ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ „ПАИСИЙ ХИЛЕНДАРСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
КАТЕДРА „АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ“

МИРОСЛАВА ТЕНЕВА ИВАНОВА

ЕСТЕСТВЕНИ СВЪРЗАНОСТИ ВЪРХУ ПОЧТИ КОНТАКТНИ B-МЕТРИЧНИ МНОГООБРАЗИЯ

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертационен труд
за присъждане на образователната и научна степен „Доктор“
по област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика;
професионално направление 4.5. Математика;
научна специалност „Геометрия и топология“

Научен ръководител: доц. д-р Манчо Манев

Пловдив, 2012 г.

Дисертационният труд е обсъден и насочен за защита от Катедрения съвет в разширен състав на катедра „Алгебра и геометрия“ при Факултета по математика и информатика на ПУ „Паисий Хилендарски“, проведен на 11.07.2012 г.

Дисертационният труд съдържа 103 страници. Използваната литература включва 126 източника. Списъкът на авторските публикации се състои от 5 заглавия, от които 3 са публикувани като статии, а 2 са електронни препринти.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на 20.09.2012 от 14:00 в Заседателната зала на Новата сграда на ПУ „Паисий Хилендарски“.

Материалите по защитата са на разположение в секретариата на ФМИ, бул. „България“ №236, каб. 330, всеки ден от 8:30 до 17:00 часа.

По дефиниция почти комплексно многообразие е четномерно диференцируемо многообразие M', снабдено с почти комплексна структура J, т.е. изображението $-J^2$ на допирателното пространство съвпада с неговия индентитет. Върху (M', J) може да се разглежда псевдориманова метрика g', съгласувана по два различни начина с J. В единия случай, когато J индуцира изометрия върху всеки допирателен слой, се получава почти комплексно многообразие с ермитова метрика (M', J, g'), а в другия случай, когато J индуцира антиизометрия върху всеки допирателен слой, (M', J, g') е почти комплексно многообразие с норденова метрика. В първия случай метриката може да има сигнатура $(2p, 2q)$ (за произволни естествени числа p и q) и в частност да бъде и риманова, докато във втория случай по необходимост g' е псевдориманова метрика с неутрална сигнатура.

Нечетномерният аналог на почти комплексното многообразие е почти контактно многообразие (M, φ, ξ, η), където φ е ендоморфизмът в допирателното пространство на M, η е контактната 1-форма, а ξ е съответното ѝ векторно поле. Рестрикцията на φ върху контактното разпределение $\operatorname{Ker}\eta$ е почти комплексна структура. Породената контактна геометрия е инспирирана от математически формализъм във физиката, където има широко приложение.

Върху почти контактно многообразие може да се разглежда псевдориманова метрика g, съгласувана също по два различни начина със структурата (φ, ξ, η), като рестрикцията на g върху $\operatorname{Ker}\eta$ е съответно ермитова или норденова метрика. В първия случай се получава почти контактно метрично многообразие, а във втория случай – почти контактно В-метрично многообразие (или почти контактно многообразие с В-метрика). Геометриите на тези многообразия са естествени продължения съответно на геометриите на почти комплексните многообразия с ермитова или норденова метрика.

Геометрията на почти ермитовите многообразия и на почти контактните многообразия е добре изучена. Изследванията върху почти комплексните многообразия с норденова метрика започват през 1985 г. от К. Грибачев, Д. Мекеров и Г. Джелепов [10], след като А. П. Норден въвежда такъв тип метрика през 1960 г. върху 4-мерно многообразие с паралелна почти комплексна структура J. Геометриите на тези многообразия са изучавали още редица български геометри: Г. Ганчев, А. Борисов, С. Иванов, В. Михова, Е. Павлов, Г. Марков, Х. Хоптериев, М. Василева, М. Манев, Г. Накова, И. Докузова, М. Теофилова и А. Христов. Много публикации могат да се посочат и от чуждестранни автори, предимно от Испания, Италия, Румъния, Полша и Индия.

Началото на изучаването на геометрията на почти контактните В-метрични многообразия е поставено през 1993 г. с работата [9] на Г. Ганчев, В. Михова, К. Грибачев и статиите [25], [26], [44] на К. Грибачев, М. Манев и Г. Накова. Изследванията продължават с [16]–[22], [1], [23], [24], [34], [35], [42]–[43], [45]–[48] на К. Грибачев, М. Манев и Г. Накова и по-късно [36], [49], [50] на М. Манев и М. Теофилова.

Обект на изучаване в настоящата дисертация е геометрията на почти контактните многообразия с В-метрика. По-конкретно темата е свързана с изследването на естествени свързаности върху тези многообразия. Естествени свързаности върху многообразия с допълнителна тензорна структура са тези линейни свързаности, относно които структурните тензори на многообразието са паралелни. Естествени свързаности са изучавани например в геометрията на многообразия с почти ермитова структура [13], с почти контактна метрична структура [5], с почти комплексна структура с норденова метрика [8].

Геометрията на почти контактните В-метрични многообразия е геометрия на структурите φ, ξ, η, g и $\tilde{g}$. В тази геометрия са важни онези линейни свързаности, спрямо които паралелното пренасяне задава изоморфизъм на допирателните пространства, снабдени с почти контактни В-метрични структури. Това е налице точно тогава, когато φ и g (следователно и ξ, η, $\tilde{g}$) са паралелни по отношение на такава свързаност. Метриката g е паралелна относно съответната ѝ свързаност на Леви-Чивита ∇. С $\mathcal{F}_0$ се означава класът на изучаваните многообразия с паралелна структура φ относно ∇. Естествените свързаности играят същата роля извън класа $\mathcal{F}_0$, каквато роля играе ∇ в $\mathcal{F}_0$.

Известни са някои естествени свързаности върху почти комплексни многообразия с норденова метрика: В-свързаност ([37]), канонична свързаност ([8], [39]), КТ-свързаност ([33], [38], [40], [41]), които използваме в нашите изследвания.

Настоящата дисертация се състои от седем параграфа. Тук ще направим обзор на получените резултати.

* * *

В §1 въвеждаме някои понятия и зависимости върху почти контактните В-метрични многообразия, които са необходими за по-нататъшните ни изследвания. Дефинираме присъединен симетричен тензор $\widehat{N}$ на тензора на Нийенхойс N. Получаваме характеристики за основните класове на разглежданите многообразия чрез тензора $\widehat{N}$.

Нека M е $(2n+1)$-мерно реално диференцируемо многообразие, което притежава почти контактна структура (φ, ξ, η): $\varphi^2 = -\imath + \eta \otimes \xi$, $\eta(\xi) = 1$, $\varphi\xi = 0$, $\eta \circ \varphi = 0$ и B-метрика g: $g(\varphi\cdot, \varphi\cdot) = -g(\cdot, \cdot) + \eta(\cdot)\eta(\cdot)$, се нарича *почти контактно B-метрично многообразие* и се означава с $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$. Присъединена B-метрика $\tilde{g}$ на g се задава чрез $\tilde{g}(x, y) = g(x, \varphi y) + \eta(x)\eta(y)$. Двете B-метрики са индефинитни със сигнатура $(n+1, n)$.

Нека $\mathcal{G}$ е матричната група $\mathcal{GL}(n; \mathbb{C}) \cap \mathcal{O}(n, n)$, а $\mathcal{I}$ представлява идентитета на $\mathrm{span}(\xi)$. Тогава групата $\mathcal{G} \times \mathcal{I}$ е структурната група на многообразието.

Нека ∇ е свързаността на Леви-Чивита, която е породена от метриката g. Важна роля в теорията на почти контактните B-метрични многообразия $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ играят тензорното поле F от тип $(0, 3)$ и присъединените му 1-форми, зададени чрез $F(x, y, z) = g\big((\nabla_x \varphi)\, y, z\big)$, $\theta(z) = g^{ij} F(e_i, e_j, z)$, $\theta^*(z) = g^{ij} F(e_i, \varphi e_j, z)$, $\omega(z) = F(\xi, \xi, z)$. В [9] е дадена една класификация относно F от 11 основни класа $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\dots$, $\mathcal{F}_{11}$ на разглежданите многообразия със сечение специалният клас $\mathcal{F}_0$: $F = 0$.

В [1], [18], [2], [25] и [26] върху $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ са изучавани трансформации от конформен тип на почти контактната B-метрична структура. В [1] е въведена *обща контактно конформна трансформация* върху M, определена чрез $\bar{\xi} = e^{-w}\xi$, $\bar{\eta} = e^{w}\eta$, $\bar{g} = \lambda g(x, y) + \mu \tilde{g} + (\nu - \lambda - mu)\eta \otimes \eta$, където $\lambda = e^{2u}\cos 2v$, $\mu = e^{2u}\sin 2v$, $\nu = e^{2w}$ за диференцируеми функции u, v, w върху M.

Известно е, че тези трансформации запазват почти контактната B-метрична структура и образуват група G, която се нарича *обща контактно конформна група*.

Дефинираме присъединен симетричен тензор $\widehat{N}$ на тензора на Нийенхойс $N = [\varphi, \varphi] + \mathrm{d}\eta \otimes \xi$ чрез: $\widehat{N} = \{\varphi, \varphi\} + (\mathcal{L}_\xi g) \otimes \xi$, където $\{\varphi, \varphi\}(x, y) = \varphi^2\{x, y\} + \{\varphi x, \varphi y\} - \varphi\{\varphi x, y\} - \varphi\{x, \varphi y\}$, $\{x, y\} = \nabla_x y + \nabla_y x$, $(\mathcal{L}_\xi g)(x, y) = \xi g(x, y) - g(\mathcal{L}_\xi x, y) - g(y, \mathcal{L}_\xi y)$.

Лема 1.4. *За всяко почти контактно B-метрично многообразие тензорът на Нийенхойс притежава следните свойства:*

$$
\begin{aligned}
N(\varphi x, \varphi y, \varphi z) &= -N(\varphi^2 x, \varphi^2 y, \varphi z) = N(\varphi x, \varphi^2 y, \varphi^2 z),\\
N(\varphi^2 x, \varphi y, \varphi z) &= N(\varphi x, \varphi^2 y, \varphi z) = -N(\varphi x, \varphi y, \varphi^2 z).
\end{aligned}
$$

Твърдение 1.5. *Класът на нормалните почти контактни B-метрични многообразия (т.е. с $N = 0$) е* $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_5 \oplus \mathcal{F}_6$.

