Пловдивски университет "Паисий Хилендарски"
Факултет по математика и информатика

Катедра "Математически анализ"

Ива Тодорова Йончева-Найденова

Приближени решения на някои класове размити интегрални уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертационен труд
за присъждане на образователната и научна степен
"ДОКТОР"
по област на висше образование:
4. Природни науки, математика и информатика;
професионално направление: 4.5. Математика;
докторска програма: Математически анализ

Научен ръководител:
доц. д-р Атанаска Тенчева Георгиева

Пловдив – 2021

Дисертационният труд е обсъден и насрочен за защита на разширен катедрен съвет на катедра “Математически анализ” при Факултет по математика и информатика на Пловдивски университет “Паисий Хилендарски”, проведен на 08.11.2021г.

Дисертационният труд “Приближени решения на някои класове размити интегрални уравнения” се състои от увод, четири глави, заключение и библиография. Библиографията съдържа 108 заглавия. Общият обем на дисертационния труд е 115 страници. Списъкът на авторските публикации включва 6 заглавия.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на 21.01.2022г. от 11:00 часа онлайн (ще бъде обявено в сайта на ПУ/ФМИ).

Материалите по защитата са на разположение за интересуващите се в секретариата на ФМИ, Нова сграда на ПУ “Паисий Хилендарски”,
бул.“България” № 236, каб. 330, всеки работен ден от 8:30 до 17:00 часа.

Научно жури

Председател:
доц. д-р Атанаска Георгиева (ПУ „П. Хилендарски“, Пловдив).

Членове:
1. проф. д-р Михаил Константинов (УАСГ, София);
2. проф. д-р Цанко Дончев (УАСГ, София);
3. проф. д-р Димитър Колев (Акад.на МВР, София);
4. доц. д-р Алексей Николов (Технически Университет, София).

Номерацията на теоремите, лемите, забележките и дефинициите в автореферата съвпада с тяхната номерация в дисертационния труд.

Съдържание

Увод

Актуалност на дисертационния труд

Най-поразителното свойство на човешкия интелект е способността му да взима рационални решения в условия на непълна и неточна информация. Разработката на модели, които се доближават до човешката логика и използването им в сложни системи са от най-перспективните проблеми на науката. Човешкия начин на мислене, опиращ се на естествения език, не може да бъде описан в рамките на традиционния математически формализъм. Теорията на размитите множества (Fuzzy Sets, "fuzzy"– означава "неточен, размит") дава необходимия апарат, за да се реши този проблем.

През 1973г. проф.Лотфи А.Заде [40] създава теорията за размитата логика (*fuzzy logic*), която намира приложение не само в техниката [25], [22] и транспорта [39] но и в други области на науката като биология [37], медицина [6], геология [21], химия [31] и др.

Днес идеите на Заде и неговите последователи намират приложение в автоматизацията, за създаване на алгоритми за разпознаване на изображения, образи и звуци, обработка на сигнали, количествен анализ в икономиката, системи за вземане на решения, обработка на информация , експертни системи за диагностика в медицината, размити алгоритми за управление на роботи.

В последните години се развиват и направления като изкуствения интелект (artificial intelligence) и т.нар. "меки изчисления"(soft computing).

Размитите диференциални и интегрални уравнения са мощен инструмент за моделиране на динамични системи, описващи процеси и явления от математическата физика, размитите финансови и икономически системи и размитата финансова математика.

За първи път Дюбоа и Праде [12] въвеждат концепцията за интегриране на размити функции. Размитите интегрални уравнения са изследвани за първи път от Калева [23] във връзка с възникнали проблеми при избора на началното приближение при размити диференциални уравнения, като той дефинира интеграл от размита функция, използвайки интеграл на Лебег. По-късно размитите интегрални уравнения са изследвани от Мордесън и Нюман [26], използвайки принципа за разширение на Заде.

Приближените решения [2] за размитите интегрални уравнения обикновено се получават чрез прилагане на подходящи числени методи, базирани върху различни техники като вариационното итериране [4], итеративни методи [14], [10], [32], [13], размити диференциални трансформации [34], аналитично-числови методи като метод на разлагането на Адомиан [8], хомотопно аналитичен метод [7], [16] и хомотопно смутен метод [3], [15]. За приближено решаване размити интегрални уравнения на Фредхолм и Волтера се използват и полиноми на Бернщайн [27], квадратурни формули, техники на Нистрьом [35], процедури предиктор-коректор [36], полиноми на Чебишев [5] и метод на Пикард [9].

Цели и задачи на дисертационния труд

Основните обекти на изследване в дисертационния труд са намирането на приближени решения на двумерно нелинейно размито функционално интегрално уравнение на Фредхолм, двумерно нелинейно размито функционално интегрално уравнение на Фредхолм-Волтера, двумерно линейно размито функционално-интегрално уравнение на Волтера.

Основните цели на дисертационния труд могат да се обединят в две групи:

1. Да се разшири математическият апарат на двумерните размити интегрални уравнения, необходим за изследване на съществуването и единствеността на решението на изследваните уравнения.

2. Да се конструират ефективни методи за намиране на приближените решения на изследваните уравнения.

Целите на настоящият дисертационен труд са постигнати чрез решаване на следните задачи:

а) Намиране на достатъчни условия за съществуване и единственост на решението на двумерно нелинейно размито функционално интегрално уравнение на Фредхолм.

б) Конструиране на итеративен метод, използващ размитата квадратурна формула на правоъгълниците за намиране на численото решение на двумерно нелинейно размито функционално-интегрално уравнение на Фредхолм. Намиране на достатъчни условия за сходимостта на метода и устойчивост спрямо избора на първото приближение. Получаване оценка на грешката за класа от липшицови функции и с модул на непрекъснатост.

в) Намиране на достатъчни условия за съществуване и единственост на решението на двумерно нелинейно размито интегрално уравнение на Фредхолм-Волтера.

г) Конструиране на аналитичен метод, използващ метода на разлагането на Адомиан за намиране на приближеното решение на двумерно нелинейно размито интегрално уравнение на Фредхолм-Волтера. Намиране на достатъчни условия за сходимостта на метода и получаване оценка на грешката.

д) Намиране на достатъчни условия за еквивалентност на метода на разлагане на Адомиан с хомотопно смутения метод за двумерно нелинейно размито интегрално уравнение на Фредхолм-Волтера.

е) Намиране на достатъчни условия за съществуване и единственост на решението на двумерно линейно размито интегрално уравнение на Волтера.

ж) Конструиране на аналитичен метод, използващ хомотопно аналитичния метод за намиране на приближеното решение на двумерно линейно размито интегрално уравнение на Волтера. Намиране на достатъчни условия за сходимостта на метода и получаване оценка на грешката.

Структура на дисертационния труд

Настоящият дисертационен труд е посветен на намиране на приближени решения на някои класове размити интегрални уравнения и съдържа 115 страници. Състои се от увод, четири глави, заключение и библиография. Съдържа 6 графики и 5 таблици.

Заключението съдържа: авторска справка, списък на публикациите по дисертационния труд, апробация на получените резултати и декларация за оригиналност.

Кратък обзор на дисертационния труд

Глава 1. Кратък обзор

Първа глава е обзорна и в нея са дадени основни дефиниции и теореми, които се използват в дисертационния труд. Тя се състои от пет параграфа.

В **Параграф 1.1** са дадени дефиниция и основни свойства за размитите множества.

В **Параграф 1.2** са дадени дефиниция и основни свойства за размитите числа.

В **Параграф 1.3** са дадени дефиниция и основни свойства за размитите функции.

В **Параграф 1.4** са дадени дефиниции и твърдения за размит интеграл.

В **Параграф 1.5** е разгледан SI моделът, който е пример за приложение на размитите интегрални уравнения описващ динамиката на епидемии.

Глава 2. Приближени решения на 2НРФИУФ

Втора глава се състои от осем параграфа.

В **Параграф 2.1** е направена постановка на задачата за намиране на приближено решение на двумерно нелинейно размито функционално интегрално уравнение на Фредхолм (2НРФИУФ).

$$\begin{aligned} &F(s,t) = g(s,t) \oplus f(s,t,F(s,t)) \oplus \\ &\oplus (FR)\int_c^d (FR)\int_a^b K(s,t,x,y) \odot H(x,y,F(x,y))dxdy, \end{aligned} \tag{1}$$

където $K : A \times A \to \mathbb{R}$ е произволно ядро, $g : A \to E^1$, f, $H \in C(A \times E^1, E^1)$. $A = [a,b] \times [c,d]$, $C(A, E^1) = f : A \to E^1$ – непрекъснати,
E^1 - множество на размитите числа.

В **Параграф 2.2** са намерени достатъчни условия за съществуване и единственост на непрекъснато решение на уравнение (1).

