

Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“
Факултет по математика и информатика

КАТЕДРА
„ОБУЧЕНИЕ ПО МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА И ИНФОРМАЦИОННИ ТЕХНОЛОГИИ“

Радка Тодорова Златанова

**Формиране на творческо мислене у учениците в обучението по
геометрия с използване на динамичен геометричен софтуер**

АВТОРЕФЕРАТ

за присъждане на образователна и научна степен

„ДОКТОР“

област на висше образование:

1. Педагогически науки;

професионално направление:

1.3 Педагогика на обучението по ...

Докторска програма: Методика на обучението по математика

Научен ръководител:
доц. д-р Ивайло Пеев Старибратов

Пловдив - 2021

Дисертационният труд е обсъден и насочен за защита на разширено заседание на катедра „Обучение по математика, информатика и информационни технологии“ на Факултета по математика и информатика при Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“ на 14.09.2021 г.

Дисертационният труд „Формиране на творческо мислене у учениците в обучението по геометрия с използване на динамичен геометричен софтуер“ съдържа 188 страници (173 страници основен текст и 15 страници приложения). Състои от предговор, 3 глави, заключение, библиография, приложения (4 на брой). Библиографията съдържа 73 източника. Списъкът на авторските публикации по дисертацията се състои от 6 заглавия.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на от в Заседателната зала на Нова сграда на Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“, гр. Пловдив, бул. „България“ № 236.

Материалите по защитата са на разположение на интересуващите се в Деканата на Факултета по математика и информатика, Нова сграда на Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“, кабинет 330, всеки работен ден от 8:30 до 17:00 часа.

Съдържание

Обща характеристика на дисертационния труд	5
Предмет на изследването	6
Обект на изследване	6
Цели на изследването	6
Хипотеза на изследването	6
Основна цел на дисертационния труд	6
Методи на изследване	6
Кратко съдържание на дисертационния труд	7
Въведение	8
Характеристики на специализираните динамични геометрични софтуери <i>Sam</i> и <i>GeoGebra</i>	8
Дефиниране на безкрайни елементи и функцията <i>Размяна на крайна и безкрайна точки</i> в динамичните геометрични софтуери <i>Sam</i> и <i>GeoGebra</i>	9
Свързани фигури	10
Глава I Система от задачи, подходящи за решаване чрез използване на ДГС Sam	11
1.1 Модел на преподаване чрез ДГС при изучаване на средна отсечка на триъгълник	11
1.2 Приложение на ДГС при изучаване на медицентър на триъгълник	13
1.3 Развитие на творческите възможности у ученици чрез изучаване на описаните четириъгълници в динамична среда. Обобщение на задача от 53-та международна олимпиада по математика, Аржентина 2012г.	15
1.4 Стимулиране на творческата активност при ученици - билингви чрез динамичен геометричен софтуер	17
Глава II Изследователски ориентирано обучение с използването на ДГС GeoGebra	17
2.1 Използване на GeoGebra за развиване на творческо мислене на учениците в часовете по геометрия	18
2.2 Едно обобщение на геометричната задача от 19-та младежка балканска олимпиада по математика, Сърбия 2015г.	18
2.3 Сечения на многостен с равнина	19
2.3.1 Метод на пресечниците	20
2.3.2 Метод на проекциите	21
2.3.3 Импровизация върху Задача, когато паралелепипеда се замени с пирамида .	22
Глава III Диагностична процедура за контрол на знанията и уменията на учениците	23
3.1 Теоретична постановка	23
3.1.1 Анализ на учебното съдържание по математика в 11 клас второ равнище .	23
3.1.2 Проверка и оценка на знанията чрез тестове	23
3.2 Изследователска програма	24
3.3 Представяне и анализ на резултатите от диагностичната процедура	24
Изследване характеристиките на теста	25
Обработка на резултатите	26

Заключение	27
Резюме на получените резултати	27
Приноси на дисертационния труд	28
Перспективи за бъдещо развитие на изследванията	28
Списък на публикациите по дисертационния труд	28
Апробация на получените резултати	29
Връзката между приносите, задачите, мястото на описание в дисертационния труд и направените публикации	29
Литература	29

Обща характеристика на дисертационния труд

В наши дни понятието математическа компетентност включва и способността за работа със съвременни софтуерни системи за решаване на математически задачи. Студентите и учениците развиват своите умения за програмиране и алгоритмично мислене и по този начин тяхната дигитална компетентност надхвърля тази на традиционно пасивния потребител на информационни технологии. От друга страна, това задълбочава математическите знания и концептуалното разбиране на математиката (Кендеров, 2010).

Динамичните геометрични софтуери (ДГС) са ценен помощник за всеки техен потребител. Те осигуряват активно участие в достигането на познанието, позволяват обучаващият се да стане негов съоткривател. С помощта на ДГС учениците и студентите наблюдават и откриват закономерности, формулират и отхвърлят хипотези, разбират по-задълбочено същността на изучавания материал.

Думи на Уайтхед, предадени в президентския му адрес до Математическата асоциация на Англия през 1916 година: „Нека основните идеи, въведени в образованието на детето, са малко и важни и нека бъдат хвърлени във всяка възможна комбинация. Детето трябва да ги направи свои собствени и трябва да разбере тяхното приложение тук и сега в обстоятелствата на реалния му живот“ (Цели на образованието). Потвърждение на неговите думи е и наблюдението, споменато в (Zlatanov, 2018): „Ние извършихме експеримент с няколко седемгодишни деца с основна компютърна грамотност. Нашият опит с деца от тази възраст е малък, епизодичен и не е в класната стая. Запознавахме ги с инструментите на ДГС *Sam* и с предварително начертана фигура на дете. Те започнаха да рисуват, превръщаха тялото от трапец в четириъгълник или успоредник, променяха формата на главата, очите, ръцете и краката. След това започнаха да рисуват на празен файл, като използваха и безкрайните елементи и функцията *Размяна на крайна и безкрайна точки*. Беше много интересно, че не попитаха защо има крайни и безкрайни точки, а те просто ги използваха в своите рисунки. Те приложиха функцията *Размяна на крайна и безкрайна точки* и се радваха на резултатите. Интуитивното разбиране на безкрайните елементи, откриването на взаимоотношенията между фигурите, надничането в света на динамичните рисунки са добри начални условия за развиване на интерес към математиката“.

Използвайки в (Tsareva & Zlatanov, 2016) *GeoGebra*, безкрайни точки и размяна на крайни и безкрайни точки е представен иновативен метод за преподаване на темата „Сечение на многостен с равнина“. В този метод съществено е оптимизирана чертожната работа и дава възможност за генериране на решения на цели групи от задачи, само чрез решаването на една от тях с помощта на специално написан аplet *Размяна на крайна и безкрайна точки* (*Swap finite and infinite points*). Аpletът може да се използва във всеки етап от решението при презентирането стъпка по стъпка на решението. Благодарение на мощния потенциал на *GeoGebra*, този подход разширява обучението на „геометрия с компютър“ и въвежда нов творчески компонент в него.

Част от общия процес по внедряване на динамичен геометричен софтуер в обучението по математика е личният избор на всеки учител в прилагане на подходящ модел за практическо приложение на ИКТ. Този процес отчита и свързаните с него конкретни обективни и субективни проблеми, тези които се отнасят до образователната система в случая, тази по математика. Натрупаният педагогически опит е споделен, изследван и реализиран чрез педагогическия експеримент, представен в настоящия дисертационен труд, целящ оценката на ефективността на прилагане на динамичен геометричен софтуер в обучението по математика.

Гореизнесеното аргументира недвусмислено актуалността на настоящия дисертационен труд, който е фокусиран върху създаването на система от задачи и методически инструментариум за обучение по математика с приложение на динамичен геометричен софтуер по теми от

общообразователните учебни програми по математика за 5., 8., 9. и 11. клас.

Предмет на изследването е образователната среда с прилагане на ДГС при изучаване на темата „Сечение на многостен с равнина“ в обучението по геометрия на ученици от 11 клас, както и въздействието на системата от задачи за повишаване на творческото мислене в часовете по геометрия по теми от 5., 8. и 9. клас.

Обект на изследване са знанията, уменията и доколкото е възможно компетентностите на учениците в обучението на учениците по геометрия чрез използване на ДГС, като инструмент за повишаване на качеството за усвояване на учебния материал по математика.

Цели на изследването:

- Разработване на методически инструментариум и технология на обучение по геометрия с използване на ДГС;
- Реализиране на педагогически експеримент за диагностика на резултатите от обучението по темата „Сечение на многостен с равнина“.

Хипотеза на изследването - чрез разработената дидактическа среда и технология на обучение с използване на ДГС може да се формира творческо мислене у учениците.

Основна цел на дисертационния труд е намиране на подходящи дидактически и методически подходи и инструменти, които да послужат за съставянето на система от задачи по геометрия за използване на ДГС в часове за 5., 8., в 9. и 11. клас на българското средно училище, който оптимално да се впише в общопрактикувания модел и да реализира повишаване на творческото мислене у учениците.

