

Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“  
Факултет по математика и информатика  
Катедра „Математически анализ“

---

Стефани Апостолова Панайотова

МАТЕМАТИЧЕСКО МОДЕЛИРАНЕ И  
КОМПЮТЪРНИ СИМУЛАЦИИ НА НЕЛИНЕЙНИ  
МНОГОПАРАМЕТРИЧНИ ФИЗИЧНИ ЗАДАЧИ

Автореферат  
на дисертационен труд

за присъждане на образователна и научна степен “Доктор”  
в област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика  
Професионално направление 4.5 Математика  
Докторска програма: Математическо моделиране и приложение на математиката

Научени ръководители:  
**Проф. д.м.н. Снежана Георгиева Гочева-Илиева**  
**доц. д-р Павлина Христова Атанасова**

Пловдив  
2022 г.

Дисертационният труд е обсъден и насрочен за защита на разширен катедрен съвет на катедра “Математически анализ” при Факултет по математика и информатика на Пловдивски университет “Паисий Хилендарски”, град Пловдив, проведен на 21.02.2021 г.

Дисертационният труд е с обем от 113 страници. Състои се от увод, четири глави, заключение и библиография от 99 източника. Списъкът на публикациите по дисертационния труд включва 8 заглавия.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на 03.06.2022 г. от ..... часа в Заседателната зала на Нова сграда на Пловдивския университет “Паисий Хилендарски” на открито заседание на научно жури в състав:

1. Проф. д.м.н. Стефка Николаева Димова-Боршукова
2. Проф. д.м.н. Николай Колев Витанов
3. Доц. д-р Велика Николаева Кунева
4. Доц. д-р Христина Николова Кулина
5. Проф. д.м.н. Снежана Георгиева Гочева-Илиева

Номерацията на формулите, цитиранията, примерите, таблиците и фигурите съвпада с тяхната номерация в дисертационния труд,

Материалите по защитата са на разположение на интересуващите се в секретариата на ФМИ, нова сграда на ПУ, каб. 330, всеки работен ден от 10:30 до 16:00 часа.

**Автор на дисертационния труд:** Стефани Апостолова Панайотова

**Заглавие:** Математическо моделиране и компютърни симулации на нелинейни многопараметрични физични задачи

## Съдържание

УВОД.....	4
0.1 Исторически обзор.....	4
0.2 Цели и задачи на дисертационния труд.....	6
КРАТКО СЪДЪРЖАНИЕ НА ДИСЕРТАЦИОННИЯ ТРУД.....	9
1 ГЛАВА. Обзор на използваните в дисертационния труд математически методи ..	9
1.1 Основни сведения от хармоничния анализ и редовете на Фурие .....	9
1.2 Задача на Коши за системи обикновени диференциални уравнения .....	9
1.3 Числени методи за решаване на системи обикновени диференциални уравнения от първи ред.....	9
2 ГЛАВА. Решаване на нелинейни операторни уравнения и системи .....	10
2.1 Числен анализ на магнитния поток в дълги джозефсонови контакти .....	10
2.2 Числено изследване на динамиката на магнитния момент за наномагнит в близост до джозефсонов контакт .....	11
2.3 Числено изследване на динамиката на магнитните моменти по пространствените координати на джозефсонов контакт .....	12
3 ГЛАВА. Числено изследване на магнитната прецесия в джозефсонов контакт под влияние на външен ток .....	13
3.1 Числено изследване за твърдост .....	13
3.2 Честота и периодичност на магнитното обръщане под влияние на физичните параметри .....	15
3.3 Анализ на времето за проявление на магнитно обръщане .....	16
3.4 Числени паралелни симулации върху проявата на магнитно обръщане .....	16
4 ГЛАВА. Аналитични решения и числено изследване върху нелинейни модели на системи от дълги джозефсонови контакти .....	17
4.1 Аналитични решения .....	17
4.2 Проверка на условията за получаване на конкретно аналитично решение ..	18
4.3 Анализ на потенциала /Фазови портрети/ .....	20
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	21
Резюме на получените резултати .....	21
Претенции за научни и научно-приложни приноси .....	22
Публикации по темата на дисертационния труд .....	23
Библиография.....	27

## УВОД

Напредъкът на науката и технологичното развитие е пряко свързано с възможността за математическо моделиране на сложни процеси. Математическото моделиране чрез компютърни симулации и числен анализ е способ за по-ефективни научни изследвания. Целта на този подход е откриване на зависимости между съществените параметри на модела, описващ даден реален процес и установяване на нови закономерности за изследвания модел. Научните изследвания са в основата на изграждането на нови технологии, базирани на установените закономерности. Изследването на самия обект чрез математическия модел, който го описва, прави възможно по-бързото и достатъчно точно изучаване на неговите свойства.

### 0.1 Исторически обзор

Основната цел на този параграф е да представи кратък преглед в исторически план на мястото и значението на ефекта на Джозефсон за физиката на кондензираната материя. Един от най-ярките макроскопически квантови ефекти, открит през 20 век, е ефектът на Джозефсон (наличието на специфичен компонент суперток  $I_S$  в нетния електрически ток  $I$ , протичащ през слаб електрически контакт). През 1962 г. Брайън Д. Джозефсон – тогава докторант от университета в Кеймбридж прогнозира, че няколко нови явления “вероятно” трябва да се наблюдават в слаб електрически контакт (сега наричан джозефсонов контакт) между два свръхпроводника. Джозефсон предсказва, че свръхтокът  $I_S$  трябва да бъде свързан с напрежението  $V$  на контакта чрез много «необичайна» формула, която следва директно от основните идеи на квантовата механика и съдържа константата на Планк  $\hbar$  [44]. Физиците-експериментатори Андерсон и Роуел потвърждават този ефект през 1963 [2]. За това свое откритие Б. Д. Джозефсон получава нобелова награда по физика, което го прави един от шестимата нобелисти, имащи фундаментални приноси в областта на свръхпроводимостта [67]. Ще отбележим, че неговите резултати имат по-приложен характер и са в основата на създаването на редица нови технологии.

В началото на 70-те години на миналия век става все по-очевидно, че е много удобно да се раздели теорията на джозефсоновите контакти на две отделни части: тази свързана с физиката на кондензираната материя и такава свързана с електромагнитната динамика. Целта на физиката на кондензираната материя е да се изградят адекватни модели и да се получат явни формули, свързващи функциите  $I(t)$  (силата на тока) и  $V(t)$  (напрежението на тока) от теорията на свръхпроводимостта, докато тази на електромагнитната динамика е да опише, на базата на получените формули, различните явления, наблюдавани в контактите на Джозефсон, и в технологичните вериги, съдържащи джозефсонови контакти. Ще отбележим, че частта на електромагнитната динамика от общата теория се оказва доста по-сложна, отколкото изградената на базата на физиката на кондензираната материя. Независимо от това, някои доста адекватни модели на връзката  $I(t) - V(t)$  са били представени и експериментално валидирани и преди 1970 г. Основното, което трябва да се подчертае, че е била изградена надеждна микроскопска теория за най-важния тип джозефсонови контакти, тези от тунелен тип. (виж, например [48, 15] )

Проблемите свързани с електромагнитната динамика са значително по-сложни главно поради наличието на следните два фактора.

- Първият основен проблем е, че свръхтокът на Джозефсон има много необичайна и силно нелинейна зависимост от електромагнитното поле.

- Вторият основен проблем е изключително високата чувствителност на свръхтока към електромагнитното поле, която води до неговата висока чувствителност към флуктуациите на електромагнитното поле и значителен брой от наблюдаваните свойства на връзките не могат да бъдат обяснени без отчитане на тези флуктуации.

На практика наличието на тези фактори наложи почти повсеместно изучаването на голяма част от динамичните явления, включително някои свързани с тях ефекти, които са от общо значение за съвременната физика, да се провежда на базата на числен анализ на моделите и тяхната експериментална проверка. Това се оказва продължителен процес, който продължава активно и понастоящем. Достатъчно е да споменем само някои от тях: модели описвани с хаотични системи (нелинейни), които макар и детерминирани показват силна чувствителност към началните условия (наличие на странни фатрактори, точки на бифуркация и т.н), вторични квантови макроскопични ефекти, включително макроскопично квантово тунелиране и интерференция, нови взаимодействия между класическата и квантова динамика, статистика на различен тип решения на моделите – солитони и т.н, фазови преходи в масиви от взаимно заключващи фази осцилатори, и анализ на перколационни модели (разглеждат се спадането на повърхностния потенциал на електретите не като обмен, а като повърхностен процес). Основната част от научните изследвания в днешно време са посветени на ефекта на Джозефсон и условно могат да бъдат разпределени в две направления [49, 15]. В първото, с помощта на различни подходи, провеждане на различни изчисления на тока на Джозефсон като основно те са концентрирани върху влиянието от анизотропията и многоленовите ефекти на свръхпроводящото състояние на различните типове джозефсонови контакти и тяхното отражение върху тока на Джозефсон; експериментално установяване на физически параметри, необходими за производство на джозефсонови контакти, и изследването на тяхното влияние върху фундаменталното съотношението ток-фаза (СТФ). Във второто направление се изследват динамичните свойства на джозефсоновите контакти основно чрез числен анализ на съответните математическите модели. Тези изследвания са концентрирани върху макроскопичните квантови ефекти на джозефсоновите контакти, както и влиянието на анхармоничното STF върху динамиката на Джозефсон, което е предмет и на част от изследванията в настоящия дисертационен труд.

Актуална представа относно съвременните изследвания на динамиката на Джозефсон и свръхпроводимостта, както и за участието на български учени в тези изследвания, може да се получи от монографията [42], както и от съдържащата се в нея библиография.

## 0.2 Цели и задачи на дисертационния труд

В XXI-ви век една от актуалните сфери на науката е нанофизиката, а в приложен аспект съвременната наноелектроника е една от най-бързо развиващите семодерни области на пряко технологично приложение на фундаменталните изследвания в областта на физиката на кондензираната материя и по-специално на джозефсоновите контакти в различни материали. Настоящият дисертационен труд е посветен основно на математическото моделиране на джозефсонови контакти и структури от свръхпроводящата спинтроника. Голяма част от изследванията са проведени с помощта на компютърни симулации на разглежданите утвърдени физични модели, като изследванията са фокусирани основно към динамиката на магнитните моменти в джозефсоновите контакти.

Ще отбележим, че годишно в списанията реферирани от Web of Science се появяват повече 2000 работи посветени на джозефсонови контакти и структури, което ясно показва, че темата на настоящия дисертационен труд е актуална.

Важна роля в тези съображения играят физическите характеристики на магнитния поток  $\varphi$  (фазовата разлика на вълновите функции в свръхпроводящите слоеве), от които зависи токът на Джозефсон. За приложната физика и нанотехнологиите е от съществено значение да се изучават така наречените дълги джозефсонови контакти, които обикновено са система, съставена от два слоя свръхпроводящ метал, разделени от тънък диелектричен слой (тунелна бариера). Основната като размери (най-дългата) част от системата (джозефсонов контакт) се разполага по оста  $x$ , докато по осите  $y$  и  $z$  линейните размери са пренебрежимо малки и в този аспект експериментално е доказано, че магнитният поток в джозефсоновите контакти зависи само от размера му по оста  $x$  в дълъг джозефсонов контакт. Пълният ток през джозефсоновите контакти съдържа компонента, наречен "суперток" (ток на Джозефсон) [51].