Освен това $N = hN \Leftrightarrow M \in \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_9 \oplus \mathcal{F}_{10}$ и $N = vN \Leftrightarrow M \in \mathcal{F}_7 \oplus \mathcal{F}_{11}$.

Лема 1.6. *Класът* $\mathcal{U}_0 = \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_5 \oplus \mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_9 \oplus \mathcal{F}_{10} \oplus \mathcal{F}_{11}$ *на почти контактните B-метрични многообразия е определен чрез условието* $N(\varphi\cdot, \varphi\cdot) = 0$.

Векторът $\widehat{N}(x,y)$ се разлага на ортогонални компоненти $h\widehat{N}(x,y)$ и $v\widehat{N}(x,y)$ по следния начин: $\widehat{N}(x,y) = h\widehat{N}(x,y) + v\widehat{N}(x,y)$, където $h\widehat{N}(x,y) = -\varphi^2\widehat{N}(x,y)$, $v\widehat{N}(x,y) = \eta(\widehat{N}(x,y))\xi$.

Лема 1.7. *Нека* (M,φ,ξ,η,g) *е* $\mathcal{F}_i$*-многообразие* $(i = 1,2,\dots,11)$. *Тогава за тензора* $\widehat{N}$ *върху* M *имаме:*

$$
\begin{aligned}
&\widehat{N}(x,y) = \tfrac{2}{n}\big\{g(\varphi x,\varphi y)\varphi\Theta + g(x,\varphi y)\Theta\big\}, && M \in \mathcal{F}_1;\\
&\widehat{N}(x,y) = 2\left\{(\nabla_{\varphi x}\varphi)\,y - \varphi\,(\nabla_x\varphi)\,y\right\}, && M \in \mathcal{F}_2;\\
&\widehat{N}(x,y) = 0, && M \in \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_7;\\
&\widehat{N}(x,y) = \tfrac{2\theta(\xi)}{n}g(x,\varphi y)\cdot\xi, && M \in \mathcal{F}_4;\\
&\widehat{N}(x,y) = -\tfrac{2\theta^*(\xi)}{n}g(\varphi x,\varphi y)\cdot\xi, && M \in \mathcal{F}_5;\\
&\widehat{N}(x,y) = 4\,(\nabla_x\eta)\,y\cdot\xi, && M \in \mathcal{F}_6;\\
&\widehat{N}(x,y) = -2\left\{\eta(x)\nabla_y\xi + \eta(y)\nabla_x\xi\right\}, && M \in \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_9;\\
&\widehat{N}(x,y) = -\left\{\eta(x)\varphi\,(\nabla_\xi\varphi)\,y + \eta(y)\varphi\,(\nabla_\xi\varphi)\,x\right\}, && M \in \mathcal{F}_{10};\\
&\widehat{N}(x,y) = -2\eta(x)\eta(y)\varphi\Omega\\
&\qquad\qquad + \left\{\eta(x)\omega(\varphi y) + \eta(y)\omega(\varphi x)\right\}\cdot\xi, && M \in \mathcal{F}_{11},
\end{aligned}
$$

където $\theta(z) = g(\Theta, z)$ *и* $\omega(z) = g(\Omega, z)$.

Твърдение 1.8. *Многообразието* $(M,\varphi,\xi,\eta,g) \in \mathcal{F}_i$ $(i = 1,2,\dots,11)$ *се характеризира чрез анулирането на компонентите на съответния тензор* $\widehat{N}$ *по следния начин:*

$$
\begin{aligned}
h\widehat{N} = 0,\quad v\widehat{N} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad M \in \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_7;\\
h\widehat{N} \neq 0,\quad v\widehat{N} \neq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad M \in \mathcal{F}_{11};
\end{aligned}
$$

$$\widehat{N} = h\widehat{N}, \quad v\widehat{N} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad M \in \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_9 \oplus \mathcal{F}_{10};$$
$$\widehat{N} = v\widehat{N}, \quad h\widehat{N} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad M \in \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_5 \oplus \mathcal{F}_6.$$

Разглеждаме кривиноподобен тензор L върху $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$, т.е. тензор от тип (0,4) със свойствата на тензора на кривина R. Ако L удовлетворява условието $L(x, y, \varphi z, \varphi w) = -L(x, y, z, w)$, той се нарича φ-келеров тензор.

Лема 1.11. *Ако L е φ-келеров тензор върху $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$, то в сила са следните свойства:*

$$L(\varphi x, \varphi y, z, w) = L(x, \varphi y, \varphi z, w) = -L(x, y, z, w),$$
$$L(\xi, y, z, w) = L(x, \xi, z, w) = L(x, y, \xi, w) = L(x, y, z, \xi) = 0,$$
$$L(\varphi x, y, z, w) = L(x, \varphi y, z, w) = L(x, y, \varphi z, w) = L(x, y, z, \varphi w).$$

Следствие 1.12. *Нека L и неговият присъединен тензор L^* (т.е. $L^*(x, y, z, w) = L(x, y, z, \varphi w)$) са φ-келерови тензори върху $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$. Тогава имаме*

$$\rho(L^*) = \rho^*(L), \quad \rho^*(L^*) = -\rho(L), \; \tau(L^*) = \tau^*(L), \quad \tau^*(L^*) = -\tau(L).$$

Лема 1.13 ([2]). *Тензорите π_i $(i = 1, 2, \dots, 5)$ са кривиноподобни. Тензорите $L_1 = \pi_1 - \pi_2 - \pi_4$, $L_2 = \pi_3 + \pi_5$ са φ-келерови тензори, като присъединените им тензори са: $L_1^* = -L_2$, $L_2^* = L_1$.*

* * *

В §2 пространството на тензорите на торзия от тип (0,3) за линейните свързаности върху почти контактни B-метрични многообразия е разложено на 15 ортогонални и инвариантни подпространства относно действието на структурната група. По този начин са получени 15 класа линейни свързаности върху разглежданите многообразия.

Разглеждаме несиметрична линейна свързаност D. Ако за D и свързаността на Леви-Чивита ∇ е в сила връзката $D_x y = \nabla_x y + Q(x, y)$, тензорът Q от тип (1,2) е *тензорът на деформацията* при трансформацията $\nabla \to D$. Съответният тензор Q от тип (0,3) се дефинира чрез $Q(x,y,z) = g\left(Q(x,y),z\right)$. Нека T е *тензорът на торзия* за D, т.е. $T(x,y) = D_x y - D_y x - [x,y]$. Съответният тензор на T от тип $(0,3)$ се дефинира чрез $T(x,y,z) = g(T(x,y),z)$.

Допирателното пространство T_pM в произволна точка $p \in M$ е $(2n+1)$-мерно векторно пространство V с почти контактна В-метрична структура (φ,ξ,η,g). Нека $\mathcal{T}$ е векторното пространство на всички тензори T от тип $(0,3)$ над (V,φ,ξ,η,g), за които

$$\mathcal{T} = \left\{T(x,y,z) \in \mathbb{R} \mid T(x,y,z) = -T(y,x,z);\ x,y,z \in V\right\}.$$

Метриката g индуцира скаларно произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ върху $\mathcal{T}$, определено чрез $\langle T_1, T_2\rangle = g^{iq}g^{jr}g^{ks}T_1(e_i,e_j,e_k)T_2(e_q,e_r,e_s)$ за произволни T_1, $T_2 \in \mathcal{T}$ и база $\{e_i\}$ $(i = 1,2,\dots,2n+1)$ на V.

Чрез линейните оператори h и v във V, конструираме частично разлагане на векторното пространство $\mathcal{T}$.

Теорема 2.1. *Разлагането* $\mathcal{T} = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$ *на векторното пространство* $\mathcal{T}$ *е ортогонално и инвариантно относно действието на структурната група* $\mathcal{G} \times \mathcal{I}$, *където подпространствата* $\mathcal{W}_i$ $(i = 1,2,3,4)$ *са определени чрез условията:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_1 :&\quad T(x,y,z) = -T(\varphi^2x,\varphi^2y,\varphi^2z),\\
\mathcal{W}_2 :&\quad T(x,y,z) = \eta(z)T(\varphi^2x,\varphi^2y,\xi),\\
\mathcal{W}_3 :&\quad T(x,y,z) = \eta(x)T(\xi,\varphi^2y,\varphi^2z) + \eta(y)T(\varphi^2x,\xi,\varphi^2z),\\
\mathcal{W}_4 :&\quad T(x,y,z) = -\eta(z)\left\{\eta(y)T(\varphi^2x,\xi,\xi) + \eta(x)T(\xi,\varphi^2y,\xi)\right\}.
\end{aligned}$$

Торзионни форми t, t^* и $\hat{t}$ за тензора на торзия T наричаме присъединени 1-форми на T: $t(x) = g^{ij}T(x,e_i,e_j)$, $t^*(x) = g^{ij}T(x,e_i,\varphi e_j)$, $\hat{t}(x) = T(x,\xi,\xi)$, относно база $\{e_i;\xi\}$ на V, $i,j \in \{1,2,\dots,2n\}$.

В Следствие 2.2 даваме свойства на торзионните форми на T във всяко едно от $\mathcal{W}_i$ $(i = 1,2,3,4)$.

В следващите раздели на настоящия параграф продължаваме с разлагането на подпространствата $\mathcal{W}_i$ $(i = 1,2,3,4)$ на векторното пространство $\mathcal{T}$.

Първо изполваме проектори, самоспрегнати относно скаларното произведение на $\mathcal{T}$, които разцепват пространството $\mathcal{W}_i$ на образ и ядро. Така получаваме

Теорема 2.3. *Разлагането* $\mathcal{W}_1 = \mathcal{W}_{1,1} \oplus \mathcal{W}_{1,2} \oplus \mathcal{W}_{1,3} \oplus \mathcal{W}_{1,4}$ *е ортогонално и инвариантно относно структурната група* $\mathcal{G} \times \mathcal{I}$.