За реализиране на поставената основна цел са формулирани следните **задачи на дисертационното изследване**:

1. Да се изберат подходящи софтуерни инструменти за повишаване на творческото мислене.
2. Разработване на система от задачи, чрез които да се реализира поставената цел.
3. Анализиране на предимствата на системата учебни материали за преподаване на геометрични задачи с помощта на ДГС *Sam* и *GeoGebra*.
4. Обосновка на методите, дидактическите похвати и тяхното въздействие върху учениците при обучението по математика с приложение на ДГС.
5. Провеждане на педагогически експеримент с цел проверка на основната хипотеза, формулирана в настоящия дисертационен труд, анализ и интерпретация на получените резултати, формулиране на изводи.

Методи на изследване

Методическият подход, който се използва за осъществяване на изследването е диагностична процедура за контрол на знания, умения и в известна степен компетентности. За реализиране на целите и задачите в настоящото изследване и за проверка на хипотезата са използвани още следните методи:

- Проучване на педагогическа, психологическа, методическа и учебна литература, свързана с проблематиката на настоящето дисертационно изследване, за изграждане на теоретичната основа на изследването.
- Теоретични и емпирични изследователски методи, като наблюдение, сравнение, анализ, синтез, моделиране, теоретични обобщения, групови дискусии, беседи с действащи учители по математика, тестове.

- Използване на натрупан личен опит при обучението по математика и при обучението по математика с приложение на ДГС в училище;
- Дидактически експеримент;
- Математико-статистически методи за обработка на експерименталните данни;
- Използване на инструментариум, включващ система от задачи, тестове и изпитни задачи, за проверка знанията и уменията на учениците.

Кратко съдържание на дисертационния труд

Дисертационният труд е написан на 186 страници и се състои от въведение, три глави, заключение, библиография и четири приложения.

Във **Въведението** са описани основните характеристики и специфики на използваните софтуерни продукти *Sam* и *GeoGebra*, които се използват при решаване на системата от задачи по геометрия. За провеждане на качествено обучение чрез използване на ДГС задължителни условия са наличието на техническа обезпеченост за всеки ученик и предварителното запознаване със софтуерните продукти, които ще се използват за осъществяване на този методически подход на обучение. Направен е преглед и анализ на използваните инструменти *Размяна на крайна и безкрайна точки*, както и *Свързани фигури*. Разяснени са и други свързани с темата понятия, теореми и теоретични постановки. Обосновано е защо се разглежда точно тези теми и се преподават чрез тези инструменти.

В **Глава I** са представени осъществени дейности по темите:

- Средна отсечка, изучавана в 8. клас
- Медицентър, изучаван в 8. клас
- Описани четириъгълници, изучавани в 8. клас
- Геометрични фигури, изучавани в 5. клас с ученици-билингви.

Докато в първите две теми са представени системи от задачи, които учениците в голяма степен експериментират и реализират сами, то в другите две теми ДГС *Sam* се използва преобладаващо за демонстрация от учителя с последващо самостоятелно експериментиране от учениците. Темата *Описани четириъгълници* завършва с разглеждане на едно обобщение на задача от 53-та международна олимпиада по математика, Аржентина, 2015г., родено с инструментариума на ДГС *Sam* и е насочено към учениците с по-задълбочени интереси в областта на математиката с цел да обогати техните възможности за творчески изследвания. Последната тема показва, че предлаганият методически подход е приложен, изследван и дава добри резултати и в специфичната среда на обучение на ученици-билингви.

В **Глава II** след въвеждаща част се разглеждат две теми: една задача от 19-та младежка балканска олимпиада по математика, Сърбия, 2012г., и е развита в пълнота темата, която е и цел на изследването *Сечение на многостен с равнина*. Логическата свързаност на тези теми е използването на ДГС *GeoGebra*.

Разглежданата задача от 19-та младежка балканска олимпиада е да създаде пълнота в обхвата на изследването с използване на ДГС *GeoGebra* при решаване на задачи с ученици с повишен интерес към математиката.

По темата *Сечение на многостен с равнина* са дадени основните конструкции, методите на пресечниците и проекциите и задача, чрез която се въвеждат учениците в темата. Подготовката на учениците чрез демонстрация от учителя на възможностите на ДГС стимулира последващата творческа активност у тях. В тази глава е изяснена и основната концепция за целесъобразността и полезността от наличието на такъв модел, както и изборът на съответен методически инструментариум.

Изяснени са аргументите за направения избор на:

- Методика и технология за организиране и провеждане на обучението по математика с използване на предложената концепция и избрания методически инструментариум
- Конкретно софтуерно приложение за интегриране в процеса на обучение по математика.

Глава III е посветена на диагностичната процедура, като се разяснява теоретичната, методическа и експерименталната постановка.

Уточняват се аргументите и детайлите, свързани с планирането и организирането на педагогическия експеримент, за оценяване на ефективността на предложения технологичен модел. Описват се избраните експериментални групи и пакета от критерии и показатели за оценка на резултатите от обучението на учениците от експерименталните групи.

Описан е проведения педагогическия експеримент. Резултатите от изследването са обработени със статистически средства, извършен е съответен анализ, формулирани са изводи и заключения от проверка на работната хипотеза.

В **Заключението** са представени постигнатите резултати, формулирани са основните приноси, доклади и публикации за резултатите от дисертационния труд и са представени някои перспективи за бъдещо развитие.

В **Приложенията** са включени: Анкета – ученици - билингви; Тест; Анкетата за експертна оценка; Резултатите от проведеното тестване.

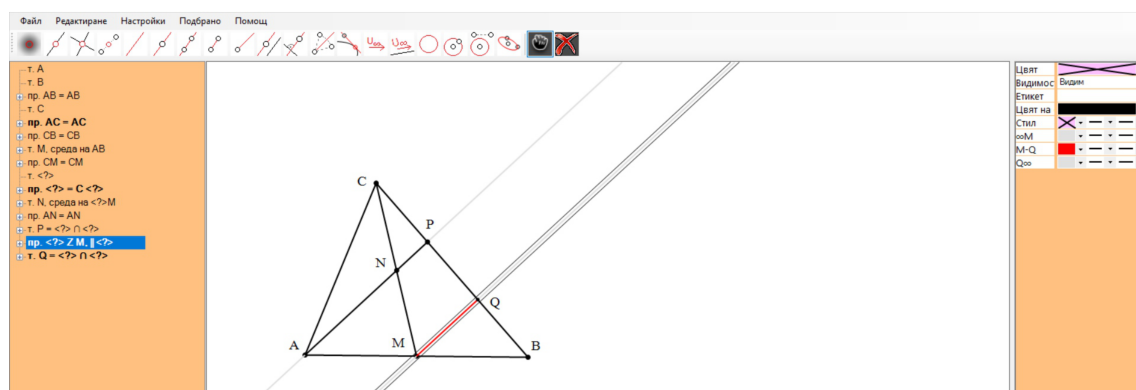
Въведение

Характеристики на специализираните динамични геометрични софтуери *Sam* и *GeoGebra*

За да отговори на нуждите на времето, в което живеем - изграждане на хора със солидни знания и компетенции (включително математически знания и технологични умения), малък колектив на ФМИ на ПУ (авторите на (Златанов & Царева, 2014a,b) и студентът Самет Караибрямов, работещ като програмист след дипломирането си във ФМИ на ПУ), споделяйки мнението, изразено в (Kortenkamp & Dohrmann, 2010) („софтуерът за образователна употреба трябва да бъде ограничен само до голи нужди“) създава специализирания ДГС *Sam* за интерактивно обучение на студентите по синтетична геометрия. Главна част от програмата се съдържа в двете дипломни работи на Самет Караибрямов (Караибрямов, 2010, 2011). Работата стартира през 2009 година. Творческото участие на студентите в учебния процес (Златанов & Царева, 2014b) и особено фактът, че за Самет обучението по синтетична геометрия е един непрекъснат изследователски и творчески процес както и работите (Гроздев et al., 2014; Гроздев & Ненков, 2012a,b, 2013, 2014, 2015; Трифонова et al., 2013; Grozdev & Nenkov, 2017) утвърждават мнението, че обучаващите се на всички нива от образователната система се изкушават от новите технологии повече от всички други. ДГС *Sam* има две версии *SamSchool* предлагащ динамична среда за чертане (Златанов et al., 2012a; Karaibriamov et al., 2012, 2013) и *SamFull*, който съдържа *SamSchool* и модул за взаимно пресичане на многостени.

Както е известно *GeoGebra* е добре развит универсален динамичен геометричен софтуер и естествено с по-големи възможности от специализирания ДГС *Sam*. Особено полезно предимство на *GeoGebra* е запазването на структурите след промени в дефинициите на обектите в прозореца „Свойства на обекта“ (Object properties). Въвеждането на оператора (Танева, 2015а) *Размяна на крайна и безкрайна точки* в *GeoGebra* я обогатява несъмнено, което е видно от (Tsareva & Zlatanov, 2016; Zlatanov, 2014, 2017).

Чертожните инструменти -17 на брой са представени в една хоризонтална лента в горната част на екрана Фигура 1.



Фигура 1. Интерфейс на ДГС *Sam*

Едно от предимствата на ДГС *Sam* е възможността за презентация на решението „стъпка по стъпка“ или на етапи, избрани от ползвателя. Това се осъществява леко чрез панела, разположен долу в ляво. Първоначално решението се етира, а после при желание на ползвателя, след кликуване върху правоъгълника с етикет „Етапи“ към решението се добавят – коментар (обяснение), касаещ текущото състояние на чертежа; изображения.