Добре известно е, че преобладаващата част от задачите, свързани с магнитните моменти в джозефсонов контакт (поради силната не линейност на техните модели) не могат да бъдат решени аналитично и основен инструмент за тяхното изследване е числения анализ посредством компютърни симулации. Нещо повече, численият анализ на многопараметрични физични задачи от типа на изследваните във втора и трета глава от дисертационния труд може да бъде много труден и дълъг процес. На практика съдържателен е този математически (числен) анализ, който позволява да бъде установена зависимост между някои от физичните параметри на модела и/или прогнозира настъпването на физични явления (ефекти) в резултат на установените зависимости. В този аспект международното сътрудничество с колегите от Обединения Институт по Ядрени Изследвания (ОИЯИ), Дубна, Руска Федерация, проф. дфмн. Елена Земляная, проф. дфмн. Юрий Шукринов, Илхом Рахмонов, Максим Башашин и други, спомогна да се селектират значимите резултати получени от множеството проведени симулации, за което им изказвам моята искрена благодарност.

## **Основна цел на дисертационния труд:**

*Цел на дисертационния труд се явява изследването и получаването на нова фундаментална информация за електродинамичните процеси в джозефсонови структури, и системи в свръхпроводящата спинтроника.*

## **Основни задачи на дисертационния труд:**

1. Провеждане на числен анализ на следните задачи: изследване за твърдост на многопараметрична нелинейна система обикновени диференциални уравнения с начални условия, описваща магнитната прецесия в джозефсонов контакт под влияние на външен ток; анализ на магнитното обръщане, проявяващо се при различни стойности на физичните параметри; изчисляване на времето за проявление в състояние на магнитно обръщане; изследване върху стабилизацията в магнитно обръщане.
2. Разработване на комплекс от програмни модули, които да са имплементирани в потребителски софтуер за компютърна симулация на нелинейни многопараметрични физични диференциални задачи. С тяхна помощ да бъдат проведени изследванията в точки 1 и 3.
3. Прилагане на различни числени методи от явен и неявен за решаване на на физическите модели описвани с нелинейни диференциални уравнения.
4. Изследване на дълги джозефсонови контакти, моделирани с двойно синус-Гордън уравнение със следните цели: получаване на явни аналитични решения за разпределението на магнитния поток  $\varphi$ , при нулев външен ток; анализ на приложимостта на аналитичните решения при различни стойности на параметрите; получаване на фазови портрети и проследяване на тяхната промяна при изменение на физичните параметри.

Уводът се състои от 3 параграфа: §0.1 съдържа кратък исторически обзор; §0.2 кратък обзор на съвременното състояние на изследванията на динамичните свойства на джозефсоновите контакти, актуалността на тематиката. Тук са формулирани целите и задачите на дисертационния труд; §0.3 е даден списък с основните акроними (съкращения).

Глава 1 има реферативен характер и в нея е представен кратък обзор на използваните в дисертационния труд математически методи.

Глава 2 съдържа 4 параграфа и е посветена на изследването на проблеми свързани с динамиката на джозефсоновите контакти. Изследвани са три актуални физични проблема. В §2.1 е изследван магнитният поток в дълъг ДК. В следващия §2.2 изследванията са посветени на динамиката на магнитния момент за наноманит в близост до джозефсонов контакт. В §2.3 е изследвана динамиката на магнитните моменти по пространствените координати на ДК. Представени са резултати от числено изследване на ефекта на магнитно обръщане в зависимост от физическите параметри, а в §2.4 са дадени направените изводи от изследванията представени в глава 2.

Глава 3 е посветена на изследването на магнитната прецесия в джозефсонов контакт под влияние на външен ток, която се описва математически чрез задача на Коши за многопараметрична нелинейна система обикновени диференциални уравнения. Особеното

при използването на методите на числения анализ при това изследване е, че промяната на част от физичните параметри правят системата твърда. Твърдостта на системата изисква, освен използването на явни числени методи, използване и на по-комплицираните неявни числени методи за изследването ѝ. В §3.1 е изследван спинтронен модел на джозефсонов контакт от тип СФС (свръхпроводник-феромагнит-свръхпроводник). В числения анализ, предвид спецификата на проблема (твърдостта на системата), са използвани четиристъпковия метод на Рунге-Кута и двустъпковия метод на Гаус-Лежандър, комбиниран с метода на неподвижната точка. Следващият §3.2 изследва влиянието на параметрите на модела върху обръщането на магнитния момент. Показано е, че реализацията на флип(обръщане) се характеризира с определена периодичност по отношение на величината на въртенето на спин-орбитата, параметърът на затихване на Хилберт и съотношението на енергията на Джозефсон към магнитната енергия. В §3.3. е проведен анализ на времето за проявление на магнитно обръщане при различни физични параметри. Всички изчисления се извършват с помощта на разработения софтуер [9] с внедряване на метода на Гаус-Лежандър за числено решаване на задачата на Коши за системата от нелинейни обикновени диференциални уравнения разгледана в § 3.1. Установено е, че състоянието на системата се нарушава чрез инжектиране на външен ток, след което магнитният момент се стабилизира в едно от стабилните си състояния, за които са описали §3.2, §3.3. В §3.4 са проведени числени паралелни симулации върху проявата на магнитно обръщане въз основата на програмите написани посредством Wolfram mathematica (виж [76]). Актуалността на изследването се дължи на уникалната способност да се контролират магнитните свойства на бариерата в наноструктурите на Джозефсон чрез свръхпроводящ ток, както и от друга страна със способността да влияе на тока на Джозефсон чрез магнитния момент на бариерата. В § 3.5. са изложени изводите от направените изследвания в предходните 4 параграфа.

Глава 4 е посветена на намирането на аналитични решения и числения анализ на нелинейните модели на системи от дълги джозефсонови контакти. Изследванията основно са фокусирани върху разпределението на магнитния поток  $\varphi$  в дълги ДК, който в общия случай се описва със задача на Нойман за “двойното синус-Гордън” уравнение. Изследвани са условията за получаване на конкретно аналитично решение, както и физичните аспекти на задачата, т.е. при какви стойности на амплитудите и енергията се получава конкретното аналитично решение. В §4.1. са получени явни аналитични решения на стационарното двойно синус-Гордън уравнение, моделиращо разпределението на магнитния поток при нулев външен ток в клас дълги джозефсонови контакти. §4.2 е посветен на анализ и проверка на получените експлицитни достатъчни условия гарантиращи съществуването на явни аналитични решения на стационарното двойно синус-Гордън уравнение. В §4.3. е направен анализ на потенциала, чрез визуализиране на фазовите портрети на разгледания модел. Анализирани е връзката на фазовите портрети със стойностите на амплитудите на първата и втората хармонични в реда на Фурие и енергията на системата.



# КРАТКО СЪДЪРЖАНИЕ НА ДИСЕРТАЦИОННИЯ ТРУД

## 1 ГЛАВА. Обзор на използваните в дисертационния труд математически методи

В глава 1 е представен кратък обзор на използваните в дисертационния труд математически методи. Представени необходимите основни факти свързани с хармоничния анализ, като хилбертовите пространства и фуриевия анализ, приведени са основни факти от диференциалните уравнения, както и е направен е и кратък преглед на използваните методи от числения анализ.

### 1.1 Основни сведения от хармоничния анализ и редовете на Фурие

В този параграф сме дали определение за пълно метрично пространство, банахово пространство, хилбертово пространство, сепарабелно хилбертово пространство, характеристична функция както и общи свойства на редовете на Фурие.

### 1.2 Задача на Коши (начална) за системи обикновени диференциални уравнения

Нека разгледаме задача на Коши за системата обикновени диференциални уравнения, записана във векторна форма:

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad (1)$$

където  $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t)) : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  : е неизвестна вектор-функция,  $y'(t) = (y_1'(t), \dots, y_n'(t))^T$ ,  $f(t, y) = (f_1(t, y_1(t), \dots, y_n(t)), \dots, f_n(t, y_1(t), \dots, y_n(t)))^T : [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  където с  $T$  сме означили транспонирания вектор ред. Дефинираме следното начално условие

$$y(t_0) = y^0 \in \mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n) \quad (2)$$

където вектор-функцията  $f$  константния вектор  $y^0$  са дадени да означим  $|y| = \sum_{k=1}^n |y_k|$ ,  $y \in \mathbb{C}^n$ .

**Определение 1.2.1.:** [38]: Системата (1) се нарича твърда, когато за всяко решение  $y(t)$  на задачата (1), (2)  $(t, y(t)) \in [t_0, \infty) \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  собствените стойности  $\lambda_j, j = \overline{1, n}$  на матрицата на Якоби  $J(t) = \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} (t, y(t)) \right\}_{k=1}^n$  задачата на Коши) изпълняват следните условия:

1.  $\text{Re}(\lambda_j) < 0, j = \overline{1, n}$ ,
2.  $C = \max_j |\text{Re}(\lambda_j)| / \min_k |\text{Re}(\lambda_k)| \gg 1$  – коефициент на твърдост.

### 1.2 Числени методи за решаване на системи обикновени диференциални уравнения от първи ред

Представена е обща формулировка на явните и неявни методи на Рунге-Кута.

## 2 ГЛАВА. Решаване на нелинейни операторни уравнения и системи

### 2.1 Числен анализ на магнитния поток в дълги джозефсонови контакти

В най-простия си вид джозефсоновият контакт представлява сандвич, съставен от два слоя свръхпроводящ метал, които са разделени от тънък диелектричен слой (тунелна бариера). Контактът се намира в еднородно магнитно поле  $h_e$ , насочено по оста  $y$ . Разпределението на магнитния поток е физическата мярка за фазовата разлика на вълновите функции в свръхпроводящите слоеве на контакта. Текущата фазова връзка в повечето случаи може да се разглежда като нечетна строга  $2\pi$ -периодична функция и следователно може да бъде представена в ред на Фурие само от синуси. От физическия експеримент е добре известно, че с достатъчна степен на прецизност, редица физически системи са надеждно описани с отчитане на влиянието само на първите две хармоники. В този случай адекватният математически модел за разпределението на магнитния поток  $\varphi(x, t)$  се описва чрез двойното синус-Гордън уравнение, което  $\varphi(x, t)$  удовлетворява в полуивницата  $(x, t) \in (-l, l) \times (0, \infty)$

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = a_1 \sin(\varphi(x, t)) + a_2 \sin(2\varphi(x, t)) - \gamma$$

с гранични условия на Нойман в краищата на контакта. В случая когато се изследва статичен режим на работа на контакта [50], безразмерното разпределение на магнитния поток  $\varphi(x)$  по оста  $x$  в двойното синус-Гордън уравнение се редуцира до нелинейно обикновено диференциално уравнение от вида:

$$\varphi''(x) - a_1 \sin \varphi(x) - a_2 \sin 2\varphi(x) + \gamma = 0, \quad -l < x < l, \quad (13)$$

където контактът е с дължина  $2l$  и  $\gamma$  е големината на външния ток на контакта. Граничните условия на Нойман се редуцират до

$$\frac{d\varphi(l)}{dx} = \frac{d\varphi(-l)}{dx} = h_e, \quad (14)$$

където  $h_e$  е външното магнитно поле, по направление на оста  $y$ .