Нека са изпълнени условията (B):

$(B1)$ $g \in C(A, E^1)$, $f, H \in C(A \times E^1, E^1)$, и $K \in C(A \times A, \mathbb{R}_+)$

$(B2)$ съществува константа $\alpha_f > 0$, такава, че е изпълнено

$D(f(s,t,u), f(s,t,v)) \leq \alpha_f D(u,v)$ за всяко $u, v \in E^1$;

$(B3)$ съществува константа $\alpha_H > 0$ такава, че е изпълнено

$D(H(s,t,u), H(s,t,v)) \leq \alpha_H D(u,v)$ за всяко $u, v \in E^1$;

$(B4)$ $\Gamma = \alpha_f + \alpha_H M_k \Delta < 1$, където $\Delta = (b-a)(d-c)$ и $M_K \geq 0$ такова, че $|K(s,t,x,y)| \leq M_K$ за всяко $(s,t), (x,y) \in A$, което следва от непрекъснатостта на функцията K.

Теорема 2.2.1. *Нека са изпълнени условията* (B). *Тогава уравнението* (1) *има единствено решение* $F^* \in C(A, E^1)$ *и редицата от последователни приближения* $\{F_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset C(A, E^1)$

$$
\begin{aligned}
F_m(s,t) =& g(s,t) \oplus f(s,t,F_{m-1}(s,t)) \oplus (FR)\int_c^d (FR)\int_a^b K(s,t,x,y)\odot \\
&\odot H(x,y,F_{m-1}(x,y))dxdy,\ (s,t)\in A,\ m\in\mathbb{N}
\end{aligned} \tag{2}
$$

клони към F^* в $C(A,E^1)$ за всеки избор на $F_0 \in C(A,E^1)$. В сила е следната оценка на грешката:

$$D(F^*(s,t),F_m(s,t)) \le \frac{\Gamma^m}{1-\Gamma} D(F_1(s,t),F_0(s,t)) \quad (s,t)\in A,\ m\in\mathbb{N}, \tag{3}$$

$$D(F^*(s,t),F_m(s,t)) \le \frac{\Gamma}{1-\Gamma} D(F_m(s,t),F_{m-1}(s,t)) \quad (s,t)\in A,\ m\in\mathbb{N}. \tag{4}$$

Ако $F_0 = g$, тогава

$$D(F^*(s,t),F_m(s,t)) \le \frac{\Gamma^m}{1-\Gamma}(M_0 + N_0 M_K \Delta) \quad (s,t)\in A,\ m\in\mathbb{N}, \tag{5}$$

където $M_0 = \max\limits_{(s,t)\in A} D(U_g(s,t),\tilde{0})$, $N_0 = \max\limits_{(s,t)\in A} D(H_g(s,t),\tilde{0})$ $U_g(s,t) = f(s,t,g(s,t)), H_g(s,t) = H(s,t,g(s,t))$. Освен това редицата от последователни приближения $\{F_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset C(A,E^1)$ е равномерно ограничена и решението F^* е ограничено.

В **Параграф 2.3** е въведен итеративен метод за намиране на численото решение на (1).

Нека разгледаме равномерното деление $a = a_0 < a_1 < ... < a_{n-1} < a_n = b$ и $c = c_0 < c_1 < ... < c_{n'-1} < c_{n'} = d$, на интервалите $[a,b]$ и $[c,d]$ със средни точки $\xi_i = (a + \sigma(i - \frac{1}{2}))$ и $\eta_j = (c + \sigma'(j - \frac{1}{2}))$ $i = \overline{1,n}$; $j = \overline{1,n'}$, $\sigma = \frac{b-a}{n}$, $\sigma' = \frac{d-c}{n'}$. За итеративната процедура (2) прилагаме размитата квадратурна формула на правоъгълниците. За начално приближение избираме $F_0(s,t) = g(s,t)$. Тогава получаваме следната итеративна процедура

$$
\begin{aligned}
&\tilde{F}_0(s,t) = g(s,t),\ \ \tilde{F}_m(s,t) = g(s,t) \oplus f(s,t,\tilde{F}_{m-1}(s,t))\oplus \\
&\qquad \oplus \sigma\sigma' \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n'} K\left(s,t,\xi_i,\eta_j\right) \odot H\left(\xi_i,\eta_j,\tilde{F}_{m-1}(\xi_i,\eta_j)\right)
\end{aligned} \tag{6}
$$

В **Параграф 2.4** е намерена оценка на грешката за класа от липшицови функции.

Дефиниция 2.4.1. *[11] Казваме, че размитата функция $f : A \to E^1$ е $L_1,\ L_2-$ липшицова ако е изпълнено*
$D(f(s_1,t_1), f(s_2,t_2)) \leq L_1|s_1 - s_2| + L_2|t_1 - t_2|$ *за всяко* $(s_1,t_1),\ (s_2,t_2) \in A$.

Теорема 2.4.1. *Нека $f : A \to E^1$ е размита securities римановo интегруема функция и е $L_1,\ L_2$ - липшицова. Тогава размитата квадратурна формула на правоъгълниците*

$$S_{n,n'}(f) = \sigma\sigma' \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n'} f\left(\xi_i, \eta_j\right) \tag{7}$$

приближава размития интеграл $(FR)\int\limits_c^d (FR)\int\limits_a^b f(x,y)dxdy$ и е в сила следната оценка за грешката

$$R_{n,n'}(S_{n,n'}(f), (FR)\int\limits_c^d (FR)\int\limits_a^b f(x,y)dxdy) \leq \frac{(b-a)(d-c)}{4}\left(L_1\sigma + L_2\sigma'\right), \tag{8}$$

Нека са изпълнени условията (**C**):

(**C1**) функциите $g \in C(A, E^1)$, $f \in C(A \times E^1, E^1)$, $H \in C(A \times E^1, E^1)$, и $K \in C(A \times A, \mathbb{R}_+)$; са непрекъснати;

(**C2**) съществуват константи $\alpha_f, \gamma_f^1, \gamma_f^2 \geq 0$, такива, че е изпълнено
$D(f(s,t,u), f(s,t),v)) \leq \gamma_f^1|s-s'| + \gamma_f^2|t-t'| + \alpha_f D(u,v)$ за всяко $(s,t),\ \in A$ и $u, v \in E^1$;

(**C3**) съществуват константи $\alpha_H,\ \gamma_H^1,\ \gamma_H^2 \geq 0$, такива, че е изпълнено
$D(H(s,t,u), H(s',t',v)) \leq \gamma_H^1|s-s'| + \gamma_H^2|t-t'| + \alpha_H D(u,v)$,
за всяко $(s,t),\ (s',t') \in A,\ u,v \in E^1$;

(**C4**) $\Gamma = \alpha_f + \alpha_H M_k \Delta < 1$, където $\Delta = (b-a)(d-c)$ и $M_K \geq 0$ такова, че $|K(s,t,x,y)| \leq M_K$ за всяко $(s,t),(x,y) \in A$, което следва от непрекъснатостта на функцията K;

(**C5**) съществуват константи $\beta_1,\ \beta_2 \geq 0$ такива, че
$D(g(s,t), g(s',t')) \leq \beta_1|s-s'| + \beta_2|t-t'|$ за всяко $(s,t),(s',t')\ \in A$;

(**C6**) съществуват константи $\mu_1,\ \mu_2 \geq 0$ такива, че

$|K(s,t,x,y)-K(s',t',x,y)| \leq \mu_1|s-s'|+\mu_2|t-t'|$ за всяко $(s,t),(s',t') \in A$;
(**C7**) съществуват константи $\delta_1,\ \delta_2 \geq 0$ такива, че
$|K(s,t,x,y)-K(s,t,x',y')| \leq \delta_1\ |x-x'|+\delta_2|y-y'|$ за всяко $(x,y),(x',y') \in A$.

Теорема 2.4.2. *Нека са изпълнени условията* (C).
Тогава редицата $\{\tilde{F}_m\}_{\ m\in\mathbb{N}}$ *получена от*

$$\begin{aligned}\tilde{F}_m(s,t) =& g(s,t) \oplus f(s,t,\tilde{F}_{m-1}(s,t)) \oplus \sigma\sigma' \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n'} K\left(s,t,\xi_i,\eta_j\right) \odot \\ & \odot H\left(\xi_i,\eta_j,\tilde{F}_{m-1}(\xi_i,\eta_j)\right)\end{aligned}$$

клони към единственото решение F^* *на уравнението* (1), *за всяко* $(s,t)\in A$, *когато* $m,\ n,\ n'\to\infty$, *и е в сила следната оценка на грешката*

$$D^*(F^*,\tilde{F}_m) \leq \frac{\Gamma^m}{1-\Gamma}(M_0+N_0M_K\Delta)+\frac{\Delta}{4(1-\Gamma)}\left(L_1\sigma+L_2\sigma'\right), \tag{9}$$

за всяко $m\in\mathbb{N}$, *където*
$L_1 = M_k(\gamma_H^1+\alpha_H L_1'')+M\delta_1$ *и* $L_2 = M_k(\gamma_H^2+\alpha_H L_2'')+M\delta_2$.
$L_1' = \beta_1+\gamma_f^1+\mu_1 M\Delta$ *и* $L_2' = \beta_2+\gamma_f^2+\mu_2 M\Delta$.
$L_1'' = \left(\frac{L_1'}{1-\alpha_f}+\beta_1\right)$ *и* $L_2'' = \left(\frac{L_2'}{1-\alpha_f}+\beta_2\right)$

В **Параграф 2.5** са намерени достатъчни условия за устойчивост на метода за класа от липшицови функции по отношение на избора на първото приближение. Нека $G_0 = g^* \in C(A,E^1)$ е начално приближение, такова че, съществува $\varepsilon > 0$ за което $D(F_0(s,t),G_0(s,t)) < \varepsilon$ за всяко $(s,t)\in A$ и $F_0(s,t)=g(s,t)$. Тогава получаваме следната итеративна процедура

$$\begin{aligned}\tilde{G}_0(s,t) &= g^*(s,t),\ \ \tilde{G}_m(s,t)=g(s,t)\oplus f(s,t,\tilde{G}_{m-1}(s,t)) \\ &\oplus\sigma\sigma'\sum_{j=1}^{n'}\sum_{i=1}^{n}K\left(s,t,\xi_i,\eta_j\right)\odot H\left(\xi_i,\eta_j,\tilde{G}_{m-1}(\xi_i,\eta_j\right)\end{aligned} \tag{10}$$

за всяко $(s,t)\in A$, където $\xi_i = a+\sigma(i-0,5)$, $i=1,2,...,n$, $\eta_j = c+\sigma'(j-0,5)$, $j=1,2,...,n'$, $\sigma=\frac{b-a}{n}$, $\sigma'=\frac{d-c}{n'}$.

