равномерно изпъкнало банахово пространство $(X, \|\cdot\|)$. Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ са редици с елементи от A и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица с елементи от B, удовлетворяващи*

(1.а) $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = \operatorname{dist}(A, B)$

(1.б) $\lim_{n\to\infty} \|z_n - y_n\| = \operatorname{dist}(A, B)$.

Тогава $\lim_{n\to\infty} \|x_n - z_n\| = 0$.

Лема 2. *([22]) Нека A е непразно, затворено изпъкнало подмножество и B е непразно затворено подмножество в равномерно изпъкнало банахово пространство $(X, \|\cdot\|)$. Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ са редици с елементи от A и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица с елементи от B, удовлетворяващи*

(2.а) $\lim_{n\to\infty} \|z_n - y_n\| = \operatorname{dist}(A, B)$

(2.б) за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $N_0 \in \mathbb{N}$, така че за всички естествени числа $m > n \geq N_0$ е изпълнено неравенството $\|x_m - y_n\| \leq \operatorname{dist}(A, B) + \varepsilon$.

Тогава за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $N_1 \in \mathbb{N}$, така че за всички естествени числа $m > n > N_1$ е в сила неравенството $\|x_m - z_n\| \leq \varepsilon$.

Циклични изображения, неподвижни точки и точки на най-добро приближение

Определение 4. *([35] Нека A и B са непразни подмножества в метричното пространство (X,ρ). Наричаме изображението $T : A\bigcup B \to A\bigcup B$ циклично изображение, ако $T(A) \subseteq B$ и $T(B) \subseteq A$.*

За опростяване на означенията или за вписване на някои от формулите в текстовото поле, когато няма опасност да се получи недоразумение, ще означаваме $\mathrm{dist}(A,B)$ с d.

Определение 5. *([22]) Нека A и B са непразни подмножества в метричното пространство (X,ρ) и $T : A\bigcup B \to A\bigcup B$ е циклично изображение. Точката $\xi \in A$ се нарича точка на най-добро приближение за цикличното изображение T в A, ако $\rho(\xi, T\xi) = \mathrm{dist}(A,B)$.*

Определение 6. *([22]) Нека A и B са непразни подмножества в метричното пространство (X,ρ). Цикличното изображение $T : A\bigcup B \to A\bigcup B$ се нарича свиващо циклично изображение, ако T е циклично изображение и съществува $k \in (0,1)$, така че да е в сила неравенството*

$$\rho(Tx, Ty) \leq k\rho(x,y) + (1-k)\mathrm{dist}(A,B)$$

за всяко $x \in A$ и $y \in B$.

Понятието двойка неподвижни точки е въведено в [26].

Определение 7. *([11, 26] Нека A е непразно подмножество в метричното пространство (X,ρ) и $F : A \times A \to A$. Наредената двойка $(x,y) \in A \times A$ се нарича двойка неподвижни точки на F в A, ако $x = F(x,y)$ и $y = F(y,x)$.*

Определение 8. *([48]) Нека A и B са непразни подмножества на X. Наредената двойка от изображения (F,G): $F : A \times A \to B$ и $G : B \times B \to A$ се нарича наредена двойка циклични изображения.*

Понятието двойка точки на най-добро приближение и резултати за съществуване и единственост на двойки точки на най-добро приближение са въведени в [48].

Определение 9. *([48]) Нека A и B са непразни подмножества в метричното пространство (X,ρ) и $F : A \times A \to B$. Наредената двойка $(x,y) \in A \times A$ се нарича двойка точки на най-добро приближение на F в A, ако $\rho(x, F(x,y)) = \rho(y, F(y,x)) = \mathrm{dist}(A,B)$.*

Лесно се забелязва, че когато в Определение 8 имаме $A = B$, то двойките точки на най-добро приближение се свеждат до двойки неподвижни точки.

Определение 10. *([27, 48]) Нека A и B са непразни подмножество в метричното пространство (X,ρ), $F : A \times A \to B$ и $G : B \times B \to A$. Наредената двойка (F,G) се нарича циклично свиващо изображение от тип две, ако съществуват реални числа $\alpha, \beta \in [0,1)$, такива че $\alpha + \beta < 1$ и е изпълнено неравенството*

$$\rho(F(x,y), G(u,v)) \leq \alpha\rho(x,u) + \beta\rho(y,v) + (1-(\alpha+\beta))d(A,B)$$

за всяко $(x,y) \in A \times A$ и $(u,v) \in B \times B$.

Определение 11. *([48])Нека $A, B \subset X$, $F : A \times A \to B$ и $G : B \times B \to A$. За всяка наредена двойка $(x,y) \in A \times A$ дефинираме редиците $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ като $x_0 = x$, $y_0 = y$ и*

$$\begin{array}{ll} x_{2n+1} = F(x_{2n}, y_{2n}), & y_{2n+1} = F(y_{2n}, x_{2n}) \\ x_{2n+2} = G(x_{2n+1}, y_{2n+1}), & y_{2n+2} = G(y_{2n+1}, x_{2n+1}) \end{array}$$

за всяко $n \geq 0$.

Точки на най-добро приближение за p–циклични свиващи изображения

Обобщение на понятието за точки на най-добро приближение за p на брой множества е представено в [32] за p–циклични свиващи изображения и в [31] за p–циклични Меиър–Киилър (Meir–Keeler) свиващи изображения. Идеята от [31, 32] е доразвита за p–циклични изображения от тип на Канан в [44].

Нека $\{A_i\}_{i=1}^p$ са непразни подмножества на метричното пространство (X, ρ). Следвайки [31, 32] ще се уговорим само за опростяване на записа да положим $A_{p+i} = A_i$ за всяко $i \in \mathbb{N}$. Изображението $T : \bigcup_{i=1}^p A_i \to \bigcup_{i=1}^p A_i$ се нарича p–циклично изображение, ако $T(A_i) \subseteq A_{i+1}$ за всяко $i = 1, 2, \ldots, p$. Точката $\xi \in A_i$ се нарича точка на най-добро приближение на T в A_i, ако $d(\xi, T\xi) = \operatorname{dist}(A_i, A_{i+1})$, когато T е p–циклично изображение.

Оценка на грешката за неподвижни точки, получени с помощта на редица от последователни итерации

Има много задачи, свързани с неподвижни точки или точки на най-добро приближение, които не са лесни за решаване или изобщо не могат да бъдат решени точно. Едно от предимствата на Теоремата на Банах за свиващите изображения е оценка на грешката при използване на редици от последователни приближения.

Ето защо оценката на грешката, когато се използва итеративен процес е също толкова интересна, колкото и резултатите за съществуване и единственост. Изчерпателно изложение на апроксимирането на неподвижни точки може да бъде намерено в [6].

За съжаление липсваха оценки на грешка за точки на най-добро приближение. Първият резултат в това направление е получен в [51]. Предимството на представените резултати [51] е, че се представя директен критерий за спиране на итерационния процес, когато не е възможно да се намери точно решение. Второто предимство на представената техника е, че разширява класовете уравнения, за които може да се намери приближение на решението с редици от последователни итерации.

Модуларни функционални пространства

Освен идеята за дефиниране на норма и разглеждане на банахово пространство, друга посока на обобщаване на принципа за свиване на Банах се основава на разглеждането на абстрактен функционал, дефиниран в линейно пространство, който контролира растежа (големината) на членовете на пространството. Този функционал обикновено се нарича модулар и той дефинира модуларно пространство. Теорията на модуларните пространства е инициирана от Накано (Nakano) [42] във връзка с теорията на наредените пространства, която идея е доразвита от Мешиелак (Musielak) и Орлич (Orlicz) в [41]. Модуларните функционални пространства са подклас на модуларните пространства. Изучаването на геометрията на модуларните функционални пространства е инициирано от Козловски (Kozlowski) в [37, 38, 39].

Тъй като теорията на модуларните функционални пространства не е толкова позната, колкото тази на метричните, частично наредените метрични или банаховите пространства, ще се опитаме да систематизираме малко по обстойно основните определения, понятия и резултати за модуларните функционални пространства. Ще следваме обзорната статия [40].

Нека Ω е непразно множество и Σ е нетривиална σ–алгебра на подмножествата на Ω. Нека $\mathcal{P}$ е δ–пръстен от подмножествата на Ω, такъв че $E \cap A \in \mathcal{P}$ за всяко $E \in \mathcal{P}$ и $A \in \Sigma$. Нека приемем, че съществува растяща редица от множества $K_n \in \mathcal{P}$, такава че $\Omega = \cup K_n$. Означаваме с $\mathcal{E}$ линейното пространство от всички прости функции с носители върху $\mathcal{P}$. Означаваме с $\mathcal{M}_\infty$ пространството от всички разширени измерими функции, т.е. всички функции $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$, за които съществува редица $\{g_n\} \subset \mathcal{E}$, така че $|g_n| \leq |f|$ и $g_n(\omega) \to f(\omega)$ за всички $\omega \in \Omega$. Означаваме с $\mathbf{1}_A$ характеристичната функция за множеството A.

Определение 12. *Нека $\rho : \mathcal{M}_\infty \to [0, \infty]$ е нетривиална, изпъкнала, четна функция. Казваме, че ρ е регулярен изпъкнал псевдомодулар, ако:*

(12.I) $\rho(0) = 0$

(12.II) ρ е монотонна, т.е. ако $|f(\omega)| \leq |g(\omega)|$ за всички $\omega \in \Omega$, то $\rho(f) \leq \rho(g)$, където $f, g \in \mathcal{M}_\infty$

(12.III) ρ е ортогонално сабадитивна, т.е. $\rho(f\mathbf{1}_{A\cup B}) \leq \rho(f\mathbf{1}_A) + \rho(f\mathbf{1}_B)$, където $A, B \in \Sigma$, удовлетворяващи $A \cap B \neq \emptyset$, $f \in \mathcal{M}_\infty$

(12.IV) ρ притежава свойството на Фату (Fatou), т.е. ако $|f_n(\omega)| \uparrow |f(\omega)|$ за всички $\omega \in \Omega$, то $\rho(f_n) \uparrow \rho(f)$, където $f \in \mathcal{M}_\infty$

(12.V) ρ е порядково непрекъсната в $\mathcal{E}$, т.е. ако $g_n \in \mathcal{E}$ и $|g_n(\omega)| \downarrow 0$, то $\rho(g_n) \downarrow 0$.

Подобно на случая в измеримите пространства, казваме че множеството $A \in \Sigma$ е ρ–нулево, ако $\rho(g\mathbf{1}_A) = 0$ за всяко $g \in \mathcal{E}$. Казваме, че едно свойство се удовлетворява ρ–почти навсякъде, ако множеството, където свойството не е в сила е ρ–нулево. Както обикновено, идентифицираме всяка двойка измерими множества, чиято симетрична разлика е ρ–нулева и също така всяка двойка от измерими функции, които се различават само върху множество, което е ρ–нулево. С тази уговорка дефинираме $\mathcal{M}(\Omega, \sigma, \mathcal{P}, \rho) = \{f \in \mathcal{M}_\infty; |f(\omega)| < \infty \rho\ -\ a.e.\}$, където всяко $f \in \mathcal{M}(\Omega, \sigma, \mathcal{P}, \rho)$ е в действителност класът от еквивалентни ρ почти навсякъде функции, вместо всяка отделна функция. Когато няма опасност да се допусне объркване ще пишем $\mathcal{M}$ вместо $\mathcal{M}(\Omega, \sigma, \mathcal{P}, \rho)$.

Определение 13. *Нека ρ е регулярен изпъкнал псевдомодулар.*

(1) Казваме, че $\rho(0)$ е регулярен изпъкнал семимодулар, ако от равенството $\rho(\alpha f) = 0$, изпълнено за всяко $\alpha > 0$ следва, че $f = 0$ ρ–почти навсякъде.

(2) Казваме, че ρ е регулярен изпъкнал модулар, ако от $\rho(f) = 0$ следва, че $f = 0$ ρ–почти навсякъде.

Класът от всички ненулеви регулярни изпъкнали модулари, дефинирани върху Ω ще означаваме с $\mathfrak{R}$.

Ще използваме означението $\rho(f, E) = \rho(f1_E)$ за $f \in \mathcal{M}$, $E \in \Sigma$. Лесно се съобразява, че $\rho(f, E)$ е псевдо–модулар в термините на Определение 12 [37].

Определение 14. *Нека ρ е изпъкнал модулар.*

(а) Модуларно функционално пространство наричаме линейното пространство $L_\rho(\Omega, \Sigma)$ и означаваме за кратко с L_ρ, което е дефинирано като $L_\rho = \{f \in \mathcal{M} : \rho(\lambda f) \to 0$ когато $\lambda \to 0\}$

(б) Функционалното модуларно пространство L_ρ може да се снабди с норма (често наричана норма на Люксембург (Luxemburg)): $\|f\|_\rho = \inf\left\{\alpha > 0 : \rho\left(\frac{f}{\alpha}\right) \leq 1\right\}$.

В настоящата разработка, когато формулираме нещо в термини на норма в модуларно функционално пространство ще разбираме нормата на Люксембург $\|\cdot\|_\rho$, породена от ρ.

Пространствата на Лебег (Lebesgue), Орлич, Мушиелак–Орлич са примери на модуларни функционални пространства.

Геометрия на модуларните функционални пространства

Обобщения на различни свойства, които са свързани с понятието изпъкналост от геометрията на банаховите пространства са изследвани за модуларни функционални пространства в [34]. В [40] е показано, че понятието равномерна изпъкналост в банахови пространства може да породи множество различни обобщения в модуларни функционални пространства. Този парадокс се дължи на факта, че най-общо модуларът, който поражда модуларното функционално пространство не е хомогенен.

Определение 15. *Нека $\rho \in \mathfrak{R}$, $i \in \{1, 2\}$, $r > 0$ и $\varepsilon > 0$. Дефинираме функцията*

$$D_i(r, \varepsilon) = \{(f, g) : f, g \in L_\rho, \rho(f) \le r, \rho(g) \le r, \rho\left(\frac{f - g}{i}\right) \ge \varepsilon r\}.$$

Нека означим $\delta_i(r, \varepsilon) = \inf\left\{1 - \frac{1}{r}\rho\left(\frac{f+g}{2}\right) : (f, g) \in D_i(r, \varepsilon)\right\} > 0$, ако $D_i(r, \varepsilon) \ne \emptyset$ и $\delta_i(r, \varepsilon) = 1$ ако $D_i(r, \varepsilon) = \emptyset$.

(i) Казваме, че ρ удовлетворява (UCi), ако за всички $r > 0$ и $\varepsilon > 0$ е в сила неравенството $\delta_i(r, s) > 0$

(ii) Казваме, че ρ удовлетворява (UUCi), ако за всички $s \ge 0$ и $\varepsilon > 0$ съществува $\eta_i(s, \varepsilon) > 0$, зависещо от s и ε, така че $\delta_i(r, s) > \eta_i(s, \varepsilon) > 0$ за $r > s$.

Ако ρ е (UC1) получаваме, че неравенството $\rho\left(\frac{x+y}{2}\right) \le r\left(1 - \delta_1(r, \varepsilon)\right)$ е изпълнено за всяко $\rho(x), \rho(y) \le r$ и $\rho(x - y) \ge r\varepsilon$.

Твърдение 1. *Следващите условия дават връзка между понятията, дефинирани в Определение 15.*

(1) Ако (UUCi), то (UCi) за $i \in 1, 2$

(2) $\delta_1(r, \varepsilon) \le \delta_2(r, \varepsilon)$

(3) Ако (UC1), то (UC2)

(4) Ако (UUC1), то (UUC2)

(5) Ако $\rho \in \mathfrak{R}$, то (UUC1) и (UUC2) са еквивалентни

(6) Ако ρ е хомогенна функция (например е норма), то всичките свойства (UC1), (UC2), (UUC1) и (UUC2) са еквивалентни.

Функционални пространства на Орлич

Ще припомним, че функцията M се нарича функция на Орлич, ако M е четна, изпъкнала, непрекъсната, ненамаляваща в интервала $[0, \infty)$ функция, удовлетворяваща $M(0) = 0$ и $M(t) > 0$ за всяко $t \ne 0$. Нека M е функция на Орлич и нека (Ω, Σ, μ) е измеримо пространство. Дефинираме пространството $L^0(\Omega)$, което се състои от всички измерими върху Ω реално значни функции. За всяко $f \in L^0(\Omega)$ дефинираме модулара на Орлич като $\widetilde{M}(f) = \int_\Omega M(f(t))d\mu(t)$.

Определение 16. *Пространството на Орлич $L_M(\Omega, \Sigma, \mu)$ се състои от всички класове от еквивалентни $\mu-$ измерими функции $f : \Omega \to \mathbb{R}$ върху измеримото пространство (Ω, Σ, μ), такива че $\widetilde{M}(\lambda f) \to 0$, когато $\lambda \to 0$ или еквивалентно $\widetilde{M}\left(\frac{f}{\lambda}\right) < \infty$ за някое $\lambda > 0$.*

Функцията $\widetilde{M}$ е регулярен изпъкнал модулар и се нарича модулар на Орлич.

Казваме, че функцията на Орлич M удовлетворява Δ_2–условието, ако съществуват константи $C, t_0 > 0$, така че неравенството $M(2t) \leq CM(t)$ е изпълнено за всяко $t \geq t_0$. Лесно се забелязва, че ако M удовлетворява Δ_2–условието, то модуларът на Орлич $\widetilde{M}$ притежава Δ_2–свойството.

Ако се ограничим само до функционалните пространства на Орлич $L_M(0,1)$, то модуларът на Орлич се дефинира като $\widetilde{M}(f) = \displaystyle\int_0^1 M(f(s))d\mu(s)$. Ще означаваме съответното модуларно функционално пространство с $L_{\widetilde{M}}(0,1)$. Ако $M = |t|^p$ ще заменим означението $L_{\widetilde{M}}(0,1)$ с $L_{\widetilde{p}}(0,1)$.

Определение 17. *([33], стр. 81) Казваме, че функцията φ е много изпъкнала, ако за всяко $\varepsilon > 0$ и всяко u_0 съществува $\delta > 0$, така че от неравенството*

$$\varphi\left(\frac{u-v}{2}\right) \geq \frac{\varepsilon}{2}(\varphi(u) + \varphi(v)) \geq \varepsilon\varphi(u_0)$$

следва неравенството

$$\varphi\left(\frac{u-v}{2}\right) \leq \frac{1-\delta}{2}(\varphi(u) + \varphi(v)).$$

Определение 18. *[30] Казваме, че функцията φ е равномерно изпъкнала върху $\mathbb{R}$, ако за всяко $a \in (0,1)$ съществува $\delta(a) \in (0,1)$, така че*

$$\varphi\left(\frac{u+au}{2}\right) \leq (1-\delta(a))\frac{\varphi(u) + \varphi(au))}{2}.$$

Ако φ е равномерно изпъкнала, то φ е много изпъкнала [34]. Примери за равномерно изпъкнали функции на Орлич са $M(t) = |t|^p$, $p > 1$.

От равномерната изпъкналост на функцията на Орлич, следва свойството (UC1) [30]. Известно е [34, 40], че за пространства на Орлич върху крайни, без атоми, измерими пространства модуларът на Орлич $\widetilde{M}$ е (UC2) тогава и само тогава, когато M е много изпъкнала функция.

Може да се докаже ([33], стр. 116), че в пространствата на Орлич върху крайно, без атоми измеримо множество равномерната непрекъснатост на модулара на Орлич е еквивалентна на това да удовлетворява Δ_2–условието.

Неподвижни точки за многозначни изображения

Следвайки принципа на Банах за свиващите изображения, Надлер (Nadler) въвежда понятието за свиващо многозначно изображение [29]. Нека Y е множество. Означаваме с 2^Y множеството от всички подмножества на Y. Нека X и Y са множества. Изображението $f : X \to 2^Y$ се нарича многозначно изображение, ако f съпоставя на всяко $x \in X$ подмножество $f(x)$ на Y. Множеството $f(x) \subseteq Y$ се нарича образ на x за изображението f. Ще означаваме многозначните изображения с $f : X \rightrightarrows Y$.

Определение 19. *([29]) Казваме, че точката $x \in X$ е неподвижна точка за многозначното изображение $F : X \rightrightarrows X$, ако $x \in F(x)$.*

Определение 20. *([47]) Наредената двойка $(x, y) \in X \times X$ се нарича двойка неподвижни точки за многозначното изображение $F : X \times X \rightrightarrows X$, ако $x \in F(x, y)$ и $y \in F(y, x)$.*

Тройки неподвижни точки и тройки точки на най-добро приближение

Много резултати при моделиране на процеси в реалния свят в приложната математика водят до проблемите, при които T зависи от повече от две променливи, т.е. $T : X \times X \times X \to X$. Теорията на тройките неподвижни точки или точки на най-добро приближение [2, 9, 46], които са естествено обобщение на двойките неподвижни точки въведени в [11]. Тази идея е обобщена за четворки неподвижни точки [43] и за наредени n–орки неподвижни точки [46].

Следвайки [4, 9, 12] ще дадем едно от възможните определения за тройки неподвижни точки.

Определение 21. *([9]) Наредената тройка $(x, y, z) \in X \times X \times X$ се нарича тройка неподвижни точки за изображението $F : X \times X \times X \to X$, ако са изпълнени равенствата $x = F(x, y, z)$, $y = F(y, x, y)$ и $z = F(z, y, x)$.*

Понятието за изображение на две променливи, удовлетворяващо смесеното монотонно свойство е обобщено за изображение на три променливи $F : X \times X \times X \to X$ в [9].

Определение 22. *([9]) Нека $(X, \preceq)$ е частично наредено множество и $F : X \times X \times X \to X$. Казваме, че F удовлетворява смесеното монотонно свойство, ако $F(x, y, z)$ е монотонно ненамаляваща по x и по z и е монотонно нерастящо по y, т.е. за всяко $x, y, z \in X$ са изпълнени*

$$\text{за } \ x_1, x_2 \in X, \ \ x_1 \preceq x_2 \ \text{ е в сила } \ F(x_1, y, z) \preceq F(x_2, y, z),$$

$$\text{за } \ y_1, y_2 \in X, \ \ y_1 \preceq y_2 \ \text{ е в сила } \ F(x, y_1, z) \succeq F(x, y_2, z)$$

и

$$\text{за } \ z_1, z_2 \in X, z_1 \preceq z_2 \ \text{ е в сила } \ F(x, y, z_1) \preceq F(x, y, z_2).$$

Различен подход за обобщение на понятието двойки неподвижни точки е предложен в [46].

Определение 23. *([46]) Нека X е непразно множество, $F : X^N \to X$ е изображение на N променливи, $(N \geq 2)$. Елементът $(x_1, x_2, \ldots, x_N) \in X^N$ се нарича неподвижна точка от ред N на изображението F, ако*

$$\begin{array}{rcl} F(x_1, x_2, \ldots, x_N) & = & x_1, \\ F(x_2, x_3, \ldots, x_N, x_1) & = & x_2, \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ F(x_N, x_1, \ldots, x_{N-1}) & = & x_N. \end{array}$$

Определение 24. *([46]) Нека X е непразно множество1 $F : X^N \to X$ и M е непразно подмножество на X^{2N}. Казваме, че M е F–инвариантно подмножество на X^{2N}, ако за всички $x_1, x_2, \ldots, x_{2N} \in X$ са в сила включванията*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{2N}) \in M \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} (x_2, x_3, \ldots, x_{2N}, x_1) & \in & M \\ (x_3, x_4, \ldots, x_{2N}, x_1, x_2) & \in & M \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (x_{2N}, x_1, \ldots, x_{2N-1}) & \in & M \end{array} \right.$$

и $(F(x_1, x_2, \ldots, x_N), \ldots, F(x_N, x_1, \ldots, x_{N-1}), F(x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots, x_{2N}), \ldots,$ $F(x_{2N}, x_{N+1}, \ldots, x_{2N-1})) \in M$ винаги, когато $(x_1, x_2, \ldots, x_{2N}) \in M$.

Забелязва се, че Определение 24 замества частичната наредба.

Олигополни пазари

Нека да се уговорим, че участниците в едни пазар се делят на два вида. Това са тези, които искат да продадат стоката си и ще ги наричаме производители или фирми и тези, които купуват стоката и ще ги наричаме купувачи или потребители. Приемаме, че магазините, прекупвачите, борсите са междинно звено при продажбата на една стока от производител на потребител.

Нека разгледаме първо дуополен пазар [24, 49], където две компании се съревноват за едни и същи клиенти и се стремят да задоволят пазарното търсене с обща продукция от $Z = x + y$, където x и y са производствените количества съответно на производителите едно и две. Пазарната цена се задава като $P(Z) = P(x + y)$, което е обратната функция на функцията на търсене. Нека всеки един оп производителите има функция на разходите съответно $c_1(x)$ и $c_2(y)$. Приемаме, че и двамата участника имат рационално поведение. Функциите на печалба за двамата участника са съответно $\Pi_1(x, y) = xP(x+y)-c_1(x)$ и $\Pi_2(x, y) = yP(x+y)-c_2(y)$. Поради допускането за рационално поведение на производителите и това, че всеки приема количествата произведена стока на конкурента си за фиксирани, то максимизирането на печалбата на всеки от участниците може да се запише във вида

$$\max\{\Pi_1(x, y) : x,\ \text{приемайки че } y \text{ е фиксирано}\}$$

и

$$\max\{\Pi_2(x, y) : y,\ \text{приемайки, че } x \text{ е фиксирано}\}.$$

Ако приемем, че функциите P и c_i, $i = 1, 2$ са диференцируеми, то достигаме до системата от уравнения

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial \Pi_1(x,y)}{\partial x} = P(x + y) + xP'(x + y) - c_1'(x) = 0 \\ \frac{\partial \Pi_2(x,y)}{\partial y} = P(x + y) + yP'(x + y) - c_2'(y) = 0. \end{array} \right. \tag{1}$$

Решение на системата от уравнения (1) е равновесна двойка от производства за дуополния пазар, ако са изпълнени условията от втори ред [24, 49]. Условията от втори ред са

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \Pi_1(x,y)}{\partial x^2} < 0 \\ \frac{\partial^2 \Pi_2(x,y)}{\partial y^2} < 0. \end{array} \right. \tag{2}$$

Глава I
ДВОЙКИ НЕПОДВИЖНИ ТОЧКИ В ЧАСТИЧНО НАРЕДЕНИ МЕТРИЧНИ ПРОСТРАНСТВА

Ще представим някои възможни обобщения на известни резултати [11, 26], свързани с двойки неподвижни точки в частично наредени пълни метрични пространства. Ще започнем с обобщение на вариационния принцип на Екеланд, което ще приложим при доказателствата на резултатите за съществуване на двойки неподвижни точки в частично наредени метрични пространства за изображения, които удовлетворяват смесеното монотонно свойство.

