

**ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ “ПАИСИЙ ХИЛЕНДАРСКИ”
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
КАТЕДРА “МАТЕМАТИЧЕСКИ АНАЛИЗ”**

Кремена Василева Стефанова

**КАЧЕСТВЕНИ МЕТОДИ
ЗА НЯКОИ СПЕЦИАЛНИ ВИДОВЕ
ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ**

Автореферат

**за придобиване на образователната и научна степен “доктор”
по област на висше образование:**

4. Природни науки, математика и информатика

професионално направление: 4.5 Математика

научна специалност: Диференциални уравнения

научен ръководител: проф. д.м.н. Снежана Христова

Пловдив, 2012

Дисертационният труд е обсъден и насрочен за защита от разширен катедрен съвет на катедра “Математически анализ” при Факултет по математика и информатика на Пловдивски университет “Паисий Хилендарски”, град Пловдив, проведен на 04.07.2012 г.

Дисертантът е асистент към катедра “Компютърни технологии” при Факултет по математика и информатика на Пловдивски университет “Паисий Хилендарски”.

Публичната защита на дисертационния труд ще се състои на 20.09.2012 г. от 14:00 часа в Заседателната зала на Нова сграда на Пловдивски университет “Паисий Хилендарски”, град Пловдив.

Научно жури:

1. проф. д.м.н. Снежана Христова (ПУ “Паисий Хилендарски”, Пловдив, председател);
2. проф. д.м.н. Светослав Марков (ИМИ, БАН);
3. проф. д.м.н. Степан Терзиян (РУ “Ангел Кънчев”, Русе);
4. проф. д-р Михаил Константинов, (УАСГ, София, рецензент);
5. доц. д-р Ангел Дишлиев (ХТМУ, София, рецензент).

Основни данни за дисертационния труд:

- автор: Кремена Василева Стефанова;
- научен ръководител: проф. д.м.н. Снежана Христова;
- заглавие: Качествени методи за някои специални видове диференциални уравнения;
- научна специалност: Диференциални уравнения;
- шифър: 01.01.05;
- брой глави: 4;
- брой страници: 127;
- брой литературни източници: 121;
- брой публикации на дисертанта, свързани с дисертационния труд: 5.

Номерацията на формулите, примерите, таблиците и фигурите в автореферата е цифрова и последователна. Тя не съвпада с тяхната номерация в дисертационния труд. Номерацията на твърденията (леми, теореми, следствия) и на дефинициите в автореферата съвпада с тази в дисертационния труд.

☼ Актуалност на темата ☼

Диференциалните уравнения, използвани като модели и съчетани със съвременните средства на информационните технологии, дават възможност теоретично да се изследва, прогнозира и управлява поведението на реални системи в различни области на науката (физика, химия, биология), на техниката, на икономиката и други ([1], [76], [90], [108], [109]). Сложността на реалните процеси и явления, взаимодействието и влиянието на редица фактори върху изследваните обекти водят до използването на сложен математически апарат и съответно по-сложни уравнения. Моделирането на динамиката на реалните процеси и явления е тясно свързано с използването на различни видове диференциални уравнения. Това пък от своя страна довежда и до развитието на теорията на диференциалните уравнения ([19], [33], [48], [49], [50], [51], [52], [77], [92]).

Когато реалните процеси и явления се характеризират с факта, че във всеки момент състоянието на системата зависи от състоянието ѝ в предишни моменти, моделирането се извършва адекватно с функционално-диференциални уравнения ([2], [47], [54], [55], [107]). Доколкото тази зависимост от практическа гледна точка може да бъде най-различна, то и математически тя се описва по различни начини. Още през 1908 г. по време на международен математически конгрес Ч. Пикард подчертава значението на тези уравнения във физиката. Интересът към тях нараства след 1940 г., но до средата на петдесетте години на 20-ти век съществува малък прогрес в тяхната качествена теория. През 1956 г. Н. Красовский стига до заключението, че за да се изследва дадена реална система с помощта на функционално-диференциалните уравнения и за да може по-адекватно да се определи нейното бъдещо състояние, трябва да бъде взето под внимание състоянието ѝ не само в сегашния, но и в отминал период от време. Това тласка значително напред развитието на функционално-диференциалните уравнения ([11], [31], [43], [73], [74], [81], [82], [83], [87], [88]).

От началото на 70-те години до сега качествената теория на функционално-диференциалните уравнения претърпява бурно развитие, като в резултат на това са изучени разнообразни качествени свойства на тех-

ните решения ([98], [100], [101], [107], [111], [112], [114], [115], [119], [120]).

Редица реални процеси и явления са подложени на краткотрайни външни въздействия по време на своето развитие, като времетраенето на тези въздействия е пренебрежимо малко. В този случай адекватен апарат за тяхното моделиране са т. н. импулсни диференциални уравнения ([17], [27], [28], [35], [36], [37], [38], [44], [57], [58], [60], [61], [63], [78], [84]). Импулсните системи се използват ефективно за моделиране в биологията, екологията, популационната динамика, физиката, икономиката, теорията на управлението и други области.

Специален вид функционално-диференциални уравнения са диференциалните уравнения с “максимуми”. Тези уравнения могат да се използват при моделиране на явления и процеси, чието състояние във всеки момент зависи съществено и от максималното им състояние в отминал интервал от време. За целта е необходимо да има добре разработена теория за този тип уравнения, която съдържа както качествени резултати, така и приближени методи за тяхното решаване. Трудността при разработването на тази теория се дължи основно на наличието на оператора “максимум”, който не позволява дори и в линейния случай с постоянни коефициенти уравнението да бъде решено в аналитичен вид. Наличието на операторът “максимум” в уравненията ги прави силно нелинейни. Нелинейността води практически до невъзможност тези уравнения да се решат в явен вид и изисква самостоятелно изучаване на свойствата на техните решения и разработване на ефективни методи за приближеното им решаване.

Формулировката на диференциалните уравнения с “максимуми” се среща исторически за пръв път през 1966 г. в монографията на Е. Попов [10]. В тази книга авторът моделира динамиката на електрическото напрежение, подавано към генератор с постоянно напрежение, който захранва верига с променлива консумация: $T_0 u'(t) + u(t) + q \max_{s \in [t-h, t]} u(s) = f(t)$, където T_0 и q са константи, характеризиращи обекта, $u(t)$ е регулираното напрежение и $f(t)$ е външният ефект. Ще отбележим, че поради липса дори и на основни резултати за диференциални уравнения с “максимуми” по това време, в тази монография моделът е само формулиран. В същото време този модел, използван в инженерната литература, поставя началото на развитието на една нова теория в областта на диференци-

алните уравнения ([12], [16], [18], [20], [21], [45], [113]). Ще подчертаем, че досега са получени само някои качествени свойства на техните решения ([23], [56], [59], [62], [64], [68], [95], [96], [113], [118]), както и са обосновани някои приближени методи за тяхното решаване ([16], [46], [61]).

❁ Цели и задачи на дисертационния труд ❁

Основните обекти на изследване в дисертационния труд са три специални вида диференциални уравнения: диференциални уравнения с “максимуми” (ДУМ), частни диференциални уравнения с “максимуми” (ЧДУМ) и импулсни диференциални уравнения със “супремуми” (ИДУС). Обединяващата характеристика на тези уравнения е присъствието на максималната стойност на неизвестната функция върху отрицателен интервал от време. Във връзка с горните видове уравнения в дисертационния труд са разгледани и някои породени от тях интегрални и диференциални неравенства.

Основните цели на дисертационния труд могат да се обединят в две групи:

- 1) да се разшири математическият апарат на диференциалните и интегралните неравенства, необходими при изследване на решенията на диференциални уравнения с “максимуми”/“супремуми”;
- 2) да се изследват свойствата на решенията на нелинейни диференциални уравнения, съдържащи максимума/супремума на неизвестната функция и да се обоснове приближен асимптотичен метод за тяхното решаване.

Целите на настоящия дисертационен труд са постигнати основно чрез решаването на задачи в следните направления.

I. Линејни и нелинейни *интегрални неравенства с “максимуми”/“супремуми”* за:

- ∞ непрекъснати скаларни функции на един аргумент;
- ∞ частично непрекъснати скаларни функции на един аргумент;

- ∞ непрекъснати скаларни функции на два аргумента.
- II. *Диференциални неравенства* за непрекъснати скаларни функции на един аргумент, които съдържат екстремалната стойност на неизвестната функция върху отминал интервал от време.
- III. *Качествени свойства* на решенията на диференциални уравнения с “максимуми”/“супремуми”.
- IV. *Приближени асимптотични методи* за решаване на обобщена гранична задача за диференциални уравнения с “максимуми”.

☞ Структура и обем на дисертационния труд ☞

Дисертационният труд съдържа 127 страници и се състои от увод, четири глави, авторска справка за приносите, перспективи за развитие, апробация на резултатите, публикации по дисертационния труд, декларация за оригиналност и достоверност на дисертационния труд и библиография.

Първата глава е на 6 страници и е обзорна. Останалите глави съдържат резултати на автора.

В авторската справка са отбелязани накратко основните резултати, получените в дисертационния труд.

В перспективите за развитие са посочени възможни бъдещи насоки за развитие на математическият апарат на интегралните неравенства и на неговото приложение в областта на диференциалните уравнения с “максимуми”.

В апробацията на резултатите са изброени международните и националните конференции, на които са докладвани някои от резултатите в дисертационния труд. Също така са отбелязани научните проекти, по които са изследвани и получени част от резултатите в дисертационния труд.

В декларацията за оригиналност и достоверност на дисертационния труд авторът декларира, че резултатите и приносите в дисертационния

труд са оригинални и не са заимствани от изследвания и публикации, в които той няма участие.

Библиографията съдържа 121 заглавия на научни статии и монографии, които авторът е използвал при изследванията, свързани с дисертационния труд.

За решаването на голяма част от илюстративните примери е използван програмен продукт, разработен от А. Голев, за което авторът изказва искрени благодарности за оказаното съдействие. При графичното представяне на получените стойности е използван софтуерът Grapher 8.

За всички заимствани резултати в дисертационния труд са посочени съответните първоизточници.

Ще направим кратко описание на съдържанието на дисертационния труд по глави.

Глава 1. Кратък обзор

В тази глава са формулирани някои от класическите интегрални неравенства, които се прилагат при качествено изследване на свойства на решения на диференциални уравнения. Това са неравенството на Гронуол-Белман и неравенството на Бихари. Тези неравенства са обобщени в глави 2 и 3. Формулирани са видовете диференциални уравнения, които са обект на изследване в дисертационния труд. Описани са и техните основни характеристики.

Глава 2. Линејни интегрални и диференциални неравенства, съдържащи екстремум на неизвестната скаларна функция

Втора глава съдържа 4 параграфа на 30 страници. В нея са решени различни видове линејни интегрални неравенства за скаларни функции, както на един аргумент, така и на два аргумента. Тези неравенства съдържат освен неизвестната функция и нейната максималната стойност върху отминал интервал от време. Разгледан е както случаят на непрекъснати функции, така и случаят на частично непрекъснати

функции. Изучените в тази глава интегрални неравенства представляват обобщения на класическото неравенство на Гронуол-Белман и някои негови аналози ([4], [22], [25], [34], [39], [40], [41], [70], [72], [79], [93], [97], [98], [99], [103], [104] [105], [110], [117]).

В §2.1 са получени решения на линейни интегрални неравенства за скалярни функции на един аргумент. Основната особеност на тези неравенства е, че от едната страна (обикновено лявата) стои само неизвестната функция, а другата страна (съответно дясната) съдържа интеграл, под знака на който участва линейно както неизвестната функция, така и нейната максимална стойност върху отминал интервал от време. Поотделно са разгледани случаите, когато допълнителният член извън интеграла в дясната страна е константа, монотонна функция и немонотонна функция. Във всеки от тези три случая решенията са корено различни, а доказателствата зависят помежду си. За пълнота на изложението е разгледан и случаят, когато неизвестната функция от лявата страна на неравенството е повдигната на степен. Някои от получените оценки са илюстрирани върху конкретни примери. Част от резултатите в този параграф са публикувани в [65].

Ще формулираме един от резултатите, получени в §2.1, в който h е неотрицателна константа, T е фиксирана точка, а точката $t_0 \in \mathbb{R}_+$ е избрана така, че $t_0 < T$.