Твърдение 2.4. *Подпространствата* $\mathcal{W}_{1,i}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ *на* $\mathcal{W}_1$ *са определени чрез условията:*

$$
\begin{array}{ll}
\mathcal{W}_{1,1}: & T(\xi, y, z) = T(x, y, \xi) = 0, \\
 & T(x, y, z) = -T(\varphi x, \varphi y, z) = -T(x, \varphi y, \varphi z); \\
\mathcal{W}_{1,2}: & T(\xi, y, z) = T(x, y, \xi) = 0, \\
 & T(x, y, z) = -T(\varphi x, \varphi y, z) = T(\varphi x, y, \varphi z); \\
\mathcal{W}_{1,3}: & T(\xi, y, z) = T(x, y, \xi) = 0, \\
 & T(x, y, z) - T(\varphi x, \varphi y, z) = \underset{x,y,z}{\mathfrak{S}} T(x, y, z) = 0; \\
\mathcal{W}_{1,4}: & T(\xi, y, z) = T(x, y, \xi) = 0, \\
 & T(x, y, z) - T(\varphi x, \varphi y, z) = \underset{x,y,z}{\mathfrak{S}} T(\varphi x, y, z) = 0.
\end{array}
$$

В Твърдение 2.5 се определят проекторите $p_{1,i}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, които изобразяват произволен елемент T от векторното пространство $\mathcal{T}$ във всяко едно от векторните подпространства $\mathcal{W}_{1,i}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, а в Следствие 2.6 се дават свойства на t и t^* в $\mathcal{W}_{1,i}$.

Всяко от $\mathcal{W}_{1,1}$ и $\mathcal{W}_{1,3}$ се разлага допълнително на подпространства според анулирането на торзионните форми: $\mathcal{W}_{1,1} = \mathcal{W}_{1,1,1} \oplus \mathcal{W}_{1,1,2}$, $\mathcal{W}_{1,3} = \mathcal{W}_{1,3,1} \oplus \mathcal{W}_{1,3,2}$, където $\mathcal{W}_{1,1,1} = \{T \in \mathcal{W}_{1,1} \mid t \neq 0\}$, $\mathcal{W}_{1,1,2} = \{T \in \mathcal{W}_{1,1} \mid t = 0\}$, $\mathcal{W}_{1,3,1} = \{T \in \mathcal{W}_{1,3} \mid t \neq 0\}$, $\mathcal{W}_{1,3,2} = \{T \in \mathcal{W}_{1,3} \mid t = 0\}$.

Следвайки показаната процедура за $\mathcal{W}_1$, продължаваме разлагането на другите главни подпространства $\mathcal{W}_2$, $\mathcal{W}_3$ и $\mathcal{W}_4$ на $\mathcal{T}$ относно почти контактната B-метрична структура.

В заключение на това разлагане комбинираме резултатите и преозначаваме подпространствата $\mathcal{W}_{i,j}$ и $\mathcal{W}_{i,j,k}$ с $\mathcal{T}_s$, $s \in \{1, \dots, 15\}$ по следния начин: $\mathcal{T}_1 = \mathcal{W}_{1,1,1}$, $\mathcal{T}_2 = \mathcal{W}_{1,1,2}$, $\mathcal{T}_3 = \mathcal{W}_{1,2}$, $\mathcal{T}_4 = \mathcal{W}_{1,3,1}$, $\mathcal{T}_5 = \mathcal{W}_{1,3,2}$, $\mathcal{T}_6 = \mathcal{W}_{1,4}$, $\mathcal{T}_7 = \mathcal{W}_{2,1}$, $\mathcal{T}_8 = \mathcal{W}_{2,2}$, $\mathcal{T}_9 = \mathcal{W}_{3,1,1}$, $\mathcal{T}_{10} = \mathcal{W}_{3,1,2}$, $\mathcal{T}_{11} = \mathcal{W}_{3,1,3}$, $\mathcal{T}_{12} = \mathcal{W}_{3,2}$, $\mathcal{T}_{13} = \mathcal{W}_{3,3}$, $\mathcal{T}_{14} = \mathcal{W}_{3,4}$, $\mathcal{T}_{15} = \mathcal{W}_{4,1}$. Така получаваме следната основна за този параграф

Теорема 2.17. *Нека $\mathcal{T}$ е векторното пространство от тензорите на торзия от тип (0,3) върху векторно пространство V с почти контактна В-метрична структура (φ, ξ, η, g). Разлагането $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{T}_{15}$ е ортогонално и инвариантно по отношение на структурната група $\mathcal{G} \times \mathcal{I}$ на (φ, ξ, η, g).*

Дефиниция 2.18. *Казваме, че върху почти контактно В-метрично многообразие една линейна свързаност D принадлежи на клас $\mathcal{C}_s$ $(s = 1, 2, \ldots, 15)$, точно когато тензорът на торзия T за D принадлежи на подпространството $\mathcal{T}_s$ на $\mathcal{T}$.*

От Теорема 2.17, получаваме следната класификационна

Теорема 2.19. *Множеството на линейните свързаности $\mathcal{C}$ върху почти контактно В-метрично многообразие се разбива на 15 основни класа $\mathcal{C}_s$ $(s = 1, 2, \ldots, 15)$ чрез разлагането $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{C}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{C}_{15}$.*

Специалният клас $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}_s$ съдържа симетричните свързаности, като той е съответен на нулевото векторно подпространство $\mathcal{T}_0$ на $\mathcal{T}$. Свързаностите на Леви-Чивита ∇ и $\widetilde{\nabla}$ съответно за g и $\tilde{g}$ са симетрични и следователно принадлежат на $\mathcal{C}_0$.

Класовете $\mathcal{C}_i \oplus \mathcal{C}_j \oplus \ldots$ се дефинират по естествен начин чрез съответните подпространства $\mathcal{T}_i \oplus \mathcal{T}_j \oplus \ldots$. Броят на всички класове на линейните свързаности върху $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ е 2^{15} и техните дефиниционни условия лесно се получават от тези на основните 15 класа.

* * *

В §3 разглеждаме естествени свързаности върху почти контактни В-метрични многообразия и по-специално се спираме върху две известни естествени свързаности – φKT-свързаността и φB-свързаността. Показваме, че съществуването на първата от тях е налице, точно когато тензорът $\widehat{N}$ е нулев. Определяме класовете, на които принадлежат тези две свързаности съгласно класификацията от §2. Изучаваме свойствата на тензора на торзия и тензора на кривина за φB-свързаността в някои характерни вертикални класове на разглежданите многообразия.

В [26] е въведено понятието *естествена свързаност* върху (M,φ,ξ,η,g). Това е линейна свързаност ∇', относно която почти контактната структура (φ,ξ,η) и B-метриката g са паралелни, т.е. $\nabla'\varphi = \nabla'\xi = \nabla'\eta = \nabla' g = \nabla'\tilde{g} = 0$. Нека Q' е тензорът на деформация при трансформацията $\nabla' \to \nabla$, т.е. $\nabla'_x y = \nabla_x y + Q'(x,y)$.

Теорема 3.2. *Една линейна свързаност ∇' е естествена върху (M,φ,ξ,η,g) тогава и само тогава, когато $\nabla'\varphi = \nabla' g = 0$.*

По-нататък в този параграф разглеждаме две естествени свързаности – φKT-свързаността и φB-свързаността върху (M,φ,ξ,η,g), чиито рестрикции върху контактното разпределение H съвпадат съответно с KT-свързаността и B-свързаността върху почти комплексно многообразие с норденова метрика. Това ни дава основание да използваме тези техни названия.

В [23] е въведена една специална естествена свързаност ∇', наречена *φKT-свързаност* върху многообразието (M,φ,ξ,η,g), като тензорът на торзия T' за ∇' е напълно антисиметричен, т.е. 3-форма. Освен това, φKT-свързаността съществува единствено в класа $\mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_7$. Този клас се характеризира с килингово векторно поле ξ и нулева циклична сума на F по три аргумента.

Теорема 3.3. *φKT-свързаността върху (M,φ,ξ,η,g) съществува тогава и само тогава, когато тензорът $\widehat{N}$ е нулев.*

Твърдение 3.4. *φKT-свързаността принадлежи на класа $\mathcal{C}_3 \oplus \mathcal{C}_6 \oplus \mathcal{C}_7 \oplus \mathcal{C}_{12}$ от линейни свързаности върху (M,φ,ξ,η,g).*

В [26] се въвежда една естествена свързаност ∇^0 върху (M,φ,ξ,η,g), наречена *φB-свързаност.* Тя е дефинирана чрез равенството $\nabla^0_x y = \nabla_x y + \frac{1}{2}\big\{(\nabla_x\varphi)\,\varphi y + (\nabla_x\eta)\,y\cdot\xi\big\} - \eta(y)\nabla_x\xi$. Определяме вида на тензора на торзия T^0 за ∇^0 и съответните му торзионни форми.

Твърдение 3.5. *Класът на φB-свързаността е $\mathcal{C}_3 \oplus \mathcal{C}_4 \oplus \cdots \oplus \mathcal{C}_{15}$.*

По-нататък разглеждаме φB-свързаността върху някои класове почти контактни B-метрични многообразия. Разглеждаме класа $\mathcal{U} = \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_5 \oplus \mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_7 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_9$, определен чрез $F(x,y,z) = \eta(y)F(x,z,\xi) + \eta(z)F(x,y,\xi)$ и $F(\xi,y,z) = 0$. Спираме се и на неговите подкласове $\mathcal{U}_1 = \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_5 \oplus \mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_9$, $\mathcal{U}_2 = \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_5 \oplus \mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_7$ и $\mathcal{U}_3 = \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_5 \oplus \mathcal{F}_6$, определени съответно чрез допълните условия $\mathrm{d}\eta(x,y) = 0$, $F(x,y,\xi) = -F(\varphi x,\varphi y,\xi)$ и $F(x,y,\xi) = F(y,x,\xi) = -F(\varphi x,\varphi y,\xi)$.