Обобщение на вариационния принцип на Екеланд за изображения със смесеното монотонно свойство

Само за да успеем да впишем някои от формулите в текстовото поле ще използваме в тази глава следните означения $u = \left(u^{(1)}, u^{(2)}\right) \in X \times X$ и за всяко $u \in X \times X$ ще означаваме $\overline{u} = \left(u^{(2)}, u^{(1)}\right)$.

Теорема 1. *Нека $(X, \rho, \preceq)$ е частично наредено пълно метрично пространство, $(X \times X, d, \preceq)$ и $F : X \times X \to X$ е непрекъснато изображение със смесеното монотонно свойство. Нека*

$$V \times V = \{x = (x^{(1)}, x^{(2)}) \in X \times X : x^{(1)} \preceq F(x) \text{ и } x^{(2)} \succeq F(\overline{x})\} \neq \emptyset.$$

Нека $T : X \times X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ различна от $+\infty$, полунепрекъсната отдолу, ограничена отдолу функция. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно избрано и фиксирано и нека $u_0 \in V \times V$ е наредена двойка от точки, така че неравенството $T(u_0) \leq \inf_{V \times V} T(v) + \varepsilon$ е в сила. Тогава съществува наредена двойка $x \in V \times V$, така че

(1.i) $T(x) \leq T(u_0)$

(1.ii) $d(x, u_0) \leq 1$

(1.iii) за всяко $w \in V \times V$, различно от $x \in V \times V$ в сила неравенството

$$T(w) > T(x) - \varepsilon d(w, x).$$

Резултати за двойки неподвижни точки за изображения със смесеното монотонно свойство, получени с помощта на вариационна техника

Нека $(X, \preceq)$ е частично наредено множество и $F : X \times X \to X$. Следвайки [26], за всяко $(\xi_0, \eta_0) \in X \times X$ разглеждаме редицата $\{\xi_n, \eta_n\}_{n=0}^{\infty}$, дефинирана чрез $\xi_n = F(\xi_{n-1}, \eta_{n-1})$ и $\eta_n = F(\eta_{n-1}, \xi_{n-1})$ за $n \in \mathbb{N}$.

Представено е друго доказателство, различно от това в ([7], Теорема 3) за съществуването на двойка от неподвижни точки, което използва вариационния принцип от предходния параграф.

Теорема 2. *Нека $(X, \rho, \preceq)$ е частично наредено пълно метрично пространство, $(X \times X, d, \preceq)$ и $F : X \times X \to X$ е непрекъснато изображение със смесеното монотонно свойство. Нека съществува $\alpha \in [0, 1)$, така че да е изпълнено неравенството*

$$\rho(F(x, y), F(u, v)) + \rho(F(y, x), F(v, u)) \leq \alpha\rho(x, u) + \alpha\rho(y, v)$$

за всички $x \succeq u$ и $y \preceq v$. Ако съществува поне една наредена двойка (x, y), така че $x \preceq F(x, y)$ и $y \succeq F(y, x)$, то съществува двойка неподвижни точки (x, y) на F.

Ако в допълнение всяка двойка от елементи от $X \times X$ има долна или горна граница, то двойката неподвижни точки е единствена.

Теорема 2 обобщава резултатите от [11].

В [14] е доказано съществуването и единствеността на двойки неподвижни точки за изображения от вида на Канан в метрични пространства. Представени са обобщения на споменатия резултат в контекста на изображения със смесеното монотонно свойство в частично наредени метрични пространства.

Теорема 3. *Нека $(X, \rho, \preceq)$ е частично наредено пълно метрично пространство, $(X \times X, d, \preceq)$ и $F : X \times X \to X$ е непрекъснато изображение със смесеното монотонно свойство. Нека съществува $\alpha \in [0, 1/2)$, така че да е в сила неравенството*

$$\rho(F(x, y), F(u, v)) \leq \alpha\rho(x, F(x, y)) + \alpha\rho(u, F(u, v))$$

за всички $x \succeq u$ и $y \preceq v$. Ако съществува поне една наредена двойка (x, y), така че $x \preceq F(x, y)$ и $y \succeq F(y, x)$, то съществува двойка неподвижни точки (x, y) на F.

Ако в допълнение всяка двойка от елементи от $X \times X$ има долна или горна граница, то двойката неподвижни точки е единствена.

Пример 1. *Нека $X = \ell_1$ е снабдено с класическите норма $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$ и метрика $\rho_1(x, y) = \|x - y\|$. Нека дефинираме частична наредба в X. Казваме, че $x \preceq y$, ако $|x_i| \le |y_i|$ за всяко $i \in \mathbb{N}$. Да дефинираме изображението $F : X \times X \to X$, което е дефинирано чрез*

$$F(x, y) = \left\{ \frac{|x_i|}{2} - \frac{|y_i|}{3} + \frac{1}{2^i} \right\}_{i=1}^{\infty}.$$

Изображението F удовлетворява условията на Теорема 3 и следователно F има двойка неподвижни точки.

Лесно е да се съобрази, че за произволни два елемента $x, y \in (X, \rho_1, \preceq)$ съществува елемент z, който да бъде едновременно сравним и с двата (можем да изберем $z_i \ge \max\{|x_i|, |y_i|\}$). Следователно двойката неподвижни точки е единствена.

Резултати за двойки неподвижни точки за изображения със смесеното монотонно свойство от типа на Чатерджеа, получени с помощта на вариационна техника

Теорема 4. *Нека $(X, \rho, \preceq)$ е частично наредено пълно метрично пространства, $(X \times X, d, \preceq)$ и $F : X \times X \to X$ е непрекъснато изображение със смесеното монотонно свойство. Нека съществува $\alpha \in [0, 1/2)$, така че да е изпълнено неравенството*

$$\rho(F(x, y), F(u, v)) \le \alpha\rho(x, F(u, v)) + \alpha\rho(u, F(x, y))$$

за всички $x \succeq u$, $y \preceq v$. Ако съществува поне една наредена двойка (x, y), така че $x \preceq F(x, y)$ и $y \succeq F(y, x)$, то съществува двойка неподвижни точки (x, y) на F.

Ако в допълнение всяка двойка от елементи от $X \times X$ има долна или горна граница, то двойката неподвижни точки е единствена.

Резултати за двойки неподвижни точки за изображения от типа на Харди-Роджърс със смесеното монотонно свойство, получени с помощта на вариационна техника

Теорема 5. *Нека $(X, \rho, \preceq)$ е частично наредено пълно метрично пространство, $(X \times X, d, \preceq)$ и $F : X \times X \to X$ е непрекъсната функция със смесеното монотонно свойство. Нека съществуват $\alpha + \beta + \gamma \in [0, 1/2)$, такива че да бъде в сила неравенството*

$$\rho(F(x, y), F(u, v)) \le \alpha(\rho(x, u) + \rho(y, v)) + \beta(\rho(x, F(x, y) + \rho(u, F(u, v)) + \gamma(\rho(x, F(u, v) + \rho(u, F(x, y)).$$

за всички $x \succeq u$ и $y \preceq v$. Ако съществува поне една наредена двойка (x, y), така че да бъдат изпълнени $x \preceq F(x, y)$ и $y \succeq F(y, x)$, то съществува двойка неподвижни точки (x, y) на F.

Ако в допълнение всяка двойка от елементи от $X \times X$ има долна или горна граница, то двойката неподвижни точки е единствена.

Ако в Теорема 5 $\beta = \gamma = 0$, то получаваме Теорема 2. Ако в Теорема 5 $\alpha = \gamma = 0$, то получаваме Теорема 3. Ако в Теорема 5 $\alpha = \beta = 0$, то получаваме Теорема 4.

Глава II
ОЦЕНКА НА ГРЕШКАТА ЗА ДВОЙКИ ТОЧКИ НА НАЙ-ДОБРО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Едно от предимствата на теоремата на Банах за свиващите изображения е оценката на грешката при използване на редици от последователни приближения и скоростта на сходимост.

Един от класовете на обобщения на принципа на Банах за свиващите изображения е понятието за циклични изображения [35], т.е. $T(A) \subseteq B$ и $T(B) \subseteq A$. Тъй като изображения $T : A \to B$ не е задължително да притежават неподвижна точка, често се налага да се търси елемент x, който в някакъв смисъл се намира „най-близо“ до Tx, т.е. опитваме се да решим задачата $\min\{\rho(x, Tx) : x \in A\}$. Теоремите за точки на най-добро приближение са уместни в тази насока.

За разлика от резултатите за неподвижни точки, където са получени „а приори“ и „а постериори“ оценки на грешката, то такива резултати за точки на най–добро приближение липсваха.

Първият получен резултат за „а приори“ и „а постериори“ оценки на грешката за точки на най-добро приближение е получен в [51] за изследваните в [22] циклични изображения.

Техника за получаване на оценка на грешката за точки на най-добро приближение

Техниката, която е предложена в [51] ще бъде използвана за получаване на оценка на грешката за двойки точки на най-добро приближение за различни класове от изображения.

Теорема 6. *Нека A и B са непразни, затворени и изпъкнали подмножества на равномерно изпъкналото банахово пространство $(X, \|\cdot\|)$, така че $d = \operatorname{dist}(A, B) > 0$ и нека съществуват константи $C > 0$ и $q \geq 2$, такива че да се удовлетворява неравенството $\delta_{\|\cdot\|}(\varepsilon) \geq C\varepsilon^q$. Нека $T : A \cup B \to A \cup B$ е циклично изображение и T да удовлетворява неравенството*

$$\rho(Tx, Ty) \leq k\rho(x, y) + (1 - k)\operatorname{dist}(A, B)$$

за всички $x \in A$, $y \in B$ и за някое $k \in (0, 1)$. Тогава

(6.i) *съществува единствена точка на най-добро приближение ξ на T в A, $T\xi$ е единствената точка на най-добро приближение на T в B и $\xi = T^2\xi = T^{2n}\xi$*

(6.ii) *за всяка $x_0 \in A$ редицата $\{x_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща към ξ и редицата $\{x_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща към $T\xi$, където $x_{n+1} = Tx_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$*

(6.iii) *в сила е „а приори“ оценка на грешката*

$$\left\|\xi - T^{2n}x\right\| \leq \frac{\|x - Tx\|}{1 - \sqrt[q]{k^2}} \sqrt[q]{\frac{\|x - Tx\| - d}{Cd}} \left(\sqrt[q]{k}\right)^{2n}$$

(6.iv) *в сила е „а постериори“ оценка на грешката*

$$\left\|T^{2n}x - \xi\right\| \leq \frac{\|T^{2n-1}x - T^{2n}x\|}{1 - \sqrt[q]{k^2}} \sqrt[q]{\frac{\|T^{2n-1}x - T^{2n}x\| - d}{Cd}} \sqrt[q]{k}.$$

Оценка на грешката за двойки неподвижни точки и двойки точки на най-добро приближение за циклични свиващи изображения

Основният резултат от [27, 48] за двойки точки на най-добро приближение в равномерно изпъкнали банахови пространства е систематизиран в следващата теорема която обогатява резултатите от [27, 48].

Теорема 7. *Нека A и B са непразни, затворени и изпъкнали подмножества на равномерно изпъкналото банахово пространство $(X, \|\cdot\|)$. Нека $F : A\times A \to B$, $G : B\times B \to A$. Нека за наредената двойка (F, G) съществуват неотрицателни константи α, β, удовлетворяващи $\alpha + \beta < 1$ и е в сила неравенството*

$$\rho(F(x, y), G(u, v)) \leq \alpha\rho(x, u) + \beta\rho(y, v) + (1 - (\alpha + \beta))\mathrm{dist}(A, B)$$

за всички $(x, y) \in A\times A$ и всички $(u, v) \in B\times B$. Тогава F има единствена двойка точки на най–добро приближение $(\xi, \eta) \in A\times A$ и G има единствена двойка точки на най-добро приближение $(\zeta, \varsigma) \in B \times B$ (т.е. $\|\xi - F(\xi, \eta)\| = \|\eta - F(\eta, \xi)\| = d$ и $\|\zeta - G(\zeta, \varsigma)\| = \|\varsigma - G(\varsigma, \zeta)\| = d$). Още повече верни са равенствата

$$\begin{aligned} G(F(\xi, \eta), F(\eta, \xi)) = \xi, \quad G(F(\eta, \xi), F(\xi, \eta)) = \eta, \\ F(G(\zeta, \varsigma), G(\varsigma, \zeta)) = \zeta, \quad F(G(\varsigma, \zeta), F(\zeta, \varsigma)) = \varsigma \end{aligned}$$

и

$$\zeta = F(\xi, \eta),\ \varsigma = F(\eta, \xi),\ \xi = G(\zeta, \varsigma),\ \eta = G(\varsigma, \zeta).$$

За всяко произволно избрано (x_0, y_0) са в сила $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \xi$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_{2n} = \eta$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = \zeta$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_{2n+1} = \varsigma$ и $\|\xi - \zeta\| + \|\eta - \varsigma\| = 2d$.

Оценка на грешката за двойки точки на най-добро приближение за циклични свиващи изображения

Теорема 8. *Нека A и B са непразни, затворени и изпъкнали подмножества на равномерно изпъкналото банахово пространство $(X, \|\cdot\|)$ с модул на изпъкналост $\delta_{\|\cdot\|}$ от степенен тип с константи $C > 0$ и $q > 1$. Нека $F : A \times A \to B$, $G : B \times B \to A$. Нека за наредената двойка (F, G) съществуват неотрицателни константи α, β, удовлетворяващи $\alpha + \beta < 1$ и е в сила неравенството*

$$\rho(F(x, y), G(u, v)) \leq \alpha\rho(x, u) + \beta\rho(y, v) + (1 - (\alpha + \beta))\mathrm{dist}(A, B) \tag{3}$$

за всички $(x, y) \in A \times A$ и всички $(u, v) \in B \times B$. Тогава

(8.i) *F има единствена двойка точки на най-добро приближение $(\xi, \eta) \in A \times A$ и G има единствена двойка точки на най-добро приближение $(\zeta, \varsigma) \in B\times B$ ((т.е. $\|\xi - F(\xi, \eta)\| = \|\eta - F(\eta, \xi)\| = d$ и $\|\zeta - G(\zeta, \varsigma)\| = \|\varsigma - G(\varsigma, \zeta)\| = d$). Още повече $\zeta = F(\xi, \eta)$, $\varsigma = F(\eta, \xi)$, $\xi = G(\zeta, \varsigma)$ и $\eta = G(\varsigma, \zeta)$. За всяка произволно избрана точка (x_0, y_0) са в сила $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \xi$, $\lim_{n\to\infty} y_{2n} = \eta$, $\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \zeta$, $\lim_{n\to\infty} y_{2n+1} = \varsigma$ и $\|\xi - \zeta\| + \|\eta - \varsigma\| = 2d$*

(8.ii) *за „а приори“ оценка на грешката е в сила*

$$\max\left\{\|\xi - x_{2m}\|, \|\eta - y_{2m}\|\right\} \leq P_{0,1}(x, y)\sqrt[q]{\frac{W_{0,1}(x, y)}{Cd}} \cdot \frac{\left(\sqrt[q]{(\alpha + \beta)^2}\right)^m}{1 - \sqrt[q]{(\alpha + \beta)^2}}$$

(8.iii) *за „а постериори“ оценка на грешката е в сила*

$$\max\{\|\xi - x_{2n}\|, \|\eta - y_{2n}\|\} \le P_{2n,2n-1}(x,y)\sqrt[q]{\frac{W_{2n,2n-1}(x,y)}{Cd}} \cdot \frac{\sqrt[q]{\alpha+\beta}}{1-\sqrt[q]{(\alpha+\beta)^2}},$$

където $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *и* $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ *са редиците, дефинирани в Определение 11.*

Оценка на грешката за двойки неподвижни точки за циклични свиващи изображения

Ако $d = 0$, то съществува единствена обща двойка неподвижни точки за F и G [27, 48]. Ще разширим резултатите от [27, 48] като премахнем изискването $d = 0$.

Теорема 9. *Нека A и B са непразни, затворени подмножества на пълното метрични пространство (X,ρ), $F : A \times A \to B$ и $G : B \times B \to A$. Нека съществуват неотрицаелни константи $\alpha, \beta > 0$, удовлетворяващи $\alpha + \beta < 1$, такива че неравенството*

$$\rho(F(x,y), G(u,v)) \le \alpha\rho(x,u) + \beta\rho(y,v)$$

е в сила за всички $x, y \in A$ и всички $u, v \in B$. Тогава

(9.i) *съществува единствена наредена двойка $(\xi,\eta) \in A \cap B$, която е обща двойка неподвижни точки за изображенията F и G. Още повече редиците от итерации $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, дефинирани в Определение 11 са сходящи съответно към ξ и η*

(9.ii) *за „а приори“ оценка на грешката е в сила*

$$\max\{\rho(x_n,\xi), \rho(y_n,\eta)\} \le \frac{(\alpha+\beta)^n}{1-\alpha-\beta}(\rho(x_1,x_0) + \rho(y_1,y_0))$$

(9.iii) *за „а постериори“ оценка на грешката е в сила*

$$\max\{\rho(x_n,\xi), \rho(y_n,\eta)\} \le \frac{\alpha+\beta}{1-(\alpha+\beta)}(\rho(x_{n-1},x_n) + \rho(y_{n-1},y_n))$$

(9.iv) *скоростта на сходимост на редицата от последователни приближения е*

$$\rho(x_n,\xi) + \rho(y_n,\eta) \le (\alpha+\beta)\left(\rho(x_{n-1},\xi) + (y_{n-1},\eta)\right).$$

Ако функциите F и G зависят само от първата си променлива и $\beta = 0$, то получаваме, че наредената двойка (F,G) е циклично свиващо изображение в смисъла на [22, 35], т.е. $Tx = F(x,y) : A \to B$ и $Tu = G(u,v) : B \to A$. Резултатите от [22, 51] са следствия на Теорема 8, а резултатите от [35, 45] са следствия на Теорема 9.

Приложение на Теорема 8 при решаване на интегрални уравнения

Ще илюстрираме ползата от Теорема 8 с няколко примера.

Пример 2. *Нека разгледаме пространството $L_2[0,1]$ от всички измерими функции с интегруем квадрат, снабдено с норма $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f^2(t)dt}$. Нека $A = \{f \in L_2[0,1] : f(t) \geq t$ за всяко $t \in [0,1]\}$. Търсим решения на системата*

$$
(4) \qquad \left| \begin{array}{lcl} \displaystyle\int_0^1 \left(x(t) + \frac{3t}{2} \int_0^1 s \frac{x(s)+y(s)}{2} ds + \frac{t}{2} \right)^2 dt & = & \frac{4}{3} \\ \displaystyle\int_0^1 \left(y(t) + \frac{3t}{2} \int_0^1 s \frac{x(s)+y(s)}{2} ds + \frac{t}{2} \right)^2 dt & = & \frac{4}{3}, \end{array} \right.
$$

които принадлежат на множеството A.

Да означим $B = \{f \in L_2[0,1] : f(t) \leq -t$ за всички $t \in [0,1]\}$. Лесно се забелязва, че $d = \rho(A,B) = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Нека $F(x,y) = -\left(\frac{3t}{2} \int_0^1 s \frac{x(s)+y(s)}{2} ds + \frac{t}{2} \right)$ за всяко $(x,y) \in A \times A$ и $G(u,v) = \frac{3t}{2} \int_0^1 s \frac{|u(s)|+|v(s)|}{2} ds + \frac{t}{2}$ за всяко $(u,v) \in B \times B$. Наредената двойка $(\xi,\eta) \in A \times A$ е решение на (4) тогава и само тогава, когато (ξ,η) е двойка точки на най–добро приближение на F в $A \times A$.

Таблица 1. Брой $2m$ итерации, необходими при използване на „а постериори“ оценка

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001
$2m$	15	21	28	34	41	47

Приложение на Теорема 8 за решаване на някои определени системи от линейни уравнения

Примерите, които ще разгледаме са от [27, 48] и са в пространството $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Ще отбележим, че модулът на изпъкналост $\delta_{\|\cdot\|}$ е дефиниран в банахови пространства с размерност по-голяма или равна на 2. Тъй като реалните числа $\mathbb{R}$, снабдени с каноничната норма, могат да бъдат разглеждани като подпространство на хилбертовото пространство $\mathbb{R}^2_2$, то веднага получаваме $\delta_{(\mathbb{R},|\cdot|)}(\varepsilon) \geq \delta_{(\mathbb{R}^2_2,\|\cdot\|_2)}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{8}$. Лесно е да се забележи, че в множеството на реалните числа $\mathbb{R}$ е в сила неравенството $\delta_{(\mathbb{R},|\cdot|)}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$. Наистина, да разгледаме единичното кълбо $B_{(\mathbb{R},|\cdot|)} = [-1,1]$ в $(\mathbb{R}, \|c\dot{\|})$. Тогава $\delta_{(\mathbb{R},|\cdot|)}(\varepsilon) = \inf \left\{ \left| 1 - \frac{x+y}{2} \right| : x,y \in [-1,1], |x-y| \geq \varepsilon \right\}$. Точната горна граница се достига, когато $x = 1$ и $y = 1 - \varepsilon$. Следователно $\delta_{(\mathbb{R},|\cdot|)}(\varepsilon) = \left| 1 - \frac{1+(1-\varepsilon)}{2} \right| = \frac{\varepsilon}{2}$.

Пример 3. *([48]) Нека да разгледаме пространството $\mathbb{R}$, снабдено с каноничната норма $|\cdot|$ и $A = [1,2]$. Търсим решение на системата от линейни уравнения*

$$
\left| \begin{array}{lcl} 5x + y & = & 6 \\ 5y + x & = & 6, \end{array} \right.
$$

които принадлежат на множеството A.

Нека $B = [-2,-1]$, $F : A \times A \to B$ и $G : B \times B \to A$ са дефинирани чрез $F(x,y) = \frac{-x-y-2}{4}$ и $G(x,y) = \frac{-x-y+2}{4}$. Наредената двойка (F,G) удовлетворява условията на Теорема 8 с $\alpha = \beta = 1/4$ и $d = d(A,B) = 2$. Двойката $(1,1)$ е единствената двойка на най-добро приближение на F в A и е решение на системата.

Таблица 2. Брой $2m$ на итерациите, необходими при използване на „а приори“ оценката

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001
$2m$	8	12	16	18	22	26

Таблица 3. Брой $2m$ на итерациите, необходими при използване на „а постериори“ оценката

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001
$2m$	16	36	66	120	172	232

Модифицирани двойки неподвижни точки и модифицирани двойки точки на най-добро приближение

Дълбоки резултати в теорията на двойките неподвижни точки могат да се намерят в [7, 8, 9, 10]. Опитахме се да обогатим известните резултати за двойки точки на най-добро приближение за наредени двойки от циклични изображения (F, G), като доказахме, че двойките от точки на най-добро приближение $(x, y) \in A \times A$ се свеждат до точки от вида $(x, x) \in A \times A$. Този резултат показва защо приложението, направено в [54] е валидно само за симетрични линейни системи и не е възможно да се разшири до приложение за решаване на произволни линейни системи.

За да можем да получим по-общи резултати за съществуване на двойки от точки на най-добро приближение $(x, y) \in A \times A$, за които да не бъде задължително $x \neq y$, ще бъде необходимо да разглеждаме наредени двойки от наредени двойки от изображения $((F, f), (G, g))$, такива че $F : A_1 \times A_2 \to B_1$, $f : A_1 \times A_2 \to B_2$, $G : B_1 \times B_2 \to A_1$, $g : B_1 \times B_2 \to A_2$, където $A_1, A_2, B_1, B_2 \subset X$.

Отново за да можем да съберем някои от формулите в текстовото поле ще използваме означенията $d_x = \mathrm{disr}(A_x, B_x)$ и $d_y = \mathrm{dist}(A_y, B_y)$.

Определение 25. *Нека A_x, A_y, B_x и B_y са непразни подмножества на метричното пространство (X, ρ), $F : A_x \times A_y \to B_x$, $f : A_x \times A_y \to B_y$, $G : B_x \times B_y \to A_x$ и $g : B_x \times B_y \to A_y$. Наредената двойка от наредени двойки $((F, f), (G, g))$ ще наричаме циклична свиваща наредена двойка, ако съществуват неотрицателни константи $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, удовлетворяващи $\max\{\alpha + \gamma, \beta + \delta\} < 1$ и неравенството*

$$\begin{aligned} S_1 &= \rho(F(x, y), G(u, v)) + \rho(f(z, w), g(t, s)) \\ &\leq \alpha\rho(x, u) + \beta\rho(y, v) + \gamma\rho(z, t) + \delta\rho(w, s) + (1 - (\alpha + \gamma))d_x + (1 - (\beta + \delta))d_y \end{aligned}$$

за всички $(x, y), (z, w) \in A_x \times A_y$ и всички $(u, v), (t, s) \in B_x \times B_y$.

Определение 26. *Нека A_x, A_y, B_x и B_y са непразни подмножества на метричното пространство (X, ρ), $F : A_x \times A_y \to B_x$, $f : A_x \times A_y \to B_y$. Наредената двойка $(\xi, \eta) \in A_x \times A_y$ ще наричаме двойка точки на най-добро приближение на (F, f) в $A_x \times A_y$, ако са в сила*

$$\rho(\xi, F(\xi, \eta)) = \mathrm{dist}(A_x, B_x) \quad и \quad \rho(\eta, f(\xi, \eta)) = \mathrm{dist}(A_y, B_y).$$

Определение 27. *Нека A_x, A_y, B_x и B_y са непразни подмножества на множеството X. Нека $F : A_x \times A_y \to B_x$, $f : A_x \times A_y \to B_y$, $G : B_x \times B_y \to A_x$ и $g : B_x \times B_y \to A_y$. За всяка наредена двойки $(x, y) \in A_x \times A_y$ дефинираме редиците $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ като $x_0 = x$, $y_0 = y$ и*

$$\begin{aligned} x_{2n+1} &= F(x_{2n}, y_{2n}), & y_{2n+1} &= f(x_{2n}, y_{2n}) \\ x_{2n+2} &= G(x_{2n+1}, y_{2n+1}), & y_{2n+2} &= g(x_{2n+1}, y_{2n+1}) \end{aligned}$$

за всяко $n \geq 0$.