От квантовата природа на свръхпроводимостта е добре известно, че фермионите-електрони, при определени физически условия, престават да се подчиняват на принципа на Паули и се сдвояват в куперови двойки, които стават носители на свръхтока на Джозефсон. Математическото описание на квантовите състояния в този случай става с помощта на хилбертовото пространство  $\varphi \in L^2([-l, l], \mathbb{C})$ . Физически реално измеримата мярка за тяхната фаза, в случая на ДК, се явява разпределението на магнитния поток  $\varphi$ . Преди всичко, за да получим израза за запазващата се енергия на системата, което ще ни помогне да понижим реда на уравнението в граничната задача (13), (14). За тази цел, използвайки техниката на интегрирания множител и умножаваме двете страни на уравнението (13) с  $\frac{d\varphi(x)}{dx}$  и получаваме

$$\varphi'' \cdot \varphi' - a_1 \sin \varphi \cdot \varphi' - a_2 \sin 2\varphi \cdot \varphi' + \gamma \cdot \varphi' = 0 \quad (15)$$

След елементарни преобразувания получаваме, че уравнението има вида

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{\varphi'^2}{2} + a_1 \cos \varphi + \frac{a_2}{2} \cos 2\varphi + \gamma \varphi \right\} = 0. \quad (16)$$

Интегрирайки веднъж горното уравнение получаваме вида на пълната енергия, която остава константна величина върху решението за разпределението на магнитния поток:

$$\frac{\varphi'^2}{2} + a_1 \cos \varphi + \frac{a_2}{2} \cos 2\varphi + \gamma \varphi = E. \quad (17)$$

Ефективно, пълната енергия винаги има вида на сума от “кинетичен” и “потенциален” член и следователно може да се определи вида на ефективния потенциал, описващ ефективното взаимодействие в консервативната система. От горното уравнение е ясно, че той се дава от израза:

$$V(\varphi) = a_1 \cos \varphi + \frac{a_2}{2} \cos 2\varphi + \gamma \varphi. \quad (18)$$

## 2.2 Числено изследване на динамиката на магнитния момент за наномагнит в близост до джозефсонов контакт

Динамиката на магнитния момент за наномагнит в близост до джозефсонов контакт се описва със следната начална диференциална задача от 2-ри ред [23]:

$$\frac{d^2 \bar{m}_z}{dt^2} + 2\tilde{\eta} \frac{d\bar{m}_z}{dt} + m_z = \epsilon \left( 1 + \eta \frac{d}{dt} \right) \sin(\bar{V}_0 \bar{t} - \bar{k} \bar{m}_z). \quad (19)$$

Тук началните условия са  $m_z(0) = 1, m_{z'}(0) = 0$  и  $t \geq 0$ . В това уравнение безразмерният параметър  $\bar{k}$  може да бъде малък или голям в зависимост от големината и местоположението на магнита. Параметърът  $\epsilon$  приблизително се равнява на съотношението на полето, създадено от критичния ток на мястото на наномагнита и външното поле. В практически ситуации това съотношение винаги ще бъде малко. По този начин обосноваваме линейната апроксимация за  $\bar{m}_z$  далеч от резонанс,  $\bar{V}_0 = 1$  и резонанса за не много малки  $\tilde{\eta}$ . В случай на много малък резонанс (много малка стойност на  $\tilde{\eta}$ ) трябва да се използва нелинейната апроксимация, базирана на пълното уравнение на Ландау-Липшиц.[69, 52, 47]

В уравнението (19) са използвани следните означения:  $\bar{m}_z$  - магнитен момент;  $V$  - напрежение;  $\bar{t}$  - време. Създаден е потребителски софтуер специално за числен анализ на джозефсонови контакти с магнитни моменти [9]. В него са реализирани алгоритмите на множество методи за числен анализ (Ойлер, Модифициран Ойлер, Рунге-Кута от втори ред, Рунге-Кута от четвърти ред, Рунге-Кута-Фелдберг). Той позволява динамичен контрол на физичните параметри, анимация на графиките и извеждане на резултатите в табличен вид. Потребителският софтуер се използва и по-нататък в дисертационния труд.

## 2.3 Числено изследване на динамиката на магнитните моменти по пространствените координати на джозефсонов контакт

Динамиката на магнитния момент по пространствените координати на джозефсонов контакт се описва със следната начална диференциална задача от първи ред:

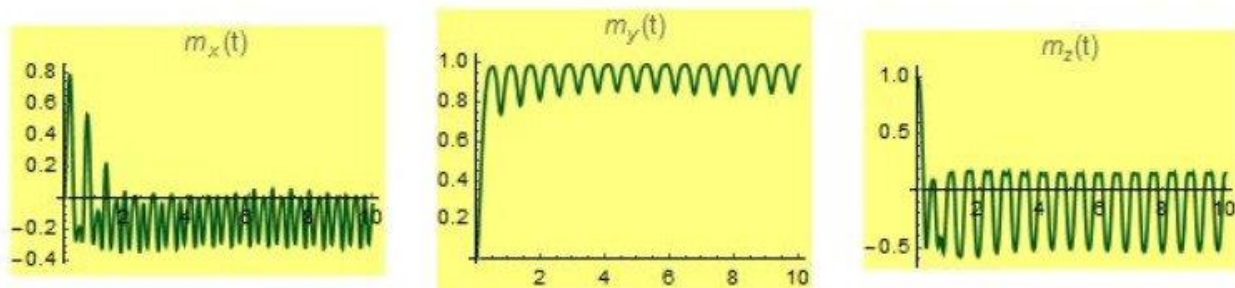
$$\begin{aligned}\frac{dm_x}{dt} &= \frac{\omega_F}{1+(\alpha M)^2} \{m_y m_z - \Gamma r m_z \sin(\varphi - r m_y) + \alpha [m_x m_z^2 + \Gamma r m_x m_y \sin(\varphi - r m_y)]\} \\ \frac{dm_y}{dt} &= \frac{\omega_F}{1+(\alpha M)^2} \{-m_x m_z + \alpha [m_y m_z^2 - \Gamma r (m_z^2 + m_x^2) \sin(\varphi - r m_y)]\} \\ \frac{dm_z}{dt} &= \frac{\omega_F}{1+(\alpha M)^2} \{\Gamma r m_x \sin(\varphi - r m_y) + \alpha [\Gamma r m_y m_z \sin(\varphi - r m_y) - m_z (m_x^2 + m_y^2)]\}\end{aligned}\quad (20)$$

$$m_x(0) = 0, m_y(0) = 0, m_z(0) = 1, t \geq 0$$

В задачата (20) са използвани следните означения:  $\omega_F$  – честота на феромагнетен резонанс;  $\alpha$  – параметър на феромагнитно затихване;  $\Gamma$  – параметър на взаимодействие на фазовите разлики;  $r$  – магнетизация;  $\varphi$  – фазова разлика;  $m_x, m_y, m_z$  – неизвестни функции;  $M$  – нормата на магнитния момент.

Диференциалната задача се решава чрез методите на Рунге-Кута от четвърти ред и Рунге-Кута-Фелдберг. Направено е изследване на магнитната прецесия в зависимост от параметрите на задачата. Методите са реализирани в потребителски софтуер, който позволява интерактивен, динамичен контрол. Когато в системата проникне външен ток, компонентите на магнитния момент  $m_x, m_y, m_z$  се дестабилизират и след време се стабилизират в едно от стабилните си състояния. Тук ще разгледаме при какви стойности на физичните параметри се проявява конкретното състояние.

На тази фигура се демонстрира ефектът на Капица-Пендулум, при който се сменя направлението на компонента на магнитния момент (от 0 към 1). Тази смяна се отнася за стойности на параметрите:  $step = 0.005, initialtime = 0, endtime = 10, w_f = 1.5, r = 2.3, w = 4.5, \alpha = 0.425$ .



**Фигура 19.** Графика на функциите, при  $step = 0.005, initialtime = 0, endtime = 10, w_f = 1.5, r = 2.3, w = 4.5, \alpha = 0.425$ .

### 3 ГЛАВА. Числено изследване на магнитната прецесия в джозефсонов контакт под влияние на външен ток

Динамиката на магнитния момент и фазовата разлика в джозефсонов контакт от тип свръхпроводник-ферромагнит-свръхпроводник се описва посредством следната начална диференциална задача [61]:

$$\begin{aligned}\frac{dm_x}{dt} &= \frac{\omega_F}{1+\alpha^2} \{-m_y m_z + Grm_z \sin(\varphi - rm_y) - \alpha[m_x m_z^2 - Grm_x m_y \sin(\varphi - rm_y)]\} \\ \frac{dm_y}{dt} &= \frac{\omega_F}{1+\alpha^2} \{m_x m_z - \alpha[m_y m_z^2 - Gr(m_z^2 + m_x^2) \sin(\varphi - rm_y)]\} \\ \frac{dm_z}{dt} &= \frac{\omega_F}{1+\alpha^2} \{-Grm_x \sin(\varphi - rm_y) - \alpha[Grm_y m_z \sin(\varphi - rm_y) - m_z(m_x^2 + m_y^2)]\} \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{1}{w} (I_{pulse}(t) - \sin(\varphi - rm_y)),\end{aligned}\tag{21}$$

$$m_x(0) = 0, m_y(0) = 0, m_z(0) = 1, \varphi(0) = 0, t \geq 0,\tag{22}$$

където  $I_{pulse}(t) = A_s \chi([t_0 - \frac{1}{2\Delta t}, t_0 + \frac{1}{2\Delta t}])$ ,  $\chi$  е характеристикната функция на интервала,  $\omega_F$  е честотата на ферромагнитния резонанс,  $\alpha$  – параметър на ферромагнитно затихване,  $G$  – параметър на взаимодействие на фазовите разлики,  $r$  – магнетизация,  $w = V_F/(I_c R) = \omega_F/\omega_R$ ,  $V_F = \hbar\omega_F/(2e)$ ,  $I_c$  – критичен ток,  $R$  – съпротивлението на JJ,  $\omega_R = 2eI_c R/\hbar$  – характеристична честота. Електричният импулс се характеризира от следните параметри:  $A_s$  – амплитуда на тока,  $t_0$  – средата на времевия интервал, където е приложен тока, а  $\Delta t$  – времеви интервал. Неизвестните функции на времето са магнитните моменти  $m_x(t), m_y(t), m_z(t)$  и фазовата разлика  $\varphi(t)$ . Свръхпроводимият ток  $I_s(t)$  се пресмята в зависимост от  $\varphi(t)$  по следната формула:  $I_s(t) = I_c \sin(\varphi(t) - rm_y(t)), t \geq 0$ .

#### 3.1 Числено изследване за твърдост

Промяната на няколко физични параметри правят системата твърда. Твърдостта на системата изисква, освен използването на явни методи, неявни методи за решаването ѝ. За да покажем твърдостта на системата ще използваме **Определение 1.2.1.** [39].

Системата (21) често става твърда, когато параметърът на взаимодействието на фазовите разлики  $G$  нараства, особено за  $G \geq 50$ .

На Таблица 2. са представени два случая при  $G = 50$  и  $G = 150$ , където  $Re(\lambda_j)$  са реалните собствени стойности и коефициентът на твърдост  $C$  от **Определение 1.2.1.** Решението  $\bar{y} = m_x(t), m_y(t), m_z(t), \varphi(t)$  е получено при стъпка по времето  $h = 0.001$  и точност  $10^{-8}$ , използвайки метода на Гаус-Лежандър.

**Таблица 2.** Стойности на  $Re(\lambda_j), j = 1,2,3,4$  и  $C$  от Определение 1.2.1. при  $r = 0.1, \alpha = 0.3, t_0 = 5, \Delta t = 10, A_s = 2.1, \omega_F = 1$  за две стойности на  $G$ .

<b><math>G = 50</math></b>					
$t$	$Re(\lambda_1)$	$Re(\lambda_2)$	$Re(\lambda_3)$	$Re(\lambda_4)$	$C$
2	-0.93	-0.93	-0.60	-0.001	612.82
5	-0.93	-0.93	-0.61	-0.009	95.77
10	-0.91	-0.91	-0.61	-0.007	128.11
<b><math>G = 150</math></b>					
$t$	$Re(\lambda_1)$	$Re(\lambda_2)$	$Re(\lambda_3)$	$Re(\lambda_4)$	$C$
2	-3.09	-3.09	-0.62	-5.01E-6	617
5	-3.09	-3.09	-0.62	-1.59E-7	1.94E7
10	-3.09	-3.09	-0.62	-4.72E-9	6.54E8

С Таблица 2 доказахме, че системата е твърда. Изпълнени са условията от определението за твърдост в два случая ( $G = 50$  и  $G = 150$ ). Демонстрираме отрицателни реалните собствени стойности  $Re(\lambda_j)$  и коефициентът на твърдост  $C$  е много по-голям от 1. Наблюдавайки въздействието на параметъра  $G$ , може да кажем, че неговото нарастване е причина за твърдост на системата.