Теорема 2.1.2: *Нека са изпълнени следните условия.*

1. Функцията $\alpha \in C^1([t_0, T), \mathbb{R}_+)$ е не намаляваща и $\alpha(t) \leq t$ при $t \in [t_0, T)$.
2. Функциите $p, q \in C([t_0, T), \mathbb{R}_+)$ и $a, b \in C([\alpha(t_0), T), \mathbb{R}_+)$.
3. Функцията $\phi \in C([\alpha(t_0) - h, t_0], \mathbb{R}_+)$ и $M = \max_{s \in [\alpha(t_0) - h, t_0]} \phi(s) > 0$.
4. Функцията $k \in C([t_0, T), (0, \infty))$ е не намаляваща и $M \geq k(t_0)$.
5. Функцията $u \in C([\alpha(t_0) - h, T), \mathbb{R}_+)$ удовлетворява неравенствата

$$\begin{aligned}
u(t) \leq & k(t) + \int_{t_0}^t \left[p(s)u(s) + q(s) \max_{\xi \in [s-h, s]} u(\xi) \right] ds \\
& + \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)} \left[a(s)u(s) + b(s) \max_{\xi \in [s-h, s]} u(\xi) \right] ds \quad \text{при } t \in [t_0, T),
\end{aligned} \tag{1}$$

$$u(t) \leq \phi(t) \quad \text{при } t \in [\alpha(t_0) - h, t_0]. \quad (2)$$

Тогава при $t \in [t_0, T)$ е в сила неравенството

$$u(t) \leq M \frac{k(t)}{k(t_0)} \exp \left(\int_{t_0}^t [p(s) + q(s)] ds + \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)} [a(s) + b(s)] ds \right). \quad (3)$$

Ще приложим получената оценка в теорема 2.1.2 върху конкретен пример.

Пример 1: Да разгледаме функцията $u \in C([-1, 2], \mathbb{R}_+)$, която удовлетворява неравенствата

$$\begin{aligned} u(t) &\leq 1 + \int_0^t u(s) ds + \int_0^t \max_{\xi \in [s-1, s]} u(\xi) ds && \text{при } t \in [0, 2], \\ u(t) &\leq 1 && \text{при } t \in [-1, 0]. \end{aligned} \quad (4)$$

Съгласно теорема 2.1.2 при $t \in [0, 2]$ решението на (4) е ограничено от функцията $\exp(2t)$, т. е. в сила е неравенството

$$u(t) \leq \exp \left(\int_0^t [1 + 1] ds \right) = \exp(2t). \quad (5)$$

Разглеждаме следната начална задача за интегрално уравнение с максимуми, съответстваща на неравенства (4),

$$\begin{aligned} u(t) &= 1 + \int_0^t u(s) ds + \int_0^t \max_{\xi \in [s-1, s]} u(\xi) ds && \text{при } t \in [0, 2], \\ u(t) &= 1 && \text{при } t \in [-1, 0]. \end{aligned} \quad (6)$$

Означаваме с $u_*(t)$ решението на (6). Ще отбележим, че всяко решение на (4) е долно решение на (6) и не надминава $u_*(t)$. За намирането на $u_*(t)$ използваме подходящ софтуер. За функциите $u_*(t)$ и $\exp(2t)$ получаваме следните стойности:

t	$u_*(t)$	$\exp(2t)$
0	1	1
0.1	1.22140251387996	1.22140275816017
0.2	1.49182410091230	1.49182469764126
0.3	1.82211770712101	1.82211880039050
0.4	2.22553914806281	2.22554092849246
...	...	...
1.8	36.59810269044680	36.59823444368020
1.9	44.70101462934890	44.70118449330370
2	54.59793164127200	54.59815003314800

Таблица 1. Стойности на $u_*(t)$ и $\exp(2t)$ в интервала $[0, 2]$.

Таблицата 1 потвърждава, че точното решение $u_*(t)$ на (6) не надминава получената оценка за решението на (4), т. е. изпълнено е неравенството $u_*(t) \leq \exp(2t)$ в интервала $[0, 2]$.

□

В §2.2 са решени някои линейни интегрални неравенства с “максимуми” за скалярни функции на два аргумента. Получени са различни оценки за неизвестната функция в зависимост от участващите константи и от вида на функцията извън интеграла. Отделено е специално внимание и на случаят, когато неизвестната функция е повдигната на степен. Някои от получените оценки са приложени върху конкретни примери. Резултатите в този параграф са частично публикувани в [66].

Основен резултат от този параграф е формулиран в теорема 2.2.2., където X, Y са фиксирани точки, а точките $x_0, y_0 \in \mathbb{R}_+$ са избрани така, че $x_0 < X$ и $y_0 < Y$.

Теорема 2.2.2: *Нека са изпълнени следните условия.*

1. Функциите $\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i \in C^1([x_0, X), \mathbb{R}_+)$ са ненамалжаващи функции и неравенствата $\tilde{\alpha}_i(x) \leq x, \tilde{\beta}_i(x) \leq x$ са в сила за всяко $x \in [x_0, X)$, където $i = 1, \dots, n$.
2. Функциите $f_i, g_i \in C([J, X) \times [y_0, Y), \mathbb{R}_+)$, където $i = 1, \dots, n$ и $J = \min_{1 \leq i \leq n} (\tilde{\alpha}_i(x_0), \tilde{\beta}_i(x_0))$.
3. Функцията $\phi \in C([J - h, x_0] \times [y_0, Y), \mathbb{R}_+)$.
4. Функцията $k \in C([x_0, X) \times [y_0, Y), (0, \infty))$ е ненамалжаваща по от-

ношение на двата си аргумента и $\max_{s \in [\tilde{J}-h, x_0]} \phi(s, y) \leq \sqrt[p]{k(x_0, y)}$ при $y \in [y_0, Y)$.

3. Функцията $u \in C([J-h, X) \times [y_0, Y), \mathbb{R}_+)$ удовлетворява неравенствата

$$\begin{aligned} (u(x, y))^p &\leq k(x, y) + \sum_{i=1}^n \int_{\tilde{\alpha}_i(x_0)}^{\tilde{\alpha}_i(x)} \int_{y_0}^y f_i(s, t) u(s, t) dt ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \int_{\tilde{\beta}_i(x_0)}^{\tilde{\beta}_i(x)} \int_{y_0}^y g_i(s, t) \max_{\xi \in [s-h, s]} u(\xi, t) dt ds \end{aligned} \quad (7)$$

при $(x, y) \in [x_0, X) \times [y_0, Y),$

$$u(x, y) \leq \phi(x, y), \quad \text{при } (x, y) \in [J-h, x_0] \times [y_0, Y), \quad (8)$$

където константата $p \geq 1$.

Тогава при $(x, y) \in [x_0, X) \times [y_0, Y)$ е в сила неравенството

$$u(x, y) \leq \sqrt[p]{k(x, y)} \left(1 + A(x, y)\right) \exp \left(A(x, y)\right), \quad (9)$$

където

$$\begin{aligned} A(x, y) = \frac{1}{p} &\left(\sum_{i=1}^n \int_{\tilde{\alpha}_i(x_0)}^{\tilde{\alpha}_i(x)} \int_{y_0}^y \frac{f_i(s, t)}{(K(s, t))^{1-\frac{1}{p}}} dt ds \right. \\ &\left. + \sum_{i=1}^n \int_{\tilde{\beta}_i(x_0)}^{\tilde{\beta}_i(x)} \int_{y_0}^y \frac{g_i(s, t)}{(K(s, t))^{1-\frac{1}{p}}} dt ds \right), \end{aligned} \quad (10)$$

$$K(x, y) = \begin{cases} k(x, y) & \text{при } (x, y) \in [x_0, X) \times [y_0, Y), \\ k(x_0, y) & \text{при } (x, y) \in [J-h, x_0] \times [y_0, Y). \end{cases} \quad (11)$$

Ще обърнем внимание на факта, че ако в условията на теорема 2.2.2 константата $p \equiv 1$, получаваме аналог на класическото неравенство на Гронуол-Белман в двумерния случай.

Ще отбележим, че оценка (9) изглежда трудна за практическо използване само на пръв поглед. Ще илюстрираме нейното приложение върху конкретен пример.

Пример 2: Да разгледаме функцията $u \in C([-1, 1] \times [0, 1], \mathbb{R}_+)$, която удовлетворява неравенствата

$$u(x, y) \leq 1 + \int_0^x \int_0^y u(s, t) dt ds + \int_0^{\sqrt{x}} \int_0^y \max_{\xi \in [s-1, s]} u(\xi, t) dt ds \quad (12)$$

при $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$,

$$u(x, y) \leq 1 \quad \text{при } (x, y) \in [-1, 0] \times [0, 1]. \quad (13)$$

Съгласно теорема 2.2.2 при $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ за $u(x, y)$ е в сила оценката

$$u(x, y) \leq \exp(xy + \sqrt{x}y). \quad (14)$$

□

В §2.3 са получени решенията на линейни диференциални неравенства, в които участва екстремалната стойност на неизвестната функция върху отминал интервал от време. Някои от резултатите са приложени върху конкретни примери, за да се покаже тяхната ефективност и практическо приложение. Решените диференциални неравенства са основа на теоретичното обосноваване на асимптотични методи за диференциални уравнения с “максимуми”. Резултатите от този параграф се публикуват за първи път в дисертационния труд.

Ще формулираме един от получените резултати в §2.3, в който h е положителна константа, $0 < T < \infty$ е фиксирана точка, а $P(h, T)$ е множеството на всички функции $u : [-h, T] \rightarrow \mathbb{R}$, които са непрекъснати в интервала $[-h, T]$ и непрекъснато диференцируеми в интервала $[0, T]$.

Теорема 2.3.1. (Сравнение) *Нека са изпълнени следните условия.*

1. Функциите $M, L \in C([0, T], \mathbb{R}_+)$ удовлетворяват неравенството

$$\max_{t \in [0, T]} [M(t) + L(t)] \leq T^{-1}. \quad (15)$$

2. Функцията $u \in P(h, T)$ удовлетворява неравенствата

$$u'(t) \leq -M(t)u(t) - L(t) \min_{s \in [t-h, t]} u(s), \quad t \in [0, T], \quad (16)$$

$$u(t) = u(0) \leq 0, \quad t \in [-h, 0]. \quad (17)$$

Тогава при $t \in [-h, T]$ е в сила неравенството $u(t) \leq 0$.

Ще илюстрираме получения резултат в теорема 2.3.1 върху конкретен пример.

Пример 3: Да разгледаме функцията $u(t)$, за която са изпълнени условията

$$\begin{aligned} u'(t) &\leq -\frac{1}{4}u(t) - \frac{1}{8} \max_{\xi \in [s-1, s]} u(\xi) && \text{при } t \in [0, 2], \\ u(t) &= u(0) \leq -1 && \text{при } t \in [-1, 0]. \end{aligned} \quad (18)$$

Съгласно теорема 2.3.1 получаваме, че $u(t) \leq 0$ при $t \in [-1, 2]$, т. е. всяко решение на (18) е неположително.

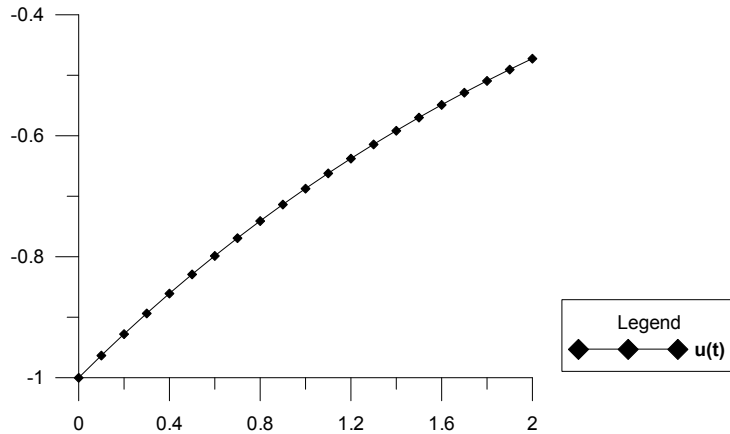
Разглеждаме следната начална задача за диференциално уравнение с “максимуми”, която съответства на неравенства (18),

$$\begin{aligned} u'(t) &= -\frac{1}{4}u(t) - \frac{1}{8} \max_{\xi \in [s-1, s]} u(\xi) && \text{при } t \in [0, 2], \\ u(t) &= u(0) = -1 && \text{при } t \in [-1, 0]. \end{aligned} \quad (19)$$

Ще отбележим, че всяко решение на (18) е долно решение на (19) и не надминава решението на (19). След използване на съответния софтуер и приближеното решаване на (19), получаваме резултати, които са нанесени в таблица 2 и графично представени на фигура 1.

t	0	0.1	0.2	0.3	...	1.9	2
$u(t)$	-1.0000000	-0.9631944	-0.9277435	-0.8935974	...	-0.4904166	-0.4723666

Таблица 2. Стойности на $u(t)$ в интервала $[0, 2]$.



Фигура 1. Графика на $u(t)$ в интервала $[0, 2]$.

От графика и от таблицата се вижда, че действително решението на (19) е неположително в интервала $[0, 2]$.

□

В §2.4 са решени линейни интегро-сумационни неравенства със “супермуми” за частично непрекъснати функции на един аргумент. Прямо вида на дясната страна на неравенството са изучени поотделно случаите на неотрицателна константа, на монотонна функция, а също така и когато неизвестната функция е повдигната на степен. Ще отбележим, че подобно на предишните §2.1 и §2.2, доказателствата в тези случаи зависят помежду си.