Дефиниция 2.5.1. *Казваме, че итеративната процедура* (6), *приложе-*

на за интегралното уравнение (1) *е устойчива относно избора на начално приближение ако за всяко $(s,t) \in A$ съществуват естествени числа n, $n' \in \mathbb{N}$ и три константи k_1, k_2, $k_3 > 0$, които са независими от σ и σ' такива, че*

$D(\tilde{F}_m(s,t), \tilde{G}_m(s,t)) < k_1\varepsilon + k_2\sigma^n + k_3{\sigma'}^{n'}$, *за всяко* $m \in \mathbb{N}$

Теорема 2.5.1. *Нека са изпълнени условията (C). Тогава итеративната процедура* (6) *е устойчива спрямо избора на началното приближение според* .

В **Параграф 2.6** е направена оценка на грешката с модул на непрекъснатост. Нека функцията $f : A \to E^1$ е непрекъсната и $\delta \geq 0$.

Дефиниция 2.6.1. *[33] Функцията $\omega_A(f,.) : R_+ \to R_+$, зададена чрез*

$$\omega_A(f,\delta) = \max\{D(f(x,y), f(s,t)) : (x,y),(s,t) \in A; \sqrt{(x-s)^2 + (y-t)^2} \leq \delta\}$$

се нарича модул на непрекъснатост на f в A.

Съгласно [33] са в сила следните свойства
1. $D(f(x,y), f(s,t)) \leq \omega_A(f, \sqrt{(x-s)^2 + (y-t)^2})$ за всяко $(x,y),(s,t) \in A$,
2. $\omega_A(f,\delta)$ е ненамаляваща функция относно δ,
3. $\omega_A(f,0) = 0$,
4. $\omega_A(f,\delta_1+\delta_2) \leq \omega_A(f,\delta_1) + \omega_A(f,\delta_2)$ за всяко $\delta_1, \delta_2 \geq 0$,
5. $\omega_A(f,n\delta) \leq n\omega_A(f,\delta)$ за всяко $\delta \geq 0$ и $n \in \mathbb{N}$,
6. $\omega_A(f,\lambda\delta) \leq (\lambda+1)\omega_A(f,\delta)$ за всяко $\delta, \lambda \geq 0$,
7. Ако $[a_1,b_1] \times [c_1,d_1] \subseteq A$, то $\omega_{[a_1,b_1]\times[c_1,d_1]}(f,\delta) \leq \omega_A(f,\delta)$ за всяко $\delta \geq 0$

Лема 2.6.1. *[33] Нека функцията $f : A \to E^1$, е непрекъсната, тогава е изпълнено*

$$D((FR)\int_c^d (FR)\int_a^b f(s,t)dsdt, (b-a)(d-c) \odot f(\tfrac{a+b}{2}, \tfrac{c+d}{2})) \leq$$

$$\leq (b-a)(d-c)\omega_A(f, \tfrac{b-a}{2} \cdot \tfrac{d-c}{2}).$$

Нека са изпълнени условията (I):

$(I1)$ $g \in C(A, E^1)$, $f \in C(A \times E^1, E^1)$, $H \in C(A \times E^1, E^1)$, и $K \in C(A \times A, \mathbb{R}_+)$;

$(I2)$ съществуват константи α_f, $\gamma_f \geq 0$, такива, че е изпълнено

$D(f(s_1,t_1,u), f(s_2,t_2,v)) \leq \gamma_f(|s_1-s_2| + |t_1-t_2| + \alpha_f D(u,v)$

$(I3) D(H(s_1,t_1,u),H(s_2,t_2,v)) \le \gamma_H(|s_1-s_2|+|t_1-t_2|+\alpha_H D(u,v))$
$(I4)$ $\Gamma = \alpha_f + \alpha_H M_k \Delta < 1$, където $\Delta = (b-a)(d-c)$ и $M_K \ge 0$ такова, че $|K(s,t,x,y)| \le M_K$ за всяко $(s,t),(x,y) \in A$, което следва от непрекъснатостта на функцията K ;

Означаваме с $\omega_A^1(K,\delta) =$
$= \max_{(s_i,t_i)\in A; i=1,2} \{|K(s_1,t_1,s,t) - K(s_2,t_2,s,t)| : \sqrt{(s_1-s_2)^2+(t_1-t_2)^2} \le \delta\}$
$\omega_A^2(K,\delta) =$
$= \max_{(x_i,y_i)\in A, i=1,2} \{|K(s,t,x_1,y_1) - K(s,t,x_2,y_2)| : \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \le \delta\}$,
за всяко $\delta > 0$.

Теорема 2.6.1. *Нека са изпълнени условията (I). Тогава редицата* $\{\tilde{F}_m\}$, *получена от итеративната процедура* (6) *клони към единственото решение* F^* *на* (1) *и неговата оценка на грешката е*

$$D^*(F,\tilde{F}_m) \le$$
$$\le \frac{\Gamma^m}{1-\Gamma}(M_0+N_0M_K\Delta) + \frac{5\Delta M_K}{4(1-\Gamma)}(\gamma_H + \frac{\alpha_H\gamma_f}{1-\alpha_f})(\sigma+\sigma') + \frac{5\Delta M_K\alpha_H}{4(1-\alpha_f)(1-\Gamma)}\omega_A(g,\sigma\sigma')+$$
$$+\frac{5\Delta^2 M_K\alpha_H(\alpha_H\Gamma+\|H\|_c)}{4(1-\alpha_f)(1-\Gamma)}\omega_A^1(K,\sigma\sigma') + \frac{3\Delta(\alpha_H\mu+\|H\|_c)}{2(1-\Gamma)}\omega_A^2(K,\sigma+\sigma'),$$

където $\mu = \max_{0\le i\le m-1} \|\tilde{F}_i\|_c$, $\quad \| H \|_c = \max_{(x,y)\in A} D(H(x,y,\tilde{0}),\tilde{0})$

В **Параграф 2.7** са намерени достатъчни условия за устойчивост на метода по отношение на избора на първото приближение с модул на непрекъснатост. Нека $G_0 = g^* \in C(A,E^1)$ е начално приближение, такова, че $D(F_0(s,t,G_0(s,t)) < \varepsilon$, за всяко $(s,t) \in A$ и $F_0(s,t) = g$. Тогава получаваме итеративната процедура (10).

Дефиниция 2.7.1. *Казваме, че итеративният метод* (6), *приложен към интегрално уравнение* (1) *е числено устойчив относно избора на начално приближение ако за всяко* $(s,t) \in A$ *съществуват естествени числа* n, $n' \in \mathbb{N}$ *и константи* k_1 , k_2, k_3, k_4, k_5, $k_6 > 0$, *които са независими от* σ *и* σ' *такива, че*

$$D(\tilde{F}_m(s,t),\tilde{G}_m(s,t)) < k_1\varepsilon + k_2(\sigma+\sigma') + k_3\omega_A(g,\sigma\sigma')+$$
$$+k_4\omega_A(g^*,\sigma\sigma') + k_5\omega_A^1(K,\sigma\sigma') + k_6\omega_A^2(K,\sigma+\sigma')$$

Теорема 2.7.1. *Нека са изпълнени условията (I). Тогава итеративната процедура* (6) *е числово устойчива спрямо избора на началното приближение.*

В **Параграф 2.8** са конструирани примери, демонстриращи получените теоретични резултати.

Основни резултати от **Глава 2.** са публикувани в [19] и [20].

Глава 3. Приближени решения на 2НРИУФВ

Трета глава се състои от осем параграфа.