Дефиниране на безкрайни елементи и функцията *Размяна на крайна и безкрайна точки* в динамичните геометрични софтуери *Sam* и *GeoGebra*

ДГС *Sam* включва в инструментите си безкрайна точка, а в менюто си специалната функция *Размяна на крайна и безкрайна точки*. Новите елементи на ДГС *Sam* дават възможност да се обобщават задачи и да се твори.

Абстрактната аксиоматична структура на проективните пространства може да бъде реализирана в различни модели (Coxeter, 1949a; Царева, 2010). Най-широко разпространеният модел е Евклидовият, където се изпълняват и повечето чертежи. Този модел е създаден, разширявайки Евклидовото пространство чрез въвеждане на безкрайните елементи. Този модел позволява и стимулира прилагането на проективни методи при решаване на задачи от Евклидовата геометрия. Често тези решения са значително по-кратки и насочват ползвателят им към естествени обобщения на разглежданите задачи (Zlatanov, 2018).

Определение 1. (Coxeter, 1949a) *Ще казваме, че две прави се пресичат в безкрайна точка, когато те са успоредни.*

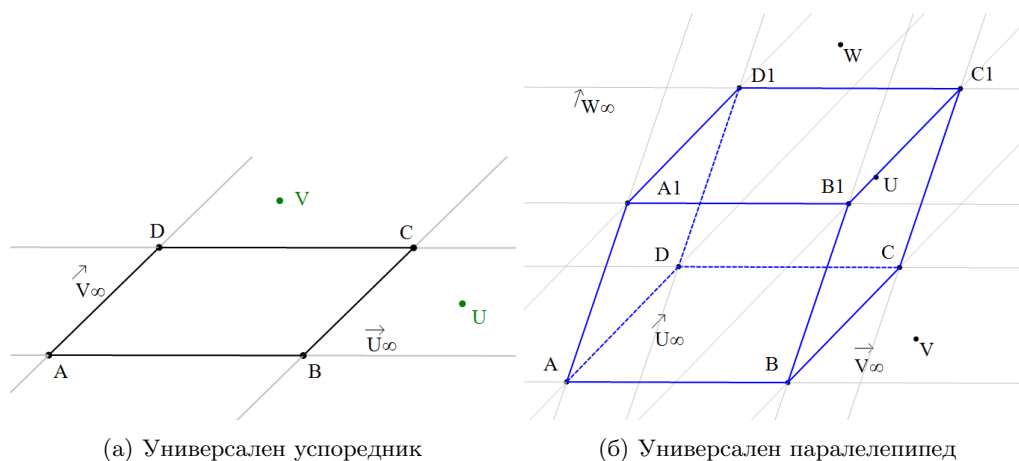
Под ръководството на един от авторите на ДГС *Sam*, доц.Б. Царева е проведен експеримент в МГ Пловдив от Бистра Танева (учител по информатика и информационни технологии) с учениците от 5 клас. В часовете по информационни технологии учениците са въведени в света на динамичните геометрични софтуери *Sam* и *GeoGebra* (Танева, 2015a,b).

Избран е емпиричен подход за въвеждане на понятието безкрайна точка. Макар че то е ново за учениците и не е включено в учебното съдържание, резултатите от проведената анкета с единствен въпрос и три възможни отговора показват, че повечето ученици са усвоили новото понятие. С останалите ученици е проведено допълнително разясняване, за да бъдат готови всички за неговото приложение.

Свързани фигури

Конструкция 1.1 (Karaibriamov et al., 2013) Избираме произволните крайни точки A, U, V и две произволни безкрайни точки U_∞ и V_∞ (Фигура 2а). Не използваме инструмента „успоредни прави“. Констрираме правите AB и AD , като прави през точките AU_∞ и AV_∞ . Избираме точките $B \in AU_\infty$ и $D \in AV_\infty$. Констрираме правите BC и DC , като прави през точките BV_∞ и DU_∞ и конструираме $C = BV_\infty \cap DU_\infty$.

Определение 2. Успоредникът $ABCD$ (Фигура 2а), построен съгласно Конструкция 1.1 се нарича универсален успоредник.



(а) Универсален успоредник

(б) Универсален паралелепипед

Фигура 2

Конструкция 1.2 (Karaibriamov et al., 2013) Нека основата $ABCD$ е универсален успоредник (Определение 2) с безкрайни точки върху неговите страни U_∞, V_∞ (Фигура 2а). Избираме още една произволна крайна точка W и още една произволна безкрайна точка W_∞ . Построяваме правите $AW_\infty, BW_\infty, CW_\infty$ и DW_∞ , върху които ще лежат околните ръбове. Върхът A' е произволна точка върху правата AW_∞ .

Следвайки (Karaibriamov et al., 2013) въвеждаме следното определение:

Определение 3. Паралелепипедът $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, построен съгласно Конструкция 1.2 се нарича универсален паралелепипед.

Определение 4. Фигурите, получени една от друга чрез прилагане на функцията Размяна на крайна и безкрайна точки се наричат свързани фигури.

Илюстрирани са примери на свързани многостени.

Следващата основна конструкция, която ще използваме касае темата „Сечение на многостен с равнина“. Тя е предложена от авторите на (Tsareva & Zlatanov, 2016), защото осигурява с решаването на една конкретна задача от сечение на универсалния паралелепипед с равнина

да се получат решенията на набор от задачи за свързаните с него тела, както и решенията на задачи, при които равнината на сечението се променя в допустими граници. Този иновативен подход се гради върху съществената употреба на безкрайните точки и приложението на функцията *Размяна на крайна и безкрайна точки* и отказ от използване на афинното свойство „пресечниците на две успоредни равнини с трета равнина са успоредни прави“. В основата на този подход стои проективното свойство при централно проектиране да се съхранява инцидентността на основните обекти(точки, прави и равнини). Определят се прободните точки на правите, върху които лежат всички ръбове на паралелепипеда с равнината на сечението α . Лесно се съобразява, че намирането на пресечниците на равнините на две от стените на многостена с α е достатъчно, не само за да се определят прободните точки на правите, върху които лежат ръбовете на паралелепипеда, инцидентни с тези равнини, но и се гарантира наличието на две общи точки на пресичане на равнините на останалите четири стени на паралелепипеда с α . След това могат да се определят и останалите прободи.

Конструкция 1.3 За облекчение на читателя Конструкция 1.3, представена в (Tsareva & Zlatanov, 2016) ще бъде описана чрез следната задача:

Задача 1. *Намерете сечението на паралелепипеда $ABCD A' B' C' D'$ с равнината α , определена от точките P , Q и R , ако две нейни точки лежат в равнината на една и съща стена на паралелепипеда $ABCD A' B' C' D'$, а третата точка е избрана произволно.*

Използвани са и теореми от проективната геометрия: Теорема на Пап, Теорема на Паскал и Теорема на Брианшон (Coxeter, 1949a; Царева, 2010).

Глава I

Система от задачи, подходящи за решаване чрез използване на ДГС Sam

В Глава I са разгледани възможности за изследователски ориентирано обучение с използването на ДГС Sam. Предимствата на изучаване на геометричните фигури в динамична среда са утвърдени и безспорни. Предлагаме нов подход в изучаването на теми от училищния материал, а също така и едно възможно обобщение на задача от 53-та международна олимпиада по математика.

1.1 Модел на преподаване чрез ДГС при изучаване на средна отсечка на триъгълник

Интерактивните динамични среди са сред новите предизвикателства пред учителя за мотивиране на учениците за учебен труд. Основна цел на иновациите е да се създаде учебна среда, в която учениците да могат да експериментират със свои идеи и хрумвания, да се почувстват откриватели, достигайки сами до твърденията, да правят обобщения, развивайки абстрактното си мислене, характерно за математиката.

Въвеждане на понятието средна отсечка на триъгълник, експериментално установяване на свойствата ѝ, формулиране на твърдения и доказването им.

Задача 1. *Начертайте с помощта на ДГС Sam произволен триъгълник ABC и средната му отсечка MN (M е среда на AC , N е среда на BC). Открийте зависимости между AB и MN .*

Учителят коментира възможностите за избор на свободните обекти. Коментираме как да сравним дължините на AB и MN . Така се стига до формулирането на следната

Теорема 1. *Права, минаваща през средата на страна на триъгълника и успоредна на друга страна, пресича третата страна в нейната среда.*

Провежда се доказателството с активното участие на учениците. След това учителят заедно с учениците доказват хипотезата и вече я формулират като Теорема 2.