Навсякъде до края на тази глава, когато разглеждаме редиците $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ ще предполагаме, че те са редиците, дефинирани в Определение 27.

Ако разгледаме случая $A_x = A_y = A$, $B_x = B_y = B$, $D = d(A,B)$, $f(x,y) = F(y,x)$, $g(x,y) = G(y,x)$, $z = y$, $w = x$, $t = v$, $s = u$, $\gamma = \beta$ и $\delta = \alpha$ в Определение 25, то получаваме изображенията, изследвани в [27, 48].

Коментари върху известни резултати за двойки точки на най-добро приближение

Интересно е да се отбележи, че и в примерите от [27, 48] е в сила равенството $\xi = \eta$. Оказва се, че това не е случайност.

Теорема 10. *Нека са в сила условията на Теорема 7. Тогава F има единствена двойка точки на най–добро приближение $(\xi,\eta) \in A \times A$ и $\xi = \eta$ и G има единствена двойка точки на най–добро приближение $(\zeta,\varsigma) \in B \times B$ и $\zeta = \varsigma$.*

Следващият резултат обобщава и допълва резултата от [28] като се доказва, че двойката неподвижни точки (ξ,η) в $A \cap B$ удовлетворява равенството $\xi = \eta$.

Теорема 11. *Нека A и B са непразни, затворени подмножества на пълното метрично пространство (X,ρ), $F : A \times A \to B$ и $G : B \times B \to A$. Нека съществуват константи $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta < 1$, така че неравенството*

$$\rho(F(x,y), G(u,v)) \leq \alpha\rho(x,u) + \beta\rho(y,v)$$

е изпълнено за всички $x, y \in A$ и всички $u, v \in B$. Тогава съществува единствена наредена двойка $(\xi,\eta) \in A \cap B$, която е обща двойка неподвижни точки едновременно за изображенията F и G. Още повече при произволно избрано начално приближение $(x,y) \in A \times A$ редиците от последователни итерации $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, дефинирани в Определение 11 са сходящи съответно към ξ и η и е в сила равенството $\xi = \eta$.

Модифицирани двойки неподвижни точки

Теорема 12. *Нека A_x, A_y, B_x и B_y са непразни, затворени подмножества на пълното метрично пространство (X,ρ), $F : A_x \times A_y \to B_x$, $f : A_x \times A_y \to B_y$, $G : B_x \times B_y \to A_x$ и $g : B_x \times B_y \to A_y$. Нека съществуват константи $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$, удовлетворяващи $\max\{\alpha + \gamma, \beta + \delta\} < 1$, така че е в сила неравенството*

$$\rho(F(x,y), G(u,v)) + \rho(f(z,w), g(t,s)) \leq \alpha\rho(x,u) + \beta\rho(y,v) + \gamma\rho(z,t) + \delta\rho(w,s)$$

за всички $(x,y) \in A_x \times A_y$, $(u,v) \in B_x \times B_y$, $(z,w) \in A_x \times A_y$ и $(t,s) \in B_x \times B_y$. Тогава

(12.i) *съществува единствена наредена двойка (ξ,η) в $A_x \cap B_x \times A_y \cap B_y$, която е обща двойка неподвижни точки за изображенията (F,f) и (G,g) и редиците от итерации $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, дефинирани в Определение 27 са сходящи съответно към ξ и η*

(12.ii) *„а приори“ оценка на грешката*

$$\max\{\rho(x_n,\xi), \rho(y_n,\eta)\} \leq \frac{k^n}{1-k}(\rho(x_1,x_0) + \rho(y_1,y_0))$$

(12.iii) *„а постериори“ оценка на грешката*

$$\max\{\rho(x_n,\xi), \rho(y_n,\eta)\} \leq \frac{k}{1-k}(\rho(x_{n-1},x_n) + \rho(y_{n-1},y_n))$$

(12.iv) *скоростта на сходимост за редицата от последователни приближения се задава с*

$$\rho(x_n,\xi) + \rho(y_n,\eta) \leq k\left(\rho(x_{n-1},\xi) + (y_{n-1},\eta)\right).$$

Модифицирани двойки точки на най-добро приближение

Нека A_x, A_y, B_x и B_y са непразни множества в метричното пространство (X,ρ). Единствено за да можем да запишем някои от формулите в текстовото поле да въведем означенията: $d_x = \operatorname{dist}(A_x,B_x)$, $d_y = \operatorname{dist}(A_y,B_y)$, $d = d_x + d_y$, $P_{n,m}(x,y) = \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\|$ и $W_{n,m}(x,y) = P_{n,m}(x,y) - (d_x + d_y) = \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\| - (d_x + d_y)$, където $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ са редиците, дефинирани в Определение 27 и $k = \max\{\alpha+\gamma, \beta+\delta\}$, където $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ са константите от Определение 25.

Теорема 13. *Нека A_x, A_y, B_x и B_y са непразни, изпъкнали и затворени подмножества на равномерно изпъкналото банахово пространство $(X,\|\cdot\|)$, $F : A_x \times A_y \to B_x$, $f : A_x \times A_y \to B_y$, $G : B_x \times B_y \to A_x$ и $g : B_x \times B_y \to A_y$. Нека наредената двойка $((F,f),(G,g))$ е циклично свиващо изображение. Тогава (F,f) има единствена двойка точки на най–добро приближение $(\xi,\eta) \in A_x \times A_y$ и (G,g) има единствена двойка точки на най–добро приближение $(\zeta,\varsigma) \in B_x \times B_y$ (т.е. $\|\xi - F(\xi,\eta)\| = d_x$, $\|\eta - f(\xi,\eta)\| = d_y$ и $\|\zeta - G(\zeta,\varsigma)\| = d_x$, $\|\varsigma - g(\zeta,\varsigma)\| = d_y$). Още повече $\zeta = F(\xi,\eta)$, $\varsigma = f(\xi,\eta)$, $\xi = G(\zeta,\varsigma)$ и $\eta = g(\zeta,\varsigma)$. За всяко произволно избрано $(x,y) \in A \times A$ са в сила $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \xi$, $\lim_{n\to\infty} y_{2n} = \eta$, $\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \zeta$, $\lim_{n\to\infty} y_{2n+1} = \varsigma$ и $\|\xi - \zeta\| + \|\eta - \varsigma\| = d_x + d_y$. Допълнително валидни са и равенствата*

$$\begin{gathered} G(F(\xi,\eta),f(\xi,\eta)) = \xi,\ \ g(F(\xi,\eta),f(\xi,\eta)) = \eta, \\ F(G(\zeta,\varsigma),g(\zeta,\varsigma)) = \zeta,\ \ f(G(\zeta,\varsigma),g(\zeta,\varsigma)) = \varsigma. \end{gathered}$$

Ако допълнително банаховото пространство $(X,\|\cdot\|)$ има модул на изпъкналост от степенен тип с константи $C > 0$ и $q > 1$, то в сила са

(13.i) *„а приори“ оценка на грешката е*

$$\max\{\|\xi - x_{2m}\|, \|\eta - y_{2m}\|\} \le P_{0,1}(x,y)\sqrt[q]{\frac{W_{0,1}(x,y)}{Cd_x}} \cdot \frac{\sqrt[q]{k^{2m}}}{1-\sqrt[q]{k^2}}$$

(13.ii) *„а постериори“ оценка на грешката е*

$$\max\{\|\xi - x_{2n}\|, \|\eta - y_{2n}\|\} \le P_{2n,2n-1}(x,y)\sqrt[q]{\frac{W_{2n,2n-1}(x,y)}{Cd_x}} \cdot \frac{\sqrt[q]{k}}{1-\sqrt[q]{k^2}}$$

Приложение на Теорема 13 при решаване на системи от трансцендентни уравнения

Ако в Теорема 13 и Теорема 12 положим $A_x = A_y = A$, $B_x = B_y = B$, $f(x,y) = F(y,x)$, $g(x,y) = G(y,x)$, $z = y$, $w = x$, $t = v$, $s = u$, $\gamma = \beta$ и $\delta = \alpha$, то получаваме като следствие резултатите от ([28] съответно Теорема 2 и Теорема 3).

Ще илюстрираме приложението на Теорема 13 за решаване на системи от уравнения.

Пример 4. *Нека разгледаме системата от трансцендентни уравнения*

$$\left|\begin{array}{rcrcl} 36x & + & e^y & = & e+68 \\ 4\arctan\left(\frac{x}{2}\right) & + & 18y & = & \pi+18. \end{array}\right. \tag{5}$$

Да разгледаме функциите

$$F(x,y) = -\frac{x}{8} - \frac{e^y}{32} + \frac{e-60}{32},\ \ G(x,y) = -\frac{x}{8} - \frac{e^y}{32} - \frac{e-60}{32},$$

$$f(x,y) = -\frac{\arctan\left(\frac{x}{2}\right)}{4} - \frac{y}{8} + \frac{\pi - 14}{16}, \quad g(x,y) = -\frac{\arctan\left(\frac{x}{2}\right)}{4} - \frac{y}{8} - \frac{\pi - 14}{16}.$$

Лесно се проверява, че $F : [2,+\infty) \times [1, 1.5] \to (-\infty, -2]$, $f : [2, +\infty) \times [1, 1.5] \to [-1.5, -1]$, $G : (-\infty, -2] \times [-1.5, -1] \to [2, +\infty)$, $g : (-\infty, -2] \times 5 - 1.5, -1] \to [1, 1.5]$ и задачата за намиране на точки на най-добро приближение на (F, f) е еквивалентна на (5).

Наредената двойка $((F, f), (G, g))$ е циклично свиващо изображение с константи $\frac{1}{8}$, $\frac{e^{1.5}}{32}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{8}$ и единственото решение на (5) е $(2, 1)$.

Таблица 4. Брой $2m$ итерации, необходими при използване на „а приори“ оценката

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001
$2m$	4	6	8	10	12	14

Таблица 5. Брой $2m$ итерации, необходими при използване а „а постериори“ оценката

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001
$2m$	4	8	12	14	16	20

Ако се опитаме да решим системата (5) с помощта на алгебрична компютърна система, например Maple 18.00, то получаваме като отговор

$$x = 2\tan(RootOf(72\tan(\_Z) + e^{-\frac{2}{9}\_Z + \frac{1}{18}\pi + 1} - e - 72))$$

$$y = -\frac{2}{9} RootOf(72\tan(\_Z) + e^{-\frac{2}{9}\_Z + \frac{1}{18}\pi + 1} - e - 72) + \frac{\pi}{18} + 1.$$

Ако се опитаме да намерим числено приближение на решенията на системата (5) с помощта на Maple 18.00, получаваме като отговор $\{x = 2.000000000, y = .9999999998\}$.

Приложение на Теорема 13 при решаване на произволна система от линейни уравнения

Ще представим приложение на резултатите за модифицирани двойки точки на най-добро приближение при решаване на системи от линейни уравнения, обобщаващи резултатите от [54].

Пример 5. *Нека $p, q, r, m, n, k > 0$ и да разгледаме системата от линейни уравнения*

$$\left| \begin{array}{rcl} px + qy & = & r \\ my + nx & = & k. \end{array} \right. \tag{6}$$

Да предположим, че $p \geq q$ и $m \geq n$. Нека $a = \frac{kq-nr}{mq-np}$, $b = -\frac{rp-mr}{mq-np}$ са решенията на системата (6).

Нека $\mu > 0$ е такова че $\max\left\{\mu + \frac{(1+\mu)q}{p}, \mu + \frac{(1+\mu)n}{m}\right\} < 1$.

Да разгледаме функциите

$$F(x,y) = -\mu x - \frac{(1+\mu)q}{p} y + \frac{(1+\mu)r}{p} - 2a, \quad G(x,y) = -\mu x - \frac{(1+\mu)q}{p} y - \frac{(1+\mu)r}{p} + 2a,$$

$$f(x,y) = -\mu y - \frac{(1+\mu)n}{m} x + \frac{(1+\mu)k}{m} - 2b, \quad g(x,y) = -\mu y - \frac{(1+\mu)n}{m} x - \frac{(1+\mu)k}{m} + 2b.$$

Наредената двойка $((F,f),(G,g))$ е циклично свиващо изображение с константи μ, $\frac{(1+m)(q)}{p}$, μ, $\frac{(1+m)(n)}{m}$. Скоростта на сходимост зависи от константата $\max\left\{\mu+\frac{(1+\mu)q}{p},\mu+\frac{(1+\mu)n}{m}\right\}$, която е растяща функция на μ. Ето защо чрез избирането на все по малко $\mu\in(0,1)$ ще можем да правим сходимостта на редицата от последователни приближения все по-бърза. Не е възможно да изберем $\mu=0$ и следователно горната граница на скоростта на сходимост $\max\left\{\frac{q}{p},\frac{n}{m}\right\}$ не може да бъде достигната.

Ще разгледаме частен случай на Пример 5.

Пример 6. *Да разгледаме пространството $\mathbb{R}$, снабдено с каноничната норма $|\cdot|$. Търсим решенията на системата*

$$\left|\begin{array}{rcl} 2x+y & = & 12 \\ 3y+x & = & 11. \end{array}\right. \tag{7}$$

Таблица 6. Брой $2m$ итерации, необходими при използване на „а приори“ оценката

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001
$\mu=1/4$	48	66	82	100	116	134
$\mu=1/8$	48	64	82	98	116	134
$\mu=1/80$	46	64	80	98	116	132

Таблица 7. Брой $2m$ итерации, необходими при използване на „а постериори“ оценката

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001
$\mu=1/4$	210	406	666	1036	1432	1982
$\mu=1/8$	56	106	190	276	378	496
$\mu=1/80$	22	45	78	106	154	210

Съществуване и единственост на двойки неподвижни точки и двойки точки на най-добро приближение за p–циклични свиващи изображения

Нека A_i, $i=1,2,\ldots,p$ са непразни множества. Единствено за да опростим означенията ще приеме, че $A_{p+k}=A_k$ за $k=1,2,\ldots,p$.

Понятието за двойки точки на най–добро приближение за циклични изображения е въведено в [48], а понятието за точка на най-добро приближение за p–циклични свиващи изображения е въведено в [32]. Ще се опитаме да комбинираме двете понятия и да дефинираме двойки точки на най-добро приближения за p–циклични изображения.

Определение 28. *Нека A_i, $i=1,2,\ldots,p$ са непразни подмножества на множеството X. Изображението $T:\cup_{i=1}^p(A_i\times A_i)\to\cup_{i=1}^p(A_i\times A_i)$ наричаме p–циклично изображение, ако $T:A_i\times A_i\to A_{i+1}$ за $i=1,2,\ldots,p$.*

Определение 29. *Нека A_i, $i=1,2,\ldots,p$ са непразни подмножества на метричното пространство (X,ρ) и T е p–циклично изображение. Точката $(x,y)\in A_i\times A_i$ наричаме точка на най–добро приближение на T в $A_i\times A_i$, ако $\rho(x,T(x,y))=\rho(y,T(y,x))=\operatorname{dist}(A_i,A_{i+1})$.*

Следвайки [26], дефинираме итеративната редица $\{(x_n,y_n)\}_{n=0}^{\infty}$, породена от p–цикличното изображение T.

Определение 30. *Нека* $\{A_i\}_{i=1}^p$ *са непразни подмножества на множеството* (X, ρ) *и* T *е p–циклично изображение. Нека за всяко* $(x_0, y_0) \in A_i \times A_i$ *дефинираме индуктивно редицата* (x_n, y_n) *чрез* $(x_1, y_1) = (T(x_0, y_0), T(y_0, x_0))$ *и ако* (x_n, y_n) *е вече дефинирано, то* $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (T(x_n, y_n), T(y_n, x_n))$ *за* $n = 0, 1, 2 \dots$.

Следвайки [32], дефинираме циклични свиващи условия за p–циклични изображения $T : A_i \times A_i \to A_{i+1}$ за $i = 1, 2, \dots, p$.

Определение 31. *Нека* $\{A_i\}_{i=1}^p$ *са непразни подмножества на метричното пространство* (X, ρ) *и* T *е p–циклично изображение. Изображението* T *наричаме p–циклично свиващо изображение, ако съществуват константи* $\alpha, \beta \geq 0$, *удовлетворяващи* $\alpha + \beta \in (0, 1)$ *и такива че неравенството*

$$\rho(T(x, y), T(u, v)) \leq \alpha\rho(x, u) + \beta\rho(y, v) + (1 - (\alpha + \beta))\mathrm{dist}(A_i, A_{i+1})$$

е изпълнено за всяко $(x, y) \in A_i \times A_i$, $(u, v) \in A_{i+1} \times A_{i+1}$, $1 \leq i \leq p$.

Следващата лема е обобщение на резултатите от [32], където авторите са доказали твърдението, че разстоянията между последователните множества трябва да бъдат равни в случай на изображения T на една променлива.

Лема 3. *Нека* $\{A_i\}_{i=1}^p$ *са непразни подмножества на метричното пространство* (X, ρ) *и* T *е p–циклично свиващо изображение. Тогава* $\mathrm{dist}(A_i, A_{i+1}) = \mathrm{dist}(A_{i+1}, A_{i+2})$ *за всяко* $i = 1, 2, \dots, p$.

Съгласно Лема 3 винаги, когато разглеждаме p–циклични свиващи изображения T, разстоянията между последователните множества са равни и можем да използваме означението $d = d(A_i, A_{i+1}) = d(A_{i-1}, A_i) = \ldots = d(A_1, A_2)$.

Двойки неподвижни точки за p–циклични изображения

Теорема 14. *Нека* $A_1, A_2, \dots, A_p$ *са непразни, затворени подмножества на пълното метрично пространство* (X, ρ) *Нека* T *е p–циклично изображение и нека съществуват неотрицателни константи* $\alpha, \beta \geq 0$, *удовлетворяващи* $\gamma = \alpha + \beta \in (0, 1)$, *такива че е в сила неравенството*

$$d(T(x, y), T(u, v)) \leq \alpha d(x, u) + \beta d(y, v)$$

за всяко $(x, y) \in A_i \times A_i$, $(u, v) \in A_{i+1} \times A_{i+1}$, $1 \leq i \leq p$. *Тогава съществува единствена наредена двойки* $(z, v) \in \cap_{i=1}^p (A_i \times A_i)$, *която е двойка неподвижни точки на* T. *Ако* $(x_0, y_0) \in A_i \times A_i$ *е произволно избрана точка, то редиците* $\{x_n\}\}_{n=0}^\infty$ *и* $\{y_n\}\}_{n=0}^\infty$ *са сходящи съответно към* z *и* v. *Допълнително е изпълнено* $z = v$. *Още повече, в сила са*

14.i) „а приори“ оценката

$$\max\{\rho(x_n, z), \rho(y_n, v)\} \leq \frac{\gamma^n}{1 - \gamma}(\rho(x_1, x_0) + \rho(y_1, y_0))$$

14.ii) „а постериори“ оценката

$$\max\{\rho(x_n, z), \rho(y_n, v)\} \leq \frac{\gamma}{1 - \gamma}(\rho(x_{n-1}, x_n) + \rho(y_{n-1}, y_n))$$

14.iii) скоростта на сходимост

$$\rho(x_n, z) + \rho(y, v) \leq \gamma(\rho(x_{n-1}, z) + \rho(y_{n-1}, v)).$$

Двойки точки на най-добро приближение за p–циклични изображения

Нека припомним означенията, които ще използваме единствено, за да можем да впишем някои от формулите в текстовите полета. Означаваме $P_{n,m}(x,y) = \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\|$ и $W_{n,m}(x,y) = P_{n,m}(x,y) - 2d = \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\| - 2d$, където $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ са редиците, дефинирани в Определение 30.

Теорема 15. *Нека $A_1, A_2, \ldots, A_p$ са непразни, затворени и изпъкнали подмножества на равномерно изпъкналото банахово пространство $(X, \|\cdot\|)$. Нека T е p–циклично свиващо изображения. Тогава съществува единствена наредена двойка $(z_i, v_i) \in A_i \times A_i$, $(1 \le i \le p)$, така че ако $(x,y) \in A_i \times A_i$ е произволно избрана точка от $A_i \times A_i$, то редицата $T^{pn}(x,y)$ е сходяща към (z_i, v_i) и наредената двойка (z_i, v_i) е точка на най–добро приближение на T в $A_i \times A_i$. Още повече, ако $T^j(z_i, v_i) = z_{i+j}$ и $T^j(v_i, z_i) = v_{i+j}$, то наредената двойка (z_{i+j}, v_{i+j}) е двойка точки на най–добро приближение на T в $A_{i+j} \times A_{i+j}$ за $j = 1, \ldots, (p-1)$ и (z_i, v_i) е единствената периодична точка на T с период p. Точката на най-добро приближение (z_i, v_i) удовлетворява $z_i = v_i$. Ако модулът на изпъкналост е от степен q с константа C, то в сила са следните:*

15.i) „а приори“ оценка на грешката

$$\max\{\|\xi - x_{pm}\|, \|\eta - x_{pm}\|\} \le P_{0,1}(x,y) \sqrt[q]{\frac{W_{0,1}(x,y)}{Cd}} \cdot \frac{\left(\sqrt[q]{\gamma}\right)^{pm}}{1 - \sqrt[q]{\gamma^p}}$$

15.ii) „а постериори“ оценка на грешката

$$\max\{\|\xi - x_{pn}\|, \|\eta - x_{pn}\|\} \le P_{pn,pn-1}(x,y) \sqrt[q]{\frac{W_{pn,pn-1}(x,y)}{Cd}} \frac{\sqrt[q]{\gamma}}{1 - \sqrt[q]{\gamma^p}},$$

където (ξ, η) е точката на най-добро приближение на T в A_i, $(x_0, y_0) \in A_i \times A_i$ е произволно избрано начално приближение и $\gamma = \alpha + \beta$.

Ако $p = 2$, то получаваме като частен случай резултата от [28].

Приложение на Теорема 15

Нека $\varphi, \psi : [1, +\infty) \to [1, +\infty)$ са такива, че $\max\{\varphi(x), \psi(x)\} \le x$ за всяко $x \in [1, +\infty)$. Нека дефинираме функцията $f(x,y) = \lambda + (1-\lambda)(\mu\varphi(x) + (1-\mu)\psi(y))$. Да разгледаме системата от уравнения

$$(8) \qquad \left| \begin{array}{rcl} |x|^p + |\lambda + (1-\lambda)(\mu\varphi(x) + (1-\mu)\psi(y))|^p &=& 2 \\ |y|^p + |\lambda + (1-\lambda)(\mu\psi(y) + (1-\mu)\varphi(x))|^p &=& 2 \\ x - f(f(f(x,y), f(y,x)), f(f(y,x), f(x,y))) &=& 0 \\ y - f(f(f(y,x), f(x,y)), f(f(x,y), f(y,x))) &=& 0 \end{array} \right.$$

за $x, y \ge 0$ и $\lambda, \mu \in (0,1)$.

Нека разгледаме множествата $A_1 = \{(x,0,0) : x \ge 1\}$, $A_2 = \{(0,x,0) : x \ge 1\}$, $A_3 = \{(0,0,x) : x \ge 1\}$ като подмножества на $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_p)$, $p \in (1, \infty)$. Да дефинираме изображенията $T((x,0,0),(y,0,0)) = (0, f(x,y), 0)$, $T((0,x,0),(0,y,0)) = (0,0,f(x,y))$, $T((0,0,x),(0,0,y)) = (f(x,y),0,0)$ за някое $\lambda, \mu \in (0,1)$. Изображението T удовлетворява условията на Теорема 15. Съгласно Теорема 15, съществува точка (z,z), която е двойка точки на най-добро приближение на T в $A_1 \times A_1$ и е лесно да се забележи, че $z = (1,0,0)$. Следователно (z,z) е единственото решение на системата от уравнения

$$\left| \begin{array}{rcl} \|x - T(x,y)\|_p^p & = & 2 \\ \|y - T(y,x)\|_p^p & = & 2 \\ x - T^3(x,y) & = & 0 \\ y - T^3(y,x) & = & 0, \end{array} \right.$$

която е и решение на (8).

Ако се опитаме да решим (8) с помощта на някоя компютърна алгебрична система, например Maple 18.00, то софтуерът не успява да намери точното решение дори и за не съвсем сложни функции ($p = 2$, $\varphi(x) = x^{1/2}$, $\psi(x) = x$).

Ако се опитаме да решим системата приближено, Maple 18.00 открива решението $x = y = 1$, но не успява да открие, че това решение е за произволно избрано $\lambda, \mu \in (0,1)$ и извежда като резултат две приближения за λ и μ.

Ако се опитаме да решим частния случай, когато $p = 3$, $\varphi(x) = \sqrt{x}$ и $\psi(x) = \sqrt{\log(x)+1}$, то Maple 18.00 не успява да реши (8) дори и приближено.

Глава III
ДВОЙКИ ТОЧКИ НА НАЙ-ДОБРО ПРИБЛИЖЕНИЕ В МОДУЛАРНИ ФУНКЦИОНАЛНИ ПРОСТРАНСТВА

Опитали сме се да обобщим идеята за точки на най-добро приближение в модуларни функционални пространства и да представим приложения за интегрални оператори във функционални пространства на Орлич, снабдени с функионалния модулар на Орлич.

Обобщение на ключовите леми на Елдред и Веермани при изследване на точки на най–добро приближение в модуларни функционални пространства

Следващите леми и следствия са обобщения на ключовите леми от [22].

Лема 4. *Нека $\rho \in \mathfrak{R}$. Нека ρ е (UC1), притежава Δ_2–свойството, $A \subset L_\rho$ е ρ–затворено и изпъкнало подмножество и $B \subset L_\rho$ е ρ–затворено подмножество.*

Ако редиците $\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{z_n\}_{n=1}^\infty \subset A$ и $\{y_n\}_{n=1}^\infty \subset B$ удовлетворяват

(i) $\lim_{n\to\infty} \rho(z_n - y_n) = d_\rho$

(ii) за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $N_0 \in \mathbb{N}$, така че за всички $m > n \geq N_0$ е изпълнено неравенството $\rho(x_m - y_n) \leq d_\rho + \varepsilon$,

то за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $N_1 \in \mathbb{N}$, така че за всички $m > n \geq N_1$ е в сила неравенството $\rho(x_m - z_n) < \varepsilon$.