Ще формулираме един от получените резултати в този параграф, в който h е неотрицателна константа, T е фиксирана точка, $t_0 \in \mathbb{R}_+$ е избрана така, че $t_0 < T$ и $t_1, t_2, t_3, \dots$ е дадена редица от точки, които удовлетворяват неравенствата $0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$. С $PC(\Lambda, \mathbb{R})$ ($\Lambda \subset \mathbb{R}$) е означено множеството от функции $u : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$, които са частично непрекъснати, т.е. за тях съществуват границите $\lim_{t \downarrow t_k} u(t) = u(t_k + 0) < \infty$ и $\lim_{t \uparrow t_k} u(t) = u(t_k - 0) = u(t_k) < \infty$ при $t_k \in \Lambda$, където $k = 1, 2, \dots$.

Теорема 2.4.3. *Нека са изпълнени следните условия.*

1. Функцията $\alpha \in C^1([t_0, T), \mathbb{R}_+)$ е ненамаляваща функция и неравенството $\alpha(t) \leq t$ е в сила за всяко $t \in [t_0, T)$.
2. Функциите $a, b \in PC([\alpha(t_0), T), \mathbb{R}_+)$.
3. Функцията $\phi \in PC([\alpha(t_0) - h, t_0], \mathbb{R}_+)$ и $\sup_{s \in [\alpha(t_0) - h, t_0]} \phi(s) = M < \infty$.
4. Функцията $k \in C([t_0, T), (0, \infty))$ е ненамаляваща и $M \leq k(t_0)$.
5. Функцията $u \in PC([\alpha(t_0) - h, T), \mathbb{R}_+)$ удовлетворява неравенствата

$$\begin{aligned}
 u(t) \leq & k(t) + \sum_{t_0 < t_i < t} \beta_i u(t_i) \\
 & + \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)} \left[a(s)u(s) + b(s) \sup_{\xi \in [s-h, s]} u(\xi) \right] ds, \quad t \in [t_0, T),
 \end{aligned} \tag{20}$$

$$u(t) \leq \phi(t), \quad t \in [\alpha(t_0) - h, t_0], \quad (21)$$

където константите $\beta_0 \equiv 0$, $\beta_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots$).

Тогава при $t \in [t_0, T)$ е в сила неравенството

$$u(t) \leq M \frac{k(t)}{k(t_0)} \left(\prod_{t_0 < t_i < t} (1 + \beta_i) \right) \exp \left(\int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)} [a(s) + b(s)] ds \right). \quad (22)$$

✿ Глава 3. Нелинейни интегрални неравенства, ✿ съдържащи максимум на неизвестната скаларна функция

Трета глава съдържа 3 параграфа на 37 страници. Тя е посветена на нелинейни интегрални неравенства за непрекъснати функции на един и на два аргумента, които включват максималната стойност на неизвестната функция върху отминал интервал от време. Решени са и интегро-сумационни неравенства, включващи “супремуми” на неизвестната частично непрекъсната функция. Резултатите от тази глава представляват нелинейни обобщения на неравенството Бихари и на някои негови аналози ([29], [30], [32], [42], [69], [71], [85], [86], [87], [88], [89], [91], [94], [102], [111], [116], [121]).

В §3.1 са получени решенията на нелинейни интегрални неравенства с “максимуми” за скаларна функция на един аргумент. Изучени са различни възможности за нелинейност и на двете страни на неравенствата. За целта са въведени различни класове от функции по отношение на нелинейността, като техните свойства са съобразени със спецификата на съответните неравенства. Някои от неравенствата са публикувани в [26].

Един от основните резултати в този параграф е теорема 3.1.6, в която T е фиксирана точка, а точката $t_0 \in \mathbb{R}_+$ е избрана така, че $t_0 < T$ и участващите функции под интеграла принадлежат на следния клас.

Дефиниция 3.1.2. Функцията $\omega \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ принадлежи на класа Ω_2 , ако:

(a) $\omega(x) > 0$ при $x > 0$ и е ненамаляваща функция;

$$(б) \int^{\infty} \frac{dx}{\omega(x)} = \infty;$$

$$(в) \omega(tx) \geq t\omega(x) \text{ при } 0 \leq t \leq 1.$$

Теорема 3.1.6. Нека са изпълнени следните условия.

1. Функциите $\alpha_i, \beta_j \in C^1([t_0, T), \mathbb{R}_+)$ са ненамаляващи функции като $\alpha_i(t) \leq t, \beta_j(t) \leq t$ за всяко $t \in [t_0, T)$ при $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$.
2. Функциите $f_i, g_j \in C([J, T), \mathbb{R}_+)$, където $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$ и $J = \min \left(\min_{1 \leq i \leq n} \alpha_i(t_0), \min_{1 \leq j \leq m} \beta_j(t_0) \right)$.
3. Функцията $k \in C([t_0, T), [1, \infty))$ е ненамаляваща.
4. Функцията $\phi \in C([J - h, t_0], [0, \tilde{k}])$, където $\tilde{k} = k(t_0)$.
5. Функцията $\psi \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ е растяща функция като $\psi(0) = 0$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = \infty$.
6. Функциите $\omega_i, \tilde{\omega}_j \in \Omega_2$ при $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$.
7. Функцията $u \in C([J - h, T), \mathbb{R}_+)$ удовлетворява неравенствата

$$\begin{aligned} \psi(u(t)) \leq k(t) + \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_i(t_0)}^{\alpha_i(t)} f_i(s) (u(s))^p \omega_i(u(s)) ds \\ + \sum_{j=1}^m \int_{\beta_j(t_0)}^{\beta_j(t)} g_j(s) (u(s))^p \tilde{\omega}_j \left(\max_{\xi \in [s-h, s]} u(\xi) \right) ds, \quad t \in [t_0, T), \end{aligned} \quad (23)$$

$$u(t) \leq \phi(t), \quad t \in [J - h, t_0], \quad (24)$$

където константата $p \geq 0$.

Тогава при $t_0 \leq t \leq t_6$ е в сила неравенството

$$u(t) \leq k(t) \psi^{-1} \left\{ \Psi^{-1} \left[W^{-1} \left(W(\Psi(1)) + A_1(t) \right) \right] \right\}, \quad (25)$$

където

$$\Psi(r) = \int_{r_0}^r \frac{ds}{[\psi^{-1}(s)]^p}, \quad 0 < r_0 < M, \quad (26)$$

$$W(r) = \int_{r_1}^r \frac{ds}{q[\psi^{-1}(\Psi^{-1}(s))]}, \quad 0 < r_1 < \Psi(M), \quad (27)$$

$$A_1(t) = \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_i(t_0)}^{\alpha_i(t)} f_i(s) \left(k(s)\right)^p ds + \sum_{j=1}^m \int_{\beta_j(t_0)}^{\beta_j(t)} g_j(s) \left(k(s)\right)^p ds, \quad (28)$$

$$t_6 = \sup \left\{ \tau \in [t_0, T) : \left(W\left(\Psi(1)\right) + A_1(t) \right) \in \text{Dom}(W^{-1}), \right. \\ \left. W^{-1}\left(W\left(\Psi(1)\right) + A_1(t)\right) \in \text{Dom}(\Psi^{-1}) \text{ и } \right. \\ \left. \Psi^{-1}\left[W^{-1}\left(W\left(\Psi(1)\right) + A_1(t)\right)\right] \in \text{Dom}(\psi^{-1}) \text{ при } t \in [t_0, \tau] \right\}.$$

Ще илюстрираме приложението на получената оценка в теорема 3.1.6. върху конкретен пример.

Пример 4: Нека функцията $x \in C([-1, 2], \mathbb{R}_+)$ удовлетворява неравенствата

$$x(t) \leq 1 + \int_0^t \sqrt{x(s)} ds + \int_0^{\sqrt{t}} \sqrt{\max_{\xi \in [s-1, s]} x(\xi)} ds \quad \text{при } t \in [1, 2], \quad (29)$$

$$x(t) \leq 1 \quad \text{при } t \in [-1, 0].$$

Съгласно теорема 3.1.6. при $t \in [0, 2]$ е в сила неравенството

$$x(t) \leq \left[1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sqrt{t} \right]^2. \quad (30)$$

□

В §3.2 са решени някои нелинейни интегрални неравенства за скаларни функции на два аргумента, които включват максималната стойност на неизвестната функция по една от променливите върху отминал интервал от време. Съществената особеност на разглежданите неравенства е свързана с вида на нелинейните функции под знака за интеграл, чиито аргументи са неизвестната функция и нейната максимална стойност. За целта са въведи специални класове от нелинейни функции с различни свойства. Част от оценките са приложени върху конкретни примери. Някои от резултатите в този параграф са публикувани в [106].

Ще представим един от получените резултати в §3.2, в който X, Y са фиксирани точки и точките $x_0, y_0 \in \mathbb{R}_+$ са избрани така, че $x_0 < X$ и $y_0 < Y$.

Теорема 3.2.1. *Нека са изпълнени следните условия.*

1. Функциите $\alpha_i, \beta_j \in C^1([x_0, X), \mathbb{R}_+)$ са ненамалжаващи функции и неравенствата $\alpha_i(x) \leq x, \beta_j(x) \leq x$ са в сила за всяко $x \in [x_0, X)$, където $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$.
2. Функциите $f_i, g_j \in C([J, X) \times [y_0, Y), \mathbb{R}_+)$, където $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$ и $J = \min \left(\min_{1 \leq i \leq n} \alpha_i(x_0), \min_{1 \leq j \leq m} \beta_j(x_0) \right)$.
3. Функцията $\phi \in C([J - h, x_0] \times [y_0, Y), [0, k])$, където $k = \text{const} \geq 0$.
4. Функциите $\omega_i, \tilde{\omega}_j \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ са ненамалжаващи и $\omega_i(x) > 0, \tilde{\omega}_j(x) > 0$ при $x > 0$, където $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$.
5. Функцията $u \in C([J - h, X) \times [y_0, Y), \mathbb{R}_+)$ удовлетворява неравенствата

$$u(x, y) \leq k + \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_i(x_0)}^{\alpha_i(x)} \int_{y_0}^y f_i(s, t) \omega_i(u(s, t)) dt ds + \sum_{j=1}^m \int_{\beta_j(x_0)}^{\beta_j(x)} \int_{y_0}^y g_j(s, t) \tilde{\omega}_j \left(\max_{\xi \in [s-h, s]} u(\xi, t) \right) dt ds, \quad (31)$$

$$u(x, y) \leq \phi(x, y), \quad \begin{aligned} & (x, y) \in [x_0, X) \times [y_0, Y), \\ & (x, y) \in [J - h, x_0] \times [y_0, Y). \end{aligned}$$

Тогава при $(x, y) \in G_1$ е в сила неравенството

$$u(x, y) \leq W^{-1} \left(W(k) + \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_i(x_0)}^{\alpha_i(x)} \int_{y_0}^y f_i(s, t) dt ds + \sum_{j=1}^m \int_{\beta_j(x_0)}^{\beta_j(x)} \int_{y_0}^y g_j(s, t) dt ds \right), \quad (32)$$

$$W(r) = \int_{r_0}^r \frac{ds}{\omega(s)} < \infty, \quad 0 \leq r_0 < k < r, \quad (33)$$

$$\omega(t) = \max \left(\max_{1 \leq i \leq n} \omega_i(t), \max_{1 \leq j \leq m} \tilde{\omega}_j(t) \right), \quad (34)$$

$$G_1 = \left\{ (x, y) \in [x_0, X) \times [y_0, Y) : \left(W(k) + \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_i(x_0)}^{\alpha_i(x)} \int_{y_0}^y f_i(s, t) dt ds + \sum_{j=1}^m \int_{\beta_j(x_0)}^{\beta_j(x)} \int_{y_0}^y g_j(s, t) dt ds \right) \in \text{Dom}(W^{-1}) \right\}.$$

В §3.3 са решени нелинейни интегро-сумационни неравенства със “супремуми” за частично непрекъснатата функция на един аргумент в случая, когато под знака за интеграл неизвестната функция и нейната максимална стойност върху отминал интервал от време са повдигнати на степен. Разгледани са различните възможности за вида на степените. Резултатите в този параграф са отпечатани в [67].

Един от резултатите в този параграф е формулиран в теорема 3.3.1, където h е неотрицателна константа, точките t_0, T са фиксирани така, че $0 \leq t_0 < T \leq \infty$. Точките $t_1, t_2, \dots$ удовлетворяват неравенствата $0 < t_1 < t_2 < \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$ и $Z(t_0, T)$ е множеството от всички естествени числа k , за които $t_k \in (t_0, T)$. С $PC(\Lambda, \mathbb{R})$ ($\Lambda \subset \mathbb{R}$) е означено множеството от функции $u : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$, които са частично непрекъснати, т. е. за тях съществуват границите $\lim_{t \downarrow t_k} u(t) = u(t_k + 0) < \infty$ и $\lim_{t \uparrow t_k} u(t) = u(t_k - 0) = u(t_k) < \infty$ при $t_k \in \Lambda$, където $k = 1, 2, \dots$.