В Твърдение 3.6 даваме вида на T^0 върху многообразие от $\mathcal{U}$ и доказваме, че t^0 и t^{*0} съвпадат съответно с θ^* и $-\theta$.

Твърдение 3.7. *Класът на φB-свързаността върху $(M, \varphi, \xi, \eta, g) \in \mathcal{U}$ е $\mathcal{C}_7 \oplus \mathcal{C}_8 \oplus \cdots \oplus \mathcal{C}_{14}$. Освен това, ако $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ принадлежи на подкласовете $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ и $\mathcal{U}_3$ на $\mathcal{U}$, тогава ∇^0 принадлежи съответно на $\mathcal{C}_9 \oplus \mathcal{C}_{10} \oplus \mathcal{C}_{11} \oplus \mathcal{C}_{13}$, $\mathcal{C}_9 \oplus \mathcal{C}_{10} \oplus \mathcal{C}_{11} \oplus \mathcal{C}_{12}$ и $\mathcal{C}_9 \oplus \mathcal{C}_{10} \oplus \mathcal{C}_{11}$.*

В Твърдение 3.8 и Твърдение 3.9 се доказват свойства на T^0 за φB-свързаността върху $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ съответно от $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_3$.

Твърдение 3.10. *Нека R^0 и τ^0 са съответно кривинният тензор и скаларната кривина за ∇^0 върху $(M, \varphi, \xi, \eta, g) \in \mathcal{U}$. Тогава имаме $R^0(x, y, z, w) = R(x, y, \varphi^2 z, \varphi^2 w) - (\nabla_x \eta)z(\nabla_y \eta)w + (\nabla_y \eta)z(\nabla_x \eta)w$ и $\tau^0 = \tau - 2\rho(\xi, \xi) - \|\nabla\xi\|$, където $\|\nabla\xi\| = g^{ij} g\big(\nabla_{e_i}\xi, \nabla_{e_j}\xi\big)$.*

В следващата теорема даваме интерпретация на $\mathcal{U}_3$ като класа на $\mathcal{U}_1$-многообразията с тензор на кривина, притежаващ свойствата на тензора на кривина за ∇ в класа $\mathcal{F}_0$.

Теорема 3.11. *Тензорът на кривина за φB-свързаността е φ-келеров тензор върху $(M, \varphi, \xi, \eta, g) \in \mathcal{U}_1$ тогава и само тогава, когато $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ принадлежи на класа $\mathcal{U}_3$.*

* * *

В §4 въвеждаме естествена свързаност ∇' с определено свойство на тензора на торзия и я наричаме φ-канонична свързаност. Доказваме, че съществува единствена такава свързаност. Определяме класа на ∇' в класификацията от §2. Намираме необходимо и достатъчно условие φ-каноничната свързаност да съвпада с φB-свързаността. Доказваме, че тензорът на торзията за ∇' е инвариантен относно подгрупата от общи контактно конформни трансформации на многообразието, запазваща основните класове от многообразия $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$. Въз основа на това характеризираме основните класове на изучаваните многообразия чрез торзията на ∇' и класификацията от §2.

Дефиниция 4.1. *Една естествена свързаност ∇' върху почти контактно B-метрично многообразие $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ с тензор на торзия T' се нарича φ-канонична свързаност, ако е в сила свойството*

$$\begin{aligned}
&T'(x,y,z) - T'(x,z,y) - T'(x,\varphi y,\varphi z) + T'(x,\varphi z,\varphi y) = \\
&= \eta(x)\left\{T'(\xi,y,z) - T'(\xi,z,y) - T'(\xi,\varphi y,\varphi z) + T'(\xi,\varphi z,\varphi y)\right\} \\
&+\eta(y)\left\{T'(x,\xi,z) - T'(x,z,\xi) - \eta(x)T'(z,\xi,\xi)\right\} \\
&-\eta(z)\left\{T'(x,\xi,y) - T'(x,y,\xi) - \eta(x)T'(y,\xi,\xi)\right\}.
\end{aligned}$$

Да отбележим, че рестрикцията на φ-каноничната свързаност ∇' върху контактното разпределение H на многообразието $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ е единствената канонична свързаност за съответното почти комплексно многообразие с норденова метрика, изучено в [8].

Теорема 4.2. *Върху произволно почти контактно B-метрично многообразие $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ съществува единствена φ-канонична свързаност.*

Намираме съответните торзионни форми за ∇'

$$t' = \tfrac{1}{2}\left\{\theta^* + \theta^*(\xi)\eta\right\}, \qquad t'^* = -\tfrac{1}{2}\left\{\theta + \theta(\xi)\eta\right\}, \qquad \hat{t}' = -\omega\circ\varphi$$

и получаваме следната зависимост между тях:

$$t'^*\circ\varphi = -t'\circ\varphi^2.$$

Твърдение 4.3. *Класът на φ-каноничната свързаност е*

$$\mathcal{C}_3\oplus\mathcal{C}_4\oplus\mathcal{C}_5\oplus\mathcal{C}_7\oplus\cdots\oplus\mathcal{C}_{11}\oplus\mathcal{C}_{13}\oplus\mathcal{C}_{14}\oplus\mathcal{C}_{15}.$$

Теорема 4.4. *Необходимо и достатъчно условие φ-каноничната свързаност да съвпада с φB-свързаността е $N(\varphi\cdot,\varphi\cdot) = 0$.*

Следствие 4.5. *Нека $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ е почти контактно B-метрично многообразие. Тогава φ-каноничната свързаност и φB-свързаността съвпадат тогава и само тогава, когато $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ принадлежи на класа $\mathcal{U}_0$.*

Нека $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ и $(M, \varphi, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{g})$ са контактно конформно еквивалентни относно трансформация от групата G. Двете метрики g и $\bar{g}$ пораждат съответно свързаностите на Леви-Чивита ∇ и $\bar{\nabla}$. При трансформацията $\nabla\to\bar{\nabla}$ тензорът N се преобразува в $\bar{N}$.

Теорема 4.6. *Тензорът $N(\varphi\cdot, \varphi\cdot)$ е инвариантен относно групата трансформации G върху всяко почти контактно В-метрично многообразие.*

Следствие 4.7. *Класът $\mathcal{U}_0$ е затворен относно действието на трансформациите от групата G.*

Твърдение 4.8. *Групата на общите контактно конформни трансформации G поражда група на съответните трансформации на φ-канонична свързаност, определена чрез:*

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}'_x y = \nabla'_x y &- \mathrm{d}u(x)\varphi^2 y + \mathrm{d}v(x)\varphi y + \mathrm{d}w(x)\eta(y)\xi \\ &+ \tfrac{1}{2}\big\{\left[\mathrm{d}u(\varphi^2 y) - \mathrm{d}v(\varphi y)\right]\varphi^2 x - \left[\mathrm{d}u(\varphi y) + \mathrm{d}v(\varphi^2 y)\right]\varphi x \\ &\qquad - g(\varphi x, \varphi y)\left[\varphi^2 p - \varphi q\right] + g(x, \varphi y)\left[\varphi p + \varphi^2 q\right]\big\},\end{aligned}$$

където $p = \mathrm{grad}u$, $q = \mathrm{grad}v$.

Като следствие за тензорите на торзия T' и $\bar{T}'$ имаме:

$$\begin{aligned}\bar{T}'(x,y) = T'(x,y) + \tfrac{1}{2}\Big\{&2\mathrm{d}w(x)\eta(y)\xi - 2\mathrm{d}w(y)\eta(x)\xi \\ &+ \left[\mathrm{d}u(\varphi^2 x) + \mathrm{d}v(\varphi x) - 2\mathrm{d}u(\xi)\eta(x)\right]\varphi^2 y \\ &- \left[\mathrm{d}u(\varphi^2 y) + \mathrm{d}v(\varphi y) - 2\mathrm{d}u(\xi)\eta(y)\right]\varphi^2 x \\ &+ \left[\mathrm{d}u(\varphi x) - \mathrm{d}v(\varphi^2 x) + 2\mathrm{d}v(\xi)\eta(x)\right]\varphi y \\ &- \left[\mathrm{d}u(\varphi y) - \mathrm{d}v(\varphi^2 y) + 2\mathrm{d}v(\xi)\eta(y)\right]\varphi x\Big\},\end{aligned}$$

Следствие 4.9. *Групата от общи контактно конформни трансформации G_0 поражда група на съответните трансформации на φ-каноничната свързаност, определена чрез:*

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}'_x y = \nabla'_x y &- \mathrm{d}u(x)\varphi^2 y + \mathrm{d}v(x)\varphi y + \mathrm{d}w(\xi)\eta(x)\eta(y)\xi \\ &- \mathrm{d}u(y)\varphi^2 x + \mathrm{d}v(y)\varphi x + g(\varphi x, \varphi y)p - g(x, \varphi y)q.\end{aligned}$$

Теорема 4.10. *Тензорът на торзия за φ-каноничната свързаност е инвариантен относно обща контактно конформна трансформация от G тогава и само тогава, когато тази трансформация принадлежи на подгрупата G_0 на G.*

Да припомним, че всеки от основните класове $\mathcal{F}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 11)$ на почти контактните В-метрични многообразия $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ е G_0-локално контактно конформно инвариантен ([2]). Както доказахме по-горе, тензорът на торзия за φ-каноничната свързаност също е инвариантен относно трансформациите от групата G_0.