За справяне с твърдостта се наложи използването на специални числени схеми. Реализирани са алгоритмите на явния метод на Рунге-Кута (РК4) и неявния Гаус-Лежандър (ГЛ2) за числено решаване на диференциалната задача (21),(22). На следващата таблица е представена разликата между използването на тези методи.

**Таблица 3.** Разлика между устойчивостта на решението получено с РК4 и ГЛ2 при  $G = 500, r = 0.2, \alpha = 0.1, t_0 = 5, \Delta t = 10, A_s = 1, \omega_F = 1$  и четири различни стойности на стъпката по времето  $h$ .

	$h = 0.1$		$h = 0.02$		$h = 0.01$		$h = 0.001$	
	РК4	ГЛ2	РК4	ГЛ2	РК4	ГЛ2	РК4	ГЛ2
$n$	2	7	2500	2500	5000	5000	50000	50000
error	$\approx 10^{-2}$	$\approx 10^{-6}$	$\approx 10^{-3}$	$\approx 10^{-11}$	$\approx 10^{-5}$	$\approx 10^{-12}$	$\approx 10^{-9}$	$\approx 10^{-78}$

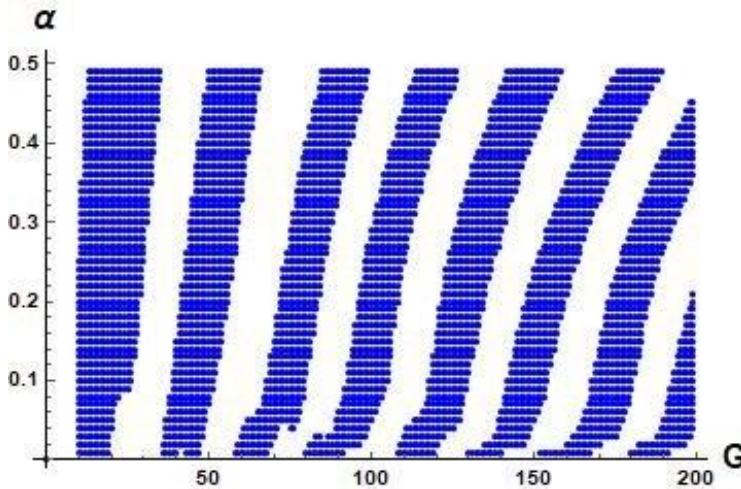
Предимство на метода на Гаус-Лежандър е, че само с 2 междинни стъпки получава точност от ред  $O(h^4)$ . Устойчивостта на числената схема е по-добра в сравнение с метода на Рунге-Кута. Резултатите, получени от изчисленията от решаването на задачата и съответната точност са представени в Таблица 3. Тук  $n$  е номерът на последната изчислена точка. Като се има предвид, че магнитният момент е нормиран (дължината  $\|M\| = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2}$  трябва винаги да е равна на 1), грешката представлява разликата  $|\|M\| - 1|$  за последните изчислени стойности.

При сравняване на грешките в края на изчисленията, ясно е демонстрирано превъзходството на неявния метод. Редът на точност за метода на ГЛ2 е приблизително 3 пъти по-висок от този при стандартния метод на РК4. Когато стъпката е малка ( $h = 0,001$ ), получената точност е дори много по-висока ( $\approx 10^{-78}$ ).

### 3.2 Честота и периодичност на магнитното обръщане под влияние на физичните параметри

В този параграф се анализира проявяването на различните стабилни състояния след прилагане на външен ток в системата. Получени са три стабилни състояния, за които е разработена програма, позволяваща по-обстояен анализ, в зависимост от променящите се стойности на физичните параметри. Най-значим момент е тогава, когато се получи ефектът на магнитното обръщане. Този ефект се наблюдава, когато само  $z$ -компонентът на магнитния момент се променя от 1 на  $-1$ . Именно поради тази причина специално се разглежда това състояние на системата. Изследваме обръщането на магнитния момент чрез токов импулс в  $\varphi_0$ -джозефсонов контакт и ще покажем, че обръщането се получава при определени стойности на параметрите на модела. Намира се периодичност в появата на интервали на обръщане на магнитния момент с промяна в параметъра на свързване на спин-орбита  $G$ , параметъра на затихване на Хилберт и съотношението на енергията на Джозефсон към магнитната енергия. Получените резултати могат да се използват в различни области на свръхпроводяща спинтроника.

В следващата графика ще демонстрираме проявата на обръщането на магнитния момент за определен интервал на параметъра  $G$  при различни стойности на параметъра на затихване  $\alpha$ . Разглеждаме параметъра  $G$  от  $G = 1$  до  $G = 200$ , със стъпка  $\Delta G = 1$  и  $\alpha$  от  $\alpha = 0.01$  до  $\alpha = 0.5$ , със стъпка  $\Delta\alpha = 0.01$ . Величината на спин-орбитната връзка е зададена равна на  $r = 0.1$ . За всяка двойка стойности  $(\alpha, G)$  диференциалната задача (21),(22) се решава чрез метода на Гаус-Лежандър със стъпка по времето  $h = 0.01$  в интервала  $t \in [0, T_{max}]$ ,  $T_{max} = 200$ . Този метод осигурява точност от четвърти ред  $O(h^4) \approx 10^{-8}$ . При  $t = T_{max}$  се проверява неравенството  $|m_z + 1| \leq 0.0001$ , за идентифициране на магнитното обръщане. Ако се изпълни това условие, съответните стойности за  $\alpha$  и  $G$  ще бъдат запазени в списък, който е съставен от двете стойности. Тези данни се визуализират на Фиг.34., на която се вижда периодичната зависимост, при изпълнението на магнитното обръщане с нарастване на  $G$ . Нека подчертаем някои от особеностите в проявлението на тази зависимост. По-специално, липсата на обръщане за малки  $G$ , в най-лявата част на графиката. Разглеждайки размерите на разстоянието между  $G$ , докато увеличаваме  $\alpha$ , наблюдаваме известен ръст на ширината на интервалите [13].

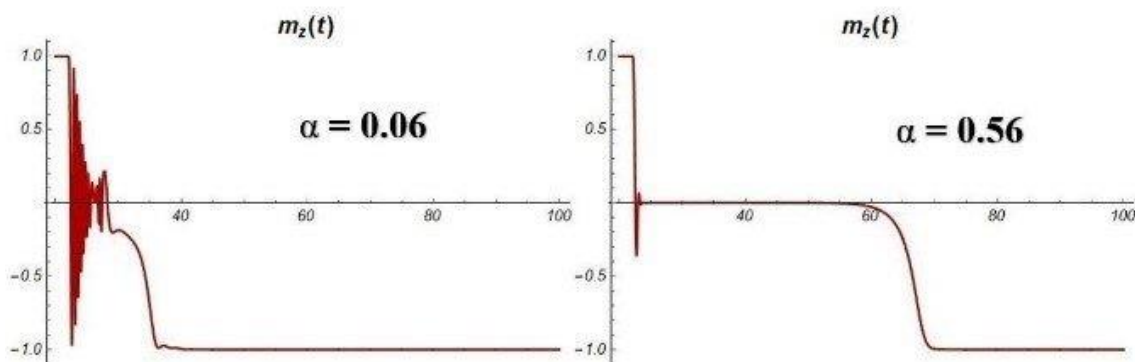


**Фигура 34.** Зависимост  $(G, \alpha)$ . Показан е интервал за  $G \in [0, 200]$ , разделен със стъпка  $\Delta G = 1$  и  $\alpha \in [0, 0.5]$ -  $\Delta \alpha = 0.001$  при  $A_s = 1.5$ ,  $r = 0.1$ ,  $t_0 = 25$ ,  $\Delta t = 6$ ,  $\omega_F = 1$ ,  $h = 0.01$ . Точките с координати  $G$  и  $\alpha$ , при които се изчислява  $m_z(t)$  показват магнитното обръщане.

Направени са още анализи на влиянието и на други параметри върху проявата на състояние магнитно обръщане. Обръщането на магнитния момент е изключително чувствително към стойностите на параметрите на системата. С оглед на достатъчната сложност на разглежданата система, въпросът за възможността за предсказване на пълното обръщане е причина за по-задълбочените изследвания.

### 3.3 Анализ на времето за проявление на магнитно обръщане

Чрез множество компютърни симулации установихме, че равновесието в състояние на магнитно обръщане настъпва в различно време в зависимост от параметрите. На следващата графики ще демонстрира разликата между времето за стабилизиране в това състояние при някои стойности на параметрите.



**Фигура 39.** Зависимост на  $m_z$ -компонента на магнитния момент от времето  $t$  при различни стойности на  $\alpha$ .

На Фиг. 39 са представени два резултата при еднакви стойности на всички параметри, освен  $\alpha$ , който се увеличава от 0,06 на 0,56. В тези случаи се наблюдава магнитното обръщане. Особеното тук е, че стабилизацията се появява в първия случай ( $\alpha = 0,06$ ) приблизително  $t = 40$ , а във втория случай  $t = 70$  ( $\alpha = 0,06$ ). Когато използваме малки стойности на параметъра  $\alpha$ , стабилизирането в магнитно обръщане настъпва по-рано.

### 3.4 Числени паралелни симулации върху проявата на магнитно обръщане

Разработено е внедряването на C++/MPI за паралелна симулация на динамиката на магнитния момент и фазовата разлика в джозефсонов контакт от тип свръхпроводник-ферромагнит-свръхпроводник въз основата на програмите написани посредством Wolfram mathematica (виж [76]). Паралелното внедряване осигури значително ускоряване на изчисленията, което позволява ефективно провеждане на масивната симулация в широк диапазон от параметри на модела.



## 4 ГЛАВА. Аналитични решения и числено изследване върху нелинейни модели на системи от дълги джозефсонови контакти

В тази глава от дисертационния труд ще фокусираме върху разпределението на магнитния поток  $\varphi$  в дълг джозефсонов контакт. Той се описва чрез “двойното синус-Гордън” уравнение с гранични условия на Нойман. В параграф §2.1, използвайки техниката на интегриращия множител, умножаваме двете страни на уравнението (13) с  $\frac{d\varphi(x)}{dx}$  и чрез еквивалентни преобразувания получаваме диференциално уравнение от първи ред, на което в следващия параграф ще намерим аналитични решения.

### 4.1 Аналитични решения

За достатъчно широк клас от реални физически системи от тип дълги джозефсонови контакти ([5], [6], [7],[31]), безразмерната мярка за външния ток  $\gamma$  е много по-малка от единица, т.е.  $|\gamma| \ll 1$ . Следователно нейното пренебрегване в ефективния потенциал на взаимодействие в системата (6) и апроксимирането му с  $V \approx a_1 \cos\varphi + \frac{a_2}{2} \cos 2\varphi$  ще доведе само до леко отместване на точките, където се реализира екстремум на ефективната потенциалната енергия на системата, но те ще запазят броя и вида си. Това означава, че фазовият портрет ще остане качествено същия, т.е. топологично двата фазови портрета, този на апроксимираната и на истинската система, няма да се различават. Тази апроксимация обаче, би ни дала възможност напълно да интегрираме граничната задача и да получим в аналитичен вид явни решения за краен интервал на контакта, които няма да водят до съществени качествени промени във фазовите криви. Тези важни аргументи ни дават основание в диференциалното уравнение от първи ред (5) да положим  $\gamma = 0$ :

$$\frac{\varphi'^2}{2} + a_1 \cos\varphi + \frac{a_2}{2} \cos 2\varphi = E. \quad (23)$$

Разбира се, тук константата  $E$  (енергията на системата) зависи от граничните условия, при гранични задачи, което е еквивалентно на зависимостта от началните условия, при начални задачи.