Теорема 3.3.1. *Нека са изпълнени следните условия.*

1. Функцията $\alpha \in C^1([t_0, T), \mathbb{R}_+)$ е ненамаляваща функция и $\alpha(t) \leq t$ при $t \in [t_0, T)$.
2. Функциите $a, b \in C([\alpha(t_0), T), \mathbb{R}_+)$.
3. Функцията $\phi \in C([\alpha(t_0) - h, t_0], \mathbb{R}_+)$ и $\max_{s \in [\alpha(t_0) - h, t_0]} \phi(s) = M$.
4. Функцията $u \in PC([\alpha(t_0) - h, T), \mathbb{R}_+)$ удовлетворява неравенствата

$$u(t) \leq \gamma + \sum_{t_0 < t_i < t} \beta_i u^p(t_i) + \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)} \left[a(s)(u(s))^p + b(s) \left(\sup_{\xi \in [s-h, s]} u(\xi) \right)^p \right] ds, \quad t \in [t_0, T), \quad (35)$$

$$u(t) \leq \phi(t), \quad t \in [\alpha(t_0) - h, t_0], \quad (36)$$

където константите $\beta_i \geq 0$, ($i \in Z(t_0, T)$), $p > 0$ и $\gamma \leq M$.

Тогава при $t \in [t_0, T)$ е в сила оценката

(a) при $p = 1$

$$u(t) \leq M \left(\prod_{t_0 < t_i < t} (1 + \beta_i) \right) \exp(Q(t)), \quad (37)$$

където

$$Q(t) = \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)} [a(s) + b(s)] ds. \quad (38)$$

Ако

$$Q(t) \leq \frac{M^{1-p}}{p}, \quad (39)$$

$$\prod_{t_0 < t_i < t} (1 + p \beta_i M^{p-1}) < \left(\frac{p}{p-1} \right)^{\frac{1}{p-1}}, \quad (40)$$

то при $t \in [t_0, T)$ са изпълнени неравенствата

(б) при $p \in (0, 1)$

$$u(t) \leq \left(\prod_{t_0 < t_i < t} (1 + \beta_i M^{p-1}) \right) \left[M^{1-p} + (1-p) Q(t) \right]^{\frac{1}{1-p}}; \quad (41)$$

(в) при $p > 1$

$$u(t) \leq M \left(\prod_{t_0 < t_i < t} (1 + p \beta_i M^{p-1}) \right) \times \left\{ 1 - (p-1) \left[M \left(\prod_{t_0 < t_i < t} (1 + p \beta_i M^{p-1}) \right) \right]^{p-1} Q(t) \right\}^{\frac{1}{p-1}}. \quad (42)$$

☼ Глава 4. Диференциални уравнения, ☼ съдържащи максимум на неизвестната скаларна функция

Четвърта глава съдържа 4 параграфа на 30 страници. В нея е проведено качествено изследване на свойства на решения на диференциални уравнения с “максимуми”/“супремуми” с помощта на интегрални неравенства, решени в глави 2 и 3. Също така е обоснован приближен асимптотичен метод за решаване на обобщена гранична задача за нелинейни диференциални уравнения с “максимуми”.

В §4.1 са получени достатъчни условия за единственост на решението на начална задача за нелинейни диференциални уравнения с “максимуми”. Намерени са оценки на решенията и е изследвана непрекъснатата зависимост от началните условия на решенията на диференциални уравнения с “максимуми”. Някои от тези резултати са публикувани в [26] и [65].

В §4.2 са получени оценки на решенията на частни диференциални уравнения с “максимуми”, които съществено зависят от вида на дясната част и на началните условия. Разгледани са както постоянни, така и променливи начални условия. По отношение на дясната страна са изследвани случаите, когато функцията е ограничена от степенна функция. Тези резултати се основават на разработения в глави 2 и 3 математически апарат на интегралните неравенства за функции на два аргумента. Теоретичните оценки са илюстрирани върху конкретни примери. Резултатите в този параграф са публикувани в [66] и [106].

Ще формулираме един от получените резултати в този параграф, в който X, Y са фиксирани точки и точките $x_0, y_0 \in \mathbb{R}_+$ са избрани така, че $x_0 < X$ и $y_0 < Y$.

Разглеждаме следното нелинейно частно диференциално уравнение с “максимуми”

$$u''_{xy} = F\left(x, y, u(x, y), \max_{s \in [\sigma(x), \tau(x)]} u(s, y)\right), \quad (x, y) \in [x_0, X) \times [y_0, Y), \quad (43)$$

с начални условия

$$\begin{aligned} u(x_0, y) &= \varphi_1(y), & y &\in [y_0, Y) \\ u(x, y_0) &= \varphi_2(x), & x &\in [x_0, X) \\ u(x, y) &= \psi(x, y), & (x, y) &\in [\tau(x_0) - h, x_0] \times [y_0, Y) \end{aligned} \quad (44)$$

където $u : [\tau(x_0) - h, X) \times [y_0, Y) \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_1 : [y_0, Y) \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_2 : [x_0, X) \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi : [\tau(x_0) - h, x_0] \times [y_0, Y) \rightarrow \mathbb{R}$ и $F : [x_0, X) \times [y_0, Y) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

В случая, когато дясната част на (43) е сравнима с квадратен корен на аргументите си, е в сила следният резултат.

Теорема 4.2.1. (Ограниченост). *Нека са изпълнени следните условия.*

1. Функциите $\tau, \sigma \in C^1([x_0, X), \mathbb{R}_+)$, $\tau(t)$ е ненамалвяваща функция и съществува константа $h > 0$ такава, че $\tau(x) - \sigma(x) \leq h$ при $x \in [x_0, X)$.
2. Функцията $F \in C([x_0, X) \times [y_0, Y) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ удовлетворява при $(x, y) \in [x_0, X) \times [y_0, Y)$ и $\gamma, \nu \in \mathbb{R}$ условието

$$|F(x, y, \gamma, \nu)| \leq Q(x, y)\sqrt{|\gamma|} + R(x, y)\sqrt{|\nu|},$$

където функциите $Q, R \in C([x_0, X) \times [y_0, Y), \mathbb{R}_+)$.

3. Функцията $\psi \in C([\tau(x_0) - h, x_0] \times [y_0, Y), \mathbb{R})$.
4. Функциите $\varphi_1 \in C([y_0, Y), \mathbb{R})$, $\varphi_2 \in C([x_0, X), \mathbb{R})$ и $\varphi_1(y_0) = \varphi_2(x_0)$, $\varphi_1(y) = \psi(x_0, y)$ при $y \in [y_0, Y)$.
5. Функцията $u(x, y)$ е решение на началната задача (43), (44), което е дефинирано при $(x, y) \in [\tau(x_0) - h, X) \times [y_0, Y)$.

Тогави при $(x, y) \in [x_0, X) \times [y_0, Y)$ за решението $u(x, y)$ на началната задача (43), (44) е в сила оценката

$$|u(x, y)| \leq K(x, y) + P_1(x, y) \left(1 + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y [Q(s, t) + R(s, t)] dt ds \right)^2, \quad (45)$$

където

$$K(x, y) = \begin{cases} |\varphi_1(y) + \varphi_2(x) - \varphi_2(x_0)|, & (x, y) \in [x_0, X) \times [y_0, Y), \\ |\psi(x, y)|, & (x, y) \in [\tau(x_0) - h, x_0] \times [y_0, Y), \end{cases} \quad (46)$$

$$\begin{aligned}
P_1(x, y) = 1 + \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y Q(s, t) \sqrt{K(s, t)} dt ds \\
+ \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y R(s, t) \sqrt{\max_{\xi \in [\sigma(s), \tau(s)]} K(\xi, t)} dt ds.
\end{aligned} \tag{47}$$

В частния случай, когато началните функции в условия (44) са константи и дясната страна на (43) е сравнима с квадратен корен на аргументите си и е Липшицова с константи, а не с функции, получаваме следния резултат.

Следствие 4.2.1. *Нека са изпълнени условията на теорема 4.2.1 като $\varphi_1(y) \equiv C$, $\varphi_2(x) \equiv C$, $\psi(x, y) \equiv C$, $Q(x, y) \equiv Q$, $R(x, y) \equiv R$, където C , Q и R са константи.*

Тогава при $(x, y) \in [x_0, X) \times [y_0, Y)$ за решението $u(x, y)$ на началната задача (43), (44) е в сила оценката

$$|u(x, y)| \leq \left(\sqrt{|C|} + \frac{1}{2} (Q + R)(x - x_0)(y - y_0) \right)^2. \tag{48}$$

В §4.3 е разширена концепцията за ограниченост и за практическа устойчивост на решенията на импулсни диференциални уравнения със “супремуми”. Ще отбележим, че при изследването на устойчивост на решенията на диференциални уравнения са използвани различни подходи ([3], [5], [6], [7], [8], [9], [13], [14], [15], [36], [47], [53], [59], [60], [63], [73], [74], [75], [80], [84]). В този параграф изследванията се базират на построения в §3.3 апарат на интегро-сумационни неравенства. Разгледан е случаят, когато десните страни на уравнението и на импулсното условие са съпоставими с положителна степен на аргументите си. Разгледани са различните възможности за вида на степените. Резултатите са илюстрирани с подходящо избрани конкретни примери. Някои от резултатите в този параграф са публикувани в [67].

Ще формулираме един от получените резултати в този параграф, в който $t_1, t_2, t_3, \dots$ е дадена редица от точки, които удовлетворяват неравенствата $0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$. Точките t_0 и T са фиксирани така, че $0 \leq t_0 < T \leq \infty$ и $Z(t_0, T)$ е множеството от всички естествени числа k , за които $t_k \in (t_0, T)$. С $PC(\Lambda, \mathbb{R})$ ($\Lambda \subset \mathbb{R}$) е означено множеството от функции $u : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$, които са частично непрекъснати,

т. е. за тях съществуват границите $\lim_{t \downarrow t_k} u(t) = u(t_k + 0) < \infty$ и $\lim_{t \uparrow t_k} u(t) = u(t_k - 0) = u(t_k) < \infty$ при $t_k \in \Lambda$, където $k = 1, 2, \dots$.

Разглеждаме нелинейното импулсно диференциално уравнение със “супремуми”

$$x' = f\left(t, x(t), \sup_{s \in [\sigma(t), \tau(t)]} x(s)\right), \quad \text{при } t \in [t_0, T), \quad t \neq t_i, \quad (49)$$

с импулсно условие

$$\Delta x|_{t=t_i} = I_i(x(t_i)), \quad \text{при } i \in Z(t_0, T), \quad (50)$$

и с начално условие

$$x(t) = \phi(t), \quad t \in [\tau(t_0) - h, t_0], \quad (51)$$

където $x : [\tau(t_0) - h, T) \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi : [\tau(t_0) - h, t_0] \rightarrow \mathbb{R}$, $f : [t_0, T) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $I_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $\Delta x|_{t=t_i} = x(t_i + 0) - x(t_i - 0)$ при $i \in Z(t_0, T)$.

Нека $x(t; t_0, \phi)$ е решение на началната задача (49)–(51). Означаваме $|\phi|_0 = \max_{s \in [\tau(t_0) - h, t_0]} |\phi(s)|$.

Ще казваме, че са изпълнени условия (H), ако:

- (H1) функциите $\sigma, \tau \in C^1([t_0, T), \mathbb{R}_+)$ са ненамаляващи, $\tau(t) \leq t$ при $t \in [t_0, T)$ и съществува неотрицателна константа h такава, че $\tau(t) - \sigma(t) \leq h$ при $t \in [t_0, T)$;
- (H2) функцията $f \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f(t, 0, 0) = 0$ и удовлетворява неравенството

$$|f(t, x, y)| \leq A(t)|x|^p + B(t)|y|^p \quad \text{при } x, y \in \mathbb{R},$$

където функциите $A, B \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ и p е положителна константа;

- (H3) функциите $I_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $I_i(0) = 0$ и са в сила неравенствата

$$|I_i(x)| \leq \beta_i |x|^p \quad \text{при } x \in \mathbb{R}, \quad \beta_i = \text{const} > 0, \quad i \in Z(0, \infty);$$

- (H4) за всяка точка $t_0 \in \mathbb{R}_+$ и всяка начална функция $\phi \in C([\tau(t_0) - h, t_0], \mathbb{R})$ началната задача (49)–(51) притежава решение $x(t; t_0, \phi) \in PC([\tau(t_0) - h, \infty), \mathbb{R})$.

Решението $x(t)$ на началната задача за нелинейното импулсно диференциално уравнение със “супремуми” (49) – (51) удовлетворява следното интегро-сумационно уравнение

$$x(t) = \phi(t_0) + \sum_{t_0 < t_i < t} I_i(x(t_i)) + \int_{t_0}^t f\left(s, x(s), \sup_{\xi \in [\sigma(s), \tau(s)]} x(\xi)\right) ds, \quad t \in [t_0, T]. \quad (52)$$

Ще въведем дефиниции за различни видове ограниченост и устойчивост на решенията на началната задача (49) – (51).

Дефиниция 4.3.1. Ще казваме, че решението $x(t; t_0, \phi)$ на началната задача за нелинейното импулсно диференциално уравнение със “супремуми” (49) – (51) е ограничено, ако за всяко число $\alpha > 0$ и всяко $t_0 \in \mathbb{R}_+$ съществува число $\beta = \beta(\alpha, t_0) > 0$ такава, че при $|\phi|_0 < \alpha$ е изпълнено $|x(t; t_0, \phi)| < \beta$ при $t \geq t_0$, където функцията $\phi \in C([\tau(t_0) - h, t_0], \mathbb{R})$.