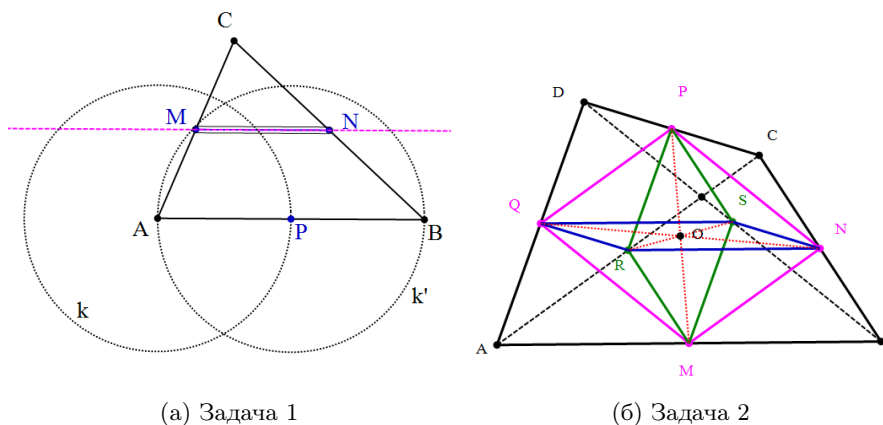
Теорема 2. *Всяка средна отсечка в триъгълника е успоредна на една от страните му и е равна на половината от нея.*

За упражняване на усвоените знания се задават няколко изчислителни задачи с възходяща градация на трудността.

В учебника за 8 клас (Лозанов et al., 2009) има 11 задачи, чийто общ корен е следната задача:

Задача 2. *Даден е произволен четириъгълник. Нека точките M, N, P, Q, R, S са среди съответно на отсечките AB, BC, CD, DA, AC, BD . Да се докаже че:*

- четириъгълникът $MNPQ$ е успоредник (Теорема на Вариньон);*
- четириъгълникът $MSPR$ е успоредник;*
- четириъгълникът $NSQR$ е успоредник;*
- правите MP, NQ, RS минават през една точка.*

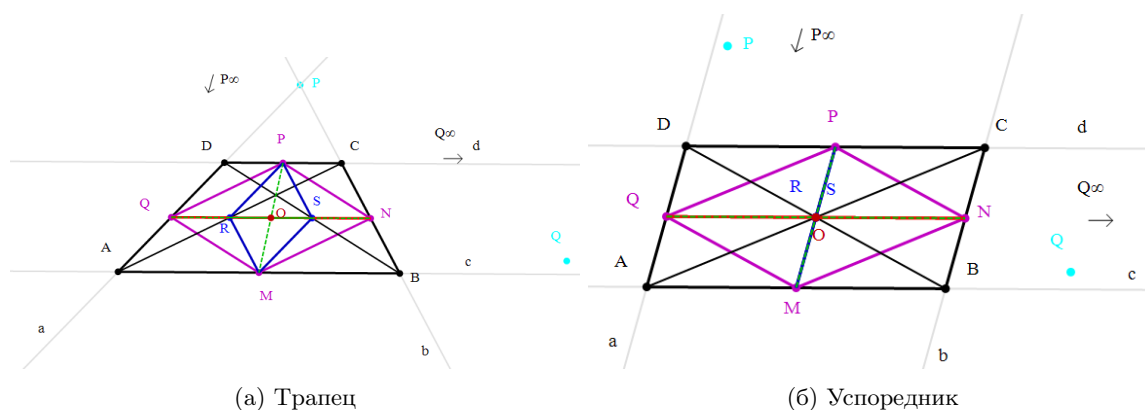


Фигура 3

Учителят въвежда понятието средна отсечка на четириъгълник. Визуализацията подпомага учениците в усвояването на новото понятие и във формулирането на вече доказаното тяхно свойство: *Средните отсечки на четириъгълника имат обща среда.* Наличието на безкрайни точки в ДГС Sam и функцията $PKBT$ позволява на учениците да проследят визуално какво се случва с успоредниците $NSQR$ и $MSPR$, когато четириъгълникът $ABCD$ се трансформира последователно в трапец (след размяната на Q с Q_∞ , Фигура 4а) и успоредник (след размяната и на P с P_∞ , Фигура 4б).

Задача 3. *Даден е четириъгълник $ABCD$. Точките M, N, P, Q , са среди съответно на страните AB, BC, CD, DA . Докажете, че:*

- $MNPQ$ е правоъгълник, тогава и само тогава когато $AC \perp BD$;*
- $MP = NQ$, тогава и само тогава когато $AC \perp BD$;*
- $MNPQ$ е ромб, тогава и само тогава когато $AC = BD$;*
- $MNPQ$ е квадрат, тогава и само тогава когато $AC \perp BD$ и $AC = BD$.*



Фигура 4. Задача 2

Учениците са подготвени за следващите задачи, които се задават за домашна работа.

Задача 4. Направете динамичен чертеж на четириъгълник $ABCD$, така че при означенията на Задача 3 успоредникът $MNPQ$ да бъде: а) правоъгълник; б) ромб; в) квадрат.

Задача 5. Даден е четириъгълник $ABCD$. Точките M, P, R, S са среди съответно на страните AB, BC, CD, DA . Докажете, че:

- а) $MSPR$ е правоъгълник $\Leftrightarrow AD \perp BC$;
- б) $MSPR$ е ромб $\Leftrightarrow AD = BC$;
- в) $MSPR$ е квадрат $\Leftrightarrow AD \perp BC$ и $AD = BC$.

Задача 6. Направете динамичен чертеж на четириъгълник $ABCD$, така че при означенията на Задача 5 успоредникът $MSPR$ да бъде:

- а) правоъгълник; б) ромб; в) квадрат.

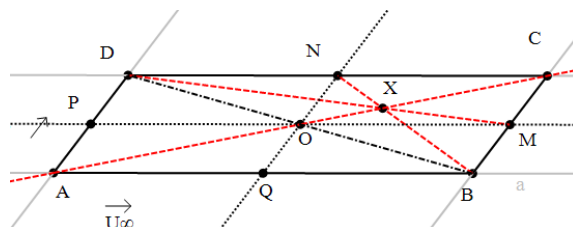
1.2 Приложение на ДГС при изучаване на медицентър на триъгълник

Експерименталното установяване на свойствата на медицентъра на триъгълника може да започне със следната задача:

Задача 7. Да се построят медианите на произволен триъгълник.

Учителят поставя следващото задание:

Задача 8. Да се провери в какво отношение се делят медианите от общата им точка.



Фигура 5. Задача 9

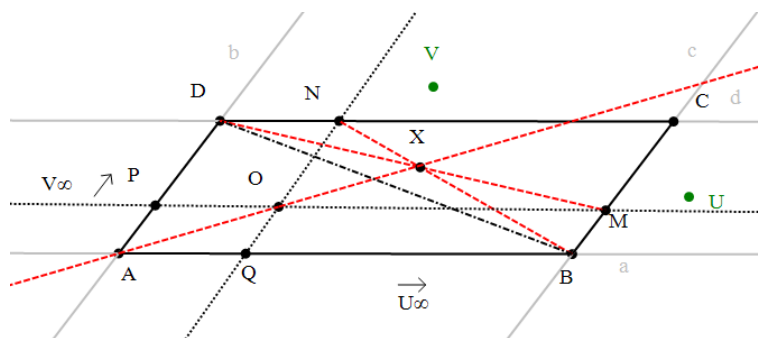
Следва формулиране на твърдението:

Теорема 3. Медианите на триъгълника се пресичат в една точка, която ги дели в отношение 2:1, считано от съответния връх.

И в доказването на тази теорема се стимулира активното участие на учениците. Следват приложения на получените знания в задачи.

Задача 9. Даден е успоредник $ABCD$. Точките M, N, P, Q са средите съответно на страните BC, CD, DA, AB и O е пресечната точка на MP и NQ . Да се докаже, че точките A, O и $X = BN \cap DM$ лежат на една права (Фигура 5).

Задача 10. Даден е успоредник $ABCD$ и точка O във вътрешността му. През точка O са построени прави, успоредни на страните му, които ги пресичат в точките M, N, P, Q . Да се докаже, че точките A, O и $X = BN \cap DM$ лежат на една права (Фигура 6).

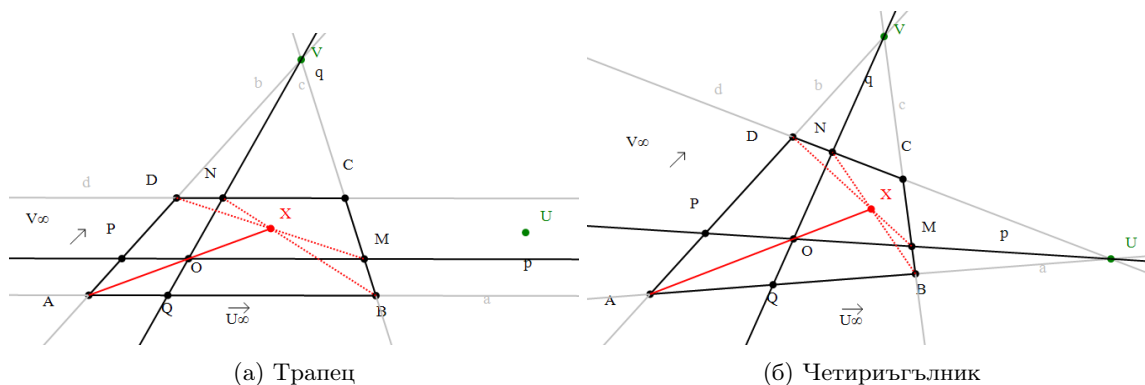


Фигура 6. Задача 10

Учениците самостоятелно извършват размяната на V_∞ с произволната крайна точка V и получават Фигура 7а, а после от нея след размяната на U_∞ с произволната крайна точка U получават и Фигура 7б.