Следствие 1. *Нека $\rho \in \mathfrak{R}$. Нека ρ е (UC1), удовлетворява Δ_2–свойството, A е ρ–затворено и изпъкнало подмножество на L_ρ и B е ρ–затворено подмножество на L_ρ. Ако редиците $\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{z_n\}_{n=1}^\infty \subset A$ и $\{y_n\}_{n=1}^\infty \subset B$ удовлетворяват*

(i) $\lim_{n\to\infty} \rho(z_n - y_n) = d_\rho$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n - y_n) = d_\rho$,

то $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n - z_n) = 0$.

Лема 5. *Нека $\rho \in \mathfrak{R}$. Нека функционалният модулар ρ е равномерно непрекъснат, удовлетворява Δ_2–свойството и $A, B \subset L_\rho$ са подмножества. Ако редиците $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B$ и $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ удовлетворяват*

(i) $\lim_{n\to\infty} \rho(z_n - x_n) = 0$

(ii) за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $N_0 \in \mathbb{N}$, така че за всички $m \geq n \geq N_0$ е в сила неравенството $\rho(z_m - y_n) \leq d_\rho + \varepsilon$,

то за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $N_1 \in \mathbb{N}$, така че за всички $m \geq n \geq N_1$ неравенството $\rho(x_m - y_n) < d_\rho + \varepsilon$ е изпълнено.

Нека споменем, че ако ρ удовлетворява неравенството на триъгълника, то доказателството е тривиално и нямаме нужда от условието ρ да бъде равномерно непрекъснат функционален модулар.

Следствие 2. *Нека $\rho \in \mathfrak{R}$ и ρ притежава Δ_2–свойството, ρ е равномерно непрекъснат функционален модулар и $A, B \subset L_\rho$ са подмножества. Ако за редиците $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B$ в сила са:*

(2i) $\lim_{n\to\infty} \rho(z_n - x_n) = 0$

(2ii) $\lim_{n\to\infty} \rho(z_n - y_n) = d_\rho$,

то $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n - y_n) = d_\rho$.

Точки на най-добро приближение за циклични ρ–свиващи изображения в модуларни функционални пространства

Обобщено е понятието за точки на най-добро приближение в метрични пространства от [22] за модуларни функционални пространства.

Определение 32. *Нека $\rho \in \mathfrak{R}$, $A, B \subset L_\rho$ са подмножества. Модуларно разстояние между множествата A и B наричаме числото* $\inf\{\rho(x, y) : x \in A, y \in B\}$ *и ще го означаваме с $d_\rho(A, B)$.*

Определение 33. *Нека $\rho \in \mathfrak{R}$, $A, B \subset L_\rho$ са подмножества и $T : A \cup B \to A \cup B$ е циклично изображение. Точката $\xi \in A$ се нарича ρ–точка на най-добро приближение на цикличното изображение T в A, ако $\rho(\xi, T\xi) = d_\rho(A, B)$.*

Определение 34. *Нека $\rho \in \mathfrak{R}$ и $A, B \subseteq L_\rho$ са подмножества. Изображението $T : A \cup B \to A \cup B$ се нарича циклично ρ–свиващо изображение, ако то е циклично и съществува константа $k \in (0, 1)$, така че да бъде вярно неравенството*

$$\rho(Tx - Ty) \leq k\rho(x - y) + (1 - k)d_\rho(A, B)$$

за всички $x \in A$, $y \in B$.

За облекчаване на записа ще означим $d_\rho(A, B)$ с d_ρ.

Точки на най-добро приближение за циклични ρ–свиващи изображения в модуларни функционални пространства

Следващата теорема е свързана само с точки на най-добро приближение, а не с двойки точки на най-добро приближение. Тъй като това е първият резултат за точки на най-добро приближение в модуларни функционални пространства и ще използваме техниката, разработена за неговото получаване, считаме че е добре да бъде включен за по-лесно четене на следващите параграфи.

Теорема 16. *Нека $\rho \in \Re$. Нека ρ е (UC1), притежава Δ_2–свойството и е равномерно непрекъснат функционален модулар. Нека $A, B \subseteq L_\rho$ са ρ–затворени и изпъкнали подмножества, $A \cup B$ е ρ–ограничено и $T : A \cup B \to A \cup B$ е циклично ρ–свиващо изображение. Тогава съществува единствена точка $x \in A$, която е ρ–точка на най-добро приближение на T в A, $T^2 x = x$ и за всяко първоначално избрано $x_0 \in A$ точката x е ρ–граница на редицата $\{T^{2n} x_0\}_{n=1}^{\infty}$.*

Приложение на ρ–точките на най-добро приближение в модуларни функционални пространства на Орлич

Теорема 17. *Нека M е функция на Орлич, която удовлетворява Δ_2–условието и е много изпъкнала. Нека $L_{\widetilde{M}}$ е модуларното функционално пространство, породено от M. Нека $\alpha, \beta, \varphi, \psi \in L_{\widetilde{M}}$. Да означим $A = \{u \in L_{\widetilde{M}} : \alpha(x) \le u(x) \le \varphi(x)\}$ и $B = \{u \in L_{\widetilde{M}} : \psi(x) \le u(x) \le \beta(x)\}$. Нека $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ и $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$. Нека изображението T е дефинирано с*

$$Tu(x) = -\operatorname{sign}(u(x)) \left(g(x) + \int_0^1 K(x,s) f(u(s)) ds \right).$$

Нека са изпълнени следните условия

- *(17.i)* $\beta(x) < 0 < \alpha(x)$ *за всяко* $x \in [0,1]$
- *(17.ii)* $\widetilde{M}(\alpha - \beta) > 0$
- *(17.iii)* *съществува $k \in (0,1)$, така че за всяко $u \in A$, $v \in B$ е в сила неравенството*

$$\widetilde{M}(Tu - Tv) \le k\widetilde{M}(u - v) + (1-k) d_{\widetilde{M}}$$

- *(17.iv)* *за всяко $u \in A$ и всяко $v \in B$ са изпълнени включванията $Tu \in B$ и $Tv \in A$.*

Тогава T е циклично $\widetilde{M}$–свиващо изображение и съществува единствено $u \in A$, така че u е $\widetilde{M}$–точка на най-добро приближение на T в A, $T^2 u = u$ и за всяко $u_0 \in A$ редицата $\{T^{2n} u_0\}_{n=1}^{\infty}$ е $\widetilde{M}$–сходяща към u.

Пример 7. *Нека $L_{\widetilde{2}}[0,1]$ е модуларно функционално пространство, което е породено от функцията на Орлич $M(t) = |t|^2$. Да разгледаме функциите $f(x) = |x|$, $K(x,s) = \dfrac{xs}{2}$ и $g(x) = \dfrac{5}{6}x$. Да означим множествата $A = \{u \in L_{\widetilde{2}}[0,1] : x \le u(x) \le nx\}$ и $B = \{v \in L_{\widetilde{2}}[0,1] : -nx \le v(x) \le -x\}$, където $n \in \mathbb{N}$. Изображението $T : A \cup B \to A \cup B$, което е определено чрез*

$$Tu(x) = -\operatorname{sign}(u(x)) \left(g(x) + \int_0^1 K(x,s) f(u(s)) ds \right)$$

е циклично $\widetilde{M}$–свиващо и $x \in A$ е $\widetilde{M}$–точка на най-добро приближение на T в A, $T(x) = -x$, $T^2(x) = T(-x) = x$.

Двойки неподвижни точки и двойки точки на най-добро приближение в модуларни функционални пространства

Определение 35. *Нека A и B са непразни подмножества на модуларното функционално пространство L_ρ, $F : A \times A \to B$. Наредената двойка $(x, y) \in A \times A$ се нарича ρ–двойка точки на най-добро приближение на F в A, ако*

$$\rho(x - F(x, y)) = \rho(y - F(y, x)) = d.$$

Определение 36. *Нека A е непразно подмножество на модуларното функционално пространство L_ρ, $F : A \times A \to A$. Наредената двойка $(x, y) \in A \times A$ се нарича двойка неподвижни точки на F, ако $x = F(x, y)$ и $y = F(y, x)$.*

Лесно се вижда, че ако $A = B$ в Определение 35, то двойката ρ–точки на най-добро приближение се изражда в двойка неподвижни точки.

Определение 37. *([48])Нека A и B са непразни подмножества на модуларното функционално пространство L_ρ. Нека $F : A \times A \to B$ и $G : B \times B \to A$. За всяка наредена двойка $(x, y) \in A \times A$ дефинираме редиците $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ чрез $x_0 = x$, $y_0 = y$ и*

$$\begin{array}{ll} x_{2n+1} = F(x_{2n}, y_{2n}), & y_{2n+1} = F(y_{2n}, x_{2n}) \\ x_{2n+2} = G(x_{2n+1}, y_{2n+1}), & y_{2n+2} = G(y_{2n+1}, x_{2n+1}) \end{array}$$

за всяко $n \geq 0$.

Навсякъде до края на тази глава, когато разглеждаме итеративните редици $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ ще приемаме, че това са редиците, дефинирани в Определение 37.

Двойки неподвижни точки за ρ–свиващи изображения в модуларни функционални пространства

Определение 38. *Нека A е непразно подмножество на модуларното функционално пространство L_ρ. Изображението $F : A \times A \to A$ се нарича ρ–свиващо изображение, ако съществуват неотрицателни числа α, β, удовлетворяващи $\alpha + \beta < 1$ и такива че е изпълнено неравенството*

$$\rho(F(x, y) - F(u, v)) \leq \alpha\rho(x - u) + \beta\rho(y - v)$$

за всички $x, y, u, v \in A$.

Теорема 18. *Нека $\rho \in \Re$ и $A \subset L_\rho$ е непразно, ρ–затворено и ρ–ограничено подмножество. Нека $F : A \times A \to A$ е ρ–свиващо изображение. Тогава F има единствена двойка неподвижни точки $(x, y) \in A$. Още повече за всяко $(x_0, y_0) \in A$ редиците $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ са ρ–сходящи към единствената двойка неподвижни точки $(x, y) \in A$, т.е. $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n - x) = 0$ и $\lim_{n\to\infty} \rho(y_n - y) = 0$.*

Двойки точки на най-добро приближение за циклични ρ–свиващи двойки изображения в модуларни функционални пространства

Определение 39. *Нека A и B са непразни подмножества в модуларното функционално пространство L_ρ, $F : A \times A \to B$ и $G : B \times B \to A$. Наредената двойка (F, G) се нарича циклична ρ–свиваща двойка изображения, ако съществуват неотрицателни α, β, така че $\alpha + \beta < 1$ и е изпълнено неравенството*

$$\rho(F(x, y) - G(u, v)) \leq \alpha\rho(x - u) + \beta\rho(y - v) + (1 - (\alpha + \beta))d_\rho(A, B)$$

за всички $(x, y) \in A \times A$ и всички $(u, v) \in B \times B$.

Теорема 19. *Нека $\rho \in \Re$ и функционалният модулар ρ е равномерно непрекъснат, удовлетворява (UC1) и притежава Δ_2–свойството. Нека $A, B \subseteq L_\rho$ са ρ–затворени, ρ–ограничени, изпъкнали подмножества и $F : A \times A \to B$ и $G : B \times B \to A$ е циклична ρ–свиваща двойка (F, G). Тогава съществува единствена наредена двойка $(x, y) \in A \times A$, така че (x, y) е двойка ρ–точки на най-добро приближение на F в A (т.е. $\rho(x - F(x, y)) + \rho(y - F(y, x)) = 2d_\rho(A, B)$). Изпълнени са равенствата $x = G(F(x, y), F(y, x))$, $y = G(F(y, x), F(x, y))$, наредената двойка $(F(y, x), F(x, y))$ е двойка ρ–точки на най-добро приближение на G в B. Още повече, за всяко първоначално избрано $(x_0, y_0) \in A \times A$ итеративните редици $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ удовлетворява $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_{2n} - x) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(y_{2n} - y) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_{2n+1} - F(x, y)) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(y_{2n+1} - F(y, x)) = 0$.*

Приложение на двойки точки на най-добро приближение в модуларни функционални пространства

Нека $p \in [1, +\infty)$, $a > 0$, $\alpha, \beta \in (0, 1)$ удовлетворяват $\alpha + \beta < 1$ и $(1 - \alpha - \beta)a = \gamma$. Да разгледаме системата от уравнения

$$\left| \begin{array}{l} |(1+\alpha)x + \beta y + \gamma|^p = (2a)^p \\ |\alpha x + (1+\beta)y + \gamma|^p = (2a)^p \\ x \geq 0,\ y \geq 0. \end{array} \right. \tag{9}$$

Лесно се проверява, например с помощта на някоя компютърна алгебрична система, че наредената двойка (a, a) е решение на (9), ако $p \in \mathbb{N}$. Ако се опитаме да решим системата за $p \notin \mathbb{N}$, то компютърът няма да върне отговор.

Да разгледаме пространството $\mathbb{R}_{|.|^p}$ от всички реални числа, снабдено с функционалния модулар $\rho_p(\cdot) = |\cdot|^p$. За $p = 1$ получаваме $\mathbb{R}_{|.|^1}$, което е нормирано пространство и от [28] следва, че е равномерно изпъкнало. Следователно, ако го разгледаме като модуларно функционално пространство ще получим, че ρ_1 удовлетворява (UC1), притежава Δ_2–свойството и е с равномерно непрекъснат функционален модулар и можем да приложим Теорема 19 и в $\mathbb{R}_p$.

Нека разгледаме подмножествата $A = [a, b]$, $B = [-b, -a]$ за $0 < a < b$ на $\mathbb{R}_p$. Да дефинираме функциите $F(x, y) = -\alpha x - \beta y - \gamma$ и $G(x, y) = -\alpha x - \beta y + \gamma$. Наредената двойка (F, G) е циклична ρ–свиваща двойка и съгласно Теорема 19 съществува единствена наредена двойка $(x, y) \in A \times A$, която е двойка ρ–точки на най-добро приближение на F в A (т.е. $\rho_p(x - F(x, y)) = (2a)^p$ и $\rho_p(y - F(y, x)) = (2a)^p$, които равенства са точно (9)). Решението може да бъде приближено с редицата от последователни итерации $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, дефинирани в Определение 37, започвайки с произволно начално приближение x_0 и y_0.

Ако положим $\alpha = \beta = \frac{1}{4}$, $\gamma = \frac{1}{2}$, $a = 1$, $b = 2$ и $p = 1$, то получаваме Пример 3.

Двойки неподвижни точки за ρ–Канан свиващи изображения в модуларни функционални пространства

Определение 40. *Нека A е непразно подмножество на модуларното функционално пространство L_ρ. Изображението $F : A \times A \to A$ се нарича ρ–Канан свиващо, ако съществува неотрицателно число α, така че $\alpha < 1/2$ и е в сила неравенството*

$$\rho(F(x, y) - F(u, v)) \leq \alpha\left(\rho(x - F(x, y)) + \rho(u - F(u, v))\right)$$

за произволни $x, y, u, v \in A$.

Теорема 20. *Нека $\rho \in \Re$ и $A \subset L_\rho$ е непразно, ρ–затворено и ρ–ограничено. Нека $F : A \times A \to A$ е ρ-Канан свиващо изображение. Тогава F има единствена двойка неподвижни* *точки $(x, y) \in A$. Още повече за всяко произволно избрано $(x_0, y_0) \in A$ редиците $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, дефинирани чрез $x_1 = F(x_0, y_0)$, $y_1 = F(y_0, x_0)$, $x_{n+1} = F(x_n, y_n)$, $y_{n+1} = F(y_n, x_n)$, $n = 1, 2, \dots$, е ρ–сходяща към единствената двойка неподвижни точки $(x, y) \in A$, т.е.*

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n - x) = 0 \quad и \quad \lim_{n\to\infty} \rho(y_n - y) = 0.$$

Двойки ρ–точки на най-добро приближение за циклични двойки ρ–Канан свиващи изображения в модуларни функционални пространства

Определение 41. *Нека A и B са непразни подмножества на модуларното функционално пространство L_ρ. Двойката изображения $F : A \times A \to B$ и $G : B \times B \to A$ се нарича циклична двойка ρ–Канан свиващо изображение, ако съществува неотрицателно число α, така че $\alpha < 1/2$ и е в сила неравенството*

$$\rho(F(x, y) - G(u, v)) \leq \alpha \left(\rho(x - F(x, y)) + \rho(u - G(u, v))\right) + (1 - 2\alpha) d_\rho(A, B)$$

за произволни $x, y \in A$ и $u, v \in B$.

Теорема 21. *Нека $\rho \in \Re$, ρ е равномерно непрекъснат функционален модулар, удовлетворява (UC1) и притежава Δ_2–свойството. Нека $A, B \subset L_\rho$ са непразни, ρ–затворени, ρ–ограничени, изпъкнали подмножества и $F : A \times A \to B$ и $G : B \times B \to A$ е циклична двойка ρ–Канан свиващо изображение (F, G). Тогава съществува единствена наредена двойка $(x, y) \in A \times A$, така че (x, y) е двойка ρ–точки на най-добро приближение на F в A, т.е. $\rho(x - F(x, y)) + \rho(y - F(y, x)) = 2d_\rho(A, B)$. В сила са равенствата $x = G(F(x, y), F(y, x))$, $y = G(F(y, x), F(x, y))$ и наредената двойка $(F(y, x), F(x, y))$ е двойка ρ–точки на най-добро приближение на G в B. Още повече за всяко произволно избрано $(x_0, y_0) \in A \times A$ редиците от итерации $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяват равенствата $\lim_{n\to\infty} \rho(x_{2n} - x) = 0$, $\lim_{n\to\infty} \rho(y_{2n} - y) = 0$, $\lim_{n\to\infty} \rho(x_{2n+1} - F(x, y)) = 0$, $\lim_{n\to\infty} \rho(y_{2n+1} - F(y, x)) = 0$.*

Глава IV
ПРИЛОЖЕНИЕ НА ДВОЙКИ НЕПОДВИЖНИ ТОЧКИ И ДВОЙКИ ТОЧКИ НА НАЙ-ДОБРО ПРИБЛИЖЕНИЕ НА ПОЛУЦИКЛИЧНИ ИЗОБРАЖЕНИЯ В ИЗСЛЕДВАНЕТО НА ПАЗАРНО РАВНОВЕСИЕ В ДУОПОЛНИ ПАЗАРИ

Може да се окаже трудно или дори невъзможно решаването на системата (1) поради което понякога се търсят приближени решения. Недостатък при търсенето на приближени решения може да се окаже липсата на устойчивост.

Можем да представим решенията на системата (1) с неявна формула, описваща функциите на реакция, т.е.

$$x = \frac{c_1'(x) - P(x + y)}{P'(x + y)} = F(x, y) \quad \text{и} \quad y = \frac{c_2'(y) - P(x + y)}{P'(x + y)} = f(x, y).$$

По този начин намирането на равновесното производство (x, y) е възможно да се разглежда като задачата за намиране на двойка неподвижни точки. Следвайки [24], ще наричаме функциите F и f функции на реакцията за двамата производители, участващи в дуополния пазар.

В реалните модели е възможно да се конструират функции на реакцията, които не са следствие от задачата за максимизиране на печалбите на участниците Π_i, $i = 1, 2$. В действителността всеки участник реагира (т.е. има функция на реакцията) съобразно продукцията, която е реализирал в предходния интервал и количеството стока, която е реализирал конкурента му, отчитайки и функцията на търсене на дадената стока от потребителите. Нека например в момента n количествата произведени стоки от двамата участника са наредената двойка (x_n, y_n). Нека производител едно да промени производството си за момента $n+1$ на $x_{n+1} = F(x_n, y_n)$, а производител две да промени производството си на $y_{n+1} = f(x_n, y_n)$. По този начин се генерира итеративна редица от производства $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$. Ще имаме равновесие на пазара, ако съществуват две възможни количества от произведена продукция x и y, така че $x = F(x, y)$ и $y = f(x, y)$.

Задачата за решаване на уравненията $x = F(x, y)$ и $y = f(x, y)$ е задачата за намиране на двойки неподвижни точки за наредената двойка от изображения (F, f) [11] (или по-точно на задачата за модифицираните двойки неподвижни точки). Като използваме модела чрез функции на реакцията, ние променяме задачата за максимизиране на печалбата в задача за двойки неподвижни точки и по този начин можем да се освободим от условията за изпъкналост и диференцируемост [1, 25, 36].

Фокусирайки се върху функциите на реакция се оказва възможно да съберем в едно моделите на Корно и Бертранд. Наистина, нека първата фирма има функция на реакцията $F(X, Y)$, а втората има функция на реакцията $f(X, Y)$, където $X = (x, p)$ и $Y = (y, q)$: (x, y) са количествата продукция на двете фирми, а (p, q) са цените на които се продава стоката. В този случай производителите могат да се конкурират едновременно по цени и количества.

Полуциклични изображения

За да приложим техниката на двойките неподвижни точки или двойките точки на най-добро приближение, ще обобщим понятията от предходните глави. Когато изследваме дуополни пазари с функции на реакцията на двамата участника съответно F и f видяхме, че всеки производител използва едновременно информацията както за собственото производство, така и за производството на конкурента си, т.е. $F : A \times B \to A$, $f : A \times B \to B$ и се вижда че функциите не са цикличните функции от предходните глави ($F : A \times A \to B$ и $G : B \times B \to A$, Определение 8), не са също така нециклични функции ($F(A) \subseteq A$ и $f(B) \subseteq B$ [23]). Ето защо ще въведем понятието полуциклични изображения.

Определение 42. *Нека A, B са непразни подмножества на X. Наредената двойка от изображения $F : A \times B \to A$, $f : A \times B \to B$ наричаме полуциклично наредена двойка от изображения.*

Определение 43. *Нека A, B са непразни подмножество на X и наредената двойка (F, f), $F : A \times B \to A$, $f : A \times B \to B$ е полуциклично наредена двойка от изображения. За всяка двойка $(x, y) \in A \times B$ дефинираме редиците $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ чрез $x_0 = x$, $y_0 = y$ и $x_{n+1} = F(x_n, y_n)$, $y_{n+1} = f(x_n, y_n)$ за всяко $n \geq 0$.*

Двойки неподвижни точки за полуциклични изображения

Ще обобщим понятието двойки неподвижни точки за полуциклични изображения.

Определение 44. *Нека A, B са непразни подмножества на X и $F : A \times B \to A$, $f : A \times B \to B$ е полуциклично наредена двойка от изображения. Наредената двойки $(\xi, \eta) \in A \times B$ се нарича двойка неподвижни точки за (F, f), ако $\xi = F(\xi, \eta)$ и $\eta = f(\xi, \eta)$.*

Ако $B = A$ и $f(x, y) = F(y, x)$ то получаваме определението за двойка неподвижни точки от [11].

Ще обобщим свиващото условие от [22] за полуциклични изображения.

Определение 45. *Нека A, B са две непразни подмножества на метричното пространство (X,ρ) и (F,f), $F : A\times B \to A$, $f : A\times B \to B$ е полуциклично наредена двойка от изображения. Нека да съществува подмножество $D \subseteq A\times B$, така че $F : D \to A$, $f : D \to B$ и $(F(x,y), f(x,y)) \subseteq D$ за всяко $(x,y)\in D$. Полуциклично наредената двойка (F,f) се нарича свиваща от тип едно, ако съществуват неотрицателни константи $\alpha,\beta,\gamma,\delta$, удовлетворяващи $\max\{\alpha+\gamma,\beta+\delta\}<1$ и е вярно неравенството*

$$\rho(F(x,y),F(u,v)) + \rho(f(z,w), f(t,s) \leq \alpha\rho(x,u) + \beta\rho(y,v) + \gamma\rho(z,t) + \delta\rho(w,s) \tag{10}$$

за всички $(x,y),(u,v),(z,w),(t,s)\in D$.

Теорема 22. *Нека A, B са непразни подмножества на метричното пространство (X,ρ). Нека съществува затворено подмножество $D \subseteq A\times B$ и изображенията $F : D \to A$ и $f : D \to B$ удовлетворяват $(F(x,y), f(x,y)) \subseteq D$ за всяко $(x,y)\in D$. Нека (F,f) е свиваща полуциклично наредена двойка изображения от тип едно. Тогава съществува единствена наредена двойка $(\xi,\eta)\in D$, която е двойка неподвижни точки за (F,f). Още повече редиците от итерации $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, дефинирани в Определение 43 са сходящи съответно към ξ и η. За всяка произволно избрана наредена двойка $(x,y)\in A\times B$ в сила са следните оценки на грешката*

(22.i) *„а приори“ оценка на грешката*

$$\max\{\rho(x_n,\xi),\rho(y_n,\eta)\} \leq \frac{k^n}{1-k}(\rho(x_1,x_0)+\rho(y_1,y_0))$$

(22.ii) *„а постериори“ оценка на грешката*

$$\max\{\rho(x_n,\xi),\rho(y_n,\eta)\} \leq \frac{k}{1-k}(\rho(x_{n-1},x_n)+\rho(y_{n-1},y_n))$$

(22.iii) *скоростта на сходимост на редицата от последователни приближения*

$$\rho(x_n,\xi)+\rho(y_n,\eta) \leq k\left(\rho(x_{n-1},\xi)+(y_{n-1},\eta)\right),$$

където $k=\max\{\alpha+\gamma,\beta+\delta\}$.

Ако в допълнение $f(x,y)=F(y,x)$, то двойката неподвижни точки (x,y) удовлетворява $x=y$.

Приложения на Теорема 22 и примери

Навсякъде ще приемаме, че конкурентните фирми на пазара произвеждат стоки, които, ако не еднакви са взаимно заменяеми. Въпреки че е възможно двете стоки да нямат нищо общо, предположението за взаимна заменяемост означава, че в рамките на всеки тип от стоки клиентите могат свободно да заменят продукт от първата фирма с такъв, произведен от втората и обратно.

Ще формулираме Теорема 22 в езика на икономиката.