Използвайки еквивалентни преобразувания получаваме:

$$\left[ -\frac{d}{dx} \cos\varphi \right]^2 + 2a_1 \cos\varphi(1 - \cos^2\varphi) + 2a_2 \cos^2\varphi(1 - \cos^2\varphi) - a_2(1 - \cos^2\varphi) = 2E(1 - \cos^2\varphi) \quad (26)$$

Ако положим  $\cos\varphi = u$ ,  $u \in [-1; 1]$ , ще пренапишем уравнението в термините на новата функция  $u(x)$ . Тъй като имаме първа производна по новата функция  $u = \cos\varphi$ , се стремим да сведем цялото уравнение до такова спрямо  $u$  чрез тригонометричните преобразувания на  $\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$ ,  $\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1$ :

$$\left( \frac{d}{dx} u \right)^2 = (1 - u^2)[-2a_2 u^2 - 2a_1 u + a_2 + 2E] \geq 0. \quad (27)$$

За да съществува това уравнение се изисква неговата дясна страна да бъде не отрицателна. Множителят  $(1 - u^2)$  в този случай е винаги не отрицателен, защото най-голямата стойност, която може да приеме  $u$  е  $-1$ . Остава полиномът от втора степен  $P(u) = -2a_2u^2 - 2a_1u + a_2 + 2E$  да приема не отрицателни стойности при  $u \in [-1; 1]$ . Това е възможно в много случаи, но по-подробно ще ги опишем в следващия параграф. Нека фиксираме един от случаите, когато дискриминантата на  $P(u)$  е положителна и  $a_2 = -|a_2| < 0$ . Тогава означавайки с  $u_{1,2}$  корените на полинома имаме:

$$P(u) = -2a_2u^2 - 2a_1u + a_2 + 2E = 2|a_2|u^2 - 2a_1u + 2E - |a_2| = 2|a_2|(u - u_1)(u - u_2). \quad (28)$$

Разлагайки дясната страна на (27) ще получим:

$$\left(\frac{d}{dx} u\right)^2 = 2|a_2|(1 - u)(u - (-1))(u - u_2)(u - u_1). \quad (29)$$

Можем да интегрираме горното уравнение, съобразявайки, че  $u(x)$  е монотонно намаляваща функция, когато  $\varphi$  расте, с нарастването на аргумента  $x$ :

$$\int_{u(x)}^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u)(u-(-1))(u-u_2)(u-u_1)}} = \sqrt{2|a_2|} \int_{x_0}^x dx = \sqrt{2|a_2|}(x - x_0), \quad (30)$$

където наредбата на корените е следната:  $1 \geq u(x) \geq -1 > u_2 > u_1$ . В [36, 3] може да се намери, че интегралът от ляво и чрез елиптичен синус и преобразувания може да се получи функцията за разпределението на магнитния поток върху интервала, даващ дължината на контакта  $-l \leq x_0 \leq x < l$ . За един интервал на монотонност на  $sn^2[\cdot | r]$  получаваме:

$$\varphi(x) = \arccos \frac{1 - \frac{2|u_1|}{|u_1|-1} sn^2\left(\sqrt{2^{-1}|a_2|(|u_1|-1)(1+|u_2|)}(x-x_0), r\right)}{1 + \frac{2}{|u_1|-1} sn^2\left(\sqrt{2^{-1}|a_2|(|u_1|-1)(1+|u_2|)}(x-x_0), r\right)}, \quad (41)$$

където модулариет параметър в елиптичния интеграл от първи род има вида:

$$r = \sqrt{\frac{2(|u_1|-|u_2|)}{(1+|u_2|)(|u_1|-1)}}. \quad (42)$$

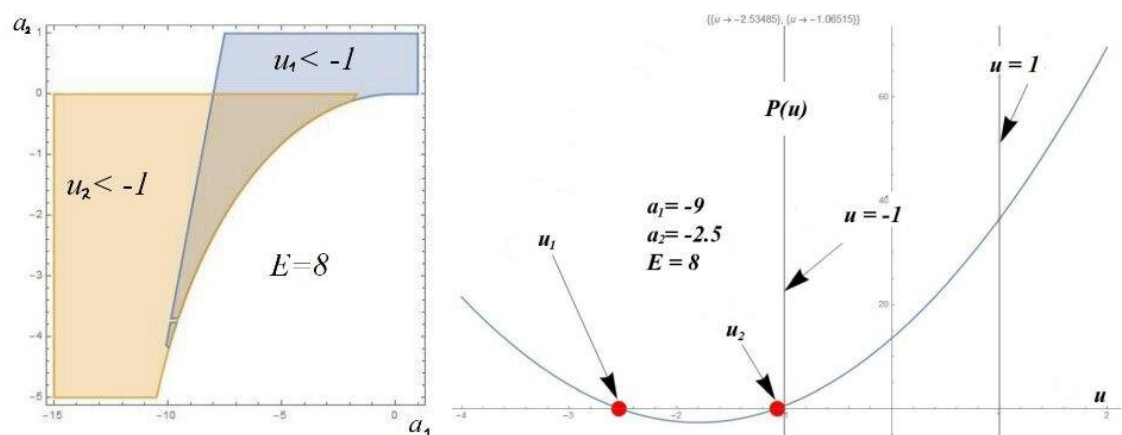
## 4.2 Проверка на условията за получаване на конкретно аналитично решение

В хода на аналитичните решения от параграф 4.1 се формира полином  $P(u) = -2a_2u^2 - 2a_1u + a_2 + 2E$ . Анализът на полинома е от съществено значение за получаване на стойностите за амплитудите  $a_1, a_2$  и енергията на системата  $E$ , при които ще се получи конкретното аналитично решение, в зависимост от корените на полинома  $u_1$  и  $u_2$ . Полиномът трябва да не приема отрицателни стойности. От това неравенство се класифицират няколко групи ограничения за параметрите, при които се проявява всяко едно решение.

$$P(u) \geq 0$$

$$-2a_2u^2 - 2a_1u + a_2 + 2E \geq 0$$

Разгледани са групи ограничения в зависимост от корените на полинома  $P(u)$ . Решението (41) се получава при следната наредбата на корените на полинома  $P(u)$ :  $1 \geq u(x) \geq -1 > u_2 > u_1$ . На следващата графика Фиг.44. ляв панел демонстрираме плоскостта върху  $a_1$  и  $a_2$ , при които са изпълнени ограниченията за  $u_1, u_2 < -1$ . Единствените възможности за получаване на това конкретно аналитично решение е в сечението на двете области. Това са конкретни зависимости между  $a_1$  и  $a_2$ . С помощта на тази информация сме намерили стойности на параметрите, нужни за получаване на решение (18) в точка 4.1. Направена е и графика, отговаряща на тези ограничения:  $a_1 = -9, a_2 = -2.5, E = 8$ . Също така е спазена наредбата на корените на полинома. Това е демонстрирано на графиката в десния панел на Фиг.44.

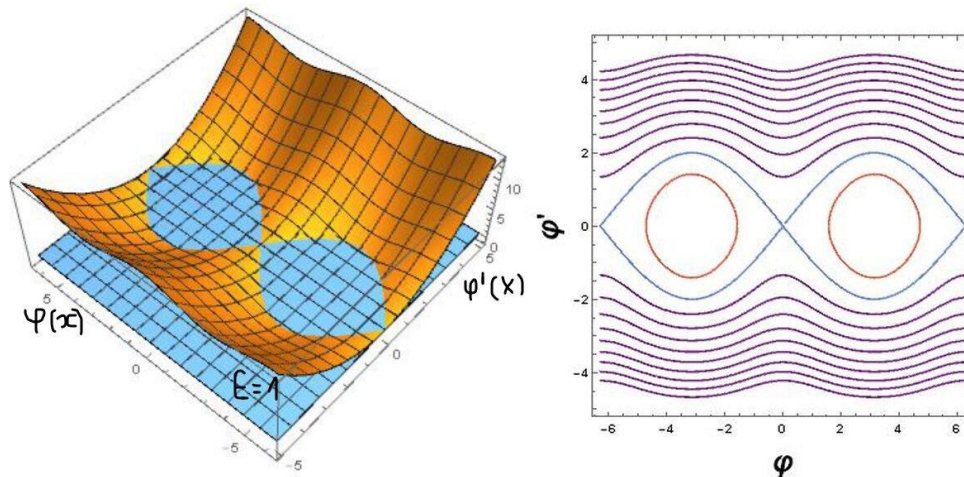


**Фигура 44.** Ляв панел: плоскостта върху  $a_1$  и  $a_2$ , при която  $u_1, u_2 < -1, E = 8$ . Десен панел: конкретни стойности на  $a_1, a_2, E$ , при които е изпълнена наредбата  $-1 > u_2 > u_1$ .

Имайки тази информация, може да ограничим приложимостта на решение (18). Възможно е да анализираме какво би се получило при други стойности на амплитудите  $a_1, a_2$  и енергията на системата  $E$ .

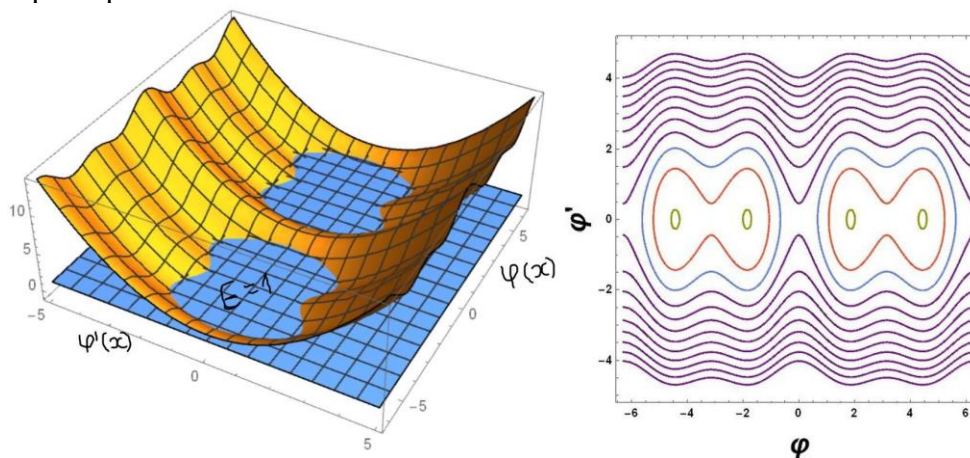
### 4.3 Анализ на потенциала /Фазови портрети/

Проучихме множество фазови портрети, при различни стойности параметрите в уравнението (5). Чрез промяна на фазовите портрети можем да определим влиянието на параметрите върху задачата. Забелязваме, че при липса на и външен ток фазовият портрет изглежда както е показано на Фиг.46.



**Фигура 46.** Фазов портрет при  $a_1 = 1, a_2 = 0, \gamma = 0$ . Ляв панел: множество фазови портрети, спрямо промените за  $E \in [0,10], \Delta E = 1$ . Десен панел: 3D графика на конкретен фазов портрет при  $E = 1$ .

Промяната във фазовия портрет се наблюдава в две насоки: първата чрез промяна на стойностите на  $\gamma$ , което е демонстрирано на Фиг.46. Втората - при увеличаване на стойността на параметъра  $a_2$ . Това е показано на Фиг.48, на която се наблюдават нови топологични характеристики.