Теорема 4.11. *Основните класове на почти контактните B-метрични многообразия се характеризират чрез следните условия за тензора на торзия T' на φ-каноничната свързаност:*

$$
\begin{array}{rl}
\mathcal{F}_1: & T'(x,y)=\frac{1}{2n}\left\{t'(\varphi^2x)\varphi^2y-t'(\varphi^2y)\varphi^2x+t'(\varphi x)\varphi y-t'(\varphi y)\varphi x\right\};\\
\mathcal{F}_2: & T'(\xi,y)=0,\ \eta\left(T'(x,y)\right)=0,\ T'(x,y)=T'(\varphi x,\varphi y),\ t'=0;\\
\mathcal{F}_3: & T'(\xi,y)=0,\ \eta\left(T'(x,y)\right)=0,\ T'(x,y)=\varphi T'(x,\varphi y);\\
\mathcal{F}_4: & T'(x,y)=\frac{1}{2n}t'^*(\xi)\left\{\eta(y)\varphi x-\eta(x)\varphi y\right\};\\
\mathcal{F}_5: & T'(x,y)=\frac{1}{2n}t'(\xi)\left\{\eta(y)\varphi^2x-\eta(x)\varphi^2y\right\};\\
\mathcal{F}_6: & T'(x,y)=\eta(x)T'(\xi,y)-\eta(y)T'(\xi,x),\\
 & T'(\xi,y,z)=T'(\xi,z,y)=-T'(\xi,\varphi y,\varphi z);\\
\mathcal{F}_7: & T'(x,y)=\eta(x)T'(\xi,y)-\eta(y)T'(\xi,x)+\eta(T'(x,y))\xi,\\
 & T'(\xi,y,z)=-T'(\xi,z,y)=-T'(\xi,\varphi y,\varphi z)\\
 & \qquad\qquad\ =\frac{1}{2}T'(y,z,\xi)=-\frac{1}{2}T'(\varphi y,\varphi z,\xi);\\
\mathcal{F}_8: & T'(x,y)=\eta(x)T'(\xi,y)-\eta(y)T'(\xi,x)+\eta(T'(x,y))\xi,\\
 & T'(\xi,y,z)=-T'(\xi,z,y)=T'(\xi,\varphi y,\varphi z)\\
 & \qquad\qquad\ =\frac{1}{2}T'(y,z,\xi)=\frac{1}{2}T'(\varphi y,\varphi z,\xi);\\
\mathcal{F}_9: & T'(x,y)=\eta(x)T'(\xi,y)-\eta(y)T'(\xi,x),\\
 & T'(\xi,y,z)=T'(\xi,z,y)=T'(\xi,\varphi y,\varphi z);\\
\mathcal{F}_{10}: & T'(x,y)=\eta(x)T'(\xi,y)-\eta(y)T'(\xi,x),\\
 & T'(\xi,y,z)=-T'(\xi,z,y)=T'(\xi,\varphi y,\varphi z);\\
\mathcal{F}_{11}: & T'(x,y)=\left\{\hat{t}'(x)\eta(y)-\hat{t}'(y)\eta(x)\right\}\xi.
\end{array}
$$

Като разполагаме с вида (даден в Теорема 4.11) на тензора на торзия за φ-каноничната свързаност във всеки основен клас на (M,φ,ξ,η,g) и класификацията (дадена в Теорема 2.17) на тензорите на торзия върху разглежданите многообразия и съответната класификация (дадена в Теорема 2.19) на линейните свързаности върху (M,φ,ξ,η,g), достигаме до следната

Теорема 4.12. *Нека ∇' е φ-каноничната свързаност върху почти контактно B-метрично многообразие $M = (M, \varphi, \xi, \eta, g)$. Съответствието между класовете $\mathcal{F}_i$ на M и класовете $\mathcal{C}_j$ на ∇' е следното:*

$$
\begin{array}{ll}
M \in \mathcal{F}_1 \;\Leftrightarrow\; \nabla' \in \mathcal{C}_4; & M \in \mathcal{F}_7 \;\Leftrightarrow\; \nabla' \in \mathcal{C}_7; \\
M \in \mathcal{F}_2 \;\Leftrightarrow\; \nabla' \in \mathcal{C}_5; & M \in \mathcal{F}_8 \;\Leftrightarrow\; \nabla' \in \mathcal{C}_8 \oplus \mathcal{C}_{14}; \\
M \in \mathcal{F}_3 \;\Leftrightarrow\; \nabla' \in \mathcal{C}_3; & M \in \mathcal{F}_9 \;\Leftrightarrow\; \nabla' \in \mathcal{C}_{13}; \\
M \in \mathcal{F}_4 \;\Leftrightarrow\; \nabla' \in \mathcal{C}_{10}; & M \in \mathcal{F}_{10} \;\Leftrightarrow\; \nabla' \in \mathcal{C}_{14}; \\
M \in \mathcal{F}_5 \;\Leftrightarrow\; \nabla' \in \mathcal{C}_9; & M \in \mathcal{F}_{11} \;\Leftrightarrow\; \nabla' \in \mathcal{C}_{15}. \\
M \in \mathcal{F}_6 \;\Leftrightarrow\; \nabla' \in \mathcal{C}_{11}; &
\end{array}
$$

* * *

В §5 доказваме, че всеки φ-келеров тензор върху 5-мерно многообразие от разглеждания вид е линейна комбинация на два известни тензора от същия тип, породени от метричните тензори на $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$, като коефициентите са точково постоянните напълно реални ξ-ортогонални секционни кривини относно този тензор. Върху изучаваните многообразия с произволна размерност от главните класове, където тензорът на кривина за φ-каноничната свързаност ∇' е φ-келеров, намираме изразяване на присъединените 1-форми θ и θ^* чрез скаларните кривини за ∇'.

Нека α е неизродена напълно реална площадка в допирателното пространство T_pM $(p \in M)$ на почти контактно B-метрично многообразие $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ и α е ортогонална на ξ относно g, т.е. $\alpha \perp \varphi\alpha$, $\alpha \perp \xi$.

Нека $k(\alpha; p)(L)$ и $k^*(\alpha; p)(L)$ са секционните кривини на α относно кривиноподобен тензор L, дефинирани чрез равенствата

$$
k(\alpha; p)(L) = \frac{L(x, y, y, x)}{\pi_1(x, y, y, x)}, \qquad k^*(\alpha; p)(L) = \frac{L(x, y, y, \varphi x)}{\pi_1(x, y, y, x)},
$$

където $\{x, y\}$ е произволна база на α. Очевидно е в сила $k^*(\alpha; p)(L) = k(\alpha; p)(L^*)$, където L^* е присъединеният тензор на L.

Да отбележим, че тензорът на кривина R и присъединеният му тензор R^* за свързаността на Леви-Чивита са φ-келерови тензори върху многообразията на класа $\mathcal{F}_0$. За напълно реалните секционни кривини отнсно R са известни Теорема 5.1 и Теорема 5.2 от [46] и [47]. Интересно е да се получи тяхно обобщение за почти контактни В-метрични многообразия извън класа $\mathcal{F}_0$.

Теорема 5.3. *Нека (M,φ,ξ,η,g) е 5-мерно почти контактно В-метрично многообразие. Тогава всеки φ-келеров тензор има вида*

$$L=\nu L_1+\nu^* L_2,$$

където $\nu=\nu(L)$ и $\nu^*=\nu^*(L)=\nu(L^*)$ са напълно реални секционни кривини ортогонални на ξ в T_pM $(p\in M)$ относно L, а L_1 и L_2 са φ-келерови тензори, въведени в Лема 1.13. Многообразието е с точково постоянни секционни кривини за напълно реални площадки ортогонални на ξ относно L.

Следствие 5.4. Нека (M,φ,ξ,η,g) е 5-мерно почти контактно В-метрично многообразие и ∇' е естествена свързаност върху (M,φ,ξ,η,g), чийто тензор на кривина R' е φ-келеров. Тогава R' има вида

$$R'=\nu L_1+\nu^* L_2,$$

където $\nu=\nu(R')$ и $\nu^*=\nu^*(R')=\nu(R'^*)$ са секционните кривини на напълно реална площадка, ортогонална на ξ, в T_pM $(p\in M)$ относно R'. В този случай многообразието е с точково постоянни секционни кривини за напълно реалната площадка, ортогонална на ξ, относно R'.

По-нататък разглеждаме случая, когато многообразието (M,φ,ξ,η,g) принадлежи на подкласове $\mathcal{F}_i^0$ на главните класове $\mathcal{F}_i$ $(i=1,4,5,11)$, където тензорът на кривина за φ-каноничната свързаност е φ-келеров.

Лема 5.5. *Нека (M,φ,ξ,η,g) е $\mathcal{F}_i^0$-многообразие $(i=1,4,5,11)$. Тогава връзките между скаларните кривини $\tau'=\tau(R')$ и $\tau'^*=\tau^*(R')$ за φ-келеровия тензор на кривина R' на φ-каноничната свързаност ∇' са следните:*

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\tau'\circ\varphi&=-\mathrm{d}\tau'^*-\tfrac{1}{n}\left(\tau'\theta+\tau'^*\theta^*\right),\\
\mathrm{d}\tau'^*\circ\varphi&=\mathrm{d}\tau'-\tfrac{1}{n}\left(\tau'^*\theta-\tau'\theta^*\right).
\end{aligned}$$

Очевидно, имайки предвид последните равенства, двойката (τ', τ'^*) върху $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ е φ-холоморфна (т.е. $\mathrm{d}\tau' = \mathrm{d}\tau'^* \circ \varphi$ и $\mathrm{d}\tau'^* = -\mathrm{d}\tau' \circ \varphi$), тогава и само тогава, когато присъединените 1-форми θ и θ^* са нулеви. Такъв е случаят за класа $\mathcal{F}_{11}$.

Теорема 5.6. *Нека $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ е $\mathcal{F}_i^0$-многообразие $(i = 1, 4, 5)$ и двойката скаларни кривини (τ', τ'^*) за φ-каноничната свързаност не е φ-холоморфна двойка функции. Тогава присъединените 1-форми θ и θ^* на многообразието се пораждат от τ' и τ'^* по следния начин:*

$$\theta = -n \left\{ \mathrm{d}\mathfrak{Im}(\mathrm{Log}\, h) + \mathrm{d}\mathfrak{Re}(\mathrm{Log}\, h) \circ \varphi \right\},$$
$$\theta^* = n \left\{ \mathrm{d}\mathfrak{Im}(\mathrm{Log}\, h) \circ \varphi - \mathrm{d}\mathfrak{Re}(\mathrm{Log}\, h) \right\},$$

където $\mathfrak{Re}$ и $\mathfrak{Im}$ означават съответно реалната и имагинерната част на комплексния логаритъм $\mathrm{Log}\, h$ за $h = \tau' + i\tau'^*$.