Предположение 1. *Нека имаме дуополен пазар, който удовлетворява следните условия:*

1. *двете участващи фирми произвеждат хомогенни стоки, които са напълно взаимно заменяеми*

2. *първата фирма има възможност да произвежда количества от множеството A, а втората има възможност да произвежда количества от множеството B, където A и B са затворени и непразни подмножества на пълното метрично пространство (X, ρ)*

3. *Нека съществува затворено подмножество $D \subseteq A \times B$ и изображения $F : D \to A$ и $f : D \to B$, така че $(F(x, y), f(x, y)) \subseteq D$ за всички $(x, y) \in D$, са функциите на реакция съответно на двете фирми*

4. *Нека (F, f) удовлетворява условията на Теорема 22.*

Тогава съществува единствена наредена двойка $(\xi, \eta) \in D$, така че $\xi = F(\xi, \eta)$ и $\eta = f(\xi, \eta)$, т.е. $\xi, \eta)$ е двойка на пазарно равновесие. Още повече редиците от итерации $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, дефинирани в Определение 43 са сходящи съответно към ξ и η. В сила са оценките на грешката от Теорема 22.

Ако в допълнение $f(x, y) = F(y, x)$, то наредената двойка неподвижни точки (x, y) удовлетворява $x = y$.

Забележка 1. *Нека двамата производителя имат едни и същи функции на реакция. Това означава, че ако фирма едно има производство x, а фирма две има производство y, то фирма едно ще реагира с функцията $F(x, y)$, а фирма две ще реагира с функцията $f(x, y) = F(y, x)$. В този случай пазарното равновесие (x, y) ще удовлетворява $x = y$, т.е. двете фирми ще имат еднакви производства. Този извод показва, че когато двамата участника в едни дуополен пазар имат еднакви технологични възможности, еднакви познания за пазара и еднаква политика, то равновесието ще се достигне при еднакви нива на производство.*

Забележка 2. *Нека разгледаме дуополен пазар и фирма едно произвежда количества от множеството A, а фирма две произвежда количества от множеството B, където A и B са непразни подмножества на пълното метрично пространство $X = (\mathbb{R}^n, \rho)$. В този случай всяка от фирмите може да произвежда цяла кошница от продукти $x = (x_1, x_2, \dots x_n) \in X$, където x_i е количеството от стока i. Предположение 1 гарантира съществуването и единствеността на количества $(x_1, x_2, \dots x_n), (y_1, y_2, \dots y_n) \in A \times B$ от n-продукта, които представляват пазарно равновесие в дуополен пазар.*

Линеен случай, когато всеки играч произвежда по една взаимно заменяема стока

Пример 8. *Нека разгледаме пазар с две конкуриращи се фирми, всяка една произвеждаща по единствена стока и стоките им са взаимно заменяеми. Нека двете фирми произвеждат съответно количества $x \in A$ и $y \in B$, където $A, B \subset [0, +\infty)$ и (X, ρ) е пълното метрично пространство $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Нека функциите на реакция на двете фирми са съответно $F(x, y) = a - s - px - qy$ и $f(x, y) = a - r - \mu y - \nu x$, където*

1. *$a, s, r, p, q, \mu, \nu > 0$, $s < a$, $r < a$, $\max\{p + \mu, q + \nu\} < 1$*

2. *$A = \left[0, \frac{a-s}{p}\right] \cap \left[0, \frac{a-r}{\mu}\right]$ и $B = \left[0, \frac{a-s}{q}\right] \cap \left[0, \frac{a-r}{\nu}\right]$*

3. *D може да се дефинира по три начина:*

(3a) ако

$$a - s \le \frac{a\mu - aq - s\mu - qr}{\mu p - \nu q} \quad \text{и} \quad a - r \le \frac{ap - a\nu + s\nu - pr}{\mu p - \nu q},$$

то $D = \left[0, \frac{a\mu - aq - s\mu - qr}{\mu p - \nu q}\right] \times \left[0, \frac{ap - a\nu + s\nu - pr}{\mu p - \nu q}\right]$

(3b) ако $\mu r + \nu s - a\mu - a\nu + a - r > 0$ *и* $ps + qr - ap - aq + a - s > 0$, *то* $D = [0, a - s] \times [0, a - r]$

(3c) $D = \begin{cases} 0 \le x \le \dfrac{a-s}{p} \\ 0 \le y \le \dfrac{a - r - \mu x}{\nu}. \end{cases}$

Пример 9. *Да разгледаме класически пример, където цената на стоката и производствените разходи са линейни функции. Приемаме, че пазарната цена се задава с функцията* $P(x, y) = 120 - x - y$, *т.е. всяко допълнително произведено количество стока* x *от фирма едно и всяко допълнително количество стока* y *от фирма две ще води до намаляване на цената на стоката на пазара. Ето защо при равновесни условия количеството* $x + y$ *ще бъде общото количество на двамата участника от стоката и това общо количество ще влияе на продажната цена. Нека двете фирми имат функции на разходите за единица произведена продукция съответно* $30x$ *и* $20y$.

Следвайки модела на Корно, решаваме системата от уравнения (1) и достигаме до функциите на реакция $F : D \to A$ и $f : D \to B$ на двете фирми $F(y) = \frac{90-y}{2}$ и $f(x) = \frac{100-x}{2}$, където $B = [0, 90]$, $A = [0, 100]$ и $D = A \times B$. Така получихме частен случай на Пример 8 за $a = 60$, $s = 15$, $r = 10$, $p = 0$, $q = \frac{1}{2}$, $\mu = \frac{1}{2}$, $\nu = 0$.

Таблица 8. Стойности на редицата от итерации (x_n, y_n), при начално състояние $(40, 60)$.

n	0	1	2	5	10	20
x_n	40	15	30.0	25.94	26.68	26.67
y_n	60	30	42.5	36.25	36.69	36.67

Таблица 9. Стойности на редицата от итерации (x_n, y_n), при начално състояние $(100, 20)$

n	0	1	2	5	10	20
x_n	100	35	45.0	27.19	26.74	26.67
y_n	20	0	32.5	34.38	36.65	36.67

Таблица 10. Брой n на итерациите, необходими при използване на „а приори“ оценка на грешката, ако пазарът стартира от $(100, 20)$

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
n	11	15	18	21	25

Таблица 11. Брой n на итерациите, необходими при използване на „а постериори“ оценка на грешката, ако пазарът стартира от $(100, 20)$

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
n	6	8	11	14	17

Нелинеен случай, когато всяка фирма произвежда по една стока

Пример 10. *Нека пазарът се състои от две фирми, които произвеждат по една стока, така че да са взаимно заменяеми, в количества съответно $x \in A$ и $y \in B$. Нека $A, B \subset [0, +\infty)$ и прилежащото метрично пространство (X, ρ) е пълното метрично пространство $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Нека всяка от фирмите произвежда поне по една бройка от стоката, т.е. $x, y \geq 1$. Нека функциите на реакция на двамата участника са съответно $F(x,y) = \frac{90 - x - \frac{y}{8} - \frac{\sqrt{y}}{2}}{2}$ и $f(x,y) = \frac{100 - \frac{x}{4} - y - \sqrt{x}}{3}$, където*

(3a) $A = [1, 44]$ *и* $B = [1, 33]$

(3b) $D = A \times B$.

Съществува равновесно производство (x, y) в дуополния пазар и за всяко начално състояние на пазара редицата от итерации (x_n, y_n) е сходяща към пазарното равновесие (x, y). Намираме, че в разглеждания пример равновесното ниво на производства на двете фирми е $(28.3, 21.9)$ и общото производство на пазара е 50.2.

Всеки участник произвежда по две стоки и всяка една от стоките е взаимно заменяема със съответната стока на конкурента

Пример 11. *Нека разгледаме пазар с двама участника и нека всяка от фирмите произвежда по две стоки. Нека всяка една от стоките е взаимно заменяема със съответната стока на конкурента. Нека предположим, че всеки участник произвежда поне по една бройка от всяка една от стоките, т.е. $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 1$. Да означим произведените количества на двете фирми съответно с $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$.*

Нека пространството от всевъзможните производства е снабдено с нормата $\|\cdot\|_p$, $p \in [1, \infty)$, т.е.

$$\rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \|(x_1, x_2) - (y_1, y_2)\|_p = (|x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p)^{1/p}.$$

Да разгледаме функциите на реакция

$$F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y)) \quad \text{и} \quad f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y)),$$

дефинирани чрез

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{90 - \dfrac{x_1 + x_2}{2} - \dfrac{y_1 + y_2}{3}}{3}, \\ \dfrac{90 - \dfrac{x_1 + x_2}{2} - \dfrac{y_1 + y_2}{3}}{3}; \end{cases} \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{100 - \dfrac{x_1 + x_2}{4} - \dfrac{y_1 + y_2}{3}}{4} \\ \dfrac{100 - \dfrac{x_1 + x_2}{4} - \dfrac{y_1 + y_2}{3}}{4}. \end{cases}$$

Нека

(1) $A = [0, 30] \times [0, 30]$ *и* $B = [0, 25] \times [0, 25]$

(2) $D = [0, 30] \times [0, 30] \times [0, 25] \times [0, 25]$.

Съществува равновесно производство (x, y) в пазара и за всяко начално състояние на пазара редицата от итерации (x_n, y_n) е сходяща към точката на пазарно равновесие (x, y). Получаваме в този случай, че равновесните количества на производство за двете фирми са съответно $x = (19.27, 19.27)$ и $y = (19.36, 19.36)$ и общото производство е $a = (38.63, 38.63)$.

Фирмите произвеждат по една стока и се конкурират едновременно за количества и цена

Съществува множество от стоки, при които производителите имат възможност да се конкурират едновременно за количества и за цена. Равновесието в този модел ще се основава върху балансирано решение какъв пазарен дял да бъде търсен на съответната разумна цена. Това решение се вгражда във функциите на реакция за всяка от фирмите. Нека разгледаме пазар с два големи участника – толкова големи участника, че всички други се съобразяват с тяхната политика. Такива пазари могат да се разглеждат също като дуополни пазари. Нека двамата големи участника произвеждат една взаимно заменяема стока. Първата фирма произвежда количества от множеството $A \subseteq [0, \infty)$ на цена $p \in P \subseteq [0, \infty)$, а втората фирма произвежда количества от множеството $B \subseteq [0, \infty)$ на цена $p \in Q \subseteq [0, \infty)$, където A, B, P, Q са непразни множества. Нека $A \times P$, $B \times Q$ са подмножества на пълното метрично пространство $(\mathbb{R}^2, \rho)$.

Предположение 2. *Нека разгледаме дуополен пазар, който удовлетворява предположенията:*

1. *двете фирми произвеждат взаимно заменяема стока*
2. *първата фирма произвежда количества от множеството A на цена $p \in P$, а втората фирма произвежда количества от множеството B на цена $q \in Q$, където $A \times P$, $B \times Q$ са непразни, затворени подмножества на пълното метрично пространство $(\mathbb{R}^2, \rho)$*
3. *съществува затворено подмножество $D \subseteq A \times P \times B \times Q$, така че $F : D \to A \times P$, $f : D \to B \times Q$ и $(F(x,p,y,q), f(x,p,y,q)) \subseteq D$ за всяко $(x,p,y,q) \in D$, където F и f са функциите на реакция за двете фирми*
4. *съществуват $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$, удовлетворяващи $\max\{\alpha + \gamma, \beta + \delta\} < 1$, така че неравенството*

$$\rho(F(X,Y), F(U,V)) + \rho(f(Z,W), f(T,S)) \leq \alpha\rho(X,U) + \beta\rho(Y,V) + \gamma\rho(Z,T) + \delta\rho(W,S),$$

където сме означили $X = (x,p_1)$, $Y = (y,q_1)$, $U = (u,p_2)$, $V = (v,q2)$, $Z = (z,p_3)$, $W = (w,q_3)$, $T = (t,p_4)$, $S = (s,q_4)$, е изпълнено за всяко

$$(x,p_1,y,q_1), (u,p_2,v,q_2), (z,p_3,w,q_3), (t,p_4,s,q_4) \in D.$$

Тогава съществува единствен елемент (ξ, p, η, q) в $A \times P \times B \times Q$, който е двойка неподвижни точки за полуцикличната двойка изображения (F, f), т.е. пазарно равновесие на количества и цени. Редицата от итерации $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$, дефинирани в Определение 43 са сходящи съответно към ξ, p, η и q и в сила са оценките на грешката от Теорема 22.

Ако в допълнение $f(X,Y) = F(Y,X)$, то двойката неподвижни точки (X,Y) удовлетворява $X = Y$, т.е. $x = y$ и $p = q$.

Разгледаният модел за едновременна конкуренция по цени и по количества можем да наречем модел на Корно–Бертранд.

Пример на дуополия, където участниците се съревновават едновременно за количества и цени

Пример 12. *Нека разгледаме дуополен пазар, където всеки от участниците произвежда по една стока в количества x и y и я продават на цена съответно p и q, т.е. $X = (x,p), Y = (y,q)$. Нека функциите на реакция са съответно*

$$F(X,Y) = (F_1(X,Y), F_2(X,Y)) \quad \text{и} \quad f(X,Y) = (f_1(X,Y), f_2(X,Y)),$$

дефинирани чрез

$$F(X,Y)=\begin{cases}\dfrac{90-\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}}{3}, \\ \dfrac{4-\dfrac{p}{2}-\dfrac{q}{3}}{3}; \end{cases} \quad f(X,Y)=\begin{cases}\dfrac{100-\dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{3}}{4} \\ \dfrac{5-\dfrac{p}{4}-\dfrac{q}{3}}{4}. \end{cases}$$

Нека $X=(x,p)$ *и* $Y=(y,q)$ *са подмножества на* $(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_2)$ *и*

1. $A\times P=[0,100]\times[0,5]$, $B\times Q=[0,100]\times[0,4]$
2. $D=[0,100]\times[0,5]\times[0,100]\times[0,4]$.

Съществува равновесно състояние (X,Y) в пазара и за всяко начално състояние на пазара итеративната редица (X_n,Y_n) е сходяща към равновесното състояние (X,Y). В този пример се получава, че равновесието се достига при $X=(23.64,1.03)$ и $Y=(21.71,1.09)$.

Двойки неподвижни точки за полуциклични изображения от вида на Харди–Роджърс

Ще обобщим понятията от [17], разглеждайки две различни метрични пространства (Z_i,ρ_i), $i=1,2$.

Определение 46. *Нека* X_1, X_2 *са непразни подмножества съответно на метричните пространства* (Z_1,ρ_1) *и* (Z_2,ρ_2), $F_i:X_1\times X_2\to X_i$ *за* $i=1,2$ *са двойка полуциклични изображения. За всяко* $(x,y)\in X_1\times X_2$ *дефинираме редиците* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *и* $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ *чрез* $x_0=x$, $y_0=y$ *и* $x_{n+1}=F_1(x_n,y_n)$, $y_{n+1}=F_2(x_n,y_n)$ *за всяко* $n\geq 0$.

Определение 47. *Нека* X_1, X_2 *са непразни подмножества съответно на метричните пространства* (Z_1,ρ_1) *и* (Z_1,ρ_2), $F_i:X_1\times X_2\to X_i$ *за* $i=1,2$. *Наредената двойка* $(\xi,\eta)\in X_1\times X_2$ *наричаме двойка неподвижни точки на* (F_1,F_2), *ако* $\xi=F_1(\xi,\eta)$ *и* $\eta=F_2(\xi,\eta)$.

За да успеем да впишем някои от формулите в текстовото поле ще използваме означенията

$$M=M_{F_1,F_2}(x,y,u,v)=\rho_1(x,F_1(x,y))+\rho_2(y,F_2(x,y))+\rho_1(u,F_1(u,v))+\rho_2(v,F_2(u,v))$$

и

$$N=N_{F_1,F_2}(x,y,u,v)=\rho_1(x,F_1(u,v))+\rho_2(y,F_2(u,v))+\rho_1(u,F_1(x,y))+\rho_2(v,F_2(x,y)).$$

Теорема 23. *Нека* (X_1,ρ_1) *и* (X_2,ρ_2) *са две пълни метрични пространства. Нека за изображенията* $F_i:X_1\times X_2\to X_i$, *за* $i=1,2$ *съществуват константи* k_i *и* $i=1,2,3$, *удовлетворяващи* $k_1+2k_2+2k_3<1$ *и такива, че неравенството*

$$\sum_{i=1}^{2}\rho_i(F_i(x,y),F_i(u,v))\leq k_1(\rho_1(x,u)+\rho_2(y,v))+k_2M_{F_1,F_2}(X)+k_3N_{F_1,F_2}(X) \tag{11}$$

е изпълнено за всяко $(x,y),(u,v)\in X_1\times X_2$, *където сме означили* $X=(x,y,u,v)$. *Тогава*

(23.i) съществува единствена двойка неподвижни точки $(\xi,\eta)\in X_1\times X_2$ *на* (F_1,F_2) *и още повече за всяка точка* $(x_0,y_0)\in x$ *редиците от итерации* $x_n=F_1(x_{n-1},y_{n-1})$ *и* $y_n=F_2(x_{n-1},y_{n-1})$ *са сходящи към двойката неподвижни точки* (ξ,η)

(23.ii) в сила е „а приори“ оценка на грешката

$$\rho_1(\xi, x_n) + \rho_2(\eta, y_n) \leq \frac{k^n}{1-k}(\rho_1(x_0, x_1) + \rho_2(y_0, y_1))$$

(23.iii) в сила е „а постериори“ оценка на грешката

$$\rho_1(\xi, x_n) + \rho_2(\eta, y_n) \leq \frac{k}{1-k}(\rho_1(x_n, x_{n-1}) + \rho_2(y_n, y_{n-1}))$$

(23.iv) скоростта на сходимост е

$$\rho_1(\xi, x_n) + \rho_2(\eta, y_n) \leq k(\rho_1(\xi, x_{n-1}) + \rho_2(\eta, y_{n-1})),$$

където $k = \frac{k_1+k_2+k_3}{1-k_2-k_3}$.

Ако в допълнение $X_1, X_2 \subseteq X$*, където* (X, ρ) *е пълно метрично пространство и* $F_2(x, y) = F_1(y, x)$*, то двойката неподвижни точки* (ξ, η) *удовлетворява* $\xi = \eta$.

Забележка 3. *Ако в Теорема 23 положим* $k_1 = k_3 = 0$*, то получаваме обобщение за изображения от тип на Канан за полуциклични изображения. Ако в Теорема 23 положим* $k_1 = k_2 = 0$*, то получаваме обобщение за изображения от тип на Чатерджеа за полуциклични изображения.*

Връзка между условията от втори ред и свиващите условия за полуциклични изображения

Нека двамата участника имат рационално поведение, т.е. искат да максимизират печалбите си. Приемайки, че функциите P и c_i, $i = 1, 2$ са диференируеми, достигаме до системата от уравнения (1).

Равновесното производство (x_0, y_0) е решение на системата (1) [24, 49]. Разбира се това е само необходимо условие. Достатъчни условия решението (x_0, y_0) на (1) да бъде равновесно производство, т.е. да максимизира функциите на печалба са функциите Π_i да бъдат вдлъбнати или да се удовлетворяват условията от втори ред (2) [24, 49].

Чрез използването на функции на реакцията, променяме оптимизационната задача в задача за намиране на двойки неподвижни точки. Следователно всички условия за вдлъбнатост и диференцируемост могат да бъдат пропуснати.

Да разгледаме Теорема 23, където X_1, X_2 са непразни и затворени подмножества на пълното метрично пространство (X, ρ), вместо подмножества на две различни пространства, с константи $\beta = \gamma = 0$. Ако положим $u = x$ и $v = y$ в Теорема 22, получаваме

$$\begin{aligned}\rho(F_1(x,y), F_1(u,v)) + \rho(F_2(x,y), F_2(u,v) &\leq \alpha\rho(x,u) + \beta\rho(y,v) + \gamma\rho(x,u) + \delta\rho(y,v) \\ &\leq s(\rho(x,u) + \rho(y,v)),\end{aligned} \tag{12}$$

където $s = \max\{\alpha + \gamma, \beta + \delta\} < 1$.

Следователно Теорема 22 е следствие от Теорема 23.

Теорема 23 може да се формулира на икономически език за $k_2 = k_3 = 0$.

Предположение 3. *Нека разглеждаме дуополен пазар, който удовлетворява условията:*

1. *двете фирми произвеждат стоки, които са взаимно заменяеми*

2. *първата фирма произвежда количества от множеството X_1, а втората произвежда количества от множеството X_2, където X_1 и X_2 са затворени и непразни подмножества на пълното метрично пространство (X, ρ)*

3. *съществува затворено подмножество $D \subseteq X_1 \times X_2$ и изображения $F_i : D \to X_i$, така че $(F_1(x, y), F_2(x, y)) \subseteq D$ за всяко $(x, y) \in D$, които са съответните функции на реакция за двете фирми*

4. *съществува $\alpha < 1$, така че неравенството*

$$\rho(F_1(x, y), F_1(u, v)) + \rho(F_2(x, y), F_2(u, v)) \leq \alpha(\rho(x, u) + \rho(y, v)) \tag{13}$$

е изпълнено за всяко $(x, y), (u, v) \in X_1 \times X_2$.

Тогава съществува единствена наредена двойка $(\xi, \eta) \in D$, така че $\xi = F_1(\xi, \eta)$ и $\eta = F_2(\xi, \eta)$, т.е. двойка на пазарно равновесие.

Ако в допълнение $F_2(x, y) = F_1(y, x)$, то двойката на пазарно равновесие (ξ, η) удовлетворява $\xi = \eta$.

Освен даването на достатъчни условия за съществуване на пазарно равновесие, Предположение 2 и Предположение 3 предоставят и достатъчни условия за стабилност на редиците от последователни реакции във времето на двамата участника. Разбира се приемаме, че с течение на времето фирмите не си променят функциите на реакция.

Доказано е, че от (13) следва (2), т.е. ако функциите на реакция удовлетворяват (13), получени след диференциране на функциите на печалба, то те имат съответните частни производни и се удовлетворява условието от втори ред за двойката неподвижни точки.

Пример 13. *Да разгледаме модел да дуополен пазар с функция на цената $P(x, y) = 100 - x - y$ и функции на разходите $C_1(x) = \frac{x^2}{2}$ и $C_2(y) = \frac{y^2}{2}$.*

Съгласно (11) получаваме

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial \Pi_1(x,y)}{\partial x} = 100 - 3x - y = 0 \\ \frac{\partial \Pi_2(x,y)}{\partial y} = 100 - x - 3y = 0. \end{array} \right. \tag{14}$$

Условията от втори ред са $\frac{\partial^2 \Pi_1(x,y)}{\partial x^2} = -3 < 0$ и $\frac{\partial^2 \Pi_2(x,y)}{\partial y^2} = -3 < 0$. Следователно решението на системата от уравнения (14) е пазарно равновесие, защото то удовлетворява (2). За съжаление функциите на реакция в разгледания модел са $F(x, y) = 100 - 2x - y$ и $f(x, y) = 100 - x - 2y$, които не удовлетворяват Предположение 2.

Таблица 12. Стойности на редицата от итерации (x_n, y_n) при начално състояние на пазара $(20, 30)$

n	0	1	2	...	2k	2k+1
x_n	20	30	20	...	20	30
y_n	30	20	30	...	30	20

Таблица 13. Стойности на редицата от итерации (x_n, y_n) при начално състояние на пазара $(20, 31)$

n	0	1	2	3	4	5	6
x_n	20	29	24	17	60	0	100
y_n	31	18	35	6	71	0	100

От Таблица 12 и Таблица 13 виждаме, че процесът на итерации не е сходящ.

Нека отбележим, че системата (11) е възможно да има повече от едно решение (x, y), удовлетворяващо условията от втори ред (2). При тази ситуация ще са необходими допълнителни изследвания, за да се определи кое от решенията е решение и на оптимизационната задача от модела на Корно.

Ето защо, независимо, че разгледаният модел е с по-силно изискване от (11), той е различен от добре известната задача за максимизиране на функциите на печалба в модела на Корно.

Коментар върху коефициентите α, β, γ и δ в Теорема 22

Въпреки, че Теорема 22 е следствие от Теорема 23 изглежда, че използването на четири коефициента е възможно да предостави по-добро разбиране на процесите в дуополните пазари.

Нека функциите на реакция F_1 и F_2 удовлетворяват

$$\rho(F_1(x, y), F_1(u, v)) \leq \alpha\rho(x, u) + \beta\rho(y, v) \tag{15}$$

и

$$\rho(F_2(x, y), F_2(u, v)) \leq \gamma\rho(x, u) + \delta\rho(y, v). \tag{16}$$

Ако $\max\{\alpha + \gamma, \beta + \delta\} \in (0, 1)$, то моделът удовлетворява неравенство (10). Нека допуснем, че α и δ са много близо до 1, а β и γ са много близо до 0. Това означава, че двете фирми не обръщат особено внимание на поведението на конкурента. Те се интересуват предимно от собствените си пазарни резултати.

Пример 14. *Да разгледаме дуополен пазар с функции на реакцията* $F_1(x, y) = 45 - 0.98x - 0.09y$ *и* $F_2(x, y) = 50 - 0.01x - 0.9y$*. Можем да считаме, че тези функции на реакция са получени от задачата за максимизиране на функциите на печалба в модела на Корно при функция на цената* $P(x, y) = 50 - 0.09x - 0.01y$ *и функции на разходите* $C_1(x) = 0.985x^2$, $C_2(y) = 0.86y^2$.

Получаваме неравенствата

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = |F_1(x_n, y_n) - F_1(x_{n+1}, y_{n+1})| \leq 0.98|x_n - x_{n+1}| + 0.09|y_n - y_{n+1}|$$

и

$$|y_{n+2} - y_{n+1}| = |F_2(x_n, y_n) - F_2(x_{n+1}, y_{n+1})| \leq 0.01|x_n - x_{n+1}| + 0.9|y_n - y_{n+1}|,$$

което може да се интерпретира, че всеки участник се интересува основно от промените на търсене на неговата стока. Пазарното равновесие е $(24.06, 26.18)$.

Таблица 14. Стойности на редицата от итерации (x_n, y_n) при начално състояние на пазара $(10, 30)$

n	0	1	2	3	10	21	50	120	121	599	600
x_n	10	37	12	35	16.8	30.8	21.1	22.64	25.43	24.07	24.05
y_n	30	18	33	20	28.6	24.1	25.8	26.03	26.34	26.19	26.18

Забелязваме от Таблица 14, че в самото начало осцилациите на редицата от итерации са големи и е необходимо значимо количество време, за да се доближат до равновесното производство.