Динамичните чертежи показват, че точките A, O и X продължават да лежат върху една права. Заедно с учениците се формулират задачите, касаещи трапец (Фигура 7а) и произволен четириъгълник (Фигура 7б).

Задача 11. Даден е произволен четириъгълник $ABCD$ и точка O във вътрешността му. Нека $AB \cap CD = U$, $BC \cap AD = V$. Построени са правите OU и OV , които пресичат страните на $ABCD$ в точките M, N, P, Q . Да се докаже, че точките A, O и $X = BN \cap DM$ лежат върху една права.



Фигура 7. Задача 11

Следва последният етап в изследването – да се докажат констатираните факти. Учениците без затруднение прилагат Теоремата на Пап за двете тройки точки (B, V, M) и (D, U, N) , предложени от учителя.

1.3 Развитие на творческите възможности у ученици чрез изучаване на описаните четириъгълници в динамична среда. Обобщение на задача от 53-та международна олимпиада по математика, Аржентина 2012г.

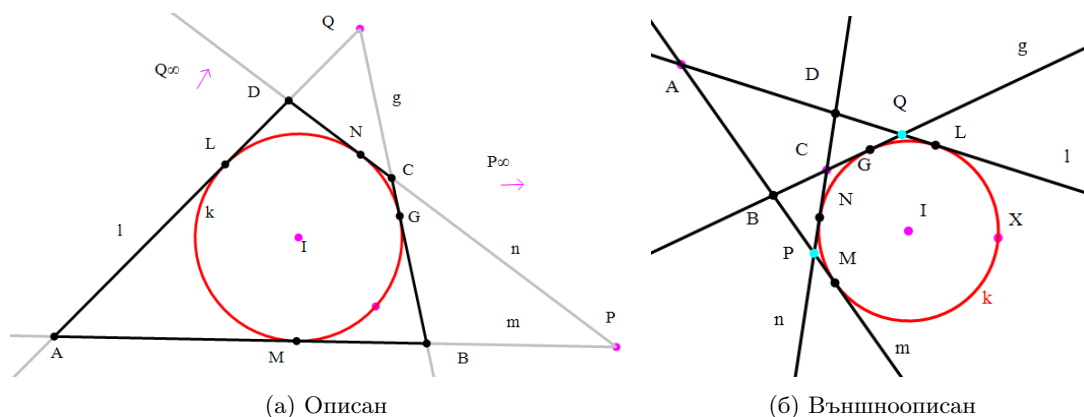
В тази част показваме как и теоретичната разработка на една тема, и представянето ѝ в учебните часове могат да направят обучението по математика интересно, интерактивно, креативно, самостоятелно или в термините на С.Курдюмов и Е.Князева „пробуждащо“ [10].

Определение 1. Четириъгълник, на който страните се допират до окръжност, се нарича описан около окръжността (Фигура 8а).

Определение 2. Четириъгълник, на който продълженията на страните се допират до окръжност, се нарича външноописан около окръжността (Фигура 8б).

Задача 12. Да се построи четириъгълник $ABCD$, описан (външноописан) около окръжност $k(I; r)$.

Построяването на четириъгълник, описан около дадена окръжност $k(I; r)$ може да се сведе до построяване на двете двойки допирателни прави към $k(I; r)$ през две произволни външни точки X и Y за k . Съществуват два варианта за избора на точките X и Y : Вариант 1, когато X и Y са срещуположни върхове за описания (външноописания) четириъгълник и Вариант 2, когато X и Y са диагоналните точки P и Q на описания (Фигура 8а) (външноописания (Фигура 8б)) четириъгълник, разглеждан като пълен четириъгълник. Вариантът 2 е предпочетен, защото дава възможност за използване на функцията РКБТ.



Фигура 8. Описан и външноописан четириъгълник

Нека P_∞ и Q_∞ са произволни безкрайни точки. Ако извършим размяната на P с P_∞ , то страните AB и CD ще станат успоредни и описаният четириъгълник $ABCD$ ще бъде трапец. След втората размяна, вече на Q с Q_∞ , описаният трапец $ABCD$ се трансформира в успоредник.

Учениците установяват, че ъглополовящите минават през центъра I на окръжността k , като: за описания четириъгълник l_a, l_b, l_c, l_d са ъглополовящи на вътрешните ъгли, а за външноописания четириъгълник l_a, l_c са ъглополовящи на вътрешни ъгли, докато l_b, l_d са ъглополовящи на външни ъгли.

Разбира се, динамичният чертеж само подпомага откриването и формулирането на твърдението, което трябва да се докаже. Учениците сами достигат до първите характеристики на описан и външноописан четириъгълник.

Теорема 4. Четириъгълникът $ABCD$ е описан около окръжност тогава и само тогава, когато ъглополовящите на три негови ъгъла се пресичат в една точка.

Теорема 5. Четириъгълникът $ABCD$ е външноописан тогава и само тогава, когато ъглополовящите на един вътрешен и външните на двата негови съседни ъгъла се пресичат в една точка.

Теорема 6. Необходимото и достатъчно условие четириъгълникът $ABCD$ да бъде описан е дължините на страните му да удовлетворяват условието $AB + CD = AD + BC$.

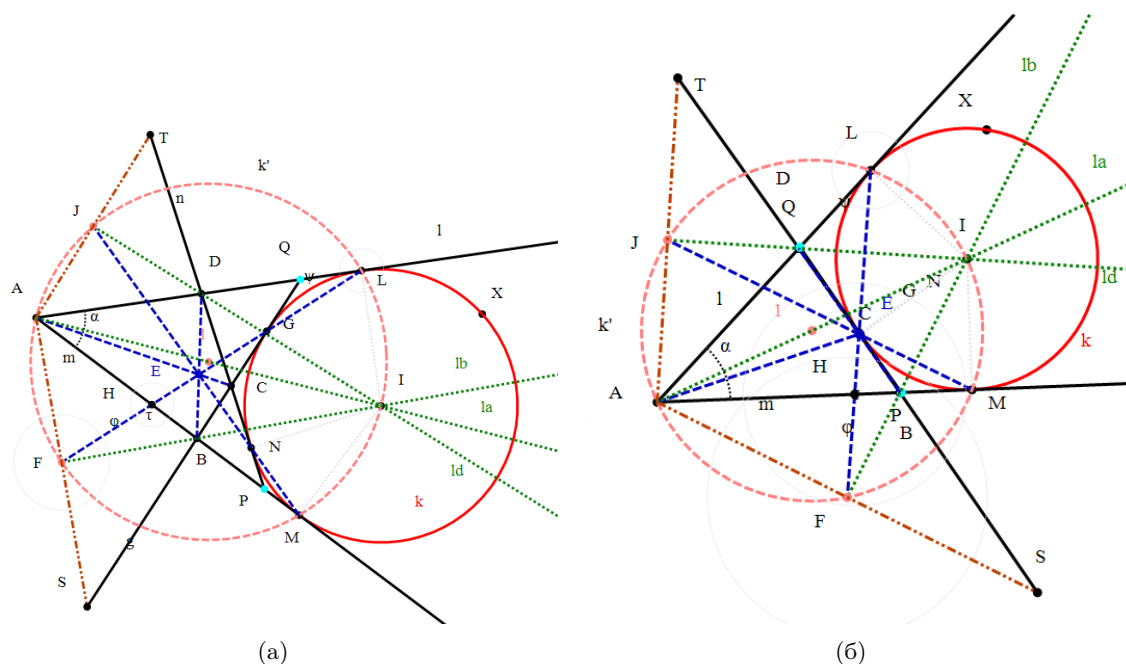
Теорема 7. Необходимото и достатъчно условие четириъгълникът $ABCD$ да бъде външноописан е дължините на страните му да удовлетворяват условието $|AB - CD| = |AD - BC| \neq 0$.

Експериментално учениците сами достигат до твърдение, касаещо конкурантност на четири специални прави за описания (външноописания) четириъгълник.

Теорема 8. Диагоналите на описания (външноописания) четириъгълник и правите съединяващи допирните точки на срещуположните му страни (продълженията на срещуположните му страни) с вписаната (външноописаната) окръжност се пресичат в една точка.

Доказателството на тази теорема със средствата на елементарната математика е много пространно (4, 5 страници), докато двукратното прилагане на Теоремата на Брианшон за правите $tmhng$ и $lmggn$, свързани с четиристранника $mlng$ решава проблема както за описан, така и за външноописан четириъгълник.

Изявените ученици от осми клас вече са подготвени за предизвикателството да участват в обобщаването на следната задача от 53-та международна олимпиада по математика, проведена в гр. Мар дел Плата, Аржентина от 7 до 16 юли, 2012:



Фигура 9. Задача 14

Задача 13. (предложена от Евангелос Психас, Гърция) Центърът на външноописаната окръжност спрямо страната BD на даден $\triangle ABD$ е означен с I . Окръжността се допира до правите AB, BD и AD съответно в точките M, C и L . Правите LC и BI се пресичат в точка F , а правите MC и DI – съответно в точка J . Ако S и T са пресечните точки на BD съответно с AF и AJ , да се докаже, че C е средата на отсечката ST .

Задачата и нейното решение можете да намерите в списание Математика+, 3 (2012), стр.51-52.

Ние предлагаме обобщение на тази олимпийска задача за външноописан четириъгълник (Царева & Тодорова, 2013).