Следствие 5.7. *Присъединените 1-форми θ и θ^* на $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ се пораждат от скаларните кривини τ' и τ'^* за φ-каноничната свързаност във всеки един от класовете $\mathcal{F}_i^0$ $(i = 1, 4, 5)$ по следния начин:*

i) *за* $i = 1$

$$\theta = n \left\{ \mathrm{d}\mathfrak{Im}(\mathrm{Log}\, h) \circ \varphi^2 - \mathrm{d}\mathfrak{Re}(\mathrm{Log}\, h) \circ \varphi \right\},$$
$$\theta^* = n \left\{ \mathrm{d}\mathfrak{Im}(\mathrm{Log}\, h) \circ \varphi + \mathrm{d}\mathfrak{Re}(\mathrm{Log}\, h) \circ \varphi^2 \right\};$$

ii) *за* $i = 4$

$$\theta = -n\mathrm{d}\mathfrak{Im}(\mathrm{Log}\, h)(\xi)\eta, \qquad \theta^* = 0;$$

iii) *за* $i = 5$

$$\theta = 0, \qquad \theta^* = -n\mathrm{d}\mathfrak{Re}(\mathrm{Log}\, h)(\xi)\eta.$$

* * *

В §6 определяме множеството на тензорите на торзия T' за естествените свързаности върху изучаваното многообразие от главните класове като 4-параметрично семейство. Доказваме някои свойства за T'. В това семейство разглеждаме φ-каноничната свързаност и още две специални свързаности, за които определяме съответния клас от класификацията на линейните свързаности върху $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$.

Нека $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ е почти контактно B-метрично многообразие, принадлежащо на главните класове $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_4$, $\mathcal{F}_5$ и $\mathcal{F}_{11}$, където ковариантните производни на структурните тензори относно ∇ се изразяват явно чрез метричните тензори на многообразието. Целта в този параграф е да определим общия вид на тензора на торзия T' за естествена свързаност ∇' върху $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$.

Теорема 6.1. *Тензорът на торзия за всяка естествена свързаност ∇' върху почти контактно B-метрично многообразие в класа $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_5 \oplus \mathcal{F}_{11}$ се изразява по следния начин:*

$$\begin{aligned} T'(x,y,z) = (\pi_3+\pi_5)(x,y,z,q) &+ \tfrac{1}{2n}\pi_5(x,y,z,a) \\ &+ \tfrac{1}{2n}(\pi_2+\pi_4)(x,y,z,a^*) - \pi_5(x,y,z,\hat{a}), \end{aligned}$$

където $q = \alpha_1\varphi^2 a^* - \alpha_2\varphi^2 a - \alpha_3\varphi\hat{a} + \alpha_4\hat{a}$ за $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ и $\theta = g(\cdot, a)$, $\theta^* = g(\cdot, a^*)$, $\omega = g(\cdot, \hat{a})$.

Съответните торзионни форми имат вида:

$$\begin{aligned} t'(x) &= 2n\left\{\alpha_1\theta^*(\varphi x) - \alpha_2\theta(\varphi x) - \alpha_3\omega(x) - \alpha_4\omega(\varphi x)\right\} + \theta^*(\xi)\eta(x), \\ t'^*(x) &= 2n\left\{\alpha_1\theta(\varphi x) - \alpha_2\theta(\varphi^2 x) - \alpha_3\omega(\varphi x) + \alpha_4\omega(x)\right\} \\ &\qquad + \theta(\varphi^2 x) - \theta(\xi)\eta(x), \\ \hat{t}(x) &= -\omega(\varphi x). \end{aligned}$$

Твърдение 6.2. *Тензорът на торзия за всяка естествена свързаност върху почти контактно B-метрично многообразие от класа $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_5 \oplus \mathcal{F}_{11}$ има свойство*

$$\underset{x,y,z}{\mathfrak{S}} T'(x,y,z) = 0.$$

Твърдение 6.3. *Всяка естествена свързаност ∇' с тензор на торзия T' върху почти контактно B-метрично многообразие от класа $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_5 \oplus \mathcal{F}_{11}$ е определена чрез свързаността на Леви-Чивита ∇ по следния начин:*

$$g\left(\nabla'_x y, z\right) = g\left(\nabla_x y, z\right) + T'(z,y,x).$$

След това в този параграф разглеждаме специални естествени свързаности в главните класове.

Теорема 6.4. *Естествена свързаност с тензор на торзия T' от семейството на естествените свързаности е φ-каноничната свързаност върху $(2n+1)$-мерно многообразие $(M,\varphi,\xi,\eta,g) \in \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_5 \oplus \mathcal{F}_{11}$ тогава и само тогава, когато $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, $\alpha_2 = \frac{1}{4n}$. В този случай тензорът на торзия има вида*

$$\begin{aligned} T'(x,y,z) = {} & \tfrac{1}{2n}\pi_5(x,y,z,a) + \tfrac{1}{4n}(\pi_1+\pi_2+\pi_4)(x,y,z,a^*) \\ & - \pi_5(x,y,z,\hat{a}). \end{aligned}$$

Тогава, за торзионните форми на φ-каноничната свързаност получаваме

$$t'(x) = -\tfrac{1}{2}\theta^*(\varphi^2 x) + \theta^*(\xi)\eta(x), \qquad t'^*(x) = \tfrac{1}{2}\theta(\varphi^2 x) - \theta(\xi)\eta(x),$$
$$\hat{t}'(x) = -\omega(\varphi x).$$

Твърдение 6.5. *Класът, на който принадлежи φ-каноничната свързаност върху всяко почти контактно B-метрично многообразие от $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_5 \oplus \mathcal{F}_{11}$, е $\mathcal{C}_4 \oplus \mathcal{C}_9 \oplus \mathcal{C}_{10} \oplus \mathcal{C}_{15}$.*

Да отбележим, че последното твърдение илюстрира резултатите, получени в Теорема 4.12.

Съгласно Теорема 6.1 има биективно изображение между множеството на естествените свързаности и множеството от четворки реални числа $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$. От Теорема 6.4 е известно, че φ-каноничната свързаност е определена чрез $\left(0,\frac{1}{4n},0,0\right) \in \mathbb{R}^4$. Интересен е случаят, когато свързаността е от семейството на естествените свързаности, когато четворката параметри е $(0,0,0,0)$. Тази свързаност наричаме *стандартна свързаност* върху $(M,\varphi,\xi,\eta,g) \in \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_5 \oplus \mathcal{F}_{11}$.

Тензорът на торзия T^s за стандартната свързаност се определя чрез

$$T^s(x,y,z) = \tfrac{1}{2n}\pi_5(x,y,z,a) + \tfrac{1}{2n}(\pi_2+\pi_4)(x,y,z,a^*) - \pi_5(x,y,z,\hat{a}).$$

Твърдение 6.6. *Класът, на който принадлежи стандартната свързаност върху всяко почти контактно B-метрично многообразие от $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_5 \oplus \mathcal{F}_{11}$, е $\mathcal{C}_2 \oplus \mathcal{C}_5 \oplus \mathcal{C}_9 \oplus \mathcal{C}_{10} \oplus \mathcal{C}_{11} \oplus \mathcal{C}_{15}$.*

Върху почти контактно B-метрично многообразие $(M,\varphi,\xi,\eta,g) \in \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_5 \oplus \mathcal{F}_{11}$ съществува естествена свързаност ∇'' с тензор на торзия T'' от семейството на естествените свързаности, която е със забележителна роля. Тази свързаност е определена чрез условието φ-каноничната свързаност да е средната свързаност на ∇^s и ∇'', т.е.

$$\nabla' = \tfrac{1}{2}\left(\nabla^s + \nabla''\right).$$

Тогава, за тензора на торзия получаваме следното изразяване

$$\begin{aligned} T''(x,y,z) = &\tfrac{1}{2n}(\pi_3 + 2\pi_5)(x,y,z,a) + \tfrac{1}{2n}(\pi_2+\pi_4)(x,y,z,a^*)\\ &- \pi_5(x,y,z,\hat{a}). \end{aligned}$$

Твърдение 6.7. *Класът, на който принадлежи естествената свързаност ∇'' върху всяко почти контактно B-метрично многообразие от $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_5 \oplus \mathcal{F}_{11}$, е $\mathcal{C}_2 \oplus \mathcal{C}_5 \oplus \mathcal{C}_9 \oplus \mathcal{C}_{10} \oplus \mathcal{C}_{11} \oplus \mathcal{C}_{15}$.*

* * *

В §7 разглеждаме три известни примера на естествени свързаности върху многообразия, принадлежащи съответно на класовете $\mathcal{F}_5$, $\mathcal{F}_6$ и $\mathcal{F}_7$. За φ-каноничната свързаност върху хиперповърхнина с (φ,ξ,η,g)-структура от $\mathcal{F}_5$ илюстрираме резултатите от §5. Примерите на 5-мерните многообразия от $\mathcal{F}_6$ и $\mathcal{F}_7$ са породени от групи на Ли. Доказваме, че φ-каноничната свързаност върху $\mathcal{F}_6$-многообразието е плоска и има паралелна торзия. За $\mathcal{F}_7$-многообразието описваме φKT-свързаността. Определяме класа на трите свързаности в класификацията от §2.

7.1. Пример на $\mathcal{F}_5$-многообразие. Разглеждаме един известен пример от [9] на почти контактно B-метрично многообразие върху хиперповърхнина S: $g(Z,JZ)=0$, $g(Z,Z)=\operatorname{ch}^2\beta$, $\beta>0$ в $\mathbb{R}^{2n+2}$.