Приложение на Теорема 23 при изследване на един нов модел на дуополен пазар

Дълбоки резултати при изследване на олигополни пазари са представени в [3]. Авторите анализират пазарно равновесие, получено с помощта на условията от първи и втори ред за дуополен пазар в [3], където се предполага, че функцията на цената е $P(Q) = Q^{-1/\mu}$, $x, y \geq 0$ са количествата доставена на пазара стойка съответно от всяка от двете фирми, $Q = x + y$ е общата стока на пазара и $\mu > 0$ е параметър. Предположено е в модела, че функциите на разходите на двамата участника са линейни с константа маргинална стойност $c_i > 0$. Тъй като част от резултатите в [3] са за функции на разходите с маргинална стойност $c_i = c$ за $i = 1, 2$, ще разгледаме този случай, т.е. $c_1 = c_2 = c$. Следвайки [3], записваме условията от първи ред

$$\left| \begin{array}{l} x = \mu Q - c\mu Q^{1+\frac{1}{\mu}} \\ y = \mu Q - c\mu Q^{1+\frac{1}{\mu}}. \end{array} \right.$$

Двата участника имат една и съща функция на реакция

$$F_1(x, y) = F_2(x, y) = F(x, y) = \mu Q - c\mu Q^{1+\frac{1}{\mu}},$$

където $Q = x + y$.

Неравенството $0 < cQ_{\max}^{1/\mu} < \frac{1-2\mu}{2(1+\mu)} < 1$ е изпълнено винаги, когато $\mu \in [0, 1/2)$.

Анализът в [3] при използване на условията от втори ред показва съществуване на пазарно равновесие, когато $\mu \geq \max\left\{1, \frac{x}{2y-x}, \frac{y}{2x-y}\right\}$ и невъзможност за каквото и да е заключение, когато $\mu < 1$.

Така Теорема 23 обхваща и случаи, за които класическият метод с използване на условията от втори ред не може да отговори на въпроса за съществуване на пазарно равновесие.

Приложение на Теорема 23 при оптимизация на недиференцируеми функции на печалбата и примери

Изглежда, че Теорема 23 може да наложи различен тип свиващи условия, които не са еквивалентни на условията от Теорема 22.

Теорема 23 може да се формулира на икономически език за $k_1 = k_3 = 0$.

Пример 15. *Да разгледаме дуополен пазар, където двете фирми произвеждат по една стока, взаимно заменяема със стоката на конкурента. Нека двете фирми имат функции на реакция съответно*

$$F_1(x, y) = \begin{cases} 0.2 & x \in [0, 0.8] \\ 0.1 & x \in (0.8, 1] \end{cases} \quad \text{и} \quad F_2(x, y) = \begin{cases} 0.9 & y \in [0, 0.1] \\ 0.8 & y \in (0.1, 1]. \end{cases}$$

Съществува пазарно равновесие (x, y) и за всяко начално състояние на пазара, редицата от итерации (x_n, y_n) е сходяща към пазарното равновесие (x, y). В този случай получаваме, че равновесното производство за пазара е $(0.8, 0.1)$.

Функциите на реакция F_1 и F_2 не удовлетворяват Теорема 22.

Разгледаният пример показва също така, че ако функциите на реакция F_i биха били получени с помощта на максимизирането на функциите на печалба, то не можем да говорим за условия от втори ред, понеже F_i не са диференцируеми.

Обобщена функция на реакция

Разглеждайки модели на дуополия в параграфите до момента, не обръщахме внимание на продукцията, която е произведена, но не е реализирана на пазара. Предполагахме, че при своята реакция фирмите вземат предвид единствено реализираната на пазара продукция. За да бъде конструираният модел по-реалистичен трябва да отчитаме и излишната (или нереализираната) продукция.

Приемаме, че всеки участник в пазара взема предвид не само колко продукция е реализирал на пазара, но и какво количество има останало в складовете си (т.е. произвел е без да е успял да го продаде). Предполагаме, че всеки участник има пълна информация не само какво количество е реализирал на пазара, но и реализираното количество от конкурента му. Разбира се нито един от участниците няма информация за нереализираните количества на конкурента.

Да означим множеството от възможните количества за участник i с U_i, множеството от продадените количества с $P_i \subseteq U_i$, множеството от свръх производство s_i, $i = 1, 2$. Нека положим $X_i = P_i \times s_i$. Предположихме, че всеки участник няма информация за излишъка на конкурента. Ето защо по-реалистичен модел на дуополия с помощта на функции на реакцията би бил $f_1 : X_1 \times P_2 \to U_1$, $f_2 : X_2 \times P_1 \to U_2$. Започвайки в момент t_0 с продадени количества $p_i^{(0)}$, нереализирана продукция $s_i^{(0)}$ и производство $u_i^{(0)}$ за участник $i = 1, 2$ ще достигнем до нови нива на производство за фирмите $u_1^{(1)} = f_1\left(p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, s_1^{(0)}\right) \in U_i$, $u_2^{(1)} = f_2\left(p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, s_2^{(0)}\right) \in U_2$. Пазарът реагира на тези нови нива на производство, като генерира нови излишни количества. $s_i^{(1)} = Q_i(u_1^{(1)}, u_2^{(1)})$, където $Q_i : U_1 \times U_2 \to U_i$, $i = 1, 2$ наричаме функции на реакцията на пазар за произведените количества от двамата участника. Така реализираните количества на пазара за всеки един от участниците в момента t_1 ще бъде

$$\begin{aligned} p_1^{(1)} &= u_1^{(1)} - s_1^{(1)} = f_1\left(p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, s_1^{(0)}\right) - Q_1\left(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}\right) \\ &= f_1\left(p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, s_1^{(0)}\right) - Q_1\left(f_1\left(p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, s_1^{(0)}\right), f_2\left(p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, s_2^{(0)}\right)\right) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} p_2^{(1)} &= u_2^{(1)} - s_2^{(1)} = f_2(p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, s_2^{(0)}) - Q_2(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}) \\ &= f_2(p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, s_2^{(0)}) - Q_2(f_1(p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, s_1^{(0)}), f_2(p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, s_2^{(0)})). \end{aligned}$$

Ще дефинираме нова функция F_i, която наричаме обобщена функция на реакцията на фирмата и пазара. Нека $X \in X_1$, $Y \in X_2$, т.е. $X = (x, \delta x) \in P_1 \times s_1$ и $Y = (y, \delta y) \in P_2 \times s_2$. Да означим $\overline{x} = (x, y, \delta x)$ и $\overline{y} = (x, y, \delta y)$.

$$F_1(X, Y) = F_1(x, y, \delta x, \delta y) = (f_1(\overline{x}) - Q_1(f_1(\overline{x}), f_2(\overline{y})), Q_1(f_1(\overline{x}), f_2(\overline{y})))$$

и

$$F_2(X, Y) = F_2(x, y, \delta x, \delta y) = (f_2(\overline{y}) - Q_2(f_1(\overline{x}), f_2(\overline{y})), Q_2(f_1(\overline{x}), f_2(\overline{y}))).$$

Тъй като в Теорема 22 множествата X и Y са произволни подмножества от например $\mathbb{R}^n$, то можем да формулираме Теорема 22 за случая с обобщените функции на реакция на производител и пазар.

Предположение 4. *Нека имаме дуополен пазар, удовлетворяващ:*

1. *двете фирми произвеждат взаимно заменяеми стоки*
2. *участник i, $i = 1, 2$ произвежда количества от множеството U_i. Множеството на реализираната на пазара продукция е P_i и множеството от нереализираната на пазара продукция е s_i, където $X = P_1 \times s_1$ и $Y = P_2 \times s_2$ са затворени и непразни подмножества на пълното метрично пространство (Z, ρ)*

3. *съществува затворено множество $D \subseteq X \times Y$ и изображения $F_1 : D \to X$ $F_2 : D \to Y$, удовлетворяващи $(F_1(x,y), F_2(x,y)) \subseteq D$ за всяко $(x,y) \in D$, които са обобщените функции на реакцията съответно на двамата участника в пазара*

4. *съществува $\alpha \in (0,1)$, така че неравенството*

$$\rho(F_1(x,y), F_1(u,v)) + \rho(F_2(x,y), F_2(u,v)) \leq \alpha(\rho(x,u) + \rho(y,v)) \tag{17}$$

е вярно за всяко $(x,y),(u,v) \in X \times Y$.

Пример 16. *Нека $U_i = [0,+\infty)$, $P_i = [0,+\infty)$, $s_i = [0,+\infty)$, $X = P_1 \times s_1$ и $Y = P_2 \times s_2$. Нека X и Y са подмножества на $(\mathbb{R}^2, \rho)$, където $\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. Нека $(X \times Y)$ е снабдено с метриката $\widetilde{\rho}(\cdot,\cdot) = \rho(\cdot,\cdot) + \rho(\cdot,\cdot)$. Нека $f_1 : X \times P_2 \to U_1$ и $f_2 : Y \times P_1 \to U_2$ са дефинирани чрез $f_1(x,y,\delta x) = 45 - 0.5x + 0.25y - 0.1\delta x$ и $f_2(x,y,\delta y) = 20 - 0.2x - 0.25y - 0.05\delta y$, където $(x,\delta x) \in X$ и $(y,\delta y) \in Y$.*

Нека функциите на реакция на пазара $Q_1 : U_1 \times U_2 \to U_1$ и $Q_2 : U_1 \times U_2 \to U_2$ са дефинирани чрез $Q_1(x,y) = 0.05x + 0.03y$ и $Q_2(x,y) = 0.04x + 0.06y$. Нека обобщените функции на реакцията на производител и пазар $F_1 : X \times Y \to X$ и $F_2 : X \times Y \to Y$ са дефинирани чрез

$$F_1(x,y,\delta x,\delta y) = (f_1(\overline{x}) - Q_1(f_1(\overline{x}), f_2(\overline{y})), Q_1(f_1(\overline{x}), f_2(\overline{y})))$$

и

$$F_2(x,y,\delta x,\delta y) = (f_2(\overline{y}) - Q_2(f_1(\overline{x}), f_2(\overline{y})), Q_2(f_1(\overline{x}), f_2(\overline{y}))).$$

Равновесното производство на разглеждания пазар е $x = 27.1$, $y = 9.6$ с излишъци $\delta x = 1.6$ и $\delta y = 1.2$.

Примерът показва, че равновесното положение на пазара включва и нереализирано производство строго по-голямо от нула за всеки един от участниците.

Ако допуснем, че фирмите не обръщат внимание на нереализираната стока, т.е. имат функции на реакция $F_1(x,y,\delta x) = 45 - 0.5x + 0.25y$ и $F_2(x,y,\delta y) = 20 - 0.2x - 0.25y$, то равновесното производство на пазара е $x = 29.8$ и $y = 11.2$.

Вариационна техника при изследване на пазарно равновесие в дуополни пазари

Определение 48. *Нека $(Z, \preceq)$ е частично наредено множество, $X, Y \subseteq Z$ и $F : X \times Y \to X$, $f : X \times Y \to Y$ са полуциклични изображения. Казваме, че наредената двойка (F, f) притежава смесеното монотонно свойство, ако*

$$\text{за всеки две } x_1, x_2, y \in X, \text{ удовлетворяващи } x_1 \preceq x_2 \text{ е в сила неравенството} \\ F(x_1,y) \preceq F(x_2,y)$$

и

$$\text{за всеки две } y_1, y_2, x \in X, \text{ удовлетворяващи } y_1 \preceq y_2 \text{ е в сила неравенството} \\ f(x,y_1) \succeq f(x,y_2).$$

Обобщение на вариационния принцип на Екеланд

Нека Z е произволно множество. Ще въведем означенията $u = \left(u^{(1)}, u^{(2)}\right) \in Z \times Z$ за всяко $u \in Z \times Z$, $\overline{u} = \left(u^{(2)}, u^{(1)}\right)$.

Теорема 24. *Нека $(Z, \rho, \preceq)$ е частично наредено пълно метрично пространство, $(Z \times Z, d, \preceq)$, $X, Y \subseteq Z$ и $F : X \times Y \to X$, $f : X \times Y \to Y$ са полуциклични непрекъснати изображения и наредената двойка (F, f) удовлетворява смесеното монотонно свойство. Нека*

$$V \times U = \{x = (x^{(1)}, x^{(2)}) \in X \times Y : x^{(1)} \preceq F(x) \text{ и } x^{(2)} \succeq f(x)\} \neq \emptyset.$$

Нека $T : X \times Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ не е тъждествено равна на $+\infty$, полунепрекъсната отдолу, ограничена отдолу функция. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно избрано и фиксирано и $u_0 \in V \times U$ е наредена двойка, така че в сила е неравенството $T(u_0) \leq \inf_{V \times U} T(v) + \varepsilon$.

Тогава съществува наредена двойка $x \in V \times U$ удовлетворяваща

(24.i) $T(x) \leq T(u_0)$

(24.ii) $d(x, u_0) \leq 1$

(24.iii) *за всяко $w \in V \times U$, различно от $x \in V \times U$ е изпълнено*

$$T(w) > T(x) - \varepsilon d(w, x).$$

Двойки неподвижни точки за полуциклично изображение със смесеното монотонно свойство

Теорема 25. *Нека $(Z, \rho, \preceq)$ е частично наредено пълно метрично пространство, $(Z \times Z, d, \preceq)$, $X, Y \subseteq Z$, $F : X \times Y \to X$, $f : X \times Y \to Y$ са полуциклични изображения и наредената двойка (F, f) притежава смесеното монотонно свойство. Нека съществува $\alpha \in [0, 1)$, така че неравенството*

$$\rho(F(x, y), F(u, v)) + \rho(f(x, y), f(u, v)) \leq \alpha\rho(x, u) + \alpha\rho(y, v)$$

е вярно за всяко $x \succeq u$ и $y \preceq v$. Ако съществува поне една наредена двойка $(x, y) \in X \times Y$, така че $x \preceq F(x, y)$ и $y \succeq f(x, y)$, то съществува двойка неподвижни точки (x, y) на (F, f).

(25.i) *Ако допълнително всеки два елемента от $X \times Y$ имат долна или горна граница, то двойката неподвижни точки е единствена.*

(25.ii) *Ако допълнително всеки елемент от Z има горна или долна граница и $f(x, y) = F(y, x)$, то двойката неподвижни точки $(x, y))$ удовлетворява $x = y$.*

Приложение на Теорема 25 при изследване на пазарно равновесие в дуополни пазари

Ще формулираме Теорема 25 на икономически език.

Предположение 5. *Нека две фирми предлагат продукти, които са взаимо заменяеми. Първата фирма произвежда количества от множеството X, а втората произвежда количества от множеството Y, където X и Y са непразни подмножества на частично нареденото пълно метрично пространство $(Z, \rho, \preceq)$. Нека $F : X \times Y \to X$, $f : X \times Y \to Y$ са функциите на реакция на двамата участника. Нека съществува $\alpha \in (0, 1)$, така че*

$$\rho(F(x, y), F(u, v)) + \rho(f(x, y), f(u, v)) \leq \alpha\rho(x, u) + \alpha\rho(y, v) \tag{18}$$

е вярно за всяко $x \succeq u$ и $y \preceq v$. Ако съществува поне една наредена двойка $(x, y) \in X \times Y$, така че $x \preceq F(x, y)$ и $y \succeq f(x, y)$, то съществува двойка на пазарно равновесие (x, y), която е двойка неподвижни точки на (F, f).

Ако в допълнение всяка двойка от елементи на $X \times Y$ има долна или горна граница, то двойката на пазарно равновесие е единствена.

Наложените условия за функциите на реакция могат да се интерпретират последния начин: ако производството на първата фирма намалее, т.е. $x \succeq u$, то производството на втората фирма нараства, т.е. $y \preceq v$. За пример може да послужи монополен пазар, в който се включва втори участник. В този случай производството на втория участник ще се увеличава, а на първия ще намалява.

Пример 17. *(Модел на Корно) Нека две фирми произвеждат двойка продукти, които са взаимно заменяеми с производства съответно (x_1, x_2) и (y_1, y_2). Нека втората фирма влиза на пазара. Тогава $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$. Да снабдим пространството от възможните количества на производство $\mathbb{R}^2$ с евклидовата метрика $\|\cdot\|_2$. Нека функциите на реакция $F(x_1, x_2, y_1, y_2)$ и $f(x_1, x_2, y_1, y_2)$ са дефинирани чрез*

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{x_1+y_1}{3} + 1 \\ \frac{x_2+y_2}{4} + 1 \end{cases}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x_1+y_1}{3} + 1 \\ \frac{x_2+y_2}{2} + 1 \end{cases}.$$

Следователно съществува пазарно равновесие с производство $x_1 = 3$, $x_2 = 3$ за фирма едно и производство $y_1 = 3$, $y_2 = 5$ за фирма две.

Ако се опитаме да използваме например класическото неравенство $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ за изпъкнали функции, то няма да можем да докажем неравенство (18) и няма да можем да докажем неравенството

$$\|F(X,Y) - F(U,V)\|_2 + \|f(X,Y) - f(U,V)\|_2 \leq \frac{5\sqrt{2}}{6}\|X - U\| + \frac{5\sqrt{2}}{6}\|Y - V\|$$

за всички X, Y, U и V и да приложим резултатите от началото на главата.

Ето защо разглеждането на частично наредени метрични пространства и условието (18) да бъде изпълнено само за част от елементите на пространството играе съществена роля при увеличаване на класа от дуополни пазари, които могат да бъдат изследвани за наличие на равновесие.

Пример 18. *(Модел на Бертранд) Нека в Пример 17 разгледаме фирми, които произвеждат по една стока и се конкурират едновременно за количества и за цена. Нека означим за първата фирма (x, p), x–количество на цена p, а за втората фирма (y, q), y–количество на цена q, $(x, p) \succeq (y, q)$. Предполагаме, че втората фирма е по-малка и произвежда по-малки количества на по-висока цена. Да снабдим $\mathbb{R}^2$ с евклидовата норма $\|\cdot\|_2$. Нека функциите на реакция за двете фирми са функциите $F(x, p, y, q)$ и $f(x, p, y, q)$ от Пример 17.*

Следователно съществува пазарно равновесие при производство на количества $x = 3$ на цена $p = 3$ за първата фирма и на количества $y = 3$ на цена $q = 5$ за втората фирма.

Двойки неподвижни точки за многозначни полуциклични изображения

Резултатите до момента за наличие на равновесие в дуополен пазар бяха получени при предположение, че всеки участник реагира с избирането на единствено възможно производство. По-реалистичен е моделът, при който фирмите могат да избират измежду множество от възможни производства, т.е. да разглеждаме функциите на реакция като многозначни функции.

Определение 49. *Нека X и Y са две множества. Наредената двойка от изображения (F_1, F_2) от многозначни изображения $F_1 : X \times Y \rightrightarrows X$ и $F_2 : X \times Y \rightrightarrows Y$ наричаме двойка полуциклични изображения.*

Определение 50. *Нека X и Y са две множества и (F_1, F_2) е наредена двойка полуциклични изображения. Наредената двойка $(x^*, y^*) \in X \times Y$ наричаме двойка неподвижни точки за (F_1, F_2), ако в сила са $x^* \in F_1(x^*, y^*)$ и $y^* \in F_2(x^*, y^*)$.*

Теорема 26. *Нека (X, ρ) и (Y, σ) са пълни метрични пространства, $F_1 : X \times Y \rightrightarrows X$ и $F_2 : X \times Y \rightrightarrows Y$ са многозначни полуциклични изображения и $\bar{x} \in X$, $\bar{y} \in Y$. Нека съществуват константа $r > 0$ и $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in [0, 1)$, удовлетворяващи $\max\{\alpha + \gamma, \beta + \delta\} < 1$, така че в сила са:*

(а) за всяко $(x, y) \in B_r(\bar{x}) \times B_r(\bar{y})$ множествата $F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$ са непразни и затворени подмножества съответно на X и Y

(б) изпълнено е неравенството $d(\bar{x}, F_1(\bar{x}, \bar{y})) + d(\bar{y}, F_2(\bar{x}, \bar{y})) < r(1 - \lambda)$, където

$$\lambda = \max\{\alpha + \gamma, \beta + \delta\}$$

(в) неравенството

$$\begin{aligned} S_2 &= e(F_1(x, y) \cap B_r(\bar{x}), F_1(u, v)) + e(F_2(z, w) \cap B_r(\bar{y}), F_2(t, s)) \\ &\leq \alpha\rho(x, u) + \beta\sigma(y, v) + \gamma\rho(z, t) + \delta\sigma(w, s) \end{aligned}$$

е в сила за всяко $(x, y), (u, v), (z, w), (t, s) \in B_r(\bar{x}) \times B_r(\bar{y})$.

Тогава съществува поне една двойка неподвижни точки $(x, y) \in B_r(\bar{x}) \times B_r(\bar{y})$ на двойката полуциклични изображения (F_1, F_2).

Пример 19. *Нека изберем $0 \leq \alpha < \beta < \gamma < \delta \leq \eta < +\infty$, $n, m \in (0, 1]$, така че*

$$\max\left\{\frac{n(\gamma - \beta) + m(\gamma - \beta)}{2((\eta + 1)^n - (\alpha + 1)^n)}, \frac{n(\gamma - \beta) + m(\gamma - \beta)}{2(\delta + 1)^n}\right\} < 1.$$

Да дефинираме изображенията $f : [0, \delta] \to \left[\frac{\beta+\gamma}{2}, \gamma\right]$, $g : [\alpha, \eta] \to \left[\beta, \frac{\beta+\gamma}{2}\right]$, $\varphi : [0, \delta] \to \left[\frac{\beta+\gamma}{2}, \gamma\right]$, $\psi : [\alpha, \eta] \to \left[\beta, \frac{\beta+\gamma}{2}\right]$ чрез

$$f(x) = \frac{\gamma - \beta}{2(\delta + 1)^n}(x + 1)^n + \frac{\beta + \gamma}{2},$$

$$g(x) = \frac{\gamma - \beta}{2((\eta + 1)^n - (\alpha + 1)^n)}(x + 1)^n + \beta - (\alpha + 1)^n \frac{\gamma - \beta}{2((\eta + 1)^n - (\alpha + 1)^n)},$$

$$\varphi(x) = \frac{\gamma - \beta}{2(\delta + 1)^m}(x + 1)^m + \frac{\beta + \gamma}{2},$$

$$\psi(x) = \frac{\gamma - \beta}{2((\eta + 1)^m - (\alpha + 1)^m)}(x + 1)^m + \beta - (\alpha + 1)^m \frac{\gamma - \beta}{2((\eta + 1)^m - (\alpha + 1)^m)}.$$

Нека означим $\overline{x} = \overline{y} = \frac{\beta+\gamma}{2}$, $\theta = \min\{|\delta - \overline{x}|, |\alpha - \overline{x}|\}$. Разглеждаме $\mathbb{R}$ спрямо каноничната метрика $|\cdot - \cdot|$. Да означим множествата $X = [0, \delta]$, $Y = [\alpha, \eta]$. Дефинираме многозначните изображения $F : X \times Y \rightrightarrows X$ и $G : X \times Y \rightrightarrows Y$ чрез

$$F(x, y) = \{\xi : g(y) \leq \xi \leq f(x)\} \quad \text{и} \quad G(x, y) = \{\xi : \psi(y) \leq \xi \leq \varphi(x)\}.$$

Като частен случай можем да разгледаме: $n = m = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $\gamma = 4$, $\delta = 6$ и $\eta = 8$. Тогава $f(x) = \varphi(x) = \frac{x}{7} + \frac{22}{7}$, $g(y) = \psi(y) = \frac{y}{8} + 2$, $r = 3$, $\overline{x} = \overline{y} = 3$ и

$$\begin{aligned} S_3 &= e(F(x,y) \cap B_r(\overline{x}), F(u,v)) + e(G(z,w) \cap B_r(\overline{y}), G(t,s)) \\ &\le \tfrac{1}{8}|x-u| + \tfrac{1}{7}|y-v| + \tfrac{1}{8}|z-t| + \tfrac{1}{7}|w-s|. \end{aligned}$$

Пример 20. *Нека разгледаме пространството $\mathbb{R}^2$. Да изберем $0 < \alpha_i < \beta_i < \gamma_i < \delta_i < \eta_i < +\infty$, $n_i, m_i \in (0,1]$ за $i = 1,2$, така че*

$$\max_{i=1,2}\left\{\frac{n_i(\gamma_i - \beta_i)}{2(\delta_i+1)^{n_i}}\right\} + \max_{i=1,2}\left\{\frac{m_i(\gamma_i - \beta_i)}{2(\delta_i+1)^{m_i}}\right\} < 1$$

и

$$\max_{i=1,2}\left\{\frac{n_i(\gamma_i - \beta_i)}{2((\eta_i+1)^{n_i} - (\alpha_i+1)^{n_i})}\right\} + \max_{i=1,2}\left\{\frac{m_i(\gamma_i - \beta_i)}{2((\eta_i+1)^{m_i} - (\alpha_i+1)^{m_i})}\right\} < 1.$$

Дефинираме изображенията $f_i : [0,\delta_i] \to \left[\frac{\beta_i+\gamma_i}{2}, \gamma_i\right]$, $g_i : [\alpha_i, \eta_i] \to \left[\beta_i, \frac{\beta_i+\gamma_i}{2}\right]$, $\varphi_i : [0,\delta_i] \to \left[\frac{\beta_i+\gamma_i}{2}, \gamma_i\right]$, $\psi_i : [\alpha_i, \eta_i] \to \left[\beta_i, \frac{\beta_i+\gamma_i}{2}\right]$ за $i = 1,2$ чрез

$$f_i(x) = \frac{\gamma_i - \beta_i}{2(\delta_i+1)^{n_i}}(x+1)^{n_i} + \frac{\beta_i+\gamma_i}{2}, \quad g_i(x) = C(x+1)^{n_i} + \beta_i - (\alpha_i+1)^{n_i}C,$$

$$\varphi_i(x) = \frac{\gamma_i - \beta_i}{2(\delta_i+1)^{m_i}}(x+1)^{m_i} + \frac{\beta_i+\gamma_i}{2}, \quad \psi_i(x) = D(x+1)^{m_i} + \beta_i - (\alpha_i+1)^{m_i}D,$$

където $C = \frac{\gamma_i - \beta_i}{2((\eta_i+1)^{n_i} - (\alpha_i+1)^{n_i})}$ и $D = \frac{\gamma_i - \beta_i}{2((\eta_i+1)^{m_i} - (\alpha_i+1)^{m_i})}$.