В **Параграф 3.1** е направена е постановка на задачата за намиране на приближеното решение на нелинейно размито интегрално уравнение на Фредхолм-Волтера (2НРИУФВ).

$$
\begin{aligned}
u(s,t) = g(s,t) \oplus (FR)\int_a^b k_1(s,t,x) \odot G_1(u(x,t))dx \oplus (FR)\int_c^t k_2(s,t,y)\odot \\
\odot G_2(u(s,y))dy \oplus (FR)\int_c^t (FR)\int_a^b k_3(s,t,x,y) \odot G_3(u(x,y))dxdy,
\end{aligned}
\tag{11}
$$

където $g,\ u$ са непрекъснати размити функции,
$k_1 : A \times [a,b] \to \mathbb{R}_+,\ k_2 : A \times [c,d] \to \mathbb{R}_+,\ k_3 : A \times A \to \mathbb{R}_+,$
$G_1,\ G_2,\ G_3 : E^1 \to E^1$ са непрекъснати размити оператори.

В **Параграф 3.2** са намерени достатъчни условия за съществуване и единственост на непрекъснато решение на уравнение (11).

Нека са изпълнени условията (H):
$(H1)$ $g \in C(A, E^1)$, $k_1 \in C(A \times [a,b], \mathbb{R}_+)$, $k_2 \in C(A \times [c,d], \mathbb{R}_+)$,
$k_3 \in C(A \times A, \mathbb{R}_+)$ и операторите $G_i \in C(E^1, E^1)$, $(i = 1,2,3)$,
$(H2)$ съществуват константи $L_i \geq 0$, такива че за всяко $u, v \in E^1$,
$D(G_i(u), G_i(v)) \leq L_i D(u,v)$, (i=1,2,3)
$(H3)$ $\alpha = M_1L_1(b-a) + M_2L_2(d-c) + M_3L_3(b-a)(d-c) < 1$, където $|k_1(s,t,x)| \leq M_1$, $|k_2(s,t,y)| \leq M_2$, $|k_3(s,t,x,y)| \leq M_3$, за всяко $a \leq s, x \leq b$, $c \leq t, y \leq d$ които следват от непрекъснатостта на k_1, k_2, k_3.

Теорема 3.2.1. *Нека са изпълнени условията* (H). *Тогава интегралното уравнение* (11) *има единствено решение.*

В **Параграф 3.3** е намерен параметричния вид на уравнението (11).

Нека $u(s,t,r)=(\underline{u}(s,t,r),\overline{u}(s,t,r))$, $g(s,t,r)=(\underline{g}(s,t,r),\overline{g}(s,t,r))$, където $0\leq r\leq 1$ и $(s,t)\in A$ са параметричните форми на размитите функции $u(s,t)$ и $g(s,t)$. Нека функциите $G_1(\beta)$, $G_2(\beta)$ и $G_3(\beta)$ са растящи за $\beta\in[\underline{u}(x,y,r),\overline{u}(x,y,r)]$ и функциите $k_1(s,t,x)\geq 0$, $k_2(s,t,y)\geq 0$, $k_3(s,t,x,y)\geq 0$, за всяко $a\leq x\leq s\leq b$, $c\leq y\leq t\leq d$ и $0\leq r\leq 1$. Тогава получаваме параметричната форма на уравнението (11),

$$\begin{aligned}\overline{u}(s,t,r) &= \overline{g}(s,t,r)+\int\limits_a^b k_1(s,t,x)G_1(\overline{u}(x,t,r))dx+\\ &+\int\limits_c^t k_2(s,t,y)G_2(\overline{u}(s,y,r))dy+\int\limits_c^t\int\limits_a^b k_3(s,t,x,y)G_3(\overline{u}(x,y,r))dxdy.\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\underline{u}(s,t,r) &= \underline{g}(s,t,r)+\int\limits_a^b k_1(s,t,x)G_1(\underline{u}(x,t,r))dx+\\ &+\int\limits_c^t k_2(s,t,y)G_2(\underline{u}(s,y,r))dy+\int\limits_c^t\int\limits_a^b k_3(s,t,x,y)G_3(\underline{u}(x,y,r))dxdy.\end{aligned} \tag{13}$$

В **Параграф 3.4** е използван метода на разлагане на Адомиан за намиране на приближеното решение на 2НРИУФВ.

Нека за системата (12), (13) приложим метода на разлагане на Адомиан.

Неизвестните функции $(\underline{u}(s,t,r),\overline{u}(s,t,r))$ търсим от вида

$$\underline{u}(s,t,r)=\sum_{i=0}^{\infty}\underline{u_i}(s,t,r),\ \ \overline{u}(s,t,r)=\sum_{i=0}^{\infty}\overline{u_i}(s,t,r). \tag{14}$$

Нелинейните оператори $G_1(\underline{u})$, $G_1(\overline{u})$, $G_2(\underline{u})$, $G_2(\overline{u})$, $G_3(\underline{u})$, $G_3(\overline{u})$ са безкрайни редове от полиноми, зададени чрез равенствата

$$\begin{aligned}G_1(\underline{u}) &= \sum_{n=0}^{\infty}\underline{A}_n(\underline{u}_0,\underline{u}_1,...,\underline{u}_n),\ \ G_1(\overline{u})=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{A_n}(\overline{u}_0,\overline{u}_1,...,\overline{u}_n),\\ G_2(\underline{u}) &= \sum_{n=0}^{\infty}\underline{B}_n(\underline{u}_0,\underline{u}_1,...,\underline{u}_n),\ \ G_2(\overline{u})=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{B_n}(\overline{u}_0,\overline{u}_1,...,\overline{u}_n),\\ G_3(\underline{u}) &= \sum_{n=0}^{\infty}\underline{C}_n(\underline{u}_0,\underline{u}_1,...,\underline{u}_n),\ \ G_3(\overline{u})=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{C_n}(\overline{u}_0,\overline{u}_1,...,\overline{u}_n),\end{aligned} \tag{15}$$

където $A_n=(\underline{A}_n,\overline{A}_n)$, $B_n=(\underline{B}_n,\overline{B}_n)$, $C_n=(\underline{C}_n,\overline{C}_n)$, при $n\geq 0$ са така наречените полиноми на Адомиан дефинирани чрез

$$
\begin{aligned}
\underline{A}_n(\underline{u}_0, \underline{u}_1, ..., \underline{u}_n) &= \tfrac{1}{n!}\tfrac{d^n}{d\lambda^n}\left[G_1\left(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i \underline{u}_i\right)\right]_{\lambda=0}, \\
\overline{A}_n(\overline{u}_0, \overline{u}_1, ..., \overline{u}_n) &= \tfrac{1}{n!}\tfrac{d^n}{d\lambda^n}\left[G_1\left(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i \overline{u}_i\right)\right]_{\lambda=0}, \\
\\
\underline{B}_n(\underline{u}_0, \underline{u}_1, ..., \underline{u}_n) &= \tfrac{1}{n!}\tfrac{d^n}{d\lambda^n}\left[G_2\left(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i \underline{u}_i\right)\right]_{\lambda=0}, \\
\overline{B}_n(\overline{u}_0, \overline{u}_1, ..., \overline{u}_n) &= \tfrac{1}{n!}\tfrac{d^n}{d\lambda^n}\left[G_2\left(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i \overline{u}_i\right)\right]_{\lambda=0}, \\
\\
\underline{C}_n(\underline{u}_0, \underline{u}_1, ..., \underline{u}_n) &= \tfrac{1}{n!}\tfrac{d^n}{d\lambda^n}\left[G_3\left(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i \underline{u}_i\right)\right]_{\lambda=0}, \\
\overline{C}_n(\overline{u}_0, \overline{u}_1, ..., \overline{u}_n) &= \tfrac{1}{n!}\tfrac{d^n}{d\lambda^n}\left[G_3\left(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i \overline{u}_i\right)\right]_{\lambda=0},
\end{aligned}
\tag{16}
$$

където λ е параметър.
Нека за начално приближение използваме функцията $g(s,t)$. Тогава получаваме следните рекурентни равенства за n=1,2,3,...

$$
\begin{aligned}
&\underline{u}_0(s,t,r) = \underline{g}(s,t,r) \\
&\underline{u}_1(s,t,r) = && \int_a^b k_1(s,t,x)\underline{A}_0 dx + \int_c^t k_2(s,t,y)\underline{B}_0 dy + \\
& && + \int_c^t \int_a^b k_3(s,t,x,y)\underline{C}_0 dxdy \\
&... \\
&\underline{u}_{n+1}(s,t,r) = && \int_a^b k_1(s,t,x)\underline{A}_n dx + \int_c^t k_2(s,t,y)\underline{B}_n dy + \\
& && + \int_c^t \int_a^b k_3(s,t,x,y)\underline{C}_n dxdy
\end{aligned}
\tag{17}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overline{u}_0(s,t,r) = \overline{g}(s,t,r) \\
&\overline{u}_1(s,t,r) = && \int\limits_a^b k_1(s,t,x)\overline{A}_0 dx + \int\limits_c^t k_2(s,t,y)\overline{B}_0 dy + \\
& && + \int\limits_c^t \int\limits_a^b k_3(s,t,x,y)\overline{C}_0 dx dy \\
&\ldots \\
&\overline{u}_{n+1}(s,t,r) = && \int\limits_a^b k_1(s,t,x)\overline{A}_n dx + \int\limits_c^t k_2(s,t,y)\overline{B}_n dy + \\
& && + \int\limits_c^t \int\limits_a^b k_3(s,t,x,y)\overline{C}_n dx dy
\end{aligned} \tag{18}
$$

Нека означим чрез $\underline{\phi}_n(s,t,r) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \underline{u}_i(s,t,r)$, $\overline{\phi}_n(s,t,r) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \overline{u}_i(s,t,r)$, n-тите частични суми на редовете от (14). Тогава за точното решение $u(s,t,r) = (\underline{u}(s,t,r), \overline{u}(s,t,r))$, получаваме

$$
\lim_{n\to\infty} \underline{\phi}_n(s,t,r) = \underline{u}(s,t,r), \; \lim_{n\to\infty} \overline{\phi}_n(s,t,r) = \overline{u}(s,t,r). \tag{19}
$$

В **Параграф 3.5** е доказана сходимостта на МРА и е намерена оценка на грешката между точното и приближеното решение.