За секционните кривини ν и ν^* относно тензора на кривина R' за φ-каноничната свързаност ∇' намираме

$$\nu(R') = R'(e_1,e_2,e_2,e_1) = \tfrac{1}{\operatorname{ch}^2\beta}, \qquad \nu^*(R') = R'^*(e_1,e_2,e_2,e_1) = 0,$$

а за съответните скаларни кривини получаваме

$$\tau(R') = \tfrac{4n(n-1)}{\operatorname{ch}^2\beta}, \qquad \tau^*(R') = 0.$$

За φ-каноничната свързаност получаваме

$$T'(x,y,z) = -\operatorname{th}\beta\left\{\mathrm{d}\beta(x)g\left(\varphi y,\varphi z\right) - \mathrm{d}\beta(y)g\left(\varphi x,\varphi z\right)\right\},$$
$$t' = 2n\operatorname{th}\beta\mathrm{d}\beta, \qquad t'^{*} = 0.$$

Твърдение 7.1. *Класът, на който принадлежи φ-каноничната свързаност ∇' върху $\mathcal{F}_5$-многообразието (S,φ,ξ,η,g), е $\mathcal{C}_9$.*

7.2. Пример на $\mathcal{F}_6$-многообразие. Нека $\mathfrak{G}$ е 5-мерна реална свързана група на Ли и $\mathfrak{g}$ е нейната алгебра на Ли. Ако $\{e_i\}$ е база от лявоинвариантни векторни полета върху $\mathfrak{G}$, то в [24] е дефинирана почти контактна структура (φ,ξ,η) и B-метрика g върху $\mathfrak{G}$, като

$$\begin{aligned}
[e_1,\xi] &= \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4,\\
[e_2,\xi] &= \mu_1 e_1 - \lambda_1 e_2 + \mu_3 e_3 - \lambda_3 e_4,\\
[e_3,\xi] &= -\lambda_3 e_1 - \lambda_4 e_2 + \lambda_1 e_3 + \lambda_2 e_4,\\
[e_4,\xi] &= -\mu_3 e_1 + \lambda_3 e_2 + \mu_1 e_3 - \lambda_1 e_4,
\end{aligned}$$

където $\lambda_i,\mu_j\in\mathbb{R}$ $(i=1,2,3,4; j=1,3)$. Доказано е, че $(\mathfrak{G},\varphi,\xi,\eta,g)$ принадлежи на класа $\mathcal{F}_6$.

Намираме единствените ненулевите компоненти на φ-канонична свързаност ∇' и нейния тензор на торзия:

$$\begin{aligned}
\nabla'_\xi e_1 &= -\tfrac{1}{2}\left(\lambda_2-\mu_1\right)e_2 - \tfrac{1}{2}\left(\lambda_4-\mu_3\right)e_4,\\
\nabla'_\xi e_2 &= \tfrac{1}{2}\left(\lambda_2-\mu_1\right)e_1 + \tfrac{1}{2}\left(\lambda_4-\mu_3\right)e_3,\\
\nabla'_\xi e_3 &= \tfrac{1}{2}\left(\lambda_4-\mu_3\right)e_2 - \tfrac{1}{2}\left(\lambda_2-\mu_1\right)e_4,\\
\nabla'_\xi e_4 &= -\tfrac{1}{2}\left(\lambda_4-\mu_3\right)e_1 + \tfrac{1}{2}\left(\lambda_2-\mu_1\right)e_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&T'_{511} = -T'_{522} = -T'_{533} = T'_{544} = \lambda_1,\\
&T'_{512} = T'_{521} = -T'_{534} = -T'_{543} = \tfrac{1}{2}\left(\lambda_2+\mu_1\right),\\
&T'_{513} = -T'_{524} = T'_{531} = -T'_{542} = -\lambda_3,\\
&T'_{514} = T'_{523} = T'_{532} = T'_{541} = -\tfrac{1}{2}\left(\lambda_4+\mu_3\right).
\end{aligned}$$

Твърдение 7.2. *Многообразието $(\mathfrak{G},\varphi,\xi,\eta,g)$ е с плоска φ-канонична свързаност.*

Твърдение 7.3. *φ-каноничната свързаност ∇' върху $(\mathfrak{G},\varphi,\xi,\eta,g)$ е с паралелна торзия относно ∇'.*

Твърдение 7.4. *Класът, на който принадлежи φ-каноничната свързаност ∇' върху $\mathcal{F}_6$-многообразието $(\mathfrak{G},\varphi,\xi,\eta,g)$, е $\mathcal{C}_{11}$.*

7.3. Пример на $\mathcal{F}_7$-многообразие. В [23] е разгледан пример на почти контактно B-метрично многообразие $(\mathfrak{G},\varphi,\xi,\eta,g)$, построен върху група на Ли, като съответната алгебра на Ли е определена чрез следните ненулеви комутатори:

$$[e_1,e_2] = -[e_3,e_4] = -\lambda_1 e_1 - \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 + 2\mu_1 e_5,$$
$$[e_1,e_4] = -[e_2,e_3] = -\lambda_3 e_1 - \lambda_4 e_2 - \lambda_1 e_3 - \lambda_2 e_4 + 2\mu_2 e_5,$$

където $\lambda_i,\mu_j \in \mathbb{R}$ $(i=1,2,3,4; j=1,2)$. Доказано е, че многообразието принадлежи на класа $\mathcal{F}_7$.

Разглеждана е φKT-свързаността ∇' върху $(\mathfrak{G},\varphi,\xi,\eta,g)$, дефинирана в §3, и са получени следните ѝ компоненти:

$$\begin{array}{ll}
\nabla'_{e_1}e_1 = -\nabla'_{e_3}e_3 = \lambda_1 e_2 - \lambda_3 e_4, & \nabla'_{e_1}e_2 = -\nabla'_{e_3}e_4 = -\lambda_1 e_1 + \lambda_3 e_3,\\
\nabla'_{e_1}e_3 = \nabla'_{e_3}e_1 = \lambda_3 e_2 + \lambda_1 e_4, & \nabla'_{e_1}e_4 = \nabla'_{e_3}e_2 = -\lambda_3 e_1 - \lambda_1 e_3,\\
\nabla'_{e_2}e_1 = -\nabla'_{e_4}e_3 = \lambda_2 e_2 - \lambda_4 e_4, & \nabla'_{e_2}e_2 = -\nabla'_{e_4}e_4 = -\lambda_2 e_1 + \lambda_4 e_3,\\
\nabla'_{e_2}e_3 = \nabla'_{e_4}e_1 = \lambda_4 e_2 + \lambda_2 e_4, & \nabla'_{e_2}e_4 = \nabla'_{e_4}e_2 = -\lambda_4 e_1 - \lambda_2 e_3,\\
\nabla'_{e_5}e_1 = -2\mu_1 e_2 + 2\mu_2 e_4, & \nabla'_{e_5}e_2 = 2\mu_1 e_1 - 2\mu_2 e_3,\\
\nabla'_{e_5}e_3 = -2\mu_2 e_2 - 2\mu_1 e_4, & \nabla'_{e_5}e_4 = 2\mu_2 e_1 + 2\mu_1 e_3,\\
\nabla'_{e_i}e_5 = 0,\ (i=1,2,3,4,5). &
\end{array}$$

Ненулевите компоненти на торзията на ∇' са само:

$$T'(e_1,e_2,e_5) = -T'(e_3,e_4,e_5) = -2\mu_1,$$
$$T'(e_2,e_3,e_5) = T'(e_4,e_1,e_5) = 2\mu_2.$$

Твърдение 7.5. *Класът, на който принадлежи φKT-свързаността върху $\mathcal{F}_7$-многообразието $(\mathfrak{G},\varphi,\xi,\eta,g)$, е $\mathcal{C}_7$.*

* * *

Получените резултати в настоящия дисертационен труд ни дават основание да твърдим, че геометрията на почти контактните B-метрични многообразия, породена от естествените свързаности върху тях, има богато съдържание и възможности за развитие.

Според автора най-съществените резултати са:

- Получена е една класификация на линейните свързаности върху почти контактните B-метрични многообразия относно свойствата на съответните тензори на торзия.
- Изучени са свойства на тензора на торзия и тензора на кривина за φB-свързаността в някои класове на разглежданите многообразия.
- Въведена е единствена φ-канонична свързаност върху почти контактно B-метрично многообразие, за която тензорът на торзия е инвариантен относно групата от общи контактно конформни трансформации, запазваща основните класове на изучаваните многообразия. Тези класове са характеризирани чрез тензора на торзия на φ-каноничната свързаност.
- Доказано е, че всеки φ-келеров тензор на кривина върху 5-мерно многообразие от разглеждания вид е линейна комбинация на два известни тензора от същия тип, породени от метричните тензори на многообразието, като коефициентите са точково постоянните напълно реални ξ-ортогонални секционни кривини относно този тензор.
- Намерено е изразяване на присъединените 1-форми чрез скаларните кривини върху многообразие от изучавания вид с произволна размерност, принадлежащо на главните класове, където тензорът на кривина за φ-каноничната свързаност е φ-келеров.
- Определено е множеството на тензорите на торзия за естествени свързаности върху изучаваното многообразие от главните класове като 4-параметрично семейство и мястото в него на φ-каноничната свързаност, както и на още две специални естествени свързаности.

* * *

Основната част от резултатите в настоящия труд са публикувани в статиите [28], [30], [31] и са докладвани на X Международна конференция по геометрия и приложения – Варна, 3-9 септември 2011 г., на Научния семинар по алгебра и геометрия във Факултета по математика и информатика на Пловдивския университет „Паисий Хилендарски“ – Пловдив, 16 декември 2011 г., на XLI Пролетна конференция на Съюза на математиците в България – Боровец, 9-12 април 2012 г.

Изказвам най-искрена благодарност на доц. д-р Манчо Манев за това, че като мой научен ръководител ме въведе в проблематиката на съвременната диференциална геометрия, за вниманието и помощта при разработването и оформянето на настоящата дисертация.

Благодаря и на доц. д-р Костадин Грибачев за ценните идеи и съветите по изучаваната тематика. Признателна съм също за препоръките и подкрепата от страна на проф. д-р Димитър Мекеров, както на всички колеги от катедра „Алгебра и геометрия“ на Факултета по математика и информатика при Пловдивския университет „Паисий Хилендарски“ за тяхната подкрепа.

* * *

Избрани източници от литературата

[1] М. Манев. *Примери на някои почти контактни B-метрични многообразия от някои специални класове*, Математика и матем. образование. Доклади на XXVI Пролетна конференция на СМБ, Пловдив (1997), 153–160.

[2] М. Манев. *Върху конформната геометрия на почти контактни многообразия с B-метрика*, Дисертация за ОНС Доктор, Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“, Пловдив (1998).