**Фигура 48.** Фазов портрет при  $a_1 = 1, a_2 = 1.8, \gamma = 0$ . Ляв панел: множество фазови портрети, спрямо промените за  $E \in [-10,1], \Delta E = 1$ . Десен панел: 3D графика на конкретен фазов портрет при  $E = 1$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Целта на настоящия дисертационен труд е постигната.

### Резюме на получените резултати

Дисертационният труд е посветен на задачи от физиката на джозефсоновите контакти. Бяха разгледани различни аспекти, свързани с магнитните моменти в джозефсонов контакт. Получени са числени решения на математическите задачи, описващи динамиката на магнитния момент за наномагнит в близост до джозефсонов контакт и динамиката на магнитните моменти по пространствените координати на джозефсонов контакт. Магнитната прецесия в джозефсонов контакт под влияние на външен ток се описва чрез начална задача за многопараметрична нелинейна система от обикновени диференциални уравнения. В процеса на числения анализ бе установено, че при работа с голяма стъпка по времето системата става, в повечето случаи, нерешима. Промяната на няколко физични параметри правят системата твърда. Решение на проблема бе намерен, използвайки неявния метод на Гаус-Лежандър. Демонстрирано е предимството на неявната схема пред явната за твърди задачи. Прави се анализ на проявяването на различните стабилни състояния след инжектирането на външния ток. Получени са три стабилни състояния, за които е разработена програма, позволяваща по-обстоятелен анализ, в зависимост от променящите се стойности на физичните параметри. Изследвали сме обръщането на магнитния момент (едно от стабилните състояния) чрез токов импулс в  $\varphi_0$ -джозефсонов контакт. Показахме, че обръщането се получава при определени стойности на параметрите на модела. Намира се периодичност в появата на интервали на обръщане на магнитния момент с промяна в параметъра на свързване на спин-орбита  $G$ , параметъра на затихване на Хилберт и съотношението на енергията на Джозефсон към магнитната енергия. Усъвършенствани бяха вече съществуващи програмни комплекси и паралелни модификации. Направени са множество тестове за проверка на коректността на получените резултати. Приложени са аналитични методи от теорията на интегрируемите модели за получаване на точни решения на някои гранични задачи възникващи при дълги ДК, с цел подобряването на числените изследвания. Аналитичните решения са получени в стационарния случай, при нулев външен ток, на “двойното синус-Гордън” уравнение с гранични условия на Нойман. Разгледани бяха условия за получаване на конкретно аналитично решение. Демонстрирано е при какви стойности на амплитудите и енергията може да бъде получено то. Подредени са групи различни наредби на корените на полинома, от който зависи задачата. Направен е анализ на потенциала, чрез визуализиране на фазовите портрети. Представена е връзката на фазовите портрети със стойностите на първите два коефициента в общото разлагане на Фурие и енергията на системата.

### Насоки за развитие

Остават редица неизследвани свойства на разглежданите системи от физиката на джозефсоновите контакти. Обръщането на магнитния момент е изключително чувствително към стойностите на параметрите на системата. С оглед на достатъчната сложност на разглежданата система, въпросът за възможността за предсказване на пълното обръщане за дадените параметри на системата и текущия импулс изисква допълнително проучване. Освен това стабилно състояние, могат да се планират бъдещи анализи и числени симулации за случаите при които системата се уравнисява в състояние: Капица-Пендулум.

Връзките между резултатите, целите и задачите, мястото на описание в дисертационния труд, направените публикации са следните:

Принос	Цел	Задача	Параграф	Публикации
1	1	1	2.1	–
2	1	2	2.2	[P1]
2	1	2	2.3	[P2]
3	1	3	3.1	[P3]
3	1	3	3.2	[P4]
3	1	3	3.3	[P4]
3	1	3	3.4	[P6]
4	1	4	4.1	[P5]
4	1	4	4.2	[P7]
4	1	4	4.3	[P8]
4	1	4	4.4	–

## Претенции за научни и научно-приложни приноси

Получените научни и научно-приложни резултати на дисертационния труд от областта на математическото моделиране и приложение на математиката могат да се систематизират както следва:

- I. **Числен анализ на магнитния поток в дълъг джозефсонов контакт бе направен посредством метода на Лагранж (понижаване на реда) на нелинейна гранична диференциална задача.**
- II. **С помощта на явни и неявни числени методи за нелинейни многопараметрични начални диференциални задачи са решени и изследвани основни проблеми от физиката на джозефсоновите контакти, в това число: динамиката на магнитния момент за наноманит в близост до джозефсонов контакт; динамиката на магнитните моменти по пространствените координати на джозефсонов контакт; магнитната прецесия в джозефсонов контакт под влияние на външен ток.**
- III. **За численото моделиране и компютърните симулации е разработен авторски комплекс от програмни модули за числена симулация с широк диапазон на физични параметри, с алгоритми за решаване на твърди начални диференциални задачи; за търсене на ефекта на магнитното обръщане (ефектът се наблюдава, когато само z-компонентът на магнитния момент се променя от 1 на -1); време за поява на магнитното обръщане.**
- IV. **Получени са явни аналитични решения на стационарното двойно синус-Гордън уравнение, моделиращо разпределението на магнитния поток при нулев външен ток в клас дълги джозефсонови контакти. Изведени са условията за получаване на конкретно аналитично решение. Изследвано е поведението на решенията и са получени фазови портрети на граничната задача (след понижаване на степента) при различни стойности на физичните параметри.**

## Публикации по темата на дисертационния труд

[P1] Атанасова П. Х., Панайотова С.А., Шукринов Ю. М., Рахмонов И. Р., Земляная Е. В., Числено изследване на динамиката на магнитния момент за наномагнит в близост до джозефсонов контакт, Научни трудове на Съюза на учените в България - Пловдив, Серия В. Техника и технологии, том XIV, с. 188-191, (2017).

ISSN 1311-9419(Print) , ISSN 2534-9384 (On-line)

[P2] Атанасова П. Х., Панайотова С.А., Шукринов Ю. М., Рахмонов И. Р., Земляная Е. В., Числено изследване на динамиката на магнитните моменти по пространствените координати на джозефсонов контакт, Научни трудове на Съюза на учените в България - Пловдив, Серия В. Техника и технологии, том XIV, с. 192-195, (2017).

ISSN 1311-9419 (Print), ISSN 2534-9384 (On-line)

[P3] Atanasova P.K., Panayotova S.A., Zemlyanaya, E.V., Shukrinov, Y.M., Rahmonov, I.R., Numerical Simulation of the Stiff System of Equations Within the Spintronic Model., Lecture Notes in Computer Science, vol. 11189, LNCS, pp. 301-308 Springer, Cham, pp 301-308, (2019). DOI:10.1007/978-3-030-10692-8\_33, ISBN: 978-3-030-10692-8 SCOPUS, SJR =0.283

[P4] Atanasova P.K., Panayotova S.A., Rahmonov, I.R. Shukrinov, Yu. M., Zemlyanaya E. V., Bashashin, M. V., Periodicity in the Appearance of Intervals of the Reversal of the Magnetic Moment of a  $\varphi_0$  Josephson Junction. JETP Letters, 110 (11), 722–726, (2019).

DOI:10.1134/S0021364019230073, ISSN 00213640, IF=1.412

[P5] Dimov H.D., Atanasova P.Kh. , Panayotova S.A., Some analytical solutions for magnetic flux distribution in long Josephson junction with second harmonic in the current phase relation, AIP Conference Proceedings, Vol. 2164, 100001, (2019).

DOI:10.1063/1.5130838, ISBN: 9780735419094, Scopus, Web of Science, SJR=0.182

[P6] Panayotova, S.A., Bashashin, B., Zemlyanaya, E.V., Atanasova, P.K., Shukrinov, Y.M., Rahmonov, I.R., Parallel Numerical Simulation of the Magnetic Moment Reversal within the  $\varphi_0$ -Josephson Junction Spintronic Model, EPJ Web of Conferences 226, 02018, (2020).

DOI:10.1051/epjconf/202022602018, ISBN: 978-2-7598-9095-8

[P7] Atanasova P.K., Panayotova S.A., Analytical solutions of phase difference in LJJ with second harmonic in the current phase relation: classification and constraints of existence , XXV Международный симпозиум "Нанозифика и нанозлектроника", Том 1, с. 10, Нижний Новгород (2021).

ISBN 978-5-91326

[ P8 ] Panayotova S.A., Specification of analytical solutions describing stationary distribution of magnetic flux in long Josephson Junctions, Scientific Works of the Union of Scientists in Bulgaria- Plovdiv, Vol. XIX, p. 82 (2021).

ISSN 1311 - 9419 (Print), ISSN 2534 - 9384 (Online)

## Проекти

Част от резултатите са апробирани в следните университетски проекти:

1. МУ19-ФМИ-010 “Иновативни ИКТ модели, прогнози и симулации в областта на физиката, екологията, икономиката, здравеопазването и образованието”, финансиран от Фонд „Научни изследвания“ при ПУ „Паисий Хилендарски, член на колектива;
2. МУ21-ФМИ-015 “Високоэффективни предсказващи алгоритми с машинно обучение за моделиране на данни от екологията, индустрията и образованието“, финансиран от Фонд „Научни изследвания“ при ПУ „Паисий Хилендарски, член на колектива;
3. Участие в Национална програмата “МЛАДИ УЧЕНИ И ПОСТДОКТОРАНТИ” към Пловдивски университет „Паисий Хилендарски”, 01.03.20-31.08.20;
4. Участие в Национална програмата “МЛАДИ УЧЕНИ И ПОСТДОКТОРАНТИ” към СУ „св. Климент Охридски“, София, 09.04.19-01.10.19.
5. “Исследование сложных процессов в сверхпроводящих наноэлектронных системах с применением параллельных вычислений”, програма за сътрудничество Соловьев–Христов между ОИЯИ-Дубна и България, международен, 2018г., член на колектива;
6. “Высокопроизводительное компьютерное моделирование динамики сложных систем физики конденсированных состояний”, програма за сътрудничество Соловьев–Христов между ОИЯИ-Дубна и България, международен, 2019г.
7. “Методы, алгоритмы и программное обеспечение для моделирования физических систем, математической обработки и анализа экспериментальных данных”, 05-6-1119-2014/2023, Лаборатория по информационни технологии (ЛИТ), Обединен институт за ядрени изследвания (ОИЯИ), Дубна, Русия, международен, 2014-2023.

## Доклади

Част от резултатите, получени в дисертационния труд са докладвани на следните национални и международни конференции и семинари:

[ D1 ] С. Панайотова, Изследване на случаите на приложимост на конкретни аналитични решения на двойно синус-Гордън уравнение, Научна конференция на СУБ, “Дни на науката 2020”, Пловдив, 20,21.11.2020.

[ D2 ] С. Панайотова, Двойно синус-Гордон стационарно уравнение: аналитични решения, Научен семинар “Модели, прогнози, симулации” към пловдивския университет “Паисий Хилендарски”, 19.06.2019.

[ D3 ] С. Панайотова, Analytical study of non-dissipative double sine-Gordon equation, Научен семинар към Лабораторията по информационни технологии на Обединения институт по Ядрени изследвания (ОИЯИ), Дубна, Русия, 01.08.2019.

[ D4 ] С.Панайотова, Numerical study of superconductor-insulator-superconductor Josephson junction system, Научен семинар по Изчислителна статистика, Факултет по математика и информатика към Пловдивския университет “Паисий Хилендарски”, 11.06.2018.

[ D5 ] С. Панайотова, Numerical modeling of Josephson junction with ferromagnet layer in the presence of spin-orbit coupling, Научен семинар по Изчислителна и приложна математика



към Лабораторията по информационни технологии на Обединения институт по Ядрени изследвания (ОИЯИ), Дубна, Русия, 12.07.2018.