Дефиниция 4.3.2. Ще казваме, че решението $x(t; t_0, \phi)$ на началната задача за нелинейното импулсно диференциално уравнение със “супремуми” (49) – (51) е равномерно ограничено, ако за всяко число $\alpha > 0$ съществува число $\beta = \beta(\alpha) > 0$ такава, че при $|\phi|_0 < \alpha$ е изпълнено $|x(t; t_0, \phi)| < \beta$ при $t \geq t_0$, където функцията $\phi \in C([\tau(t_0) - h, t_0], \mathbb{R})$.

Нека λ, Λ са дадени константи такива, че $0 < \lambda < \Lambda$.

Дефиниция 4.3.3. Ще казваме, че тривиалното решение на импулсното диференциално уравнение със “супремуми” (49), (50) е:

- практически устойчиво по отношение на (λ, Λ) , ако съществува $t_0 \in \mathbb{R}_+$ такава, че при $|\phi|_0 < \lambda$ е изпълнено $|x(t; t_0, \phi)| < \Lambda$ при $t \geq t_0$, където функцията $\phi \in C([\tau(t_0) - h, t_0], \mathbb{R})$;
- равномерно практически устойчиво по отношение на (λ, Λ) , ако за всяко $t_0 \in \mathbb{R}_+$ от неравенството $|\phi|_0 < \lambda$ следва, че $|x(t; t_0, \phi)| < \Lambda$ при $t \geq t_0$, където функцията $\phi \in C([\tau(t_0) - h, t_0], \mathbb{R})$.

Теорема 4.3.1. Нека са изпълнени следните условия.

1. Условия (H) са удовлетворени при $p = 1$.

2. За всяко $t_0 \in \mathbb{R}_+$ съществуват $\lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(t_0, t) = \eta_1(t_0)$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t_0, t) = \eta_2(t_0)$, където $\eta_1, \eta_2 \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, а $\Psi(t_0, t)$ и $\Phi(t_0, t)$ са дефинирани с равенствата

$$\Psi(t_0, t) = \prod_{t_0 < t_i < t} (1 + \beta_i), \quad (53)$$

$$\Phi(t_0, t) = \int_{t_0}^t [A(s) + B(s)] ds. \quad (54)$$

Тогава:

- (а) всяко решение на импулсното диференциално уравнение със “супремуми” (49), (50) е ограничено;
- (б) ако функциите $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ са ограничени, т. е. съществуват константи $\mu_1 > 0$ и $\mu_2 > 0$ такива, че $\eta_k(t) \leq \mu_k$, ($k = 1, 2$) при $t \in \mathbb{R}_+$, то всички решения на импулсното диференциално уравнение със “супремуми” (49), (50) са равномерно ограничени;
- (в) ако за дадените константи $0 < \lambda < \Lambda$ съществува $t_0 \in \mathbb{R}_+$ такава, че

$$\lambda \eta_1(t_0) \exp(\eta_2(t_0)) < \Lambda, \quad (55)$$

то тривиалното решение на импулсното диференциално уравнение със “супремуми” (49), (50) е практически устойчиво по отношение на (λ, Λ) ;

- (г) ако функциите $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ са ограничени, т. е. съществуват константи $\mu_1 > 0$ и $\mu_2 > 0$ такива, че $\eta_k(t) \leq \mu_k$, ($k = 1, 2$) при $t \in \mathbb{R}_+$ и

$$\lambda \mu_1 \exp(\mu_2) < \Lambda, \quad (56)$$

то тривиалното решение на импулсното диференциално уравнение със “супремуми” (49), (50) е равномерно практически устойчиво по отношение на (λ, Λ) .

Теорема 4.3.5. Нека са изпълнени следните условия.

1. Условия (H1) и (H4) са удовлетворени.

2. Функцията $f \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f(t, 0, 0) = 0$ и

$$|f(t, x, y)| \leq e^{-t} [|x|^p + |y|^p] \quad \text{при } x, y \in \mathbb{R}, \quad p \in (0, 1).$$

3. Функциите $I_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $I_i(0) = 0$ и

$$|I_i(x)| \leq \frac{1}{4i^2 - 1} |x|^p \quad \text{при } x \in \mathbb{R}, \quad i \in Z(t_0, T).$$

Тогава ако дадените константи $\lambda \in (0, 1)$ и $\Lambda > 0$ са такива, че

$$\frac{\pi}{2} [\lambda^{1-p} + 2(1-p)]^{\frac{1}{1-p}} < \Lambda,$$

то тривиалното решение на импулсното диференциално уравнение със “супремуми” (49), (50) е равномерно практически устойчиво по отношение на (λ, Λ) .

Ще илюстрираме получените в теорема 4.3.5 достатъчни условия върху конкретен пример.

Пример 5: Да разгледаме началната задача за скалярно импулсно диференциално уравнение със “супремуми”

$$\begin{aligned} x' &= e^{-t} \left(\sqrt{x} + \sqrt{\sup_{s \in [t-h, t]} x(s)} \right) && \text{при } t \geq t_0, \quad t \neq n, \\ x(n+0) - x(n-0) &= \frac{1}{4n^2 - 1} \sqrt{x(n-0)} && \text{при } n \in Z(t_0, \infty), \\ x(t) &= \varphi(t) && \text{при } t \in [t_0 - h, t_0], \end{aligned} \tag{57}$$

където $x(t) \in \mathbb{R}$, $h > 0$ е дадена константа и $\varphi \in C([t_0 - h, t_0], \mathbb{R}_+)$.

Условията на теорема 4.3.5 са изпълнени при $p = \frac{1}{2}$. Тогава съгласно теорема 4.3.5 тривиалното решение на импулсното диференциално уравнение със “супремуми” (57) е равномерно практически устойчиво по отношение на $(\frac{1}{4}, 4)$, тъй като при $\lambda = \frac{1}{4}$, $\Lambda = 4$ е изпълнено неравенството $\frac{\pi}{2} (\sqrt{\lambda} + 1)^2 < \Lambda$.

□

В §4.4 е предложен алгоритъм за приближено решаване на обобщена гранична задача за диференциални уравнения с “максимуми”. Резултатите от този параграф се публикуват за първи път в дисертационния труд.

Нека h е положителна константа, $0 < T < \infty$ е фиксирана точка, а $P(h, T)$ е множеството на всички функции $u : [-h, T] \rightarrow \mathbb{R}$, които са непрекъснати в интервала $[-h, T]$ и непрекъснато диференцируеми в интервала $[0, T]$.

Разглеждаме нелинейното диференциално уравнение с “максимуми”

$$x'(t) = f\left(t, x(t), \max_{s \in [t-h, t]} x(s)\right) \quad \text{при } t \in [0, T] \quad (58)$$

с гранично условие

$$g(x(0), x(T)) = 0, \quad (59)$$

и начално условие

$$x(t) = x(0), \quad \text{при } t \in [-h, 0], \quad (60)$$

където $x(t) \in \mathbb{R}$, $f : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Ще отбележим, че граничното условие (59) е в много общ вид и затова граничната задача (58) – (60) включва в себе си като частни случаи началната задача, периодичната задача, линейната гранична задача.

Дефиниция 4.4.1. *Ще казваме, че функцията $\alpha : [-h, T] \rightarrow \mathbb{R}$ е долно (горно) решение на задача (58) – (60), ако*

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &\leq (\geq) f\left(t, \alpha(t), \max_{s \in [t-h, t]} \alpha(s)\right) \quad \text{при } t \in [0, T], \\ g(\alpha(0), \alpha(T)) &\leq (\geq) 0, \quad \alpha(t) = \alpha(0) \quad \text{при } t \in [-h, 0]. \end{aligned} \quad (61)$$

За да илюстрираме приложението на долните решения, ще разгледаме следния пример.

Пример 6: Разглеждаме диференциалното уравнение с “максимуми”

$$x' = x(t) + \max_{s \in [t-1, t]} x(s) \quad \text{при } t \in [0, 2],$$

с гранично условие

$$x(0) = x^2(2),$$

и начално условие

$$x(t) = x(0) \quad \text{при } t \in [-1, 0].$$

Макар и линейна, тази задача не може да бъде решена в явен вид, но, например, лесно се намира долно решение $\alpha(t) = C$, където $C \geq 1$. Очевидно е, че дадената задача има безброй много долни решения.

□

Нека $\alpha, \beta : [-h, T] \rightarrow \mathbb{R}$ са дадени функции, които удовлетворяват неравенството $\alpha(t) \leq \beta(t)$ при $t \in [-h, T]$. Въвеждаме следните множества

$$W(\alpha, \beta) = [\alpha(0), \beta(0)] \times [\alpha(T), \beta(T)],$$

$$S(\alpha, \beta) = \left\{ u : [-h, T] \rightarrow \mathbb{R} : \alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t) \text{ при } t \in [-h, T] \right\},$$

$$\Omega(\alpha, \beta) = \left\{ (t, x, y) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \begin{array}{c} \alpha(t) \leq x \leq \beta(t) \\ \max_{s \in [t-h, t]} \alpha(s) \leq y \leq \max_{s \in [t-h, t]} \beta(s) \end{array} \right\}.$$

Дефиниция 4.4.2. Нека функциите $\alpha, \beta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ са такива, че $\alpha(t) \leq \beta(t)$ при $t \in [0, T]$. Ще казваме, че функцията $g(x, y) \in C(W(\alpha, \beta), \mathbb{R})$ е квази-нерастяща в $W(\alpha, \beta)$, ако за всяко $x \in [\alpha(0), \beta(0)]$ и $y_1, y_2 \in [\alpha(T), \beta(T)]$ такива, че $y_1 \leq y_2$, е изпълнено неравенството $g(x, y_1) \geq g(x, y_2)$.

Основният теоретичен резултат за получаване на приближено решение на обобщената гранична задача за нелинейно диференциално уравнение с “максимуми” (58)–(60) е формулиран в следната теорема.

Теорема 4.4.1. Нека са изпълнени следните условия.

1. Функциите $\alpha_0, \beta_0 \in P(h, T)$ са съответно долно и горно решение на задача (58)–(60) и $\alpha_0(t) \leq \beta_0(t)$ при $t \in [-h, T]$.
2. Функцията $g(u, v) \in C(W(\alpha_0, \beta_0), \mathbb{R})$ е квази-нерастяща в $W(\alpha_0, \beta_0)$ и съществува константа $\gamma > 0$ такава, че при $(u_1, v), (u_2, v) \in W(\alpha_0, \beta_0)$, $u_1 \leq u_2$, е изпълнено неравенството

$$g(u_1, v) - g(u_2, v) \leq \gamma(u_1 - u_2).$$

3. Функцията $f \in C(\Omega(\alpha_0, \beta_0), \mathbb{R})$ за всяко фиксирано $t \in [0, T]$ е непрекъсната по отношение на втория и третия си аргумент и при

$(t, x_1, y_1), (t, x_2, y_2) \in \Omega(\alpha_0, \beta_0)$, $x_1 \leq x_2$, $y_1 \leq y_2$, удовлетворява условието

$$f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2) \leq -M(t)[x_1 - x_2] - L(t)[y_1 - y_2],$$

където за функциите $M, L \in C([0, T], \mathbb{R}_+)$ е в сила неравенство

$$\max_{s \in [0, T]} [M(s) + L(s)]T \leq 1. \quad (62)$$

Тогава съществуват две редици $\{\alpha_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\beta_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ такива, че:

- (а) функциите $\alpha_n \in P(h, T)$ ($n = 1, 2, \dots$) са долни решения на (58) – (60);
- (б) функциите $\beta_n \in P(h, T)$ ($n = 1, 2, \dots$) са горни решения на (58) – (60);
- (в) редицата $\{\alpha_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ е монотонно ненамаляваща;
- (г) редицата $\{\beta_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ е монотонно нарастваща;
- (д) при $t \in [-h, T]$ са изпълнени неравенствата

$$\alpha_0(t) \leq \dots \leq \alpha_n(t) \leq \beta_n(t) \leq \dots \leq \beta_0(t); \quad (63)$$

- (е) двете редици са равномерно сходящи в интервала $[-h, T]$ и техните гранични функции $V(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(t)$ и $W(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n(t)$ са решения на обобщената гранична задача (58) – (60) в $S(\alpha_0, \beta_0)$;
- (ж) в случая, когато обобщената гранична задача (58) – (60) не притежава единствено решение, тогава функциите $V(t)$ и $W(t)$ са съответно минимално и максимално решение на обобщената гранична задача (58) – (60) в $S(\alpha_0, \beta_0)$.

Ще приложим обоснования в този параграф алгоритъм за решаване на конкретна гранична задача.

Пример 7: Разглеждаме нелинейното диференциално уравнение с “максимуми”

$$u' = \frac{1}{1 - u(t)} - 1.35 \max_{s \in [t-0.1, t]} u(s) - 1 \quad \text{при } t \in [0, 0.31], \quad (64)$$

с гранично условие

$$u(0) = 0.5 u(0.31), \quad (65)$$

и начално условие

$$u(t) = u(0) \quad \text{при } t \in [-0.1, 0]. \quad (66)$$

Началната задача (64) – (66) притежава нулево решение. Ще конструираме две редици съответно от долни и горни решения на обобщената гранична задача (64) – (66), които монотонно клонят към нулевото решение.