[3] Г. Накова. *Подмногообразия на почти контактни многообразия с B-метрика*, Дисертация за ОНС Доктор, ВВОВУ „Васил Левски“, Велико Търново (1999).

[4] V. Alexiev, G. Ganchev. *On the classification of almost contact metric manifolds*, Math. and Educ in Math., Proc. of 15th Spring Conf. of UBM, Sunny Beach, 1986, 155–161.

[5] V. Alexiev, G. Ganchev. *Canonical connection on a conformal almost contact metric manifolds*, Ann. Univ. Sofia Fac. Math. Inform., vol. 81 (1987), no. 1, 29–38.

[6] D. E. Blair. *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds*, Progress in Mathematics 203, Birkhäuser, Boston (2002).

[7] G. Ganchev, K. Gribachev, V. Mihova. *B-connections and their conformal invariants on conformally Kähler manifolds with B-metric*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.), vol. 42 (1987), 107–121.

[8] G. Ganchev, V. Mihova. *Canonical connection and the canonical conformal group on an almost complex manifold with B-metric*, Ann. Univ. Sofia Fac. Math. Inform., vol. 81 (1987), 195–206.

[9] G. Ganchev, V. Mihova, K. Gribachev. *Almost contact manifolds with B-metric*, Math. Balk., vol. 7 (1993), no. 3-4, 261–276.

[10] K. Gribachev, D. Mekerov, G. Djelepov. *Generalized B-manifolds*, Compt. rend. Acad. bulg. Sci., vol. 38 (1985), 299–302.

[11] D. Gribacheva, D. Mekerov. *Canonical connection on a class of Riemannian almost product manifolds*, J. Geom., vol. 102 (2011), 53–71.

[12] H. Hayden. *Subspaces of a space with torsion*, Proc. London. Math. Soc., vol. 34 (1934), 27–50.

[13] S. Kobayshi, K. Nomizu. *Foundations of differential geometry*, vols. 1, 2, Intersc. Publ., New York (1963, 1969).

[14] A. Lichnerowicz. *Théorie globale des connexions et des goupes d'homotopie*, Edizioni Cremonese, Roma (1962).

[15] S. Sasaki. *On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure I*, Tohoku Math. J., vol. 12 (1960), 459–476.

[16] M. Manev. *Properties of curvature tensors on almost contact manifolds with B-metric*, Proc. of Jubilee Sci. Session of V. Levsky Higher Mil. School, Veliko Tarnovo, vol. 27 (1993), 221–227.

[17] M. Manev. *Examples of almost contact manifolds with B-metric, derived from almost complex manifolds with B-metric*, Plovdiv Univ. Sci. Works – Math., vol. 32 (1995), 61–66.

[18] M. Manev. *Contactly conformal transformations of general type of almost contact manifolds with B-metric. Applications*, Math. Balkanica (N.S.), vol. 11 (1997), 347–357.

[19] M. Manev. *Almost contact B-metric hypersurfaces of Kählerian manifolds with B-metric*, In: Perspectives of Complex analysis, Differential Geometry and Mathematical Physics, eds. St. Dimiev and K. Sekigawa, World Sci. Publ., Singapore (2001), 159–170.

[20] M. Manev. *On the curvature properties of almost contact B-metric hypersurfaces of Kählerian manifolds with B-metric*, Plovdiv Univ. Sci. Works – Math., vol. 33 (2001), 61–72.

[21] M. Manev. *Classes of real time-like hypersurfaces of a Kähler manifold with B-metric*, J. Geom., vol. 75 (2002), 113–122.

[22] M. Manev. *Classes of real isotropic hypersurfaces of a Kähler manifold with B-metric*, Compt. rend. Acad. bulg. Sci., vol. 55 (2002), 27–32.

[23] M. Manev. *A connection with totally skew-symmetric torsion on almost contact manifolds with B-metric*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., vol. 9 (2012), no. 5, 1250044 (20 pages), arXiv:1001.3800.

[24] M. Manev. *Curvature properties on some classes of almost contact manifolds with B-metric*, Compt. rend. Acad. bulg. Sci., vol. 65 (2012), no. 3, 283–290, arXiv: 1110.0444.

[25] M. Manev, K. Gribachev. *Contactly conformal transformations of almost contact manifolds with metric*, Serdica Math. J., vol. 19 (1993), 287–299.

[26] M. Manev, K. Gribachev. *Conformally invariant tensors on almost contact manifolds with B-metric*, Serdica Math. J., vol. 20 (1994), 133–147.

[27] M. Manev, M. Ivanova. *A classification of the torsion tensors on almost contact manifolds with B-metric*, arXiv:1105.5715.

[28] M. Manev, M. Ivanova. *A natural connection on some classes of almost contact manifolds with B-metric*, Compt. rend. Acad. bulg. Sci., vol. 65 (2012), no. 4, 429–436, arXiv:1110.3023.

[29] M. Manev, M. Ivanova. *Canonical-type connection on almost contact manifolds with B-metric*, arXiv:1203.0137.

[30] M. Manev, M. Ivanova. *Natural connections with torsion expressed by the metric tensors on almost contact manifolds with B-metric*, Plovdiv Univ. Sci. Works – Math., vol. 38 (2011), no. 3, 47–58, arXiv:1203.0926.

[31] M. Manev, M. Ivanova. *Almost contact B-metric manifolds with curvature tensor of Kähler type*, Plovdiv Univ. Sci. Works – Math., vol. 39 (2012), no. 3, arXiv:1203.3290.

[32] M. Manev, D. Mekerov, K. Gribachev. *Natural connections with totally skew-symmetric torsion on manifolds with Norden-type metrics*, In: Research and Education in Mathematics, Informatics and their Applications – REMIA 2010, Proc. Anniv. Intern. Conf. (2010), Plovdiv, 55–67, ISBN 978-954-423-648-9.

[33] M. Manev, D. Mekerov, K. Gribachev. *On the geometry of connections with totally skew-symmetric torsion on manifolds with additional tensor structures and indefinite metrics*. Differential Geom. Appl., vol. 29 (2011), S141–S148.

[34] M. Manev, G. Nakova. *Curvature tensors on hypersurfaces of a Kähler manifold with B-metric*, Math. Educ. Math., Proc. of 32nd Spring Conf. of UBM, Sunny Beach (2003), 186–191.

[35] M. Manev, G. Nakova. *Curvature properties on some three-dimensional almost contact B-metric manifolds*, Plovdiv Univ. Sci. Works – Math., vol. 34 (2004), 51–60.

[36] M. Manev, M. Teofilova. *On the curvature properties of real time-like hypersurfaces of a Kähler manifold with Norden metric* In: Trends in Differential Geometry, Complex Analysis and Mathematical Physics, eds. K. Sekigawa, V. Gerdjikov and S. Dimiev, World Sci. Publ., Singapore (2009), 174–184, arXiv:0812.4743.

[37] D. Mekerov. *On the geometry of the B-connection on quasi-Kähler manifolds with Norden metric*, Compt. rend. Acad. bulg. Sci., vol. 61 (2008), 1105–1110.

[38] D. Mekerov. *A connection with skew symmetric torsion and Kähler curvature tensor on quasi-Kähler manifolds with Norden metric*, Compt. rend. Acad. bulg. Sci., vol. 61 (2008), 1249–1256.

[39] D. Mekerov. *Canonical connection on quasi-Kähler manifolds with Norden metric*, J. Tech. Univ. Plovdiv Fundam. Sci. Appl. Ser. A Pure Appl. Math., vol. 14 (2009), 73–86.

[40] D. Mekerov. *Connection with parallel totally skew-symmetric torsion on almost complex manifolds with Norden metric*, Comp. rend. Acad. bulg. Sci., vol. 62 (2009), no. 12, 1501–1508, arXiv:0907.1507.

[41] D. Mekerov. *On the geometry of the connection with totally skew-symmetric torsion on almost complex manifolds with Norden metric*, Compt. rend. Acad. bulg. Sci., vol. 63 (2010), no. 1, 19–28, arXiv:0902.0868.

[42] G. Nakova. *An example of Lorentzian submanifold of 5-dimensional almost contact manifold with B-metric*, Proc. of Jubilee Sci. Session of V. Levski Higher Mil. School, V. Tarnovo (1998), 59–65.

[43] G. Nakova. *Some submanifolds of almost complex manifolds with B-metric of codimension two*, Math. Educ. Math., Proc. of 33th Spring Conference of UBM, Borovets (2004), 162–166.

[44] G. Nakova, K. Gribachev. *One classification of almost contact manifolds with B-metric*, Proc. of Jubilee Sci. Session of V. Levsky Higher Mil. School, V. Tarnovo, vol. 27 (1993), 208–214.

[45] G. Nakova, K. Gribachev. *On the Lorentzian submanifolds of almost contact manifold with B-metric of dimension 5*, Proc. of Jubilee Sci. Session of V. Levski Higher Mil. School, V. Tarnovo (1997), 56–62.

[46] G. Nakova, K. Gribachev. *Submanifolds of some almost contact manifolds with B-metric with codimension two. I*, Math. Balkanica, vol. 11 (1997), 255–267.

[47] G. Nakova, M. Manev. *Curvature tensors on some five-dimensional almost contact B-metric manifolds*, Math. Educ. Math., Proc. of 32nd Spring Conf. of UBM, Sunny Beach (2003), 192–197.

[48] G. Nakova, M. Manev. *Curvature properties on some three-dimensional almost contact manifolds with B-metric, II*, Proc. 5th Int. Conf. Geometry, Integrability & Quantization V, eds. I.M. Mladenov, A.C. Hirshfeld, SOFTEX, Sofia (2004), 169–177.

[49] M. Teofilova. *On a class almost contact manifolds with Norden metric, In: Research and Education in Mathematics*, Informatics and their Applications – REMIA 2010, Proc. Anniv. Intern. Conf. (2010), Plovdiv, Bulgaria, 217–223, ISBN 978-954-423-648-9, arXiv:1104.5343.

[50] M. Teofilova. *Linear connections on normal almost contact manifolds with Norden metric*, In: Research and Education in Mathematics, Informatics and their Applications – REMIA 2010, Proc. Anniv. Intern. Conf., (2010), Plovdiv, 209–216.