Теорема 3.5.1. *Нека са изпълнени условията* (H). *Тогава редовете* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \overline{u}_i(s,t,r)$ *и* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \underline{u}_i(s,t,r)$ *са сходящи и функциите* $\overline{u}(s,t,r) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \overline{u}_i(s,t,r)$ *и* $\underline{u}(s,t,r) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \underline{u}_i(s,t,r)$ *са решение на уравненията* (12) *и* (13), *където функциите* $\overline{u}_i(s,t,r)$ *и* $\underline{u}_i(s,t,r)$ *са получени от* (17) *и* (18).

Теорема 3.5.2. *Нека са изпълнени условията* (H). *Тогава максималната абсолютна грешка на решението* (14) *на уравненията* (12), (13) *е*

$$
\begin{aligned}
&\max_{(s,t)\in A} |\overline{u}(s,t,r) - \sum_{i=0}^{m} \overline{u}_i(s,t,r)| \le \\
&\le \tfrac{\alpha^m}{1-\alpha}(M_1(b-a)\overline{\phi_1} + M_2(d-c)\overline{\phi_2} + M_3(b-a)(d-c)\overline{\phi_3}),
\end{aligned} \tag{20}
$$

$$
\begin{aligned}
&\max_{(s,t)\in A} |\underline{u}(s,t,r) - \sum_{i=0}^{m} \underline{u}_i(s,t,r)| \le \\
&\le \tfrac{\alpha^m}{1-\alpha}(M_1(b-a)\underline{\phi_1} + M_2(d-c)\underline{\phi_2} + M_3(b-a)(d-c)\underline{\phi_3}),
\end{aligned} \tag{21}
$$

където

$\overline{\phi_1} = \max\limits_{(s,t)\in A} |G_1(\overline{g}(s,t,r))|$, $\overline{\phi_2} = \max\limits_{(s,t)\in A} |G_2(\overline{g}(s,t,r))|$,
$\overline{\phi_3} = \max\limits_{(s,t)\in A} |G_3(\overline{g}(s,t,r))|$, *за всяко* $0 \leq r \leq 1$

В **Параграф 3.6** е приложен Хомотопно смутения метод (ХСМ) за 2НРИУФВ.

Параметричният вид на оператора е $N(u) = (N(\underline{u}), N(\overline{u}))$, където

$$\begin{aligned} N(\underline{u}) &= \underline{u}(s,t,r) - \underline{g}(s,t,r) - \int\limits_a^b k_1(s,t,x)G_1(\underline{u}(x,t,r))dx- \\ &- \int\limits_c^t k_2(s,t,y)G_2(\underline{u}(s,y,r)))dy - \int\limits_c^t \int\limits_a^b k_3(s,t,x,y)G_3(\underline{u}(x,y,r))dxdy \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} N(\overline{u}) &= \overline{u}(s,t,r) - \overline{g}(s,t,r) - \int\limits_a^b k_1(s,t,x)G_1(\overline{u}(x,t,r))dx- \\ &- \int\limits_c^t k_2(s,t,y)G_2(\overline{u}(s,y,r)))dy - \int\limits_c^t \int\limits_a^b k_3(s,t,x,y)G_3(\overline{u}(x,y,r))dxdy \end{aligned} \tag{23}$$

Дефинираме хомотопия $H(u,p) = (H(\underline{u},p), H(\overline{u},p))$ със следните свойства

$$H(u,0) = L(u) \quad H(u,1) = N(u),$$

където $L(u) = (L(\underline{u}), L(\overline{u}))$ е линеен оператор,

$$L(\underline{u}) = \underline{u}(s,t,r) - \underline{g}(s,t,r), \quad L(\overline{u}) = \overline{u}(s,t,r) - \overline{g}(s,t,r), \tag{24}$$

и $p \in [0,1]$ е параметър.

Избираме изпъкнала хомотопия $H(u,p) = (H(\underline{u},p), H(\overline{u},p))$ чрез $H(\underline{u},p) = (1-p)L(\underline{u}) + pN(\underline{u})$, и $H(\overline{u},p) = (1-p)L(\overline{u}) + pN(\overline{u})$.

Когато параметъра p монотонно расте от 0 до 1,

$H(\underline{v},0) = L(\underline{v})$, $H(\overline{v},0) = L(\overline{v})$ и търсеното решение се променя от първоначалното решение u_0 до търсеното решение u.
$H(\underline{v},1) = N(\underline{v})$, $H(\overline{v},1) = N(\overline{v})$, където $v(s,t,r) = (\underline{v}(s,t,r), \overline{v}(s,t,r))$ е решение на 2НРИУФВ.

При ХСМ търсим решение на уравненията (12), (13) от вида

$$\underline{u}(s,t,r)=\sum_{n=0}^{\infty}p^n\underline{u_n}(s,t,r),\quad \overline{u}(s,t,r)=\sum_{n=0}^{\infty}p^n\overline{u_n}(s,t,r), \tag{25}$$

където $p\in[0.1]$.

При $p\to 1$, $v(s,t,r)=(\underline{v}(s,t,r),\overline{v}(s,t,r))$ е приближеното решение на 2НРИУФВ т.е

$$\underline{v}(s,t,r)=\lim_{p\to 1}\underline{u}(s,t,r)=\underline{u_0}(s,t,r)+...+\underline{u_n}(s,t,r)+..., \tag{26}$$

$$\overline{v}(s,t,r)=\lim_{p\to 1}\overline{u}(s,t,r)=\overline{u_0}(s,t,r)+...+\overline{u_n}(s,t,r)+.... \tag{27}$$

В **Параграф 3.7** е доказана еквивалентността на ХСМ с МРА при специален избор на хомотопия.

Теорема 3.7.1. *ХСМ е еквивалентен на МРА, за 2НРИУФВ, с хомотопия $H(u,p)$ от вида*

$$H(u,p)=(1-p)L(u)\oplus pN(u)=0, \tag{28}$$

където операторите $N(u)$ и $L(u)$ са дефинирани с (22), (23), (24).

В **Параграф 3.8** са конструирани числови примери, демонстриращи получените теоретични резултати.

Основни резултати от **Глава 3.** са публикувани в [18] и [29].

Глава 4. Приближени решения на 2ЛРИУВ

Четвърта глава се състои от седем параграфа.

В **Параграф 4.1** е направена постановка на задачата за намиране на приближеното решение на двумерно линейно размито интегрално уравнение на Волтера (2ЛРИУВ).

$$\begin{aligned} u(s,t)= \quad & g(s,t)\oplus(FR)\int_a^s k_1(s,t,x)\odot u(x,t)dx\oplus(FR)\int_c^t k_2(s,t,y)\odot \\ & \odot u(s,y)dy\oplus(FR)\int_c^t(FR)\int_a^s k_3(s,t,x,y)\odot u(x,y)dxdy, \end{aligned} \tag{29}$$

където функциите g, u са непрекъснати размити функции, $k_1:A\times[a,b]\to\mathbb{R}_+$, $k_2:A\times[c,d]\to\mathbb{R}_+$, $k_3:A\times A\to\mathbb{R}_+$ са непрекъснати функции.

В **Параграф 4.2** е дадена основната идея на ХАМ.

Разглеждаме следното операторно уравнение

$$N(u(z)) = 0,\ z \in \Omega, \tag{30}$$

където N е оператор, u е неизвестна функция и Ω е областта от допустими стойности на z. Дефинираме 0-вото деформационно уравнение

$$(1-p)L(\Phi(z;p) - u_0(z)) = phN(\Phi(z;p)), \tag{31}$$

където $\Phi(z;p) : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$, $p \in [0,1]$ е произволен параметър, $h \neq 0$ е параметър контролиращ сходимостта, u_0 е началното приближение на решението на (30). Операторът L е линеен и се избира така, че уравненията, получени в следващите етапи на процедурата, да бъдат възможно най-прости за решаване.

Нека положим $p = 0$ и $L(u) = u$, тогава $L(\Phi(z;0) - u_0(z)) = 0$, от където $\Phi(z;0) = u_0(z)$. При $p = 1$, получаваме $N(\Phi(z;1)) = 0$, което означава че $\Phi(z;1)$ е търсеното решение на уравнение (30). Следователно, когато параметъра p се изменя от 0 до 1 получаваме промяната на решението от u_0 до търсеното решение u.