[D6] С. Панайотова, Числен анализ на стабилизацията в пертурбиран джозефсонов контакт от тип свръх-проводник-ферромагнит-свръхпроводник, Научна конференция по проект ФП17-ФМИ-008 “Иновационни ИКТ в научните изследвания и обучението: математика, информатика и информационни технологии”, Пампорово, 29-30.11.2018.

[D7] С. Панайотова, Числено изследване на динамиката на магнитния момент за наномагнит в близост до джозефсонов контакт, Научна сесия “Дни на науката 2016”, Дом на учените, Пловдив, 28-29.10.2016.

[D8] С. Панайотова, Числено изследване на динамиката на магнитните моменти по пространствените координати на джозефсонов контакт, Научна сесия “Дни на науката 2016”, Дом на учените, Пловдив, 28-29 октомври 2016.

[D9] С. Панайотова, Some analytical solutions for magnetic flux distribution in long josephson junction with second harmonic in the current phase relation, Международна конференция AMITANS, Албена, България, 20-25 юни, 2019.

[D10] С. Панайотова, Numerical Analysis of the  $\varphi_0$ -Josephson Junction Spintronic Model: Implicit Numerical Scheme, Parallel Implementation, Results of Simulation, Международна конференция ММСР, Словакия, Стара Лесна, 1-5 юли 2019.

[D11] С. Панайотова, Numerical Simulation of the Stiff System of Equations within the Spintronic Model, The 9th International Conference on Numerical Methods and Applications, Borovets, Bulgaria, 20-24.08.2018.

## Благодарности

Изказвам своята най-искрена благодарност и признателност към научните си ръководители проф. д.м.н. Снежана Гочева-Илиева и доц. д-р Павлина Атанасова, за тяхната подкрепа, съвети, знания и опитност, които със цялото си сърце, ми предаваха през годините.

Благодаря на ръководството на Факултета по математика и информатика, в лицето на проф. д-р Ангел Голев и проф. д-р Боян Златанов, за съдействието и подкрепата в процеса на обучението ми като докторант. Изказвам също благодарности към членовете на бившата катедра „Приложна математика и моделиране“ и нейния ръководител доц. д-р Дойчин Бояджиев. Благодарности към доц. д-р Христо Кискинов и всички членове на катедра „Математически анализ“, които по един или друг начин са били съпричастни към работата ми по дисертационния труд, и процедурата по защита.

Изказвам благодарност на колегите от Лабораторията по Информационни Технологии проф. д.ф.м.н. Елена Земляная, Максим Башашин, както и на колегите от Лабораторията по Теоретическа Физика: проф. д.ф.м.н. Юрий Шукринов и Илхом Рахмонов, от Обединения Институт по Ядрени Изследвания (ОИЯИ), Дубна, Руска Федерация, за съвместната работа.

Благодарност на доц. д-р Христо Димов за предложената идея за намиране на аналитични решения в четвърта глава.

Специална благодарност на своята майка Анжела Панайотова, цялото ми семейство и приятели, които бяха до мен и ме подкрепяха през цялото време.

---

## Декларация за Оригиналност

по чл. 27, ал. 2 от ППЗРАСРБ

от Стефани Апостолова Панайотова  
редовен докторант

към катедра „Математически анализ“  
на Факултет по математика и информатика  
при Пловдивския университет „Паисий Хилендарски“

Във връзка с провеждането на процедура за придобиване на образователната и научна степен „доктор“ в Пловдивския университет „Паисий Хилендарски“ и защита на представения от мен дисертационен труд, декларирам:

Резултатите и приносите на проведеното дисертационно изследване, представени в дисертационния ми труд на тема **„Математическо моделиране и компютърни симулации на многопараметрични физични задачи“** са оригинални.

ДЕКЛАРАТОР :.....

/Стефани Панайотова/

22.02.2022  
гр. Пловдив

## Библиография

- [1] Alfimov G.L., Malishevskii A.S., and Medvedeva E.V. Discrete set of kink velocities in Josephson structures: The nonlocal double sine-Gordon model. *Physica D* 282 16-26(2014).
- [2] Anderson, P.W. and Rowell J.M. Probable observation of the Josephson superconducting tunneling effect, *Phys. Rev. Lett.*, 10, 230-232(1963).
- [3] Polyanin A. D. and Manzhirov A.V., *Handbook of Integral Equations*, CRC Press LLC (1998).
- [4] Ascher, Uri M., Petzold, Linda R. *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations*. Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics. ISBN 978-0-89871-412-8(1998).
- [5] Atanasova P.Kh., Zemlyanaya E.V., and Shukrinov Yu.M., Numerical study of fluxon solutions of sine-Gordon equation under the influence of the boundary conditions, *Lecture Notes in Computer Sciences* 7125 201-206, (2012).
- [6] Atanasova P.Kh., Zemlyanaya E.V., and Shukrinov Yu. M., Interconnection between static regimes in the LJs described by the double sine-Gordon equation, *Journal of Physics: Conference Series* 393 012023, (2012).
- [7] Atanasova P. and Zemlyanaya E., Bifurcations in long Josephson junctions with second harmonic in the current-phase relation: Numerical study, *Lecture Notes in Computer Sciences* 8236 189-196, (2013).
- [8] Atanasova P.Kh., Zemlyanaya E.V. Numerical Investigation of Bifurcations in Long Josephson Junctions with Second Harmonic in the Current-Phase Relation. *Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences*, Vol. 68, No 12, 1483-1490(2015).
- [9] Atanasova P., Panayotova S., Shukrinov Yu., Rahmonov I., Zemlyanaya E., User Software for Numerical Study of Josephson Junction with Magnetic Momenta. *EPJ Web of Conf.* 173, 05002 (2018).
- [10] Atanasova P., Panayotova S., Zemlyanaya E., Shukrinov Y., Rahmonov I., Numerical Simulation of the Stiff System of Equations within the Spintronic Model, *The 9th International Conference on Numerical Methods and Applications NM and A18*, August 20-24,(2018).
- [11] Atanasova P.Kh., Panayotova S.A., Rahmonov I.R., Shukrinov Yu.M., Zemlyanaya E.V., Bashashin M.V. arXiv:1905.03895 [cond-mat.supr-con](2019).
- [12] Atanasova P.Kh., Panayotova S.A., Zemlyanaya E.V., Shukrinov Yu.M., Rahmonov I.R., Numerical Simulation of the Stiff System of Equations within the Spintronic Model. *Lecture Notes in Computer Science*, Springer (NMA2018) Vol. 11189 301-308, (2019).
- [13] Atanasova, P.K., Panayotova, S.A., Rahmonov, I.R. Shukrinov, Yu. M., Zemlyanaya E. V., Bashashin, M. V., Periodicity in the Appearance of Intervals of the Reversal of the Magnetic Moment of a  $\varphi_0$ -Josephson Junction. *JETP Letters*, 110 (11), 722–726(2019).
- [14] Atkinson, Kendall A.. *An Introduction to Numerical Analysis*. 2nd. New York, John Wiley and Sons. ISBN 978-0-471-50023-0 (1989).
- [15] Barone, A., and Paterno, G. *Physics and Applications of the Josephson Effect*. New York: Wiley, ISBN: 978-3-527-60278-0(1982).
- [16] Bobkova I.V., Bobkov A.M., and Silaev M.A., Gauge theory of the long-range proximity effect and spontaneous currents in superconducting heterostructures with strong

- ferromagnets, Phys. Rev. B, 96, 094506 (2017).
- [17] Bobkova I.V. , Bobkov A.M., Rahmonov I. R., Mazanik A., Shukrinov Yu. M., Magnetization reversal in S/F/S Josephson junctions on a 3D topological insulator Phys. Rev. B 102, 134505 (2020).
  - [18] Braude V. and Blanter Ya.M., Triplet Josephson Effect with Magnetic Feedback in a Superconductor-Ferromagnet Heterostructure, Phys. Rev. Lett. 100, 207001(2008).
  - [19] Butcher, John C.. Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. New York, John Wiley and Sons. ISBN 978-0-471-96758-3(2003).
  - [20] Buzdin A., Koshelev A.E., Periodic alternating 0-and  $\pi$ -junction structures as realization of  $\varphi_0$ -Josephson junctions, Phys. Rev. B Vol. 67, 220504(R), (2003).
  - [21] Buzdin A. I., Proximity effects in superconductor-ferromagnet heterostructures, Rev. Mod. Phys. 77, 935 (2005).
  - [22] Buzdin A., Direct Coupling Between Magnetism and Superconducting Current in the Josephson  $\varphi_0$ -junction, Phys. Rev. Lett. 101, 107005 (2008).
  - [23] Cai L. and Chudnovsky E. M., Interaction of a nanomagnet with a weak superconducting link. – Phys. Rev. B 82, 104429 (2010).
  - [24] Cai L., Garanin D. A, and Chudnovsky E.M, Reversal of magnetization of a single-domain magnetic particle by the ac field of time-dependent frequency, Phys. Rev. B 87, 024418 (2013).
  - [25] Cellier, F., Kofman, E., Continuous System Simulation. Springer Verlag. ISBN 0-387-26102-8, (2006).
  - [26] Chudnovsky E. M., Quantum tunneling of the magnetic moment in the S/F/S Josephson  $\varphi_0$ -junction, Phys. Rev. B 93, 144422-(5) (2016).
  - [27] Dahlquist, Germund. A special stability problem for linear multistep methods. BIT. T. 3. DOI:10.1007/BF01963532 , (1963).
  - [28] Eschrig M., Spin-polarized supercurrents for spintronics: a review of current progress, Reports on Progress in Physics 78, 104501-104551 (2015).
  - [29] Chudnovsky E. M., Manipulating magnetic moments by superconducting currents Physical Review B 95, 100503(R) (2017).
  - [30] Forsythe, George E., Malcolm, Michael A., Moler, Cleve B., Computer Methods for Mathematical Computations. Prentice-Hall (1977).
  - [31] Gelfand I.M., Fomin S. V., Calculus of Variations, Moscow, Izdatel'stvo Nauka (1961).
  - [32] Goldobin E., Koelle D., Kleiner R., and Buzdin A., Josephson junctions with second harmonic in the current-phase relation: Properties of junctions, Phys. Rev. B 76 224523(2007).
  - [33] Goldobin E., Koelle D., Kleiner R., and Mints R.G., Phase Retrapping in a Pointlike Josephson Junction: The Butterfly Effect, Phys. Rev. Lett. 107 227001,(2011).
  - [34] Golubov A. A., Kupriyanov M. Y., and Ilichev E., The current-phase relation in Josephson junctions, Rev. Mod. Phys. 76, 411 (2004).
  - [35] Golubov A., Kupriyanov M.Yu., Superconductivity: Controlling magnetism, Nature Materials 16, 156–157 (2017).
  - [36] Gradshteyn I. S. and Ryzhik I. M., Tables of Integrals, Series and Products, Academic Press (2007).
  - [37] Hairer, Ernst, Nørsett, Syvert Paul, Wanner, Gerhard. Solving ordinary differential