Задача 14. Нека четириъгълникът $ABCD$ е външноописан като удовлетворява условията: $AB+BC = AD+DC$, $AB > CD$ и $AD > BC$. Центърът на външноописаната окръжност е означен с I . Нека окръжността се допира до правите AB, AD, BC, CD съответно в точките M, L, G, N ; правите LG и BI се пресичат в точка F , а правите MN и DI се пресичат в точка J . Ако S е пресечната точка на правите AF и BC , а T е пресечната точка на правите AJ и CD , да се докаже, че отсечките CS и CT са равни.

Фигура 9а е кадър от динамичния чертеж, при създаването на който е избрано точките $M, N, L, G \in k$ да бъдат свободните. Задача 13 се явява частен случай на Задача 14.

1.4 Стимулиране на творческата активност при ученици - билингви чрез динамичен геометричен софтуер

Този параграф съдържа само оценъчната част на публикацията (Гроздев et al., 2014), в която съм съавтор.

Нашият опит потвърди тезата, че учениците с отлична математическа подготовка са убедени в ползата от обучението по математика с компютри и имат положително отношение към него. Интересно е да се отбележи, че е възможно да се създаде положително отношение към математика и у учениците с отрицателни нагласи към предмета и ниски математически умения чрез учене на математика с компютри.

Резултатите от Анкета 1, преди обучението с помощта на ДГС Sam могат да се обобщят по следния начин: Много от учениците нямат трайно знание за елементите на четириъгълника (върхове и страни), поради което не можах да определят вярно съответния брой; Липсва добро познание върху наименованията на изучените четириъгълници. Записът на наименованията не само изобилства с правописни грешки, но подсказва, че и правоговорът им не е усвоен. Това не е неочакван резултат за учениците-роми, които в своята речева практика доминиращо използват майчиния език.

Поставихме си целта: По-добро усвояване на понятията „успоредни прави“, „четириъгълник“, „трапец“, „успоредник“, „правоъгълник“, „ромб“, „квадрат“.

Резултатите от експеримента показват съществена промяна в статистическите резултати. Получихме, че при ниво на съгласие 0,1 можем да твърдим, че функцията на разпределение се променя така, че степента на усвояване на понятията за вида на четириъгълниците се повишава.

Глава II

Изследователски ориентирано обучение с използването на ДГС GeoGebra

В Глава II се подкрепя тезата на настоящата дисертация, но вече използвайки динамичния геометричен софтуер *GeoGebra*. Разгледани са възможностите за използване на *GeoGebra* в

часовете по геометрия, както за илюстрация на известни задачи, така и за генериране на нови задачи.

2.1 Използване на GeoGebra за развиване на творческо мислене на учениците в часовете по геометрия

Разработка (Златанов & Тодорова, 2019) е породена от следната малка училищна задача:

Задача 15. Даден е остроъгълен триъгълник ABC с ортоцентър H и център на вписаната окръжност I . Намерете $\sphericalangle ACB$, ако точките A, B, I, H лежат на окръжност. ((Лозанов *et al.*, 2009), Задача 15 б), стр.213)

В решението на Задача 15 съществено се използва, че $\sphericalangle AHB = \sphericalangle AIB$, защото по условие точките A, B, I, H принадлежат на една окръжност k , т.е. четириъгълникът $ABIH$ е вписан. Веднага възниква въпросът: Задължително ли е точката H да бъде ортоцентър? Какво ще се случи ако запазим само условието четириъгълникът AB_1A_1B , където $A_1 = AH \cap BC$, $B_1 = BH \cap AC$, да бъде вписан. Проверката с чертеж, изработен с помощта на *GeoGebra* веднага даде положителен отговор и ние формулирахме две нови твърдения, породени от Задача 15.

Нека са дадени $\triangle ABC$ и точки $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$ такива, че $\sphericalangle AA_1B = \sphericalangle AB_1B$ и $AA_1 \cap BB_1 = H$. Нека AN е ъглополовяща на $\sphericalangle BAC$, BM е ъглополовяща на $\sphericalangle CBA$ и $AN \cap BM = I$. Да въведем означенията: $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle CBA = \beta$, $\sphericalangle ACB = \gamma$, $\sphericalangle AHB = \delta_1$, $\sphericalangle AIB = \delta_2$, $\sphericalangle AA_1B = \sphericalangle AB_1B = \varepsilon$.

Задача 16. Нека $\triangle ABC$ е произволен като за точките A_1 и B_1 са изпълнени условията A_1/BC и B_1/AC . Да се докаже, че са еквивалентни условията:

а) $\delta_1 = \delta_2$; б) $\varepsilon = \frac{3}{4}\gamma + \frac{\pi}{4}$; в) $\delta_1 = \frac{2}{3}\gamma + \frac{\pi}{3}$; г) $\delta_2 = \frac{2}{3}\gamma + \frac{\pi}{3}$.

Да разгледаме и случая, когато $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$ и още A/CB_2 , където B_2 е пресечната точка на правата AC и окръжността k . Да добавим $\sphericalangle AHB_2 = \delta_3$.

Задача 17. Нека $\triangle ABC$ е произволен като за точките A_1 и B_2 са изпълнени условията A_1/BC и A/CB_2 . Да се докаже, че са еквивалентни условията :

а) $\delta_2 + \delta_3 = \pi$; б) $\varepsilon = \frac{3}{4}\gamma + \frac{\pi}{4}$.

Бихме искали да споменем, че понякога при изчертаването на чертежите с *Geogebra* е необходимо да се конструира по начин, различен от зададените условия в задачата. Това дава допълнителни знания на учениците и може да се разглежда като елемент от темата построяване на геометрични обекти по зададени елементи. Тема, която е трудна за учениците, но с използването на ДГС създава и елемент на игра и предизвикателство, което стимулира овладяването на материала от курса по геометрия в училище.

2.2 Едно обобщение на геометричната задача от 19-та младежка балканска олимпиада по математика, Сърбия 2015г.

Разработка (Starilratov & Todorova, 2019) е поредният пример колко силно динамичните геометрични софтуери подпомагат изследователската работа, защото те позволяват експериментално да се открият нови релации между изследваните обекти, след което следва тяхното теоретично обосноваване. Често се достига до интересни обобщения или откриване на нови геометрични обекти, свързани с изследваната геометрична конфигурация. В случаите, когато предположенията на изследователя не се потвърдят експериментално, се спестяват много излишни усилия и време.

Представяме едно възможно обобщение, инспирирано чрез използването на динамичния геометричен софтуер *GeoGebra*, на геометричната задача от 19th Junior Balkan Mathematical Olympiad June 24-29, 2015, Belgrade, Serbia.

В (Wong et al., 2011) е представена диаграмата за конструиране на формални доказателства. Обобщихме тази диаграма в случая, когато търсим обобщения на задачи или нови зависимости с помощта на ДГС.

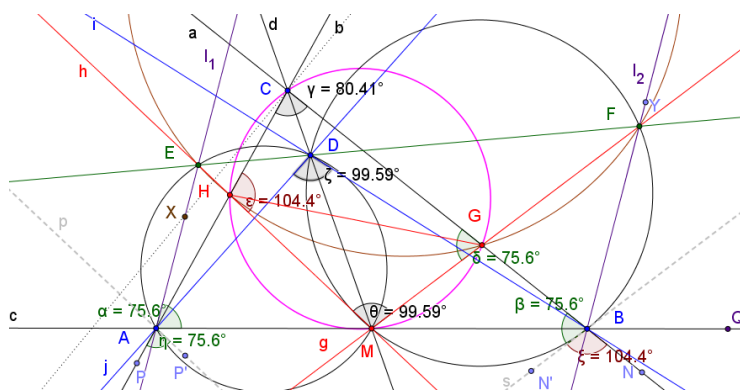
Запознахме група ученици от девети и десети клас на Математическа гимназия „Академик Кирил Попов“, Пловдив, България със следната геометрична задача от 19-та Младежка Балканска Математическа Олимпиада 24-29 юни 2015 г., Белград, Сърбия:

Следвайки (Wong et al., 2011), начертахме дървото на доказателството на Задача 18. Маркирахме ключовите моменти в доказателството в сиво. Естествено възникна въпросът: Ъгълът 90° , който сключват правите l_1 и l_2 с правата AB , както и правите h и g съответно с правите AC и BC , съществен ли е за твърдението $\angle ADB = \angle EMF$ или може да бъде произволен?

Задача 18. Нека ABC е остроъгълен триъгълник. Правите l_1 и l_2 са перпендикулярни на AB и минават съответно през точките A и B . Нека правите h и g , минаващи през средата M на страната AB са перпендикулярни съответно на правите AC и BC и ги пресичат в точките E и F , т.е. $h \cap AC = E$ и $g \cap BC = F$. Ако D е пресечната точка на правите EF и MC , то докажете, че $\angle ADB = \angle EMF$.

Формулирахме хипотеза, явяваща се едно обобщение на Задача 18.

Задача 19. Нека ABC е остроъгълен триъгълник. Правите l_1 и l_2 , минаващи съответно през точките A и B , са успоредни и сключват с правата AB ъгъл α . Нека точка M е средата на страната AB . През M са построени правите h и g , сключващи ъгъл α съответно с AC и CB . Да означим пресечните точки на h с правите AC и l_1 съответно с H и E , а пресечните точки на g с правите BC и l_2 съответно с G и F . Ако D е пресечната точка на правите EF и MC , то докажете, че $\angle ADB = \angle EMF$.