Нека означим $\overline{x}_i = \frac{\beta_i+\gamma_i}{2}$ и $\theta_i = \min\{|\delta_i - \overline{x}_i|, |\alpha_i - \overline{x}_i|\}$ за $i = 1,2$. Да снабдим $\mathbb{R}^2$ с метриката $\rho((x,y),(u,v)) = \left(\left|\frac{x-u}{\theta_1}\right|^p + \left|\frac{y-v}{\theta_2}\right|^p\right)^{1/p}$, $p \in (1,+\infty)$. Да означим множествата $X_i = [0,\delta_i]$, $Y_i = [\alpha_i, \eta_i]$ за $i = 1,2$ и нека $X = X_1 \times X_2$, $Y = Y_1 \times Y_2$. Дефинираме многозначните изображения $F : X \times Y \rightrightarrows X$ и $G : X \times Y \rightrightarrows Y$ чрез

$$F((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \{(\xi_1,\xi_2) : g_i(y_i) \le \xi_i \le f_i(x_i)\}$$

и

$$G((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \{(\xi_1,\xi_2) : \psi_i(y_i) \le \xi_i \le \varphi_i(x_i)\}.$$

Недостатък на предложените модели в предходните параграфи е условието участниците да имат възможност да избират единствена реакция и единствена цена. В действителност всяка фирма може да избира измежду множество от възможни количества и цена заключена в някакви граници. Ето защо ще разгледаме многозначни функции на реакция $F : X \times Y \rightrightarrows U \subset X$ и $f : X \times Y \rightrightarrows V \subset Y$ за двамата участника на дуополния пазар.

Предположение 6. *Нека две фирми предлагат стоки, които са взаимно заменяеми. Първата фирма произвежда количества от множеството X, а втората фирма произвежда количества от множеството Y, където X и Y са непразни подмножества от пълното метрично пространство (Z,ρ) и $\bar{x} \in X$, $\bar{y} \in Y$. Нека $F : X \times Y \rightrightarrows X$ и $G : X \times Y \rightrightarrows Y$ са функциите на реакция съответно на двамата участника в дуополния пазар и нека F и G удовлетворяват условията на Теорема 26.*

Тогава съществува поне едно пазарно равновесие $(x,y) \in B_r(\bar{x}) \times B_r(\bar{y})$, което е двойка неподвижни точки за наредената двойка (F,G).

Пример 21. *Да разгледаме в Пример 19 две фирми, произвеждащи по една стока. Да положим* $\alpha = 10$, $\beta = 30$, $\gamma = 50$, $\delta = 80$ *и* $\eta = 100$. *Можем да разгледаме интервала* $[0, \eta]$ *като множеството на възможното общо производство. Нека първата фирма е по-малката и нейното производство е в множеството* $[0, \delta]$, *а втората фирма е по-голямата с производство в множеството* $[\alpha, \eta]$. *Нека* $n = 1$ *и* $m = 1/2$.

Тогава за всяко начално състояние $[x, y]$ *на пазара първият участник избира производство от* $\left[\frac{y}{9} + \frac{260}{9}, \frac{10}{81}x + \frac{3250}{81}\right]$, *а вторият избира от* $\left[\frac{10\sqrt[2]{y+1}+30\sqrt[2]{101}-40\sqrt[2]{11}}{\sqrt[2]{101}-\sqrt[2]{11}}, \frac{10}{9}\sqrt[2]{x+1}+40\right]$ *и*

$$\begin{aligned} S_4 &= e(F(x,y)\cap B_r(\overline{x}), F(u,v)) + e(G(z,w)\cap B_r(\overline{y}), G(t,s)) \\ &\le \tfrac{10}{81}|x-u| + \tfrac{1}{9}|y-v| + \tfrac{5}{9}|z-t| + \gamma|w-s|, \end{aligned}$$

където $\gamma = \frac{5}{\sqrt{101}-\sqrt{11}} < \frac{5}{6}$.

От $\max\left\{\frac{10}{81}+\frac{5}{9}, \frac{1}{9}+\frac{5}{6}\right\} = \max\left\{\frac{55}{81}, \frac{17}{18}\right\} = \frac{17}{18} < 1$ следва, че наредената двойка (F, G) от функции на реакцията удовлетворява Предположение 6 и следователно съществува пазарно равновесие (x, y), така че $x \in F(x, y)$ и $y \in G(x, y)$.

Пример 22. *Да разгледаме дуополен пазар с една стока, но нека сега фирмите се състезават едновременно за количества и цени. Нека в Пример 20 изберем* $\alpha_1 = 10$, $\beta_1 = 30$, $\gamma_1 = 40$, $\delta_1 = 60$, $\eta_1 = 100$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = 3$, $\gamma_2 = 4$, $\delta_2 = 5$, $\eta_2 = 8$ $n_1 = 1$, $n_2 = 1/2$, $m_1 = 1/2$, $m_2 = 1/4$. *Да разгледаме множествата* $X_i = [0, \delta_i]$, $Y_i = [\alpha_i, \eta_i]$ *за* $i = 1, 2$ *и нека* $X = X_1 \times X_2$, $Y = Y_1 \times Y_2$. *Нека многозначните изображения* $F : X \times Y \rightrightarrows X$ *и* $G : X \times Y \rightrightarrows Y$ *от Пример 20 са функциите на реакция за двете фирми, където първата координата е реакцията за количествата стока, а втората координата е реакцията за цената. Да снабдим* $\mathbb{R}^2$ *с метриката*

$$\rho((x,y),(u,v)) = \left(\left|\frac{x-u}{\theta_1}\right|^p + \left|\frac{y-v}{\theta_2}\right|^p\right)^{1/p}, \quad p \in (1, +\infty)$$

от Пример 20

Съществува пазарно равновесие $((x,p),(y,q))$ за количества и за цени, така че $(x,p) \in F((x,p),(y,q))$ и $(y,q) \in G((x,p),(y,q))$.

Двойки точки на най-добро приближение за полуциклични свиващи изображения

Определение 51. *Нека* A, B *са непразни подмножества на метричното пространство* (X, ρ) *и* (F, f) *е полуциклично изображения (т.е.* $F : A \times B \to A$, $f : A \times B \to B$*). Наредената двойка* $(\xi, \eta) \in A \times B$ *наричаме двойка точки на най-добро приближение на* (F, f), *ако*

$$\rho(\eta, F(\xi, \eta) = \rho(\xi, f(\xi, \eta) = \operatorname{dist}(A, B).$$

Определение 52. *Нека* A, B *са непразни подмножества на метричното пространство* (X, ρ) *и* (F, f), $F : A \times B \to A$, $f : A \times B \to B$ *са полуциклично изображения. Нека съществува множество* $D \subseteq A \times B$, *така че* $F : D \to A$, $f : D \to B$ *и в сила е* $(F(x,y), f(x,y)) \subseteq D$ *за всяко* $(x, y) \in D$. *Полуцикличното изображение* (F, f) *се нарича свиващо полуциклично от тип две, ако съществуват неотрицателни константи* α, β, *удовлетворяващи* $\alpha + \beta < 1$ *и да е изпълнено неравенството*

$$\rho(F(x,y), f(u,v)) \le \alpha\rho(x,v) + \beta\rho(y,u) + (1-(\alpha+\beta))\operatorname{dist}(A,B)$$

за всяко $(x,y), (u,v) \in D$.

Определение 53. *Нека A, B са непразни подмножества на метричното пространство (X, ρ), $F : A \times B \to A$ и $f : A \times B \to B$ е полуциклично изображение. За всяка наредена двойка $(x, y) \in A \times B$ дефинираме редиците $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ чрез*

$$x_0 = x, \quad y_0 = y$$

и

$$x_{n+1} = F(x_n, y_n), \quad y_{n+1} = f(x_n, y_n)$$

за всяко $n \geq 0$.

Двойки точки на най-добро приближение за свиващи полуциклични изображения от тип две

За да можем да запишем някои от формулите в текстовото поле ще въведем означенията: $d = \operatorname{dist}(A, B)$, $P_{n,m}(x, y) = \|x_n - y_m\|$ и $W_{n,m}(x, y) = P_{n,m}(x, y) - d = \|x_n - y_m\| - d$, където $x = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $y = \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ са редиците от итерации, дефинирани в Определение 53.

Теорема 27. *Нека A, B са непразни подмножества на равномерно изпъкналото банахово пространство $(X, \|\cdot\|)$. Нека съществуват множество $D \subseteq A \times B$ и полуциклични изображения $F : D \to A$ и $f : D \to B$, така че $(F(x, y), f(x, y)) \subseteq D$ за всяко $(x, y) \in D$. Нека наредената двойка (F, f) е свиващо полуциклично изображение от тип две. Тогава съществува единствена двойка точки на най-добро приближение $(\xi, \eta) \in A \times B$ на (F, f), т.е. $\|\eta - F(\xi, \eta)\| = \|\xi - f(\xi, \eta)\| = d$. За всяко произволно избрано $(x, y) \in A \times B$ в сила са $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$, $\lim_{n\to\infty} y_n = \eta$, $\|\xi - \eta\| = d$, $\xi = F(\xi, \eta)$ и $\eta = f(\xi, \eta)$.*

Ако в допълнение $(X, \|\cdot\|)$ има модул на изпъкналост от степенен тип с константи $C > 0$ и $q > 1$, то в сила са

(27.i) „а приори“ оценка на грешката

$$\|\xi - x_m\| \leq M_0 \sqrt[q]{\frac{\max\{W_{0,1}(x, y), W_{0,0}(x, y)\}}{Cd}} \cdot \frac{\sqrt[q]{(\alpha + \beta)^m}}{1 - \sqrt[q]{\alpha + \beta}};$$

$$\|\eta - y_m\| \leq N_0 \sqrt[q]{\frac{\max\{W_{0,1}(y, x), W_{0,0}(y, x)\}}{Cd}} \cdot \frac{\sqrt[q]{(\alpha + \beta)^m}}{1 - \sqrt[q]{\alpha + \beta}};$$

(27.ii) „а постериори“ оценка на грешката

$$\|\xi - x_n\| \leq M_{n-1} \sqrt[q]{\frac{\max\{W_{n-1,n}(x, y), W_{n-1,n-1}(x, y)\}}{Cd}} \cdot \frac{\sqrt[q]{\alpha + \beta}}{1 - \sqrt[q]{\alpha + \beta}};$$

$$\|\eta - y_n\| \leq N_{n-1} \sqrt[q]{\frac{\max\{W_{n-1,n}(y, x), W_{n-1,n-1}(y, x)\}}{Cd}} \cdot \frac{\sqrt[q]{\alpha + \beta}}{1 - \sqrt[q]{\alpha + \beta}},$$

където $M_n = \max\{\|x_n - y_n\|, \|x_n - y_{n+1}\|\}$, $N_n = \max\{\|x_n - y_n\|, \|y_n - x_{n+1}\|\}$.

Приложение на Теорема 27, когато производствените множества на участниците имат празно сечение

При разглеждането на дуополия е възможно множествата от възможни производства на двамата участника да имат празно сечение. Тази възможност изглежда на пръв поглед екстремална, но все пак съществува. Например, едната фирма има огромно производство и държи голям дял от пазара и няма възможността да поддържа прекалено ниски нива на производство. Това е възможно да се случи при наличието на дългосрочни договори.

Теорема 27 може да се формулира в езика на олигополни пазари.

Всеки участник произвежда по две стоки и множествата от производства на участниците имат празно сечение

Пример 23. *Да разгледаме пазар с две фирми, всяка от които произвежда по две стоки, които са взаимозаменяеми със съответната стока, произвеждана от конкурента. Да допуснем, че първият участник произвежда многократно по-малки количества от втория участник, т.е. ако x_1, x_2, са количествата произведени от първата фирма и y_1, y_2, са количествата произведени от втората фирма, то $x_1, x_2 \in [0,1]$ и $y_1, y_2 \in [2,3]$. Нека $A = [0,1] \times [0,1]$, $B = [2,3] \times [2,3]$ са подмножества на $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, което е равномерно изпъкнало банахово пространство с модул на изпъкналост $\delta_{\|\cdot\|_2}(\varepsilon) \ge \frac{\varepsilon^2}{3}$ от степенен тип. Да разгледаме функциите на реакция $F(x_1, x_2, y_1, y_2)$ и $f(x_1, x_2, y_1, y_2)$, дефинирани чрез*

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{3x_1}{8} + \frac{x_2}{8} - \frac{3y_1}{16} - \frac{y_2}{16} + 1 \\ \frac{x_1}{8} + \frac{3x_2}{8} - \frac{y_1}{16} - \frac{3y_2}{16} + 1 \end{cases}, \quad f(x,y) = \begin{cases} -\frac{3x_1}{16} - \frac{x_2}{16} + \frac{3y_1}{4} + \frac{y_2}{4} + \frac{5}{4} \\ -\frac{x_1}{16} - \frac{3x_2}{16} + \frac{y_1}{4} + \frac{3y_2}{4} + \frac{5}{4} \end{cases}.$$

Съществува единствено пазарно равновесие $(x, y) = ((x_1, x_2), (y_1, y_2))$ и за всяко начално състояние на пазара редицата $(x^n, y^n) = ((x_1^n, x_2^n), (y_1^n, y_2^n))$ е сходяща към (x, y).

Получаваме, че производствата на двете фирми при пазарно равновесие са равни съответно на $x = (1, 1)$ и $y = (2, 2)$. Общото производство е $a = (3, 3)$.

Глава V
ТРОЙКИ НЕПОДВИЖНИ ТОЧКИ И ТРОЙКИ ТОЧКИ НА НАЙ-ДОБРО ПРИБЛИЖЕНИЕ

Примерите в [53] демонстрират възможностите за приложения на модифицираните двойки точки на най-добро приближение за решаване на системи от несиметрични уравнения.

Ще се опитаме да обобщим понятието за тройки неподвижни точки като използваме идеите от [53]. Понятието за тройки неподвижни точки е въведено в [9].

Означение и определения

Нека A_i, B_i за $i = 1, 2, 3$ са подмножества на X. Нека въведем означението

$$A^3 = A_1 \times A_2 \times A_3 \ \text{ и } \ B^3 = B_1 \times B_2 \times B_3.$$

Определение 54. *Нека A_i, B_i за $i = 1, 2, 3$ са шест множества. Казваме, че наредената двойка (F, G) от наредени тройки от изображения $F = (F_1, F_2, F_3)$ и $G = (G_1, G_2, G_3)$ е циклична наредена двойка от тройки от изображения, ако $F_i : A^3 \to B_i$ и $G_i : B^3 \to A_i$ за $i = 1, 2, 3$.*

За опростяване на изказа в тази глава ще приемем уговорката: под наредена двойка изображения (F, G) да разбираме циклична наредена двойка от тройки изображения, т.е. $(F, G) = ((F_1, F_2, F_3), (G_1, G_2, G_3))$.

Определение 55. *Точката $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in A^3$ наричаме тройка неподвижни точки за наредената двойка от наредени тройки от изображения (F, G), ако в сила са равенствата $\xi_i = F_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ за $i = 1, 2, 3$.*

Нека A_i, B_i, $i = 1, 2, 3$ са подмножества на метричното пространство (X, ρ). Означаваме $d_i = \operatorname{dist}(A_i, B_i)$ за $i = 1, 2, 3$.

Определение 56. *Нека A_i, B_i, $i = 1,2,3$ са подмножества на метричното пространство (X,ρ) и нека (F,G) е циклична наредена двойка от тройки от изображения. Наредената тройка $(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \in A^3$ наричаме тройка на най-добро приближение на F, ако $\rho(\xi_i, F_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3)) = d_i$, за $i = 1,2,3$.*

Определение 57. *Нека A_i, B_i, $i = 1,2,3$ са шест множества и нека (F,G) е циклична наредена двойка от тройки от изображения.*

За всяка тройка $\left(x^{(1)},x^{(2)},x^{(3)}\right) \in A^3$ дефинираме редиците $\left\{x_n^{(i)}\right\}_{n=0}^{\infty}$ за $i = 1,2,3$ чрез $x_0^{(i)} = x^{(i)}$ за $i = 1,2,3$ и $x_{2n+1}^{(i)} = F_i\left(x_{2n}^{(1)},x_{2n}^{(2)},x_{2n}^{(3)}\right)$, $x_{2n+2}^{(i)} = G_i\left(x_{2n+1}^{(1)},x_{2n+1}^{(2)},x_{2n+1}^{(3)}\right)$ за $i = 1,2,3$ и за всички $n \geq 0$.

Ако $A_1 = A_2 = A_3 = B_1 = B_2 = B_3$, $F_2(x,y,z) = F_1(y,z,x)$, $F_3(x,y,z) = F_1(z,x,y)$ и $G_i(x,y,z) = F_i(x,y,x)$ за $i = 1,2,3$, получаваме редиците, дефинирани в [2].

Ако $A_1 = A_2 = A_3 = B_1 = B_2 = B_3$, $F_2(x,y,z) = F_1(y,x,y)$, $F_3(x,y,z) = F_1(z,y,x)$ и $G_i(x,y,z) = F_i(x,y,x)$ за $i = 1,2,3$, получаваме редиците, дефинирани в [9].

Обобщена циклична свиваща двойка от тройки изображения

За опростяване на записа нека навсякъде приемем, че (F,G) е наредена двойка от тройки изображения, т.е. $F = (F_1,F_2,F_3)$, $F_i : A_1 \times A_2 \times A_3 \to B_i$ и $G = (G_1,G_2,G_3)$, $G_i : B_1 \times B_2 \times B_3 \to A_i$ за $i = 1,2,3$, където A_i, B_i и $i = 1,2,3$ са непразни подмножества на прилежащото пространство X (метрично, нормирано, модуларно функционално или др.)

Определение 58. *Нека (X,ρ) е метрично пространство. Казваме, че наредената циклична двойка от тройки изображения (F,G) е обобщена циклично свиваща двойки от тип едно, ако е в сила*

$$\sum_{i=1}^{3} \rho\left(F_i\left(x_i^{(1)},x_i^{(2)},x_i^{(3)}\right), G_i\left(y_i^{(1)},y_i^{(2)},y_i^{(3)}\right)\right) \leq \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} \alpha_i^{(j)} \rho\left(x_i^{(j)},y_i^{(j)}\right)$$

за някои константи $\alpha_i^{(j)} \in [0,1)$ за $i,j = 1,2,3$, така че $k = \max_{j=1,2,3}\left\{\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^{(j)}\right\} < 1$ и за всяко $\left(x_i^{(1)},x_i^{(2)},x_i^{(3)}\right) \in A^3$, $\left(y_i^{(1)},y_i^{(2)},y_i^{(3)}\right) \in B^3$ за $i = 1,2,3$.

Ще използваме означенията $d = \sum_{j=1}^{3} d_j = \sum_{j=1}^{3} \mathrm{dist}(A_j,B_j)$.

Определение 59. *Нека (X,ρ) е метрично пространство. Наредената циклична двойка от тройки изображения (F,G) наричаме обобщена циклично свиваща двойка от тип две, ако неравенството*

$$\begin{array}{rcl} S_5 & = & \sum_{i=1}^{3} \rho\left(F_i\left(x_i^{(1)},x_i^{(2)},x_i^{(3)}\right), G_i\left(y_i^{(1)},y_i^{(2)},y_i^{(3)}\right)\right) \\ & \leq & \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} \alpha_i^{(j)} \rho\left(x_i^{(j)},y_i^{(j)}\right) + \sum_{j=1}^{3}\left(1 - \sum_{i=1}^{3}\alpha_i^{(j)}\right) d_j \end{array}$$

е в сила за някои константи $\alpha_i^{(j)} \in [0,1)$, $i,j = 1,2,3$, така че $k = \max\limits_{j=1,2,3}\left\{\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^{(j)}\right\} < 1$ и всяко $\left(x_i^{(1)},x_i^{(2)},x_i^{(3)}\right) \in A^3$, $(y_i^{(1)},y_i^{(2)},y_i^{(3)}) \in B^3$ за $i = 1,2,3$.

Тройки неподвижни точки

Теорема 28. *Нека A_i, B_i, $i = 1, 2, 3$ са непразни затворени подмножества в пълното метрично пространство (X, ρ). Нека (F, G) е обобщена циклично свиваща двойка от тип 1. Тогава*

28.i) *съществува единствена тройка $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2) \times (A_3 \cap B_3)$, която е обща тройка неподвижни точки за изображенията F и G и редиците от итерации $\left\{x_i^{(n)}\right\}_{n=0}^{\infty}$ за $i = 1, 2, 3$ са сходящи съответно към ξ_i и $i = 1, 2, 3$ за всяка произволно избрана тройка $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}\right)$*

28.ii) *„а приори“ оценка на грешката е*

$$\max\left\{\rho(x_i^{(n)}, \xi_i) : i = 1, 2, 3\right\} \leq \frac{k^n}{1-k} \sum_{i=1}^{3} \rho\left(x_i^{(1)}, x_i^{(0)}\right)$$

28.iii) *„а постериори“ оценка на грешката е*

$$\max\left\{\rho(x_i^{(n)}, \xi) : i = 1, 2, 3\right\} \leq \frac{k}{1-k} \sum_{i=1}^{3} \rho\left(x_i^{(n-1)}, x_i^{(n)}\right)$$

28.iv) *скоростта на сходимост е* $\sum_{i=1}^{3} \rho\left(x_i^{(n)}, \xi_i\right) \leq k \sum_{i=1}^{3} \rho\left(x_i^{(n-1)}, \xi_i\right)$.

Пример 24. *Да се реши системата от уравнения*

$$(19) \qquad \left|\begin{array}{rcccrcl} -9x & + & e^{y-1} & + & 3\mathrm{arctg}(z-2) & = & 0 \\ -24x + 3x^2 & + & e^{(y-1)^2} & + & 3\mathrm{arctg}((z-2)^2) & = & -36 \\ -36x + 3x^3 & + & e^{(y-1)^3} & + & 3\mathrm{arctg}((z-2)^3) & = & -90. \end{array}\right.$$

Разгледаме функциите

$$F_1(x, y, z) = \frac{x}{4} + \frac{e^{y-1}}{12} + \frac{\mathrm{arctg}(z-2)}{4},$$

$$F_2(x, y, z) = \frac{x^2}{8} + \frac{e^{(y-1)^2}}{24} + \frac{\mathrm{arctg}((z-2)^2)}{8} + 1.5,$$

$$F_3(x, y, z) = \frac{x^3}{12} + \frac{e^{(y-1)^3}}{36} + \frac{\mathrm{arctg}((z-2)^3)}{12} + 2.5,$$

множествата $A_1 \times A_2 \times A_3 = [0, 1] \times [1, 2] \times [2, 3]$ и прилагаме Теорема 28.

Таблица 15. Брой m итерации при използване на „а приори“ оценка на грешката с начално приближение $(0, 1, 2)$

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001
m	14	22	30	38	56	54

Таблица 16. Брой m итерации при използване на „а постериори“ оценка на грешката с начално приближение $(0, 1, 2)$

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001
m	5	7	10	12	14	16

Приближено решение на системата е $(0.3741116328, 1.615504553, 2.553428358)$.

Тройки точки на най-добро приближение

Теорема 29. *Нека A_i, B_i за $i = 1,2,3$ са непразни затворени и изпъкнали подмножества на равномерно изпъкналото банахово пространство. Нека (F,G) е обобщена циклично свиваща двойка от тип две. Тогава F има единствена тройка точки на най-добро приближение $(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \in A^3$ и G има единствена тройка точки на най-добро приближение $(\upsilon_1,\upsilon_2,\upsilon_3) \in B^3$, т.е. $\|\xi_i - F_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\| = d_i$, $\|\upsilon_i - G_i(\upsilon_1,\upsilon_2,\upsilon_3)\| = d_i$, $i = 1,2,3$ и*

$$\begin{array}{c} G_i(F_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3),F_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3),F_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3)) = \xi_i, \\ F_i(G_1(\upsilon_1,\upsilon_2,\upsilon_3),G_2(\upsilon_1,\upsilon_2,\upsilon_3),G_3(\upsilon_1,\upsilon_2,\upsilon_3)) = \upsilon_i \end{array} \tag{20}$$

за $i = 1,2,3$.

Още повече $\upsilon_i = F_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ и $\xi_i = G_i(\upsilon_1,\upsilon_2,\upsilon_3)$ за $i = 1,2,3$. За всяко произволно избрано $\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},x_2^{(0)}\right)$ в сила са $\lim_{n\to\infty} x_i^{(2n)} = \xi_i$, $\lim_{n\to\infty} x_i^{(2n+1)} = \upsilon_i$ за $i = 1,2,3$ и $\sum_{i=1}^{3} \|\xi_i - \upsilon_i\| = d$.

Ако в допълнение модулът на изпъкналост δ е от степенен тип с константи $C > 0$ и $q > 1$, то в сила са

*29.*i) *„а приори“ оценка на грешката*

$$\max_{i=1,2,3}\left\{\left\|\xi_i - x_i^{(2m)}\right\|\right\} \le P_{0,1}(x)\sqrt[q]{\frac{W_{0,1}(x)}{Cd}} \cdot \frac{\left(\sqrt[q]{k^2}\right)^m}{1-\sqrt[q]{k^2}}$$

*29.*ii) *„а постериори“ оценка на грешката*

$$\max_{i=1,2,3}\left\{\left\|\xi_i - x_i^{(2n)}\right\|\right\} \le P_{2n,2n-1}(x)\sqrt[q]{\frac{W_{2n,2n-1}(x)}{Cd}} \cdot \frac{\sqrt[q]{k}}{1-\sqrt[q]{k^2}},$$

където $x = (x_1,x_2,x_3)$ и $x_i = \{x_i^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ за $i = 1,2,3$ са редиците, дефинирани в Определение 57.

Варианти на резултатите от [2, 9, 46] са следствия на Теорема 29.

Пазарно равновесие в олигополия с трима участника

Ще представим обобщение на модела на дуополия като разгледаме олигополия с три фирми.

Следвайки [24], нека приемем, че съществуват три фирми, конкуриращи се за едни и същи потребители и стремящи се да удовлетворят нуждите на пазара. Нека функциите на печалба за трите фирми са

$$\Pi_i(x) = x_i P(\sum_{i=1}^{3} x_i) - c_i(x_i), \quad \text{и} \quad i = 1,2,3.$$

Целта на всеки от участниците е да максимизира печалбата си, т.е.

$$\max\{\Pi_i(x) : x_i,\ \text{приемайки, че } x_j \ \text{ за } \ j \neq i \text{ са фиксирани}\}.$$

Ако функциите P и c_i, $i = 1,2,3$ са диференцируеми, то получаваме системата от уравнения

$$\frac{\partial \Pi_i(x)}{\partial x_i} = P\left(\sum_{i=1}^{3} x_i\right) + x_i P'\left(\sum_{i=1}^{3} x_i\right) - c_i'(x_i) = 0, \quad i = 1,2,3. \tag{21}$$

Производственото равновесие при трима участника е решение на (21) [24].