Функциите $\alpha_0(t) \equiv -0.25$ и $\beta_0(t) \equiv 0.25$ са долно и горно решение на задачата (64) – (66). Дясната страна на уравнението е $f(t, x, y) = \frac{1}{1-x} - 1.35y - 1$.

Нека $(t, x_1, x_2), (t, y_1, y_2) \in \{(t, x_1, x_2) \in [0, 0.31] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} : -0.25 \leq x_1, x_2 \leq 0.25\}$ и $x_i \leq y_i$ при $i = 1, 2$. Тогава получаваме, че

$$\begin{aligned} f(t, x_1, x_2) - f(t, y_1, y_2) &= \frac{1}{1-x_1} - \frac{1}{1-y_1} + 1.35[y_2 - x_2] \\ &\leq -M(t)(x_1 - y_1) - L(t)(x_2 - y_2), \end{aligned} \quad (67)$$

където $M(t) \equiv \frac{16}{9}$, $L(t) \equiv 1.35$ и $t \in [0, 0.31]$.

Също така е изпълнено (62). Следователно $f(t, x, y)$ удовлетворява условие 3 на теорема 4.4.1.

Функцията $g(u, v) = u - 0.5v$ е квази-нерастяща по отношение на v и константата $\gamma \equiv 1$ в условие 2 на теорема 4.4.1.

Ще приложим предложената процедура в теорема 4.4.1, за да получим две редици, които са монотонно сходящи към нулата.

A) Конструирание на растяща редица от долни решения $\{\alpha_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$

В общия случай $\alpha_n(t)$, $n \geq 1$, е решение на следната начална задача за линейно диференциално уравнение с “максимуми”

$$\begin{aligned} \alpha'_n(t) &= Q_n(t) - 1.8\alpha_n(t) - 1.35 \max_{s \in [t-0.1, t]} \alpha_n(s), & t \in [0, 0.31], \\ \alpha_n(t) &= 0.5\alpha_{n-1}(0.31), & t \in [-0.1, 0], \end{aligned} \quad (68)$$

където

$$Q_n(t) = \frac{1}{1 - \alpha_{n-1}(t)} - 1 + 1.8 \alpha_{n-1}(t). \quad (69)$$

Съгласно лема 4.4.1 началната задача (68) притежава единствено решение $\alpha_n(t)$.

Б) Конструирание на намаляваща редица от горни решения $\{\beta_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$

В общия случай $\beta_n(t)$, $n \geq 1$, е решение на следната начална задача за линейно диференциално уравнение с “максимуми”

$$\begin{aligned} \beta'_n(t) &= P_n(t) - 1.8 \beta_n(t) - 1.35 \max_{s \in [t-0.1, t]} \beta_n(s), & t \in [0, 0.31], \\ \beta_n(t) &= 0.5 \beta_{n-1}(0.31), & t \in [-0.1, 0], \end{aligned} \quad (70)$$

където

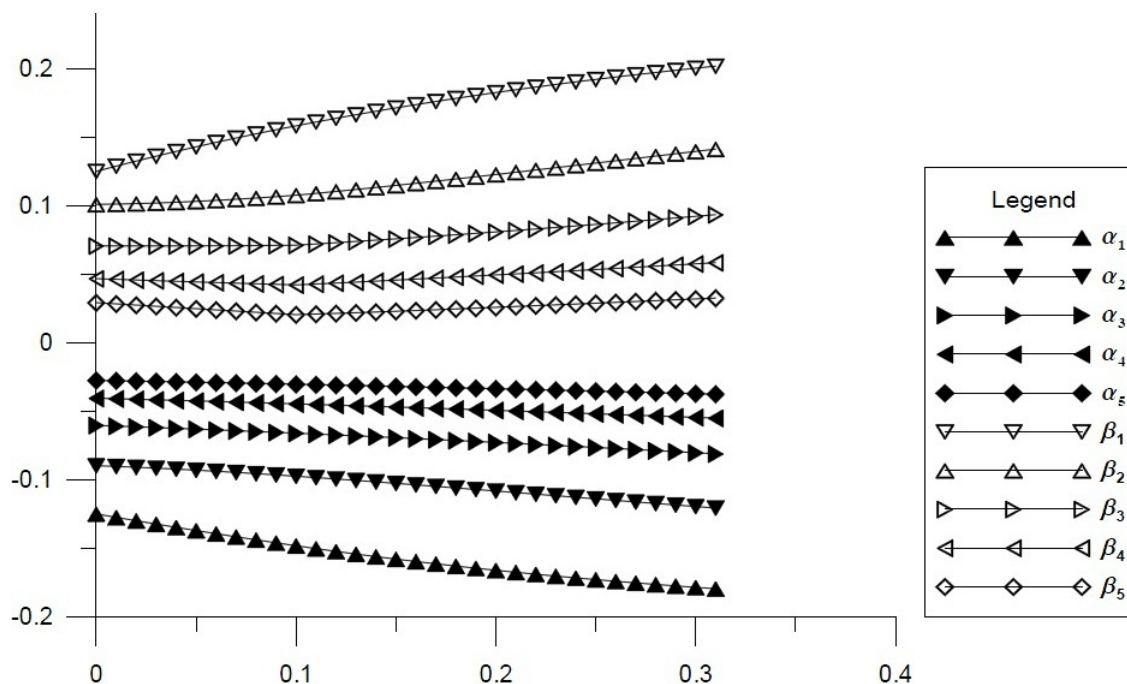
$$P_n(t) = \frac{1}{1 - \beta_{n-1}(t)} - 1 + 1.8 \beta_{n-1}(t). \quad (71)$$

Съгласно лема 4.4.1 началната задача (70) притежава единствено решение $\beta_n(t)$.

С помощта на компютърна реализация на схемата за решаване на начална задача за скалярно линейно диференциално уравнение с “максимуми”, която е предложена в теорема 4.4.1, са решени началните задачи (68) и (70). Получените стойности са представени в табличен и графичен вид.

t	0	0.01	0.02	0.03	...	0.30	0.31
$\beta_1(t)$	0.1250000	0.1288082	0.1324992	0.1360765	...	0.2002799	0.2017699
$\beta_2(t)$	0.1008850	0.1011120	0.1014502	0.1018942	...	0.1395417	0.1412406
$\beta_3(t)$	0.0706203	0.0705963	0.0705811	0.0705779	...	0.0921777	0.0934045
$\beta_4(t)$	0.0467023	0.0462039	0.0457137	0.0452319	...	0.0575085	0.0583688
$\beta_5(t)$	0.0291844	0.0282989	0.0274149	0.0265326	...	0.0318953	0.0325328
$\alpha_5(t)$	-0.0275353	-0.0277878	-0.028046	-0.0283101	...	-0.0371705	-0.0375443
$\alpha_4(t)$	-0.0405604	-0.0409374	-0.0413221	-0.0417143	...	-0.0545330	-0.0550706
$\alpha_3(t)$	-0.0603444	-0.0608797	-0.0614206	-0.0619683	...	-0.0803353	-0.0811208
$\alpha_2(t)$	-0.0897958	-0.0903481	-0.0909539	-0.0916112	...	-0.1195915	-0.1206888
$\alpha_1(t)$	-0.1250000	-0.1275123	-0.1299804	-0.1324050	...	-0.1785840	-0.1795917

Таблица 3. Стойности на долните/горните приближения $\{\alpha_n(t)\}$ и $\{\beta_n(t)\}$ в интервала $[0, 0.31]$, където $n = 1, 2, 3, 4, 5$.



Фигура 2. Графика на долните/горните приближения $\{\alpha_n(t)\}$ и $\{\beta_n(t)\}$ в интервала $[0, 0.31]$, където $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

От таблицата и от графиката се вижда, че редицата от долни решения е редица от отрицателни функции, която е монотонно растяща. Редицата от горни решения е редица от положителни функции, която е монотонно намаляваща. Двете редици се приближават все повече и повече към нулата, което практически показва твърдението на теорема 4.4.1 и ефективността на предложения в нея алгоритъм.

□

✿ Авторска справка за приносите ✿

В дисертационния труд има основно научни резултати в теорията на диференциалните уравнения. Те могат да се обединят в две основни групи.

А. Разширяване на математическият апарат на интегрални и диференциални неравенства чрез:

- А1.** обобщаване на класове линейни и нелинейни интегрални неравенства за непрекъснати скаларни функции на един аргумент, необходими при изследване на качествени свойства на решенията на диференциални уравнения с “максимуми”;
- А2.** въвеждане на нови линейни и нелинейни обобщения на класическото неравенството на Гронуол-Белман и на Бихари за непрекъснати скаларни функции на два аргумента, необходими при изследване на качествени свойства на решенията на частни диференциални уравнения с “максимуми”;
- А3.** решаване на нови линейни и нелинейни интегрални неравенства за частично непрекъснати скаларни функции на един аргумент, необходими при изследване на качествени свойства на решенията на импулсни диференциални уравнения със “супремуми”;
- А4.** решаване на линейни диференциални неравенства за непрекъснати скаларни функции на един аргумент, необходими при обосноваването на приближен асимптотичен метод за решаване на диференциални уравнения с “максимуми”.

Б. Допълване теорията на диференциалните уравнения чрез:

- Б1.** изследване на някои качествени свойства на решенията на диференциални уравнения с “максимуми” и на частни диференциални уравнения с “максимуми”, като са получени достатъчни условия за единственост, ограниченост и непрекъснатата зависимост от началните условия на техните решения;

- Б2. разширяване на понятието практическа устойчивост върху импулсните диференциални уравнения със “супремуми” и получаване на достатъчни условия за този вид устойчивост;
- Б3. обосноваване на приближен асимптотичен метод за решаване на нелинейна гранична задача за диференциални уравнения с “максимуми”.

Ще подчертаем, че резултатите от група Б) са получени благодарение на разширения математически апарат, отбелязан в група А).

Връзките между приносите, целите, задачите, мястото на описание в дисертационния труд и направените публикации са представени в табличен вид:

Приноси	Цели	Задачи	Параграфи	Публикации
A1	1)	I	2.1, 3.1	[1], [2]
A2	1)	I	2.2, 3.2	[3], [5]
A3	1)	I	2.4, 3.3	[4]
A4	1)	II	2.3	
Б1	2)	III	4.1, 4.2	[1], [2], [3]
Б2	2)	III	4.3	[4]
Б3	2)	IV	4.4	

Таблица 4. Връзки между приноси, цели, задачи, параграфи и публикации

❁ Перспективи за развитие ❁

Един ефективен и успешно прилаган математически апарат при качествено изследване и приближеното решаване на различни типове диференциални уравнения са т. н. интегрални и диференциални неравенства. Във връзка с цялостното изграждане на този апарат, необходим за изследването на различни типове диференциални уравнения с “максимуми”, се предвижда изследванията в тази област да продължат, като се планира решаване на:

- ❧ неравенства, съдържащи както неизвестната непрекъснатата функция на един аргумент, така и нейния максимум върху отминал интервал с променлива дължина;
- ❧ неравенства, съдържащи както неизвестната непрекъснатата функция на два аргумента, така и нейния максимум по едната променлива върху отминал интервал с променлива дължина;
- ❧ нелинейни неравенства, съдържащи както неизвестната частично непрекъснатата функция на един аргумент, така и нейния супремум върху отминал интервал с променлива дължина.

Ще бъде продължено използването както на новите, така и на резултатите от дисертационния труд за качествено изследване на различни свойства на решенията на диференциални уравнения, съдържащи максималната стойност на неизвестната функция върху отминал интервал с променлива дължина. По-специално, ще бъдат получени достатъчни условия за ограниченост и устойчивост на решенията на различни видове:

- ❧ диференциални уравнения с “максимуми”;
- ❧ частни диференциални уравнения с “максимуми”;
- ❧ импулсни диференциални уравнения със “супремуми”.

Предвижда се създаването на ефективни и практически лесно използвани алгоритми за приближено решаване на диференциални уравнения с “максимуми”. Тези алгоритми ще бъдат използвани за решаване на реални модели в науката (физиката, биологията, екологията), техниката (инженерни задачи) и икономиката.