Нека за функцията $\Phi(z;p)$ използваме реда на Маклорен, относно параметъра p и следователно

$$\Phi(z;p) = u_0(z) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(z)p^m, \tag{32}$$

където $u_0(z) = \Phi(z;0)$ и

$$u_m(z) = \frac{1}{m!}\frac{\partial^m \Phi(z;p)}{\partial p^m}|_{p=0},\ \ m = 1,2,3,.... \tag{33}$$

При $p = 1$ реда (32) е сходящ и следователно получаваме търсеното решение, т.е

$$u(z) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(z). \tag{34}$$

За да намерим функцията u_m, диференцираме m-пъти, спрямо p уравнение (31). Полученият резултат делим на $m!$ и полагаме $p = 0$. Получаваме m-то деформационно уравнение ($m \geq 1$):

$$L(u_m(z) - \chi_m u_{m-1}(z)) = hR_m(\tilde{u}_{m-1}(z)), \tag{35}$$

където $\tilde{u}_{m-1}(z) = \{u_0(z), u_1(z), ..., u_{m-1}(z)\}$,

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m = 1 \\ 1, & m \geq 2 \end{cases} \tag{36}$$

и

$$R_m(\tilde{u}_{m-1}(z)) = \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{\partial^{m-1} N[\Phi(z;p)]}{\partial p^{m-1}}\right)|_{p=0}. \tag{37}$$

Ако не можем да намерим сумата на реда в (34), то за приближено решение на уравнението (30) ще използваме частичната сума на този ред, т.е

$$s_n(z) = \sum_{m=0}^{n} u_m(z). \tag{38}$$

Стойността на контролния параметър h определя областта и скоростта на сходимост на (34). Един от методите за избор на стойността на параметъра h е така нареченият "метод за оптимизацията" [24], [30], [38].

В **Параграф 4.3** е намерен параметричния вид на 2ЛРИУВ. Нека $u(s,t,r) = (\underline{u}(s,t,r), \overline{u}(s,t,r))$ и $g(s,t,r) = (\underline{g}(s,t,r), \overline{g}(s,t,r))$, където $0 \leq r \leq 1$ и $(s,t) \in A$ са параметричните форми на $u(s,t)$ и $g(s,t)$.

$$\begin{aligned} \overline{u}(s,t,r) = \quad & \overline{g}(s,t,r) + \int_a^s k_1(s,t,x)\overline{u}(x,t,r)dx + \int_c^t k_2(s,t,y)\overline{u}(s,y,r)dy + \\ & + \int_c^t \int_a^s k_3(s,t,x,y)\overline{u}(x,y,r)dxdy, \end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned} \underline{u}(s,t,r) = \quad & \underline{g}(s,t,r) + \int_a^s k_1(s,t,x)\underline{u}(x,t,r)dx + \int_c^t k_2(s,t,y)\underline{u}(s,y,r)dy + \\ & + \int_c^t \int_a^s k_3(s,t,x,y)\underline{u}(x,y,r)dxdy, \end{aligned} \tag{40}$$

където функциите $k_1(s,t,x) \geq 0$, $k_2(s,t,y) \geq 0$ и $k_3(s,t,x,y) \geq 0$ за всяко $a \leq x \leq s \leq b$, $c \leq y \leq t \leq d$ и $0 \leq r \leq 1$.

В **Параграф 4.4** е приложен Хомотопно аналитичния метод (ХАМ) за намиране на приближеното решение на 2ЛРИУВ.

Дефинираме операторите $L(u) = (L(\underline{u}), L(\overline{u}))$ и $N(u) = (N(\underline{u}), N(\overline{u}))$, където
$L(\underline{u}(s,t,r)) = \underline{u}(s,t,r)$ и

$$N(\underline{u}(s,t,r)) = \underline{u}(s,t,r) - \underline{g}(s,t,r) - \int\limits_a^s k_1(s,t,x)\underline{u}(x,t,r)dx -$$
$$- \int\limits_c^t k_2(s,t,y)\underline{u}(s,y,r)dy - \int\limits_c^t \int\limits_a^s k_3(s,t,x,y)\underline{u}(x,y,r)dxdy,$$

Тогава от (35) за функцията $\underline{u}_m(s,t,r)$ получаваме

$$\underline{u}_m(s,t,r) = \chi_m \underline{u}_{m-1}(s,t,r) + hR_m(\tilde{\underline{u}}_{m-1}(s,t,r)), \tag{41}$$

където χ_m се определя от (36). От (37) за оператора R_m, $m \geq 1$ получаваме

$$R_m(\tilde{\underline{u}}_{m-1}(s,t,r)) = \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{\partial^{m-1}}{\partial p^{m-1}} N(\sum_{i=0}^{\infty} \underline{u}_i(s,t,r)p^i)\right)_{|p=0} =$$
$$= \frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial p^{m-1}}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \underline{u}_i(s,t,r)p^i - \underline{g}(s,t,r)\right)_{|p=0} -$$
$$- \frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial p^{m-1}}\left(\int\limits_a^s k_1(s,t,x)\sum_{i=0}^{\infty} \underline{u}_i(x,t,r)p^i dx\right)_{|p=0} -$$
$$- \frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial p^{m-1}}\left(\int\limits_c^t k_2(s,t,y)\sum_{i=0}^{\infty} \underline{u}_i(s,y,r)p^i dy\right)_{|p=0} -$$
$$- \frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial p^{m-1}}\left(\int\limits_c^t \int\limits_a^s k_3(s,t,x,y)\sum_{i=0}^{\infty} \underline{u}_i(x,y,r)p^i dxdy\right)_{|p=0} =$$

$$= \underline{u}_{m-1}(s,t,r) - \frac{1-\chi_m}{(m-1)!}\underline{g}(s,t,r) - \int\limits_a^s k_1(s,t,x)\underline{u}_{m-1}(x,t,r)dx -$$
$$- \int\limits_c^t k_2(s,t,y)\underline{u}_{m-1}(s,y,r)dy - \int\limits_c^t \int\limits_a^s k_3(s,t,x,y)\underline{u}_{m-1}(x,y,r)dxdy =$$
$$= \begin{cases} N(\underline{u}_0(s,t,r)) & , \ m = 1 \\ N(\underline{u}_{m-1}(s,t,r)) + \underline{g}(s,t,r) & , \ m \geq 2. \end{cases}$$

Нека $m = 1$, тогава получаваме

$$\begin{aligned}
&\underline{u}_1(s,t,r) = hN(\underline{u}_0(s,t,r) = \\
&= h(\underline{u}_0(s,t,r) - \underline{g}(s,t,r) - \int\limits_a^s k_1(s,t,x)\underline{u}_0(x,t,r)dx - \\
&- \int\limits_c^t k_2(s,t,y)\underline{u}_0(s,y,r)dy - \int\limits_c^t \int\limits_a^s k_3(s,t,x,y)\underline{u}_0(x,y,r)dxdy),
\end{aligned} \tag{42}$$

където $\underline{u}_0 \in C(A \times [0,1], \mathbb{R})$ и за $m \geq 2$ имаме

$$\begin{aligned}
&\underline{u}_m(s,t,r) = (1+h)\underline{u}_{m-1}(s,t,r) - h(N(\underline{u}_{m-1}(s,t,r)) + \underline{g}(s,t,r)) = \\
&= (1+h)\underline{u}_{m-1}(s,t,r) - h(\int\limits_a^s k_1(s,t,x)\underline{u}_{m-1}(x,t,r)dx - \\
&- h\int\limits_c^t k_2(s,t,y)\underline{u}_{m-1}(s,y,r)dy - h\int\limits_c^t \int\limits_a^s k_3(s,t,x,y)\underline{u}_{m-1}(x,y,r)dxdy.
\end{aligned} \tag{43}$$

Аналогично получаваме формулите за $\underline{u}_m(s,t,r), m = 1,2,3$.

В **Параграф 4.5** са намерени достатъчни условия за съществуване и единственост на непрекъснатото решение на 2ЛРИУВ.
Нека са изпълнени условията (K):

$(K1)$ функциите $g \in C(A, E^1)$, $k_1 \in C(A \times [a,b], E^1)$, $k_2 \in C(A \times [c,d], E^1)$ и $k_3 \in C(A \times A, E^1)$ са непрекъснати

$(K2)$ $\alpha = M_1(b-a) + M_2(d-c) + M_3(b-a)(d-c) < 1$,

където $|k_1(s,t,x)| \leq M_1$, $|k_2(s,t,y)| \leq M_2$ и $|k_3(s,t,x,y)| \leq M_3$,

за всяко $a \leq s,x \leq b$, $c \leq t,y \leq d$, което следва от непрекъснатостта на k_1, k_2, k_3.

Теорема 4.5.1. *Нека са изпълнени условията (K). Тогава интегралното уравнение (29) има единствено решение.*

В **Параграф 4.6** е доказана сходимостта на метода и е намерена оценка на грешката между точното и приближеното решение.