Можем да запишем в неявна форма функциите на реакция, използвайки (21), т.е. $x_i = \frac{c_i'(x_i) - P(\sum_{i=1}^{3} x_i)}{P'(\sum_{i=1}^{3} x_i)} = F_i(x)$ за $i = 1,2,3$ и да сведем задачата за максимизиране на печалбата към задача за съществуване на тройки неподвижни точки.

Полуциклични наредени тройки от изображения

Определение 60. *Нека A_i, $i = 1, 2, 3$ са непразни подмножества на метричното пространство (X, ρ) и $F = (F_1, F_2, F_3)$ е наредена тройка от изображения. Ако $F_i : A_1 \times A_2 \times A_3 \to A_i$, $i = 1, 2, 3$, то наредената тройка от изображения $F = (F_1, F_2, F_3)$ наричаме полуциклична наредена тройка от изображения.*

Определение 61. *Нека A_i, $i = 1, 2, 3$ са непразни подмножества на метричното пространство (X, ρ) и (F_1, F_2, F_3) е полуциклична наредена тройка от изображения, т.е. $F_i : A_1 \times A_2 \times A_3 \to A_i$, $i = 1, 2, 3$. Наредената тройка $x = (x_1, x_2, x_3) \in A_1 \times A_2 \times A_3$ наричаме тройка неподвижни точки на (F_1, F_2, F_3), ако $x_i = F_i(x)$ за $i = 1, 2, 3$.*

Определение 62. *Нека A_i, $i = 1, 2, 3$ са непразни подмножества на X. Нека $F_i : A_1 \times A_2 \times A_3 \to A_i$, $i = 1, 2, 3$ е полуциклична наредена тройка от изображения. За всяка наредена тройка $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}\right) \in A_1 \times A_2 \times A_3$ дефинираме редиците $\left\{x_i^{(n)}\right\}_{n=0}^{\infty}$, $i = 1, 2, 3$ с*

$$x_i^{(n+1)} = F_i\left(x_i^{(n)}, x_i^{(n)}, x_i^{(n)}\right)$$

за всяко $n \geq 0$ и всяко $i = 1, 2, 3$.

Определение 63. *Нека A_i, $i = 1, 2, 3$ са непразни подмножества на метричното пространство (X, ρ). Нека съществува подмножество $D \subseteq A_1 \times A_2 \times A_3$ и изображения $F_i : D \to A_i$ за $i = 1, 2, 3$, удовлетворяващи $(F_1(x), F_2(x), F_3(x)) \subseteq D$ за всяко $x \in D$. Наредената тройка от изображения (F_1, F_2, F_3) наричаме полуциклична свиваща наредена тройка от изображения, ако съществуват неотрицателни числа $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, $i = 1, 2, 3$, така че $\max\left\{\sum_{i=1}^{3}\alpha_i, \sum_{i=1}^{3}\beta_i, \sum_{i=1}^{3}\gamma_i\right\} < 1$ и в сила е неравенството*

$$\sum_{i=1}^{3} \rho(F_i(x_i, y_i, z_i), F_i(u_i, v_i, t_i)) \leq \sum_{i=1}^{3} (\alpha_i \rho(x_i, u_i) + \beta_i \rho(y_i, v_i) + \gamma_i \rho(z_i, t_i))$$

за всички $(x_i, y_i, z_i), (u_i, v_i, t_i) \in D$, $i = 1, 2, 3$.

Теорема 30. *Нека A_i, $i = 1, 2, 3$ са непразни подмножества на пълното метрично пространство (X, ρ). Нека (F_1, F_2, F_3) е полуциклична свиваща наредена тройка от изображения за някое затворено подмножество $D \subseteq A_1 \times A_2 \times A_3$ и някои константи $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, $i = 1, 2, 3$. Тогава съществува единствена наредена тройка (ξ_1, ξ_2, ξ_3) в D, която е тройка неподвижни точки за (F_1, F_2, F_3). Още повече итеративните редици $\left\{x_i^{(n)}\right\}_{n=0}^{\infty}$, $i = 1, 2, 3$, дефинирани в Определение 62 са сходящи съответно към ξ_i за всяка произволно избрана точка $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}\right) \in D$. В сила са*

*30.*i) *„а приори“ оценка на грешката* $\max\limits_{i=1,2,3}\{\rho(x_i^{(n)}, \xi_i)\} \leq \dfrac{k^n}{1-k}\sum\limits_{i=1}^{3}\rho(x_i^{(1)}, x_i^{(0)})$

*30.*ii) *„а постериори“ оценка на грешката* $\max\limits_{i=1,2,3}\{\rho(x_i^{(n)}, \xi_i)\} \leq \dfrac{k}{1-k}\sum\limits_{i=1}^{3}\rho(x_i^{(n-1)}, x_i^{(n)})$

*30.*iii) *скоростта на сходимост на редицата от последователни приближения е*

$$\sum_{i=1}^{3}\rho(x_i^{(n)}, \xi_i) \leq k\sum_{i=1}^{3}\rho(x_i^{(n-1)}, \xi_i),$$

където $k = \max\{\sum_{i=1}^{3}\alpha_i, \sum_{i=1}^{3}\beta_i, \sum_{i=1}^{3}\gamma_i\}$.

Ако в допълнение $A_1 = A_2 = A_3$ и $F_2(x,y,z) = F_1(y,z,x)$ и $F_3(x,y,z) = F_1(z,x,y)$, то (x,y,z) удовлетворява $x = y = z$.

Съществуване и единственост на пазарно равновесие в олигополия с три фирми

Пример 25. *Нека имаме олигопола с три фирми, конкуриращи се за едни и същи потребители, произвеждащи една стока, която е взаимно заменяема в количества съответно x_i, $i = 1,2,3$.*

Нека функциите на реакция за участниците са съответно

$$F_1(x_1,x_2,x_3) = \frac{90}{4} - \frac{x_2+x_3}{4}, \quad F_2(x_1,x_2,x_3) = \frac{80}{6} - \frac{x_1+x_3}{6}, \quad F_3(x_1,x_2,x_3) = \frac{70}{8} - \frac{x_2+x_3}{8}$$

и $A_1 = [0,30]$, $A_2 = [0,40]$, $A_3 = [0,50]$.

Следователно съществува производство (ξ_1,ξ_2,ξ_3), което е пазарно равновесие и за всяко начално състояние на пазара $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$ редиците от последователни приближения са сходящи към (ξ_1,ξ_2,ξ_3). Равновесното производство е наредената тройка $\left(\frac{415}{22}, \frac{205}{22}, \frac{115}{22}\right)$.

Заключение

Основни приноси в настоящия дисертационния труд

I. Обобщен е вариационния принцип на Екеланд за изображения със смесеното монотонно свойство. С помощта на това обобщение са намерени условия за съществуване и условия за единственост на двойки неподвижни точки за класове от изображения със смесеното монотонно свойство и са разширени класовете от задачи, за които съществуват двойки неподвижни точки.

II. Техника за оценка на грешката за точки на най-добро приближение, разработена в [51], е използвана за намиране на оценка на грешката за двойки и тройки точки на най-добро приближение.

III. Доказано е, че за разглежданите до момента циклични изображения двойките неподвижни точки или двойките точки на най-добро приближение (x,y) трябва да удовлетворяват $x = y$. Обобщено е понятието за наредени двойки от циклични изображения като са дефинирани нов тип изображения и точки, наречени съответно модифицирани циклични изображения и модифицирани двойки точки. Този нов клас от изображения може да се използва и за решаване на несиметрични системи от уравнения. Илюстрирани са примери за намиране на точни решения на системи от трансцендентни уравнения, за които приближените методи, използвани в алгебричната компютърна система Maple 18.00 не могат да открият точното решение.

IV. Обобщено е понятието за точки на най-добро приближение в модуларни функционални пространства. Използвайки възможните обобщения на модул на изпъкналост в модуларни функционални пространства са доказани обобщения на ключовите за тематиката Леми на Елдред и Веермани. Техниката за изследване на точки на най-добро приближение в модуларни функционални пространства, разработена в [50], е приложена при изследване на двойки точки на най-добро приближение в модуларни функционални пространства. Илюстрирано е приложение при решаване на системи от уравнения, за които приближените методи, използвани в алгебричната компютърна система Maple 18.00 не могат да открият точното решение.

V. Въведено е понятието за наредена двойка полуциклични изображения, което по естествен начин възниква при изследване на пазарно равновесие в олигополни пазари. Представен е нов модел за изследване на съществуване и единственост на пазарно равновесие в дуополни пазари, който се основава на функциите на реакция. Илюстрациите демонстрират предимствата му пред класическия модел за максимизиране на функциите на печалба, чрез отпадане на необходимостта от диференцируемост, изследване по контура на множествата на възможни производства и получаване на условия за стабилност на процеса от последователни промени на производствата.

VI. Разгледана е възможност за обобщение на част от изследваните задачи в глави 2-5 за тройки неподвижни точки, тройки точки на най-добро приближение и тяхното при изследване на олигополни пазари с трима участника с помощта на полуциклични изображения на три променливи.

Списък на публикациите по дисертационния труд

1 L. Ajeti, B. Zlatanov: Coupled fixed points results for Hardy–Rogers type of maps with the mixed monotone property obtained with the help of a variational technique. *MATTEX 2022, CONFERENCE PROCEEDING*, ISSN: 1314-3921, (2022) (под печат)

2 Y. Dzhabarova, S. Kabaivanov, M. Ruseva, B. Zlatanov: Existence, Uniqueness and Stability of Market Equilibrium in Oligopoly Markets, *Administrative Sciences* **10**(3), Article number 70, (2020), ISSN:2076-3387 (Web of Science, SCOPUS)

3 Y. Dzhabarova, B. Zlatanov: A Note on the Market Equilibrium in Oligopoly with Three Industrial Players, *AIP Conference Proceedings*, (Web of Science, SCOPUS, SJR=0.19) (под печат)

4 G. Gecheva, M. Hristov, D. Nedelcheva, M. Ruseva, B. Zlatanov, Applications of Coupled Fixed Points for Multivalued Maps in the Equilibrium in Duopoly Markets and in Aquatic Ecosystems. *Axioms* **10**(2), Article number 44, (2021), ISSN 2075-1680 (Web of Science IF=1.824, Q2, SCOPUS, SJR=0.314, SCOPUS, SJR=0.314, Q3)

5 M. Hristov, A. Ilchev, B. Zlatanov: Coupled fixed points for Chatterjea type maps with the mixed monotone property in partially ordered metric spaces. *AIP Conference Proceedings*, 2172, Article number 060003 (2019), ISSN 0094-243X, ISSN 1551-7616, (Web of Science, SCOPUS, SJR=0.182)

6 M. Hristov, A. Ilchev, B. Zlatanov: On some application on coupled and best proximity points theorems. *AIP Conference Proceedings*, 2333, Article number 080008 (2021), ISSN 0094-243X, ISSN 1551-7616 (Web of Science, SCOPUS, SJR=0.19)

7 M. Hristov, A. Ilchev, D. Nedelcheva, B. Zlatanov: Existence of Coupled Best Proximity Points of p–Cyclic Contractions. *Axioms*, **10**(1), Article number 39, (2021), ISSN 2075-1680, (Web of Science IF=1.824, Q2, SCOPUS, SJR=0.314, Q3)

8 A. Ilchev, B. Zlatanov: Coupled Fixed Points and Coupled best Proximity Points in Modular Function Spaces, *International Journal of Pure and Applied Mathematics* **118**(4), (2018) 957-977, ISSN: 1311-8080 (printed), ISSN: 1314-3395 (online)

9 A. Ilchev, B. Zlatanov: Coupled Fixed Points and Coupled Best Proximity Points for Cyclic Kannan Type Contraction Maps in Modular Function Spaces. *MATTEX 2018, CONFERENCE PROCEEDING*, **v.1**, 75–88, (2018), ISSN: 1314-3921

10 A. Ilchev, B. Zlatanov: Error estimates for approximation of coupled best proximity points for cyclic contractive maps, Applied Mathematics and Computation, **290**, 412–425 (2016), ISSN: 0096-3003

(printed), ISSN:1873-5649 (online); (Web of Science, IF=1.738, Q1; SCOPUS, SJR=0.944, Q1, Zbl 1410.41010, MR3523439)

11 S. Kabaivanov, V. Zhelinski, B. Zlatanov. Coupled Fixed Points for Hardy–Rogers Type of Maps and Their Applications in the Investigations of Market Equilibrium in Duopoly Markets for Non-Differentiable, Nonlinear Response Functions, *Symmetry* **14**(3), Article number 605, (2022), ISSN: 2073-8994 (online), (Web of Science, IF=2.94, Q2; SCOPUS, SJR=0.385, Q2)

12 S. Kabaivanov, B. Zlatanov: A variational principle, coupled fixed points and market equilibrium, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, **26**(1), 169-185, , (2021), ISSN: 1392-5113 (printed), ISSN: 2335-8963 (online); (Web of Science, IF=2.217, Q1; SCOPUS, SJR=0.757, Q2, Zbl 07357592, MR4195512).

13 B. Zlatanov: Best proximity points in modular function spaces, *Arabian Journal of Mathematics*, **4**(3), 215–227 (2015), ISSN: 2193-5343 (printed), ISSN: 2193-5351 (online); (Web of Science, SCOPUS, Zbl 1325.47103, MR3399285)

14 B. Zlatanov: Error Estimates for Approximating of Best Proximity Points for Cyclic Contractive Maps, Carpathian J. Math., **32**(2), 241–246 (2016), Carpathian Journal of mathematics **32**(2), 265-270, (2016), ISSN:1843-4401 (online); (Web of Science, IF=0.788, Q2; SCOPUS, SJR=0.457, Q2, Zbl 1424.46023, MR3587895)

15 B. Zlatanov: A Variational Principle and Coupled Fixed Points, *Journal of Fixed Point Theory and Applications* 21:69, (2019), ISSN:1661-7738, (printed) ISSN:1661-7746 (online); (Web of Science, IF=1.741, Q1; SCOPUS, SJR=0.642, Q2, Zbl 1474.54291, MR3950777)

16 B. Zlatanov: Coupled best proximity points for cyclic contractive maps and their applications, Fixed Point Theory, **22**(1), 431-452 (2021), ISSN 1583-5022, ISSN (online) 2066-9208 (online); (Web of Science, IF=1.396, Q1; SCOPUS, SJR=0.68, Q2, MR4269039, Zbl 07370686).

17 B. Zlatanov: On a Generalization of Tripled Fixed or Best Proximity Points for a Class of Cyclic Contractive Maps, FILOMAT, **35**(9), 3015-3031, (2021), ISSN 0354-5180, (Web of Science, IF=0.988, Q2; SCOPUS, SJR=0.449, Q2, MR4365419)

18 B. Zlatanov: On some applications of coupled fixed (or best proximity) points, *MATTEX 2020, CONFERENCE PROCEEDING, 25–27 October 2020*, **v.1**, 3–19, (2020), ISSN: 1314-3921

Апробация на получените резултати

Част от резултатите са докладвани в доклад по покана на *MATTEX 2020, CONFERENCE PROCEEDING, 25–27 October 2020* в [52].

а) L. Ajeti, B. Zlatanov: Coupled fixed points results for Hardy–Rogers type of maps with the mixed monotone property obtained with the help of a variational technique, *MATTEX 2022, Shumen, Bulgaria, 12–14 May 2022*

б) Y. Dzhabarova, B. Zlatanov: A Note on the Market Equilibrium in Oligopoly with Three Industrial Players, *Tenth International Conference Techsys 2021, Plovdiv, Bulgaria 27–29 May 2021*

в) M. Hristov, A. Ilchev, B. Zlatanov: Coupled fixed points for Chatterjea type maps with the mixed monotone property in partially ordered metric spaces. 45*th International Conference on Applications of Mathematics in Engineering and Economics, AMEE 2020, Sozopol, Sofia, 7-13 June 2019* г) M. Hristov, A. Ilchev, B. Zlatanov: On some application on coupled and best proximity points theorems. 46*th International Conference on Applications of Mathematics in Engineering and Economics, AMEE 2020, Sozopol, Sofia, 7-13 June 2020*

д) A. Ilchev, B. Zlatanov: Coupled Fixed Points and Coupled Best Proximity Points for Cyclic Kannan Type Contraction Maps in Modular Function Spaces, *MATTEX 2018, Shumen, Bulgaria, 22–24 October 2018*

е) B. Zlatanov: On some applications of coupled fixed (or best proximity) points, *MATTEX 2020, Shumen, Bulgaria, 22–24 October 2020*

Връзката между приносите, задачите, мястото на описание в дисертационния труд и направените публикации

Принос	Глава	Параграф	Статия	Доклад
I	1	4.5	2,3,5,6	а),в),е)
II	1,5	4.2,4.3,4.4,4.7	2,6,7,10,15,17,18	г),е)
III		2.3	17	г),е)
IV	3		5,8,9,11,14	д),е)
V	4,5		2,3,4,12,13	е)
VI	5		2,18	б)

Благодарности

Изказвам своята дълбока благодарност и признателност към моите учители и научни ръководители академик Станимир Троянски и проф. Румен Малеев за всичко, на което ме научиха докато се обучавах като студент и после в докторантура и след успешната защита през 2001.

Изказвам благодарност към съавторите си, съвместната работа с които обогати тематиката на изследванията ми.

Искам да благодаря на колегите от катедрата и от факултета за подкрепата в годините, през които работя във ФМИ при Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“

Изказвам благодарност и към своето семейство, което винаги ме е подкрепяло и насърчавало.

Литература

[1] M. Akio and F. Szidarovszky. *Dynamic Oligopolies with Time Delays.* Springer Nature Singapore Pte Ltd., Singapore, 2018.

[2] A. Amini-Harandi. Coupled and tripled fixed point theory in partially ordered metric spaces with application to initial value problem. *Mathematical and Computer Modelling*, 57(9–10):2343—-2348, 2013.

[3] J. Andaluz, A.A. Elsadany, and G. Jarne. Dynamic Cournot oligopoly game based on general isoelastic demand. *Mathematical and Computer Modelling*, 99(2):1053–1063, 2020.

[4] H. Aydi, E. Karapinar, and M. Postolache. Tripled coincidence point theorems for weak ϕ–contractions in partially ordered metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, 2012:Article number 44, 2012.

[5] S. Banach. Sur les opérations dan les ensembles abstraits et leurs applications aux integrales. *Fund. Math.*, 3:133–181, 1922.

[6] V. Berinde. *Iterative Approximation of Fixed Points.* Springer, Berlin, 2007.

[7] V. Berinde. Generalized coupled fixed point theorems for mixed monotone mappings in partially ordered metric spaces. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 74(18):7347–7355, 2011.

[8] V. Berinde. Coupled fixed point theorems for ϕ–contractive mixed monotone mappings in partially ordered metric spaces. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 75(6):3218–3228, 2012.

[9] V. Berinde and M. Borcut. Tripled fixed point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 74(15):4889—4897, 2011.

[10] V. Berinde and M. Păcurar. A constructive approach to coupled fixed point theorems in metric spaces. *Carpathian Journal of Mathematics*, 31(3):277–287, 2015.

[11] T. Bhaskar and V. Lakshmikantham. Fixed point theorems in partially ordered metric spaces and applications. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 65(7):1379–1393, 2006.

[12] M. Borcut, M. Pscurar, and V. Berinde. Tripled fixed point theorems for mixed monotone Kannan type contractive mappings. *Applied Mathematics and Computation*, 2014:Article number 120203, 2014.

[13] J. Borwein and Q. Zhu. *Techniques of Variational Analysis.* Springer, CMS Books in Mathematics, 2005.

[14] B.S. Choudhury and Pranati Maity. Cyclic coupled fixed point result using Kannan type contractions. *Journal of Operators*, 2014:Article number 876749, 2012.

[15] J.A. Clarkson. Uniformly convex spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 40(3):394–414, 1936.

[16] R. Deville, G. Godefroy, and V. Zizler. *Smoothness and Renormings in Banach Spaces.* Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. Longman Scientific and Technical, Harlow, copublished in the United States with John Wiley & Sons, Inc., New York, 1993.

[17] A. Dontchev and W. Hager. An inverse mapping theorem for set-valued maps. *Administrative Sciences*, 10(3):Article number 70, 2020.

[18] I. Ekeland. Remarques sur les problémes variationnels I. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Série A*, 275:1057–1059, 1972.

[19] I. Ekeland. Remarques sur les problémes variationnels II. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Série A*, 276:1347–1348, 1973.

[20] I. Ekeland. On the variational principle. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 47(2):324–353, 1974.

[21] I. Ekeland. Nonconvex minimization problems. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, 1(3):443–474, 1979.

[22] A. Eldred and P. Veeramani. Existence and convergence of best proximity points. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 323(2):1001–1006, 2006.

[23] A. Fernandez-Leon and M. Gabeleh. Best proximity pair theorems for noncyclic mappings in Banach and metric spaces. *Fixed Point Theory*, 17(1):63–84, 2016.

[24] James W. Friedman. *Oligopoly Theory*. Cambradge University Press, Cambradge, 2007.

[25] B. Gian-Italo, C. Chiarella, M. Kopel, and F. Szidarovszky. *Nonlinear Oligopolies Stability and Bifurcations*. Springer, Berlin and Heidelberg, 2010.

[26] D. Guo and V. Lakshmikantham. Coupled fixed points of nonlinear operators with application. *Nonlinear Analysis*, 11(5):623–632, 1987.

[27] A. Gupta, S.S. Rajput, and P.S. Kaurav. Coupled best proximity point theorem in metric spaces. *International Journal of Analysis and Applications*, 4(2):201–215, 2014.

[28] A. Ilchev and B. Zlatanov. Error estimates for approximation of coupled best proximity points for cyclic contractive maps. *Applied Mathematics and Computation*, 290:412–425, 2016.

[29] S.B. Nadler (Jr.). Multi–vauled contraction mappings. *Pacific Journal of Mathematics*, 30(2):475–488, 1969.

[30] A. Kaminska. On uniform convexity of Orlicz spaces. *Indagationes Mathematicae*, 44(1):27–36, 1982.

[31] S. Karpagam and Sushama Agrawal. Best proximity point theorems for p–cyclic Meir–Keeler contractions. *Fixed Point Theory and Applications*, 6(1):Article number 197308, 2009.

[32] S. Karpagam and Sushama Agrawal. Existence of best proximity points of p–cyclic contractions. *Fixed Point Theory*, 13(1):99–105, 2012.

[33] M.A. Khamsi and W.M. Kozlowski. *Fixed Point Theory in Modular Function Spaces*. Birkh user Cham, Basel, Switzerland, 2015.

[34] M.A. Khamsi, W.M. Kozlowski, and C. Shutao. Some geometrical properties and fixed point theorems in Orlicz spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 155(2):393–412, 1991.

[35] W. Kirk, P. Srinivasan, and P. Veeramani. Fixed points for mappings satisfying cyclical contractive conditions. *Fixed Point Theory*, 4(1):79–89, 2016.

[36] O. Koji and F. Szidarovszky. *The Theory of Oligopoly with Multi–Product Firms*. Springer, Berlin–Heidelberg, 1990.

[37] W.M. Kozlowski. *Modular Function Spaces*. Marcel Dekker Inc, New York, 1988.

[38] W.M. Kozlowski. Notes on modular function spaces I. *Commentationes Mathematicae*, 28:91–104, 1988.

[39] W.M. Kozlowski. Notes on modular function spaces II. *Commentationes Mathematicae*, 28:105–120, 1988.

[40] W.M. Kozlowski. Advancements in fixed point theory in modular function spaces. *Arabian Journal of Mathematics*, 1(4):477–494, 2012.

[41] J. Musielak and W. Orlicz. On modular spaces. *Studia Mathematica*, 18(1):49–65, 1959.

[42] H. Nakano. *Modular Semi–Ordered Spaces.* Maruzen, Tokyo, 1950.

[43] V.O. Olisama, J.O. Olaleru, and H. Olaoluwa. Quadruple best proximity points of q–cyclic contraction pair in abstract metric spaces. *Asian Journal of Mathematics and Applications*, 2015:Article number ama0206, 2015.

[44] M. Petric. *Fixed points and best proximity points theorems for cyclical contractive operators.* PhD Thesis, University of Baia Mare, Baia Mare, 2011.

[45] M. Petric and B. Zlatanov. Fixed point theorems of Kannan type for cyclical contractive condition. In *REMIA December 2010*, pages 187–194. Plovdiv, Plovdiv University, Faculty of Mathematics and Informatics, 2010.

[46] B. Samet and C. Vetro. Coupled fixed point, f–invariant set and fixed point of n–order. *Annals of Functional Analysis*, 1(2):46–56, 2010.

[47] M. Shoaib, M. Sarwar, and C. Tunc. Coupled fixed point theorem for multi-valued mapping via generalized contraction in partially ordered metric spaces with applications. *Journal of Mathematical Analysis*, 8(5):27–39, 2017.

[48] W. Sintunavarat and P. Kumam. Coupled best proximity point theorem in metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, 2012:Article number 93, 2012.

[49] Alasdair Smith. *Mathematical Introduction to Economics.* Basil Blackwell Limited, Oxford, 1987.

[50] B. Zlatanov. Best proximity points in modular function spaces. *Arabian Journal of Mathematics*, 4(3):215–227, 2015.

[51] B. Zlatanov. Error estimates for approximating of best proximity points for cyclic contractive maps. *Carpathian Journal of Mathematics*, 32(2):241–246, 2016.

[52] B. Zlatanov. On some applications of coupled fixed (or best proximity) points. In *MATTEX 2020, CONFERENCE PROCEEDING, 25–27 October 2020*, pages 3–19. Shumen, Bulgaria, Shumen University "Bishop Konstantin Preslavski", 2020.

[53] B. Zlatanov. Coupled best proximity points for cyclic contractive maps and their applications. *Fixed Point Theory*, 22(1):431–452, 2021.

[54] А. Илчев. *Върху някои класове циклични оператори с двойки точки на най-добро приближение.* Дисертационен труд за присъждане на образователна и научна степен „Доктор“, Пловдивски университет „Паисий хилендарски“, Пловдив, 2018.