☪ Аprobация на резултатите ☪

A) Доклади на международни и национални конференции

∞ международни конференции

- 2010 S. HRISTOVA, K. STEFANOVA, Some nonlinear integral inequalities with maximum of the unknown function, Analysis, topology and applications, Vrnjčka Banja, June 20–25, Sarbia
- 2010 K. STEFANOVA, Nonlinear integral inequalities of Bihari type in the theory of differential equations with “maxima”, MATTEX, University of Shumen, Shumen, November 19–21, Bulgaria
- 2011 S. HRISTOVA, K. STEFANOVA, Practical stability for impulsive differential equations with “supremum” by integral inequalities, International Conference on Applied Analysis and Algebra, Istanbul, 29 June – 2 July, Turkey
- 2011 STEFANOVA K., Nonlinear generalization of Bihari inequality in the theory of partial differential equations with “maxima”, NAV-MAR-EDU International Scientific Conference, Constanta, November 11-13, Romania
- 2012 S. HRISTOVA, K. STEFANOVA, Monotone-iterative method for a mixed nonlinear boundary value problem for differential equations with “maxima”, 38th International Conference on Applications of Mathematics in Engineering and Economics, Sozopol, June 8–13, Bulgaria

∞ национални конференции

- 2011 K. STEFANOVA, Integral inequalities and applications to partial differential equations with “maxima”, XXXX Jubilee Spring Conference of the UBM, Borovetz, April 5–9, Bulgaria

∞ катедрени семинари и колоквиуми

2012 STEFANOVA K., Qualitative investigations and approximate methods for differential equations with maxima,
Едночасов доклад по покана в
Department of Mathematics, Faculty of Science,
Gebze Institute of Technology, June 22, Turkey

Б) Участие в научни проекти

- ∞ Научен проект НИ11-ФМИ-004 към НПД на ПУ на тема: “Разработка и приложение на иновативни ИКТ за провеждане на качествени конкурентноспособни научни изследвания и цялостно осъвременяване процеса на обучение във ФМИ”, 2011–2012.
- ∞ Научен проект МУ11-ФМИ-005 към НПД на ПУ на тема: “Приложение на ИТ при моделиране с някои специални видове диференциални уравнения”, 2011–2012.

☪ Публикации по дисертационния труд ☪

∞ публикации в списания с импакт фактор

- [1] (**Impact Factor: 0.634**) HRISTOVA S., STEFANOVA K., Linear integral inequalities involving maxima of the unknown scalar functions, *Funkcialaj Ekvacioj*, Vol. 53, (2010), 381–394, ISSN: 0532–8721, (MR2761089).
- [2] (**Impact Factor: 0.555**) BOHNER M., HRISTOVA M., STEFANOVA K., Nonlinear integral inequalities involving maxima of the unknown scalar functions, *Math. Ineq. and Appl.*, Vol. 12, No. 4, (2012), 811–825, ISSN: 1331–4343–1569.

∞ публикации в рецензирани списания

- [3] HRISTOVA S., STEFANOVA K., Two-dimensional integral inequalities and applications to partial differential equations with “maxima”, *IeJPAM*, Vol. 1, No. 1, (2010), 11–28, ISSN: 1314–0744.
- [4] HRISTOVA S., STEFANOVA K., Practical stability of impulsive differential equations with “supremum” by integral inequalities, *EJPAM*, Vol. 5, No. 1, (2012), 30–44, ISSN: 1307–5543.

∞ публикации в сборници на международни конференции

- [5] STEFANOVA K., Nonlinear generalization of Bihari inequality in the theory of partial differential equations with “maxima”, The 22nd Edition of the NAV-MAR-EDU International Scientific Conference, (2011), 135–140, ISSN: 1843–6749.

☼ Декларация за оригиналност и достоверност ☼ на дисертационния труд

Във връзка с провеждането на процедура за придобиване на образователната и научна степен “доктор” в Пловдивския университет “Паисий Хилендарски” и защита на представения от мен дисертационен труд на тема “Качествени методи за някои специални видове диференциални уравнения”, декларирам, че:

1. Резултатите и сведенията от увода са предварителни и се основават на различни литературни източници, които са надлежно посочени.
2. Резултатите в §2.1, §2.2, §2.4, §3.1, §3.2, §3.3, §4.1, §4.2 и §4.3 са публикувани съответно в 5 научни статии. Във всяка една от тях участва като съавтор К. Стефанова. Списъкът на тези публикации е даден отделно. Тези статии са приложени и в библиографията.
3. Резултатите в параграфи §2.3 и §4.4 са нови и се публикуват за първи път в дисертационния труд.

10.07.2012 г.

гр. Пловдив

Д Е К Л А Р А Т О Р :

/Кремена Василева Стефанова/

Библиография

- [1] МАРКОВ С., *Математическо моделиране*, Наука и изкуство, София, (1977).
- [2] АНГЕЛОВ В., БАЙНОВ Д., Существование и единственность глобального решения для решения некоторых интегральных-функциональных уравнений, *Сибирский математический журнал*, 22, (2), (1981), 31–37.
- [3] БАЙНОВ Д., КОНСТАНТИНОВ М., Исследования по фундаментальной теории и теории устойчивости дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом в Болгарии. В кн. *“Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом”*, “Наукова думка”, Киев, (1977), 34–42, Zbl 363.34048, MR0473398.
- [4] КОНСТАНТИНОВ М., Об одном интегральном неравенстве, *Arch. Math.*, 12, No. 2, (1976), 81–85, Zbl 313.34016, MR0454121.
- [5] КОНСТАНТИНОВ М., Об абсолютной устойчивости линейных систем с запаздыванием, В сб. *“Качественное исследование дифференциально-функциональных уравнений”*, “Наукова думка”, Киев, (1980), 55–59, Zbl 474.34063, MR0612652.
- [6] КОНСТАНТИНОВ М., Об оценке и устойчивости решений дифференциальных уравнений с запаздыванием в банаховом пространстве, *Arch. Math.*, 13, (1977), No. 4, 187–190, Zbl 405.34063, MR0466875.
- [7] КОНСТАНТИНОВ М., БАЙНОВ Д., Об устойчивости периодических колебаний квазилинейных систем нейтрального типа, *Теоретична и прил. Механика*, 3, (1972), 2, 45–55, Zbl 268.34080, MR0398559.
- [8] КОНСТАНТИНОВ М., БАЙНОВ Д., Абсолютная экспоненциальная устойчивость нелинейных систем дифференциальных уравнений с несколькими запаздываниями, *Известия ВУЗов - математика* 6, (205), (1979), 28–32, Zbl 415.34060, MR0556591.
- [9] КОНСТАНТИНОВ М., ПАТАРИНСКИ С., ПЕТКОВ П., ХРИСТОВ Н. Абсолютная устойчивость и стабилизация дифференциальных систем с запаздыванием, В сб. *“Системы автом. управления”* (ВИНИТИ), (1980), 17, 1–8.
- [10] ПОПОВ Е., *Автоматическое регулирование и контроль*, Москва, (1966).

- [11] AGARWAL R., DENG S., ZHANG W., Generalization of a retarded Gronwall-like inequality and its applications, *Appl. Math. Comput.*, **165**, No. 3, (2005), 599–612.
- [12] ANGELOV V., BAINOV D., On the functional differential equations with “maximums”, *Appl. Anal.*, **16**, (1983), 187–194.
- [13] BAINOV D., DISHLIEV A., Uniform stability with respect to the impulse hypersurfaces of the solutions of differential equations with impulses, *Internat. J. Systems Sci.*, 21, (1990), 2637–2643.
- [14] BAINOV D., DISHLIEV A., STAMOVA I., Lipschitz quasistability of impulsive differential-difference equations with variable impulsive perturbations, *Jour. of Comp. and Appl. Math.*, Vol. 70, Iss. 2, (1996), 267–277.
- [15] BAINOV D., DISHLIEV A., Uniform stability with respect to the impulsive hypersurfaces of the solutions of differential equations with impulses, *Jour. of Math. Anal. And Appl.*, Vol. 172, Iss. 2, (1993), 452–462.
- [16] BAINOV D., HRISTOVA S., Monotone-iterative techniques of Lakshmikantham for a boundary value problem for systems of differential equations with “maxima”, *J. Math. Anal. Appl.*, 190, No. 2, (1995), 391–401.
- [17] BAINOV D., HRISTOVA S., Practical stability in terms of two measures for impulsive differential equations with “supremum”, *Commun. Appl. Anal.*, **15**, No. 1, (2011), 69–88.
- [18] BAINOV D., HRISTOVA S., *Differential equations with maxima*, Chapman and Hall/CRC, USA, (2011).
- [19] BAINOV D., KONSTANTINOV M., Research problems in the theory of differential and integral equations, *Math. Analysis*, 79, (1985), 43–49, MR0865817.
- [20] BAINOV D., PETROV V., PROYTCHIEVA V., Asymptotic behavior of second order neutral differential equations with “maxima”, *Tamkang J. Math.*, **26**, No. 3, (1995), 267–275.
- [21] BAINOV D., PETROV V., PROYTCHIEVA V., Existence and asymptotic behaviour of nonoscillatory solutions of second-order neutral differential equations with “maxima”, *J. Comput. Appl. Math.*, **83**, No. 2, (1997), 237–249.
- [22] BAINOV D., SIMEONOV P., *Integral inequalities and applications*, Kluwer, (1989).
- [23] BAINOV D., ZAHARIEV A., Oscillating and asymptotic properties of a class of functional-differential equations with maxima, *Czechoslovak Math. J.*, **34** (109), No. 2, (1984), 247–251.
- [24] BARBU V., Differential equations, *Junimea Publ. House, Iasi*, (1985).

- [25] BIHARI I., A generalization of a lemma of Bellman and its applications to uniqueness problems of differential equations, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **7**, (1956), 81–94.
- [26] BOHNER M., HRISTOVA M., STEFANOVA K., Nonlinear integral inequalities involving maxima of the unknown scalar functions, *Math. Ineq. and Appl.*, Vol. 12, No. 4, (2012), 811–825, ISSN: 1331–4343–1569.
- [27] CABALLERO J., LOPEZ B., SADARANGAN K., On monotonic solutions of an integral equation of Volterra type with supremum, *J. Math. Anal. Appl.*, 305, (1), (2005), 304–315.
- [28] CAI J., Periodic boundary value problems for differential equations with “supremum”, *Ann. Differential Equations* 19, (2), (2003), 127–135.
- [29] CHEN C., CHEUNG W., ZHAO D., Gronwall-Bellman-type integral inequalities and applications to BVPs, *JIA*, Vol. 2009, Art.ID 258569, 15 p., doi:10.1155/2009/258569.
- [30] CHEUNG W., Some new nonlinear inequalities and applications to boundary value problems, *Nonlinear Analysis*, **64**, (2006), 2112–2128.
- [31] CHEUNG W., MA Q., Nonlinear retarded integral inequalities for functions in two variables, *J. Concr. Appl. Math.*, 2, (2004), 119–134.
- [32] CHO Y., KIM Y., PECARIC J., New Gronwall-Ou-Iang type integral inequalities and their applications, *ANZIAM J.*, **50**, No. 1, (2008), 111–127.
- [33] DE COSTER C., HABETS P., *Two-point boundary value problems: lower and upper solutions*, Elsevier Science Pub., Amsterdam, The Netherlands, (2006).
- [34] DENCHE M., KHELLAF H., Integral inequalities similar to Gronwall inequality, *Electr. Jour. of Diff. Equat.*, Vol. 2007, No. 176, (2007), 1–14.
- [35] DISHLIEV A., ANGELOVA J., Continuous dependence and uniform stability of solutions of impulsive differential equations on impulsive moments, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, Vol. 28, Iss. 5, (1997), 825–835.
- [36] DISHLIEV A., BAINOV D., Uniform stability with respect to the impulsive perturbations of the solutions of impulsive differential equations with, *Int. Jour. of Theor. Phys.*, Vol. 31, No. 2, (1992), 363–372.
- [37] DISHLIEV A., DISHLIEVA K., Continuous dependence and stability of solutions of impulsive differential equations on the initial conditions and impulsive moments, *Int. J. Pure Appl. Math.*, 70, No. 1, (2011), 39–64, Zbl 1228.34027
- [38] DISHLIEV A., DISHLIEVA K., Orbital Hausdorff continuous dependence of the solutions of impulsive differential equations with respect to impulsive perturbations, *Int. J. Pure Appl. Math.*, 70, No. 2, 167–187, (2011), Zbl 1229.34020.

- [39] DRAGOMIR S., *Some Gronwall type inequalities and applications*, Nova Science Pub Inc, (2003).
- [40] DRAGOMIR S., KIM Y., On certain new integral inequalities and their applications, *JIPAM*, Vol. 3, Iss. 4, Art. 65, (2002).
- [41] DRAGOMIR S., KIM Y., Some integral inequalities for functions of two variables, *Electr. Jour. of Diff. Equat.*, Vol. 2003, No. 10, (2003), 1–13.
- [42] EL-OWAIDY H., RAGAB A., ABDELDAIM A., On some new integral inequalities of Gronwall-Bellman type, *Appl. Math. Comp.*, 106, (1999), 289–303.
- [43] FERREIRA R., TORRES D., Retarded integral inequalities of Gronwall-Bihari type, [math.CA] (2008), arXiv:0806.4709v1.
- [44] GALLO A., PICCIRILLO A., About new analogies of Gronwall–Bellman–Bihari type inequalities for discontinuous functions and estimated solutions for impulsive differential systems, *Nonlinear Analysis*, **67**, (2007), 1550–1559.
- [45] GEORGIEV L., ANGELOV V., On the existence and uniqueness of solutions for maximum equations, *Glasnik Matematiki*, 37, (2), (2002), 275–281.
- [46] GOLEV A., HRISTOVA S., RAHNEV A., An algorithm for approximate solving of differential equations with maxima, *Comput. Math. Appl.* 60, (2010), 2771–2778.
- [47] GOPALSAMY K., *Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics*, Dordrecht: Kluwer, (1992).
- [48] GRAMMATIKOPOULOS M., TERSIAN S., On the periodic solutions of nonlinear neutral delay differential equations, *Dynamic Systems and Applications*, Vol.6, No. 2, (1997), 197–206.
- [49] GROSSINHO M., SANCHEZ L., TERSIAN S., On the solvability of a boundary value problem for a fourth-order ordinary differential equation, *Applied Mathematics Letters*, 18, (2005), 439–444.
- [50] GROSSINHO M., TERSIAN S., Critical point theory for locally Lipschitz functionals and applications to fourth order problems, *Proceedings of XXVIII-th Spring Conference of U.B.M.*, Sofia, (1999), 99–106.
- [51] GROSSINHO M., TERSIAN S., An introduction to minimax theorems and their applications to differential equations, Kluwer, (2001).
- [52] GYULOV T., TERSIAN S., Existence of trivial and nontrivial solutions of fourth-order ordinary differential equation, *Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences*, Vol. 57, No. 7, (2004), 23–28.
- [53] HALANAY A., *Differential equations, stability, oscillations, time lags*, Academic Press, New York and London, (1966).