- equations I: Nonstiff problems. Berlin, New York, Springer-Verlag. ISBN 978-3-540-56670-0 (1993).
- [38] Hairer, Ernst, Wanner, Gerhard. Solving ordinary differential equations II: Stiff and differential-algebraic problems. 2nd. Berlin, New York, Springer-Verlag. ISBN 978-3-540-60452-5 (1996).
- [39] Hall G. and Watt J.M., Modern Numerical Methods for Ordinary Differential Equations, Clarendon Press, Oxford (1976).
- [40] Houzet M., Ferromagnetic Josephson Junction with Precessing Magnetization, Phys. Rev. Lett. 101, 157009-(4) (2008).
- [41] Hugo D. Junghenn, Principles of Analysis, Measure, Integration, Functional Analysis, and Applications, CRC Press, Taylor and Francis Group, Boca Raton, FL 33487-2742 (2018).
- [42] Iman Askerzade, Ali Bozbey, Mehmet Cantürk; Modern Aspects of Josephson Dynamics and Superconductivity, Electronics Springer International Publishing AG (2017).
- [43] Iserles, Arieh. A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations. Cambridge University Press. ISBN 978-0-521-55655-2 (1996).
- [44] Josephson B.D., Possible new effects in superconductive tunneling, Phys. Lett. 1(7) (1962).
- [45] Kaw A.K., Kalu E.K., Nguyen D.T., Numerical Methods with Applications, 1st autarkaw.com (2008).
- [46] Korschelle F., Tokatly I. V., and Bergeret F. S., Theory of the spin-galvanic effect and the anomalous phase shift  $\varphi_0$  in superconductors and Josephson junctions with intrinsic spin-orbit coupling, Phys. Rev. B 92, 125443-(16) (2015).
- [47] Korschelle F. , Buzdin A., Magnetic Moment Manipulation by a Josephson Current. – Phys. Rev. Lett. 102, 017001 (2009).
- [48] Kulik, I.O., and Yanson, I.K. Josephson Effect in Superconducting Tunnel Structures. Moscow: Nauka. 1972. (in English) Jerusalem: Keter Press, ISBN 9780470510506(1970).
- [49] Kulik, I.O., and Yanson, I.K. Josephson Effect in Superconducting Tunnel Structures (in Russian). Moscow: Nauka. 1972. (in English) Jerusalem: Keter Press(1970).
- [50] Likharev K.K., Superconducting weak links, Rev. Mod. Phys. 51, 101 (1979).
- [51] Likharev K.K., Introduction to the dynamics of Josephson junctions, Nauka, Moscow (1985).
- [52] Linder J. and Yokoyama T., Supercurrent-induced magnetization dynamics in a Josephson junction with two misaligned ferromagnetic layers, Phys. Rev. B 83, 012501(2011).
- [53] Linder J. and Jason Robinson W. A., Superconducting spintronics, Nat. Phys. 11, 307 (2015).
- [54] Mai S., Kandelaki E., Volkov A. F., and Efetov K. B., Interaction of Josephson and magnetic oscillations in Josephson tunnel junctions with a ferromagnetic layer. Phys. Rev. B 84, 144519 (2011).
- [55] Mal'shukov A.G. , Sadjina S. and Brataas A., Inverse spin Hall effect in superconductor/normal-metal/superconductor Josephson junctions, Phys. Rev. B 81, 060502 (2010).
- [56] Martinov N. and Vitanov N.K., Analysis of the standing-wave solutions of the one-dimensional sine-Gordon equation, Bulgarian Journal of Physics 19, 48-56, (1992).
- [57] Mazanik A., Rahmonov I. R., Shukrinov Yu. M., Botha A. E., Analytical Criteria for Magnetization Reversal in a  $\varphi_0$  Josephson Junction, Phys. Rev. App. 14 014003(2020).

- [58] Panayotova S., Bashashin M., Zemlyanaya E., Atanasova P., Shukrinov Y. and Rahmonov I., Parallel Numerical Simulation of the Magnetic Moment Reversal within the  $\varphi_0$ -Josephson Junction Spintronic Model, EPJ Web of Conferences 226, 02018 (2020).
- [59] Petkovic I., Aprili M., Barnes S.E., Beuneu F., and Maekawa S., Phys. Rev. B 80, 220502(R)-(4) (2009).
- [60] Seydel R., Practical Bifurcation and Stability Analysis. Springer, 3rd ed., XV, 477p. (2010).
- [61] Shukrinov Yu. M., Rahmonov I.R., Sengupta K., and Buzdin A., Magnetization reversal by superconducting current in  $\varphi_0$  Josephson junctions. Appl. Phys. Lett. 110, 182407 (2017).
- [62] Shukrinov Yu. M., Rahmonov I.R., and Botha A.E., IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 28, 1800505 (2018).
- [63] Shukrinov Yu. M., Rahmonov I. R., Plecenik A., Botha A. E., Magnetization Dynamics Features in the SFS  $\varphi_0$ - Josephson Junction, International Conference on UK-China Emerging Technologies (UCET), DOI:10.1109/UCET51115.2020.9205473(2020).
- [64] Shukrinov Yu. M., Rahmonov I. R., Kulikov K., Nashaat M., Ferromagnetic Resonance and the Dynamics of the Magnetic Moment in a Josephson Junction-Nanomagnet System JETP Letters 110(3)(2019).
- [65] Shukrinov Yu. M., Rahmonov I. R., Sengupta K., Ferromagnetic resonance and magnetic precessions in  $\varphi_0$  junctions, Phys. Rev. B 99 224513 (2019).
- [66] Stoer, Josef, Bulirsch, Roland. Introduction to Numerical Analysis. 3rd. Berlin, New York, Springer-Verlag. ISBN 978-0-387-95452-3, (2002).
- [67] Superconductivity at 100, Physics World, April (2011).
- [68] Süli, Endre, Mayers, David. An Introduction to Numerical Analysis. Cambridge University Press. ISBN 0-521-00794-1.(2003).
- [69] Waintal X. and Brouwer P.W., Phys. Rev. B 65,054407(2002).
- [70] Zemlyanaya E.V., Alexeeva N.V., Numerical Study of Time-Periodic Solitons in the Damped-Driven NLS. International Journal of Numerical, Volume 2, Number 2-3, Pages 248–261 (2011).
- [71] Zemlyanaya E.V., Alexeeva N.V., Atanasova P.Kh., Ac-driven nonlinear Schroedinger equation and double sine-Gordon equation: numerical study of complexes of localized states, AIP Publishing, AIP Conf. Proceedings (AMiTaNS'14), Vol. 1629, 978-0-7354-1268-2, 217-225, (2014).
- [72] Zemlyanaya E. V., Alexeeva N. V., Atanasova P. H., Complexes of Localized States in Ac-Driven Nonlinear Schroedinger Equation and in Double Sine-Gordon Equation. Вестник Российского университета дружбы народов, Серия Математика. Информатика. Физика, ISSN:0869-8732, Изд: Российский университет дружбы народов, 2, 363-368, (2014).
- [73] Zemlyanaya E. V., Bashashin M. V., Rahmonov I. R., Shukrinov Yu. M., Atanasova P. Kh., and Volokhova A. V., Model of stacked long Josephson junctions: Parallel algorithm and numerical results in case of weak coupling. AIP Conference Proceedings 1773, 110018(1-9)doi: 10.1063/1.4965022 (2016).
- [74] Zutic I., Fabian J., and Das Sarma S., Spintronics: Fundamentals and applications, Rev. Mod. Phys. 76, 323 (2004).
- [75] Атанасова, П.Хр. Числени методи и алгоритми за изследване на нелинейни параметрични задачи във физиката, дис. за присъждане на научна и образователна

- степен доктор, (2011).
- [76] Башашин М. В. , Земляная Е. В., Шукринов Ю. М., Рахмонов И. Р., Атанасова П.Х., Панайотова С. А. Высокопроизводительное компьютерное исследование эффекта перемагничивания в джозефсоновском  $\varphi_0$ -переходе в рамках модели спинтроники, Трудове на IX Conference with international participation "Information and Telecommunication Technologies and Mathematical Modeling of High-Tech Systems" (Moscow, Russia, April 15-19, 2019), p.366, (2019).
  - [77] Бояджиев Д., Гочева-Илиева С., Попова Л., Макрелов И., Ръководство по числени методи - първа част, 3-то изд., ЕксПрес, Габрово, ISBN: 978-954-490-182-0, (2010).
  - [78] Бояджиев Д., Гочева-Илиева С., Попова Л., Ръководство по Числени методи II част, Издателство „ЕКС-ПРЕС“ – Габрово (2012).
  - [79] Бояджиев, Т.Л., Численное исследование критических режимов в нелинейных полевых моделях физики, Дисс. на соиск. уч. степени д.ф.м.н., Дубна, (2002).
  - [80] Бояджиев, Т.Л., Павлов Д.В., Пузынин И.В., Применение непрерывного аналога метода Ньютона для вычисления бифуркационных кривых в джозефсоновских переходах, Сборник трудов конф. Числ. методы и применени, София (1988).
  - [81] Бояджиев, Т.Л., Павлов Д.В., Пузынин И.В., Ньютоновский алгоритм вычисления критических параметров в одномерном неоднородном джозефсоновском переходе, Сообщение ОИЯИ, Дубна. P11-88-409.(1988).
  - [82] Бояджиев, Т.Л., Павлов Д.В., Пузынин И.В., Вычисление бифуркаций устойчивых состояний в двухслойных неоднородных джозефсоновских переходах, Сообщение ОИЯИ P5-89-173, Дубна, (1989).
  - [83] Боянов Б., Семерджиев Х., Числени методи, Пловдив: Паисий Хилендарски (1988).
  - [84] Боянов Б., Семерджиев Х., Числени Методи, ПУ Паисий Хилендарски , стр. 341. ISBN 954-423-081-5 (1995).
  - [85] Земляная Е.В., Барашенков И.В.. Численное исследование многосолитонных комплексов в нелинейном уравнении Шрёдингера с диссипацией и накачкой. Математическое моделирование, том 16, номер 10, с.3-14, (2003).
  - [86] Земляная Е.В., Барашенков И.В., Численный анализ движущихся солитонов в нелинейном уравнении Шредингера с параметрической накачкой и диссипацией. Математическое моделирование, том 17, номер 1, с.65-78., (2005).
  - [87] Канторович Л.В. и Акилов Г.П., Функциональный анализ, Наука, Москва (1977).
  - [88] Лалов И. и Дечева В., Физика на кондензираната материя. София, УИ Климент Охридски. ISBN 9540720753 (2005).
  - [89] Лихарев К.К., Введение в динамику джозефсоновских переходов, Москва, Наука, ГРФМЛ (1985).
  - [90] Мелемов Х.Т., Аналитични и числено изследване на негладки решения в джозефсонови, присъждане на научна и образователна степен доктор (2010).
  - [91] Пузынин И.В., Бояджиев Т.Л., Веницкий С.И., Земляная Е.В., Пузынина Т.П., Чулуунбаатар О., О методах вычислительной физики для исследования моделей сложных физических процессов, Физика элементарных частиц и атомного ядра, Т.38, вып.1, с.144-232 (2007).
  - [92] Рахмонов И.Р., Шукринов Ю.М., Ирие А.. Параметрический резонанс в системе длинных джозефсоновских переходов, Письма в ЖЭТФ, Т.99, 735-742 (2014)

- [93] Семерджиева Е.Г., Вихрови структури в дълги Джозефсонови контакти с променлива геометрия, дис. за присъждане на научна и образователна степен доктор (2007).
- [94] Сендов Б., Попов В., Числени Методи, втора част, издателство Наука и изкуство София (1978).
- [95] Христов И.Г., Числено изследване на статични и динамични режими в многослойни джозефсонови контакти, дис. за присъждане на научна и образователна степен доктор(2014).
- [96] Шукринов Ю.М., Рахронов И.Р., Буздин А., Bondyopadhyaya N. Влияние спин-орбитальной связи на генерацию магнитной прецессии джозефсоновским током, Нанопизика и наноелектроника, Материалы XX Международного симпозиума, Нижний Новгород, 14-18 марта (2016).
- [97] Обяснение какво е нанотехнологията от уебсайта на NNI, <https://www.nano.gov/nanotech-101/what/definition>
- [98] <http://reference.wolfram.com/language>
- [99] <http://math.fullerton.edu/mathews/n2003/rungekuttafehlbergmod.html>