Фигура 10

След дискусията за доказване на обобщената задача, учениците имаха възможност да напишат дървото на неговото доказателство.

Разгледахме и случая, когато $H \parallel ME$, а $G \parallel MF$.

Направи впечатление и следният интересен факт: При фиксиран $\triangle ABC$ точката D се оказва неподвижна и не се влияе от изменението на ъгъл α . Обсъдихме този факт и изяснявайки го достигнахме до следните твърдения:

2.3 Сечения на многостени с равнина

Динамичните геометрични софтуери могат да се използват за илюстриране на сечения на многостени с равнина, както и за демонстриране на общия корен в решенията при на пръв поглед различно дефинирани равнини на сечението.

Съгласно учебните програми учениците се запознават с метода на пресечниците и метода на проекциите за намиране на сечение на многостен с равнина.

Ние използвахме предложената в (Tsareva & Zlatanov, 2016) техника за преподаване на темата „Сечение на многостен с равнина“ при изучаването ѝ с учениците. Съществена предпоставка за това приложение е построяването на паралелепипеда съгласно Конструкция 1.2, а построяването на сечението съгласно Конструкция 1.3.

Равнината на сечението може да бъде зададена по различни начини, но всички те са еквивалентни на задаване на три неколинеарни точки. Между тях може да има и безкрайна точка, отразяваща условие за успоредност на определени обекти. Нека приемем уговорката равнината на сечението α да се задава с точките P, Q, R . Без да намаляваме общността на разглежданията, можем да приемем, че точките P и Q лежат в равнината на стената $ABCD$.

2.3.1 Метод на пресечниците

Започваме с най-простия случай за намиране на равнинно сечение на многостен, за да въведем учениците в някои допълнителни възможности, които предоставя *GeoGebra* за по-нагледно визуализиране на равнинните сечения на многостен.

Задача 20. *Намерете сечението на паралелепипеда $ABCD A' B' C' D'$ с равнината α , определена от точките P, Q и R , където $P \in BC$, $Q \in AB$, $R \in BB'$.*

Използвайки динамиката на *GeoGebra*, забелязваме, че при движение на точките P, Q и R , съответно върху отсечките BC, AB и AA' сечението продължава да е триъгълника PQR , независимо от положението на точките P, Q и R , съответно върху ръбовете BC, AB и BB' .

Сега отново само с метода на пресечниците ще решим по-обща задача, когато точките, определящи равнината на сечението α са произволни точки, лежащи в две от стените на универсалния паралелепипед.

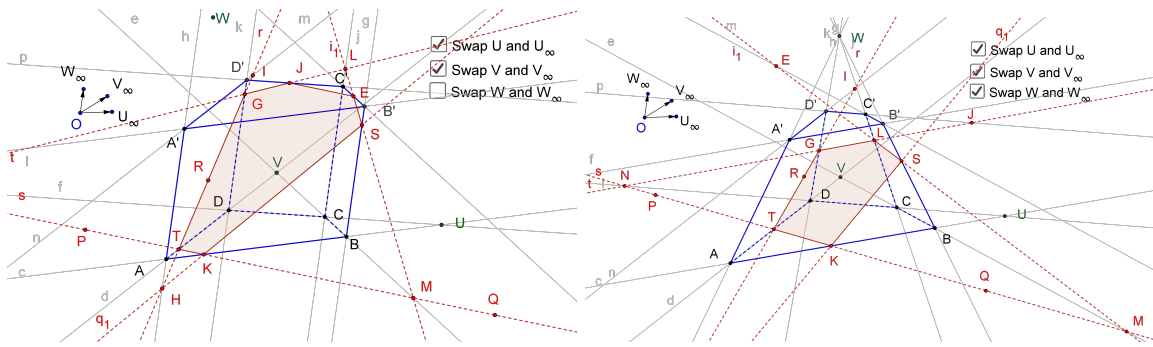
Задача 21. *Намерете сечението на паралелепипеда $ABCD A' B' C' D'$ с равнината α , определена от точките P, Q и R , ако P и Q са произволни точки от равнината на стената $\gamma(ABCD)$, а R е произволна точка от равнината на стената $\delta(ADD' A')$.*

Намерете сеченията на равнината $\alpha(P, Q, R)$ и със свързаните фигури на паралелепипеда $ABCD A' B' C' D'$.

Решението на първата част на задачата се реализира веднага като резултат от приложението на Конструкция 1.3.

За да решим втората част на задачата, използваме аплета *РКБТ*.

С малко повече усилия е възможно да илюстрираме задачата, когато точка Q се замени с безкрайната точка на правата BC , която означаваме с Q_∞ . На Фигура 11 са представени сеченията на равнината $\alpha(P, Q_\infty, R)$ с две свързани фигури на паралелепипеда $ABCD A' B' C' D'$.

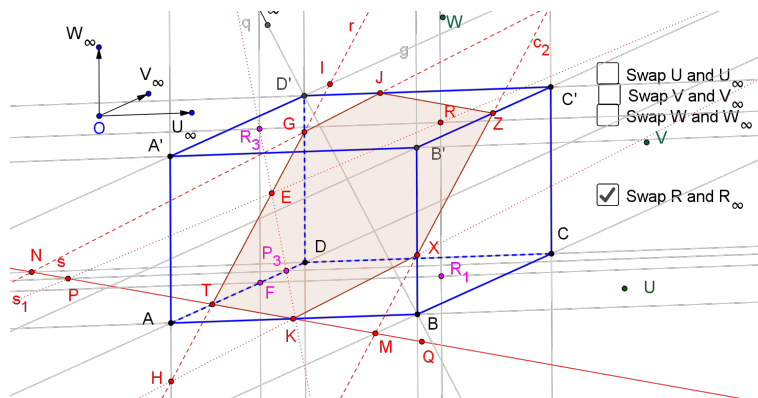


Фигура 11. $ABCD A' B' C' D'$ е призма с основа произволен четириъгълник или е пресечена пирамида с основа произволен четириъгълник

2.3.2 Метод на проекциите

Методът на проекциите затруднява учениците повече от метода на пресечниците.

Задача 22. Намерете сечението на паралелепипеда $ABCD A' B' C' D'$ с равнината α , определена от точките P , Q и R , ако две нейни точки P и Q лежат в равнината на стената $ABCD$, а третата точка R е избрана произволно.



Фигура 12. Задача 22

Търси се втора точка от пресечницата r на равнините $\alpha(P, Q, R)$ и $\delta(ADD'A')$. Вече има една известна точка от тази пресечница и тя е T . Проекциите на точките P и R върху равнината δ при проекционен център U_∞ са съответно P_3 и R_3 . Тогава точката $E = PR \cap P_3R_3$ е търсената втора точка от пресечницата r на α и δ (Фигура 12).

Ако $P \in AD$, тогава $P = P_3 = T = E$ и правата TE не може да се построи. Точките P и Q са равностойни, поради което можем да построим проекцията $Q_3 = QU_\infty \cap AD$. Тогава $E' = QR \cap Q_3R_3$ е търсената втора точка от пресечницата r на α и δ .

Следва поредица от задачи, при които се конкретизира местоположението на някои от точките P , Q и R .

Иновативният метод, предложен чрез Задача 22, позволява бързо конструиране на равнинното сечение на универсалния паралелепипед и на свързаните с него многостени.

Задача 23. Намерете сечението на паралелепипеда $ABCD A' B' C' D'$ с равнината α , определена от точките P , Q и R , ако Q е средата на AB , P лежи в равнината $\gamma(ABCD)$, а R е пресечната точка на телесните диагонали, т.е. $R = AC' \cap BD'$.

Предефинираме $R = AC' \cap BD'$ и $Q = \text{Midpoint}(c)$. Конструкцията на сечението се получава автоматично. Забелязваме, че TE е успоредна на QR . Доказваме с учениците, че това наистина е така при произволен избор на точката $P \in \gamma(ABCD)$.

Когато във формулировката на Задача 23 се добави и условието P да е среда на BC , решението се получава автоматично.