Теорема 4.6.1. *Нека са изпълнени условията* (K), *и функциите* $\underline{u}_m$, $m \geq 1$, *са дефинирани с* (42) *и* (43), *където* $\underline{u}_0 \in C(A \times [0,1], \mathbb{R})$. *Тогава, ако реда*

$$\sum_{m=0}^{\infty} \underline{u}_m(s,t,r) \tag{44}$$

е сходящ, то сумата му е решение на уравнението (40).

Теорема 4.6.2. *Нека са изпълнени условията* (K). *Тогава контролният параметър* h *може да се избере, така че реда* (44) *да е равномерно сходящ в* A.

Забележка 4.6.1. *Случаят когато контролният параметър* $h = -1$ *и функциите* K_1 *и* K_2 *от уравнение* (29) *са тъждествено равни на* 0 *е разгледан в* [28].

Теорема 4.6.3. *Нека са изпълнени условията* (K) *и* $n \in \mathbf{N}$. *Тогава грешката между приближеното и точното решение е:*

$$\|\underline{u} - \underline{S}_n\| \leq \frac{{\beta_h}^n}{1-\beta_h}|h|(\|\underline{g}\| + \|\underline{u}_0\|(1+\alpha)), \tag{45}$$

където $\underline{S}_n(s,t,r) = \sum\limits_{m=0}^{n} \underline{u}_m(s,t,r)$, $\beta_h = |1+h| + |h|\alpha$ *и* α *е от условие* (ii).

В **Параграф 4.7** е конструиран числов пример, който илюстрира получените теоретични резултати.

Основните резултати от **Глава 4.** са публикувани в [17].

Заключение

Резюме на получените резултати

По мнение на автора основните приноси в настоящия дисертационен труд са:

1. Намерени са достатъчни условия за съществуване и единственост на решението на двумерно нелинейно размито функционално-интегрално уравнение на Фредхолм.

2. Конструиран е итеративен метод, използващ размитата квадратурна формула на правоъгълниците за намиране на численото решение на двумерно нелинейно размито функционално-интегрално уравнение на Фредхолм. Намерени са достатъчни условия за сходимост на метода и е получена оценка на грешката за липшицова функция и с модул на непрекъснатост.

3. Намерени са достатъчни условия за съществуване и единственост на решението на двумерно нелинейно размито интегрално уравнение на Фредхолм-Волтера.

4. Конструиран е аналитичен метод, използващ метода на разлагането на Адомиан за намиране на приближеното решение на двумерно нелинейно размито интегрално уравнение на Фредхолм-Волтера. Намерени са достатъчни условия за сходимост на метода и е получена оценка на грешката.

5. Намерени са достатъчни условия за еквивалентност на хомотопно смутения метод и метода на разлагането на Адомиан за двумерно нелинейно размито интегрално уравнение на Фредхолм-Волтера.

6. Намерени са достатъчни условия за съществуване и единственост на решението на двумерно линейно размито интегрално уравнение на Волтера.

7. Конструиран е аналитичен метод, използващ хомотопно аналитичния метод за намиране на приближеното решение на двумерно линейно размито интегрално уравнение на Волтера. Намерени са достатъчни условия за сходимост на метода и е получена оценка на грешката.

Списък на публикациите

Основните резултати от настоящия дисертационен труд са публикувани и цитирани в следните научни статии:

1. **Georgieva A., Pavlova A., Naydenova I.**, Error Estimate in the Iterative Numerical Method for Two-Dimensional Nonlinear Hammerstein-Fredholm Fuzzy Functional Integral Equations, *Advanced Computing in Industrial Mathematics. Studies in Computational Intelligence*, Vol.728, Springer, (2018), **(Web of Science, SJR=0.183, 2018)**.

2. **Naydenova I., Georgieva A.**, Approximate solution of nonlinear mixed Volterra-Fredholm fuzzy integral equations using the Adomian method, *AIP Conference Proceedings* 2172, 060005 (2019), doi.org/10.1063/1.5133533, **(Web of Science, SJR=0.19, 2019)**.
Цитат:

a. **Pavlova A., Koleva R.**, Approximate solution of two-dimensional Hammerstein-Volterra fuzzy integral equations with partial integrals, *AIP Conference Proceedings* 2333, 110007 (2021), doi.org/10.1063/5.0041815 **(Web of Science, SJR=0.177, 2020)**.

3. **Georgieva A., Naydenova I.**, Application of homotopy analysis method for solving of two-dimensional linear Volterra fuzzy integral equations, *AIP Conference Proceedings* 2159, 030012 (2019), doi.org/10.1063/1.5127477, **(Web of Science, SJR=0.19, 2019)**.
Цитати:

a. **Ullah Z., Ahmad S., Ullah A., Akgul A.**, On solution of fuzzy Volterra integro-differential equations, *Arab Journal of Basic and Applied Sciences*, Vol.28, 1, (330-339), (2021), doi.org/10.1080/25765299.2021.1970874, **(IF = 2.627, 2020)**.

b. **Pavlova A., Koleva R.**, Approximate solution of two-dimensional Hammerstein-Volterra fuzzy integral equations with partial integrals, *AIP Conference Proceedings* 2333, 110007 (2021), doi.org/10.1063/5.0041815, **(Web of Science, SJR=0.177, 2020)**

4. **Georgieva A., Naydenova I.**, Adomian's decomposition method and homotopy perturbation method in solving two-dimensional Volterra-Fredholm fuzzy integral equations, *AIP Conference Proceedings* 2321, 030009 (2021), doi.org/10.1063/5.0040135, **(Web of Science, SJR=0.177, 2020)**

5. **Georgieva A., Naydenova I.**, Numerical method for solving two-dimensional nonlinear Hammerstein-Fredholm fuzzy functional integral equations, *AIP Conference Proceedings* 2333, 080004 (2021), doi.org/10.1063/5.0041601, **(Web of Science, SJR=0.177, 2020)**

6. **Naydenova I.**, The Homotopy perturbed method for Volterra fuzzy integral equations, *International journal of Differential Equations and Applications*, Vol.20, N1, (2021), 133-145, ISSN (Print):1311-2872, (2021), doi:10.12732/ijdea.v20i1.10, **(Scopus, SJR=103, 2020)**.

Връзките между приносите, целите, задачите, мястото на описание в дисертационния труд и направените публикации по темата са следните:

Приноси	Цел	Задачи	Параграфи	Публикации
1	1	а	2.2	1
2	2	б	2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7	1,5
3	1	в	3.2	2
4	2	г	3.4, 3.5	2
5	2	д	3.7	4
6	1	е	4.5	3,6
7	2	ж	4.4, 4.6	3,6

Апробация на получените резултати

Доклади на семинари и конференции

А) Доклади на семинари

1. И.Найденова,
Числени решения на двумерно нелинейно размито функционално интегрално уравнение на Фредхолм.
Научен семинар "Диференциални уравнения и приложения ",
Пловдив, България,1 Юни 2020.

Б) Доклади на международни конференции

1. **Naydenova I.,Georgieva A.**,
   Approximate solution of nonlinear mixed Volterra-Fredholm fuzzy integral equations using the Adomian method,
   45th International Conference Applications of Mathematics in Engineering and Economics (AMEE'19),
   Созопол, България, 7 - 13 Юни 2019.

2. **Georgieva A., Naydenova I.**,
   Adomian's decomposition method and homotopy perturbation method in solving two-dimensional Volterra-Fredholm fuzzy integral equations,
   7th International Conference New Trends in the Applications of Differential Equations in Sciences (NTADES'20),
   Св.Константин и Елена, България,1-4 Септември 2020.

3. **Georgieva A., Naydenova I.**,
   Application of homotopy analysis method for solving of two-dimensional linear Volterra fuzzy integral equations,
   6th International Conference New Trends in the Applications of Differential Equations in Sciences (NTADES'19),
   Св.Константин и Елена, България,1-4 Юли 2019.

4. **Georgieva A., Naydenova I.**,
   Numerical method for solving two-dimensional nonlinear Hammerstein-Fredholm fuzzy functional integral equations,
   46th International Conference Applications of Mathematics in Engineering and Economics (AMEE'20)(virtual edition),
   Созопол, България, 7 - 13 Юни 2020.

В) Участие в проекти

1. Научен проект МУ17-ФМИ-007 към НПД на ПУ на тема: "ИКТ в помощ на научните изследвания по математика и информатика и приложенията им", 2017-2018.

2. Научен проект КР-06-N32/7 на тема: "Съвременни изследвания на някои класове диференциални и диференчни уравнения",

3. Научен проект МУ19-ФМИ-009 към НПД на ПУ на тема: "Моделиране чрез математика и информатика и симбиозата им с ИКТ", 2019-2020.

4. Научен проект МУ21-ФМИ-007 към НПД на ПУ на тема: "Симбиоза между математиката и информатиката (СМИ във ФМИ)", 2021-2022.