- [54] HADELER K., *Delay equations in biology*, New York: Springer, (1979).
- [55] HALE J., *Theory of functional differential equations*, New York: Second edn. Springer-Verlag, (1977).
- [56] HENDERSON J., HRISTOVA S., Nonlinear integral inequalities involving maxima of unknown scalar functions, *Math. Comput. Model.*, Vol. 53, 5–6, (2011), 871–882.
- [57] HRISTOVA S., *Qualitative investigations and approximate methods for impulsive equations*, Nova Science Publ., New York, (2009).
- [58] HRISTOVA S., Boundedness of the solutions of impulsive differential equations with “supremum”, *Math. Balkanica*, N.S. 14, (1-2), (2000), 177–189.
- [59] HRISTOVA S., Practical stability and cone valued Lyapunov functions for differential equations with “maxima”, *Intern. J. Pure Appl. Math.* 57, (3), (2009), 313–324.
- [60] HRISTOVA S., Lipschitz stability for impulsive differential equations with “supremum”, *Inter. Elect. J. Pure Appl. Math.*, 1, No. 4, (2010), 345–358.
- [61] HRISTOVA S., BAINOV D., Monotone-iterative techniques of V. Lakshmikantham for a boundary value problem for systems of impulsive differential equations with “supremum”, *J. Math. Anal. Appl.* 172 (2), (1993), 339–352.
- [62] HRISTOVA S., GLUHICHEVA S., Lipschitz stability in terms of two measures for differential equations with “maxima”, *Intern. Electr. J. Pure Appl. Math.*, 2, (2), (2010), 1–12.
- [63] HRISTOVA S., MARKOVA N., Eventual stability for impulsive differential equations with “supremum”, *Intern. Electr. J. Pure Appl. Math.*, 2, (2), (2010), 21–46.
- [64] HRISTOVA S., ROBERTS L., Boundedness of the solutions of differential equations with “maxima”, *Int. J. Appl. Math.*, 4, No. 2, (2000), 231–240.
- [65] HRISTOVA S., STEFANOVA K., Linear integral inequalities involving maxima of the unknown scalar functions, *Funkcialaj Ekvacioj*, Vol. 53, 2010, 381–394, ISSN: 0532–8721, (MR2761089), Zbl 1225.26034.
- [66] HRISTOVA S., STEFANOVA K., Two-dimensional integral inequalities and applications to partial differential equations with “maxima”, *IeJPAM*, Vol. 1, No. 1, 2010, 11–28, ISSN: 1314–0744.
- [67] HRISTOVA S., STEFANOVA K., Practical stability of impulsive differential equations with “supremum” by integral inequalities, *EJPAM*, Vol. 5, No. 1, 2012, 30–44, ISSN: 1307–5543.
- [68] JANKOWSKI T., Systems of differential equations with maxima, *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Prirodozn. Tekh. Nauki*, 8, (1997), 57–60.

- [69] JIANG F., MENG F., Explicit bounds on some new nonlinear integral inequalities with delay, *J. Comput. Appl. Math.*, 205, (1), (2007), 479–486.
- [70] KIM Y., On some new integral inequalities for functions in one and two variables, *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 21, (2), (2005), 423–434.
- [71] KIM Y., Explicit bounds on some nonlinear integral inequalities, *JIPAM*, Vol. 7, Iss. 2, Art. 48, (2006).
- [72] KIM Y., Gronwall, Bellman and Pachpatte type integral inequalities with applications, *Nonlinear Analysis*, 71, (2009), e2641–e2656.
- [73] KONSTANTINOV M., BAINOV D., Stability and approximate solution of regularly perturbed boundary value problems for differential delayed equations, Qualitative Theory of Differential Equations, *Colloquia Math. Soc. J. Bolyai*, 30, Szeged, (1979), 591–613, North-Holland, Amsterdam, (1981), Zbl 516.34018, MR0680610.
- [74] KONSTANTINOV M., PETKOV P., PATARINSKI S., CHRISTOV N., Absolute stability and stabilization of differential delayed systems, *Arch. Autom. Telemekh.*, 24, (1979), 339–350, Zbl 418.93060.
- [75] KONSTANTINOV M., PETKOV P., PATARINSKI S., CHRISTOV N., Stabilization of linear systems via the Ljapunov’s direct method, *Arch. Autom. Telemekh.*, 25, (1980), 315–318, Zbl 461.93050, MR0616163.
- [76] KOSTOVA T., MARKOV S., VASILEVSKI P., A dynamical model of short-term memory, *Ann. Univ. de Sofia, Math. Fac.*, 73, (1979), 129–154.
- [77] LADDE G., LAKSHMIKANTHAM V., VATSALA, A., *Monotone iterative techniques for nonlinear differential equations*, Belmonth: Pitman, 1985.
- [78] LAKSHMIKANTHAM V., BAINOV D., SIMEONOV P., *Theory of impulsive differential equations*, Vol. 6 of *Series in Modern Applied Mathematics*, World Scientific, Singapore, (1989).
- [79] LAKSHMIKANTHAM V., LEELA S., *Differential and integral inequalities*, New York, Vol. 1, Academic Press, (1969).
- [80] LAKSHMIKANTHAM V., LEELA S., MARTYNYUK A., *Practical stability of non-linear systems*, World Scientific, (1990).
- [81] LI W., HAN M. AND F. MENG, Some new delay integral inequalities and their applications, *J. Comput. Appl. Math.*, **180**, (2005), 191–200.
- [82] LIPOVAN O., A retarded Gronwall-like inequality and its applications, *J. Math. Anal. Appl.*, 252, (2000), 389–401.
- [83] LIPOVAN O., A retarded integral inequality and its applications, *J. Math. Anal. Appl.*, 285, (2), (2003), 436–443.

- [84] LIU X., Stability results for impulsive differential systems with applications to population growth models, *Dynam. Stability Systems*, Vol. 9, (1994), 163–174.
- [85] LIU S., LEU S., ZHONG S., YE M., Advanced Gronwall-Bellman-type integral inequalities and their applications, *Intern. Jour. of Comput. and Math. Sc.*, 3, 2, (2009).
- [86] MA Q., DEBNATH L., A more generalized Gronwall-like integral inequality with applications, *IJMMS*, 15, (2003), 927–93.
- [87] MA Q., PECARIC J., On certain new nonlinear retarded integral inequalities for functions in two variables and their applications, *J. Korean Math. Soc.*, **45**, No. 1, (2008), 121–136.
- [88] MA Q., PECARIC J., Some new nonlinear retarded integral inequalities and their applications, *Math. Inequal. Appl.*, 9, (2006), 617–632.
- [89] MA Q., YANG E., Some new Gronwall–Bellman–Bihari type integral inequalities with delay, *Period. Math. Hungar.*, 44, (2002), 225–238.
- [90] MARKOV S., KOSTOVA-VASILEVSKA T., A dynamical model of synaptic transmission, *Dynamical Systems and Environmental Models* (Ed. H. Bothe, W. Eberling, A. Kurzhanski, M. Peschel), Akademie-Verlag Berlin, (1987), 182–185.
- [91] MULDOWNNEY J., WONG J., Bounds for solutions of nonlinear integro-differential equations, *J. Math. Anal. Appl.*, **23**, (1968), 487–499.
- [92] NKASHAMA M., A generalized upper and lower solutions method and multiplicity results for nonlinear first-order ordinary differential equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 140, No. 2, (1989), 381–395.
- [93] OGUNTUASE J., On an inequality of Gronwall, *JIPAM*, Vol. 2, Iss. 1, Art. 9, (2001).
- [94] OGUNTUASE J., Gronwall-Bellman type integral inequalities for multi-distributions, *Facta Univ. (Nish), Ser. Math. Inform.*, 16, (2001), 25–33.
- [95] OTROCOL D., IOAN R., Functional-differential equations with “maxima” via weakly picard operators theory, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie*, 51, (3), (2008), 253–261.
- [96] OTROCOL D., IOAN R., Functional-differential equations with maxima of mixed type, *Fixed Point Theory*, 9, (1), (2008), 207–220.
- [97] PACHPATTE B., *Inequalities for differential and integral equations*, Academic Press, New York, (1998).
- [98] PACHPATTE B., On some new inequalities related to a certain inequality arising in the theory of differential equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 251, (2000), 736–751.

- [99] PACHPATTE B., Explicit bounds on certain integral inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, 267, (2002), 48–61.
- [100] PACHPATTE B., Explicit bound on a retarded integral inequality, *Math. Inequal. Appl.*, 7, (2004), 7–11.
- [101] PACHPATTE B., On a certain retarded integral inequality and its applications, *JIPAM*, 5, (2004), Art. 19.
- [102] PACHPATTE B., *Integral and finite difference inequalities and applications*, North-Holland Mathematics Studies, Vol. 205, (2006).
- [103] PACHPATTE B., Existence and uniqueness theorems on certain difference-differential equations, *Electr. Jour. of Diff. Equat.*, Vol. 2009, No. 49, (2009), 1–12, ISSN: 1072–6691.
- [104] PINTO M., Integral inequalities of Bihari-type and applications, *Funkc. Ekvacioj*, 33, (1990), 387–403.
- [105] SNOW D., Gronwall’s inequality for systems of partial differential equations in two independent variables, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **33**, No. 1. (1972), 46–54.
- [106] STEFANOVA K., Nonlinear generalization of Bihari inequality in the theory of partial differential equations with “maxima”, The 22nd Edition of the NAV-MAR-EDU International Scientific Conference, Constanta, November 11–13, 2011, 135–140, ISSN 1843–6749.
- [107] SUN Y., On retarded integral inequalities and their applications, *J. Math. Anal. Appl.*, 301, (2005), 265–275.
- [108] TERSIAN S., On biochemical oscillations described by a system of differential equations, *Proceedings of XVIII-th Spring Conference of U.B.M.*, Sofia, (1990), 213–219.
- [109] VENKOV L., MARKOV S., Dynamical model of the cholinergic synapse transmission, *Cell. Mol. Biol.*, 26, (1980), 541–546.
- [110] WALTER W., *Differential and integral inequalities*, New York, Berlin: Springer-Verlag, (1970).
- [111] WANG W., A generalized retarded Gronwall-like inequality in two variables and applications to BVP, *Appl. Math. Comput.*, **191**, (2007), 144–154.
- [112] WANG W., SHEN C., On a generalized retarded integral inequality with two variables, *J. Ineq. Appl.*, (2008), Art. ID 518646.
- [113] XU H., LIZ E., Boundary value problems for differential equations with maxima, *Nonlinear Stud.* 3, (2), (1996), 231–241.

- [114] XU R., SUN Y., On retarded integral inequalities in two independent variables and their applications, *Appl. Math. Comput.*, 182, (2), (2006), 1260–1266.
- [115] YUAN Z., YUAN X., ZHANG H., MENG F., Some new delay integral inequalities and their applications, *Appl. Math. and Comp.*, 208, (2009), 231–237.
- [116] ZHANG W., DENG S., Projected Gronwall-Belman’s inequality for integrable functions, *Math. Comput. Modeling*, **34**, (2001), No. 3, 393–402.
- [117] ZHANG H., MENG F., Integral inequalities in two independent variables for retarded Volterra equations, *Applied Mathematics and Computation*, 199, (2008), 90–98.
- [118] ZHANG B., ZHANG G., Qualitative properties of functional-differential equations with “maxima”, *Rocky Mountain J. Math.*, 29, (1), (1999), 357–367.
- [119] ZHAO P., MENG F., ZHAO Y., A generalization of a retarded inequality and its applications, *Ann. Differential Equations*, 22, (1), (2006), 113–118.
- [120] ZNENG K., Some retarded nonlinear integral inequalities in two variables and applications, *JIPAM*, Vol. 9, Iss. 2, Art. 57, (2008), 11 pp.
- [121] ZHENG B., FENG, B., Some new nonlinear integral inequalities and their applications in the qualitative analysis of differential equations, *Jour. Ineq. Appl.*, 20, (2011), doi:10.1186/1029-242X-2011-20.