Декларация за оригиналност

от **Ива Тодорова Йончева-Найденова**,
редовен докторант към кат. "Математически анализ"
при Факултет по математика и информатика
на Пловдивски университет "Паисий Хилендарски"

Във връзка с провеждането на процедура за придобиване на образователната и научна степен "доктор" в Пловдивски университет "Паисий Хилендарски" и защита на представения от мен дисертационен труд, декларирам:

Резултатите и приносите на проведеното дисертационно изследване, представени в дисертационния ми труд на тема "Приближени решения на някои класове размити интегрални уравнения", са оригинални и не са заимствани от изследвания и публикации, в които нямам участие.

12.11.2021 г. ДЕКЛАРАТОР:
гр.Пловдив /Ива Тодорова Йончева-Найденова/

Библиография

[1] **Орловски С.**, *Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации*, Наука, Москва, 207 стр., (1984)

[2] **Abbasbandy S., Babolian E., Alavi M.**, Numerical method За solving linear Fredholm fuzzy integral equations of the second kind, *Chaos Solitons Fractals* **31**, 138–146, (2007).

[3] **Allahvirnaloo T., Abbasbandy S.**, The Adomian decompositon method applied to fuzzy system of Fredholm integral equations of the second kind, *International Journal Uncertainty, Fuzziness Knowl-Based Systems*, **10**, 101-110, (2006).

[4] **Attari H., Yazdani A.**, A computational method for fuzzy Volterra-Fredholm integral equations, *Fuzzy Inf Eng* 2:147–156, (2011).

[5] **Barkhordari A.M., Khezerloo M.**, Fuzzy bivariate Chebyshev method for solving fuzzy Volterra-Fredholm integral equations, *International Journal of Industrial Mathematics*, **3**, 67-77, (2011).

[6] **Barros L.C., Ferreira Leite M.B., Bassanezi R.C.**, The SI epidemiological models with a fuzzy transmission parameter, *Computers and Mathematics with Applications*, **45**,(s 10–11), 1619–1628, doi.org/10.1016/S0898-1221(03)00141-X,(2003).

[7] **Bataineh A.S., Noorani M.S.M., Hashim I.**, Approximate analytical solutions of systems of PDEs by homotopy analysis method, *Computers and Mathematics with Applications*, **55**, 2913-2923, (2008).

[8] **Behzadi S.S.**, Solving Fuzzy Nonlinear Volterra-Fredholm Integral Equations by Using Homotopy Analysis and Adomian Decomposition Methods, *International of Fuzzy Set Valued Analysis*, **35**, 13 pages, (2011).

[9] **Behzadi S.S., Allahviranloo T., Abbasbandy S.**, Solving fuzzy second-order nonlinear Volterra-Fredholm integro-differential equations by using Picard method, *Neural Computing and Applications*, **21**, 337-346, (2012).

[10] **Bica A., Popescu C.**, Iterative numerical method for nonlinear fuzzy Volterra integral equations, *Intell Fuzzy Syst*, 32(3):1639–1648, (2017).

[11] **Coroianu L.**, Lipschitz functions and fuzzy number approximations, *Fuzzy Sets and Systems*, 200:116–135, (2012).

[12] **Dubois D., Prade H.**, Operations on fuzzy numbers, *Int. J. Syst. Sci.*, **9**, 613–626, (1978).

[13] **Enkov S., Georgieva A., Nikolla R.**, Numerical solution of nonlinear Hammerstein fuzzy functional integral equations, *AIP Conference Proceedings*, **1789**, 030006-1-030006-8, (2016).

[14] **Ezzati R., Ziari S.**, Numerical solution of nonlinear fuzzy Fredholm integral equations using iterative method, *Appl. Math. Comput.*, 225:33–42, (2013).

[15] **Georgieva A., Alidema A.**, Convergence of homotopy perturbation method for solving of two-dimensional fuzzy Volterra functional integral equations, *Advanced Computing in Industrial Mathematics, Studies in Computational Intelligence*, **793**, 129-145, (2019).

[16] **Georgieva A., Hristova S.**, Homotopy Analysis Method to Solve Two-Dimensional Nonlinear Volterra-Fredholm Fuzzy Integral Equations, *Fractal Fract.*, 4, 9, (2020).

[17] **Georgieva A., Naydenova I.**, Application of homotopy analysis method for solving of two-dimensional linear Volterra fuzzy integral equations, *AIP Conference Proceedings*, 2159, 030012, (2019).

[18] **Georgieva A., Naydenova I.**, Adomian's decomposition method and homotopy perturbation method in solving two-dimensional Volterra-Fredholm fuzzy integral equations, *AIP Conference Proceedings*, 2321, 030009 (2021), doi.org/10.1063/5.0040135.

[19] **Georgieva A., Naydenova I.**, Numerical method for solving two-dimensional nonlinear Hammerstein-Fredholm fuzzy functional integral equations, *AIP Conference Proceedings*, 2333, 080004 (2021), doi.org/10.1063/5.0041601.

[20] **Georgieva A., Pavlova A., Naydenova I.**, Error estimate in the iterative numerical method for two-dimensional nonlinear Hammerstein-Fredholm fuzzy functional integral equations, *Advanced Computing in Industrial Mathematics, Studies in Computational Intelligence*, **728**, 41-45, (2018).

[21] **Holmblad L., Ostergaard J.**, Control of a cement kiln by fuzzy logic, in: M. Gupta, E. Sanchez (Eds.), *Fuzzy Information and Decision Processes*, North-Holland, Amsterdam, pp.389–399, (1982).

[22] IEC 1131 part 7 draft., *Programmable Controllers, Fuzzy Control Programming.*, (1997).

[23] **Kaleva O.**, Fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.**24**, 301-317, (1987).

[24] **Liao S.J.**, Homotopy Analysis Method in Nonlinear Differential Equations, *Springer, Higher Education Press*, Berlin Beijing, (2012).

[25] **Mamdani E.H., Assilian S.**, An Experiment in Linguistic Synthesis with Fuzzy Logic Controller, *Int.J.Man-Machine Studies*, Vol.7.N.1:1-13, (1975).

[26] **Mordeson J., Newman W.**, Fuzzy integral equations, *Information Sciences*, **87**, 215–229, (1995).

[27] **Mosleh M., Otadi M.**, Solution of fuzzy Volterra integral equations in a Bernstein polynomial basis, *Journal of Advances in Information Technology*, **4**, 148-155, (2013).

[28] **Naydenova I.**, The Homotopy perturbed method for Volterra fuzzy integral equations, *International journal of Differential Equations and Applications*, Vol.20, N1, (2021), 133-145, ISSN (Online):1314-6084, (2021), doi:10.12732/ijdea.v20i1.10.

[29] **Naydenova I., Georgieva A.**, Approximate solution of nonlinear mixed Volterra-Fredholm fuzzy integral equations using the Adomian method, *AIP Conference Proceedings*, 2172, 060005, (2019).

[30] **Odibat Z.**, A study on the convergence of homotopy analysis method, *Applied Mathematics and Computation*, **217**, 782–789, (2010).

[31] **Onat M., Dogruel M.**, Fuzzy plus integral control of the effluent turbidity in direct filtration, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol.12, No.1, pp. 65-74, doi:10.1109/TCST.2003.821948, (2004).

[32] **Pavlova A.**, Quadrature iterative method for a numerical solution of a nonlinear Hammerstein fuzzy functional integral equation, *Journal of the Technical University - Sofia- Plovdiv branch, Bulgaria "Fundamental Sciences and Applications"*, 23:175-180, (2017).

[33] **Sadatrasoul S.M., Ezzati R.**, Quadrature Rules and Iterative Method for Numerical Solution of Two-Dimensional Fuzzy Integral Equations, *Abstract and Applied Analysis*, (2014).

[34] **Salahshour S., Allahviranloo T.**, Application of fuzzy differential transform method for solving fuzzy Volterra integral equations, *Applied Mathematical Modelling*, **37**, 1016–1027, (2013).

[35] **Salehi P., Nejatiyan M.**, Numerical method for nonlinear fuzzy Volterra integral equations of the second kind, *International Journal of Industrial Mathematics*, **3**, 169-179, (2011).

[36] **Shafiee M., Abbasbandy S., Allahviranloo T.**, Predictor–corrector method for nonlinear fuzzy Volterra integral equations, *Aust. J. Basic Appl. Sci.*, **5(12)**, 2865–2874, (2011).

[37] **Torres A., Nieto J.J.**, Fuzzy Logic in Medicine and Bioinformatics, *Biomed Biotechnol.*, 2006:91908, doi.org/10.1155/JBB/2006/91908, (2006).

[38] **Turkyilmazoglu M.**, Convergence of the homotopy analysis method, *arXiv p.*, **1006**, 4460, Vol.1, (2010).

[39] **Yasunobu S., Miyamoto S.**, Automatic train operation system by predictive fuzzy control, *Industrial applications of fuzzy control*, 1, **18**, 1–18, (1985).

[40] **Zadeh Z.A.**, Fuzzy Sets, *Information and Control*, 8, 338-353, (1965).

Благодарности

Изказвам своята най-сърдечна и дълбока благодарност към научния ми ръководител доц. д-р Атанаска Георгиева за получените знания, умения, както и неоценимата подкрепа и търпение, които ми оказа при разработването и оформянето на дисертационния труд.