Запознаването с иновативния подход, основаващ се на Конструкция 1.3, не означава отказване от класическите методи, залегнали в учебната програма, а само тяхното обогатяване. В подкрепа на тази теза да разгледаме следната задача

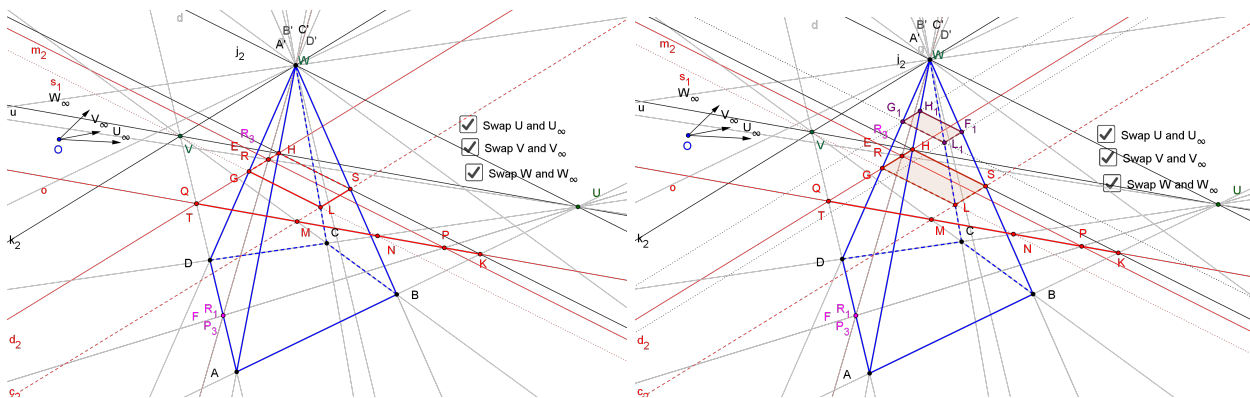
Задача 24. Нека е дадена пресечена четириъгълна пирамида $ABCD A' B' C' D'$. Намерете сечението ѝ с равнината α , която минава през средите на ръбовете AB и BC и също така α е успоредна на правата BB_1 , където B_1 е произволна точка от ръба DD' .

Представени са две решения на Задача 24. Първото е класическото, което се използва в обучението в училище, а второто се основава на основната конструкция от Задача 22. Коментираме с учениците, че двете построения дават едно и също сечение.

2.3.2 Импровизация върху Задача, когато паралелепипеда се замени с пирамида

Прилагаме Задача 22 при решения на задачи за намиране на сечения на равнина с пирамида или двойна пирамида при допълнително изискване за вида на сечението. Разглеждаме случаите, когато сечението е успоредник, правоъгълник, ромб или квадрат. Резултатите от настоящия параграф са публикувани в (Teofilova & Todorova, 2020).

Задача 25. (Основна задача). Определете равнината α , така че сечението ѝ $HGLS$ с пирамидата $ABCDW$, където $ABCD$ е произволен четириъгълник, да бъде успоредник.



Фигура 13. Задача 25 и Задача 26

Задача 26. Да се построи сечение $H_1 G_1 L_1 S_1$ на пирамидата $ABCDW$, което е успоредно на сечението $HGLS$.

Задача 27. Изберете върхът W на пирамидата $ABCDW$, където $ABCD$ е произволен четириъгълник, така че сечението $HSLG$ с равнината α да бъде правоъгълник.

Задача 28. Изберете върхът W на двойната пирамида $ABCDW A' B' C' D'$, където $ABCD$ е произволен четириъгълник, така че сечението $HSLG$ на равнината α с горната част на двойната пирамида да бъде ромб.

Задача 29. Изберете върхът W на пирамидата $ABCDW$, където $ABCD$ е произволен четириъгълник, така че сечението $HGLS$ с равнината α да бъде квадрат.

Използвайки творческия си потенциал, учениците могат да формулират и получат решенията на поредица от нови задачи, включващи и пресечени пирамиди, както и повече от две специализирани успоредни сечения.

Глава III

Диагностична процедура за контрол на знанията и уменията на учениците

3.1 Теоретична постановка

Както споменахме и в предходната глава бе избрана темата за „Сечение на многостен с равнина“ да я предадем чрез използване на динамична геометрична среда и след това да проведем диагностична процедура с цел да оценим създадения от нас тест, но и да потвърдим направената от нас хипотеза в началото на дисертационния труд.

Дългогодишният опит, ни е убедил в полезността на ситуацията, при която ученикът става активен участник в учебния процес. Използването на ДГС позволява на учениците да се почувстват откриватели, когато избраната тема е благоприятна за прилагане на ДГС. Настоящата диагностична процедура разглежда проблема за организация и реализация на системен контрол от страна на учителя при изучаване на темата „Сечение на многостен с равнина“ в динамична геометрична среда. Проверката на знанията на учениците е учебна дейност, специално организирана от учителя, чрез която се установяват резултатите от учебния процес. Диагностицирането е постоянен процес, чрез който от една страна се установява математическото развитие на учениците, а от друга страна се извеждат закономерности и се набелязват промени за усъвършенстване на методиката на преподаване.

3.1.1 Анализ на учебното съдържание по математика в 11 клас второ равнище

В настоящата разработка е описана диагностична процедура при изучаване на ядрото фигури и тела, и по-конкретно Тема 5. Стереометрия. Многостени, с помощта на съвременни софтуерни продукти. Ето защо ще отделим по-специално внимание на стандартите и очакваните резултати на ниво учебна програма за тази тема.

Изучавайки темата сечение на многостен с равнина, учениците трябва да използват умело основните дефиниции, аксиоми и теореми на стереометрията.

При подготовката на темата сме се придържали към (Додунеков et al., 2002), с който се работи в училище.

3.1.2 Проверка и оценка на знанията чрез тестове

Проблемът за проверката и оценката на знанията и уменията на учениците никога не е губил своята актуалност. Търсят се нови форми и средства за проверка на придобитите знания. Оценката трябва да е обективна и обоснована.

За метод за проверка и оценка постиженията на учениците при изучаване на определено учебно съдържание са удачни дидактическите тестове. Към дидактическия тест се предявяват строго определени изисквания за обективност, надеждност, съдържателност и валидност. Има разработени специални процедури за проверка на тези качества.

Дидактическият тест е стандартизирана система от въпроси и задачи, проверяваща в еднакви условия нивото на обученост или готовността за обучение. Той е вид тест за достижение (Иванов, 2006)

Широкото навлизане на дидактическите тестове в учебния процес се определя от качествата, които притежават: обективност, валидност, надеждност, трудност и съдържателност. В комплект с други форми и методи на контрол, тестовете допринасят за активно участие на всички ученици в учебния процес при равни условия. Освен, че провокират активността, те възбуждат любопитството и познавателните интереси на учениците, съкращават времето за проверка, дават точна представа за степента на усвояване на знанията от учениците. Дидактическите тестове трябва да съответстват по съдържание и форма на възрастовите и психофизиологичните особености на тестираните ученици.

В диагностичните изследвания се използват главно нестандартизирани тестове. Създават се от учителите за нуждите на обучението. Особено внимание се отделя на определянето на целите и изискванията за усвояване на конкретно учебно съдържание. При конструирането на теста се обръща внимание на подбор на различни по вид и структура задачи, тяхното съчетаване и подреждане.

3.2 Изследователска програма

Целта на диагностичната процедура е: Разработване и изследване на дидактически тест за диагностициране на знанията и уменията на учениците при изучаване на темата „Сечение на многостен с равнина“ от учебното съдържание по математика в 11 клас – профилирана подготовка, в динамична геометрична среда.

Обектно-предметната област на диагностичната процедура е в пряка зависимост и с тази на дисертацията и с постиженията на учениците /знания, умения, компетенции/ чрез използването на динамичен геометричен софтуер да повишават нивото на компетентност, и да изградят умения за прилагането му при намиране на равнинни сечения на многостени в часовете по Математика – 11. клас ПП. Предмет на диагностичната процедура е изследване качествата на диагностичен тест, проведен в ДГС за проверка на знанията и уменията на учениците по темата „Сечение на многостен с равнина“ в часовете по Математика – 11.клас ПП.

Изследването се извърши с ученици от $XI^{B,G,D,E}$ класове на МГ „Акад. Кирил Попов“ – гр. Пловдив, обучаващи се в паралелки с природоматематически профил и интензивно изучаване на английски език, немски език и френски език. Класовете са съставени съответно: XI^B – 27 ученици, XI^G – 28 ученици, XI^D – 26 ученици, XI^E – 25 ученици. В тестирането не участват 5 ученици, поради здравословни проблеми.

Основните методи, включени в диагностичното изследване са: *тестове, анкетиране, експертна оценка, статистически методи за обработка на резултатите.*

Критериите за оценка на изследванията трябва да отговарят на определени изисквания: комплектност, еднозначност, конструктивност, да отразяват същността на изследователския процес, да не се покриват по съдържание.

С критерии се формулира общо положение, а именно съответствие между планираност и постигнати резултати. След което се отива към декомпозиция до резултати, усвояване на знания, овладяване на умения. Показателите също се декомпонират до обем на тези знания, степен на осмисленост и овладяност. Накрая всеки показател се изразява числово.

3.3 Представяне и анализ на резултатите от диагностичната процедура

За осъществяване на диагностичното изследване прилагаме методите тестиране и анкетиране.

Дейностите по осъществяване на дидактически тестове са свързани с изготвяне на тест, с изследване на неговите характеристики – надеждност, валидност, трудност и съдържателност.

За нуждите на настоящата диагностична процедура е създаден тест с 16 задачи. Изследват се характеристиките и е направена експертна оценка.

Цел на теста: Да се диагностицират усвоените знания и умения на учениците при изучаване на темата „Сечение на многостен с равнина“ и да се установят пропуските и трудностите им.

Обхванати са двата основни метода за построяване на сечение на призма и пирамида с равнина, а именно метода на пресечниците и метода на проекциите. Включени са задачи от триъгълна и четириъгълна призма и пирамида, както и една задача от пресечена пирамида, за да се покрие целия обем на познатите за учениците многостени до момента. Има задачи, при които равнината се определя от 3 точки, както и от точка и права. В избора на трите точки има задачи, в които двете точки лежат в една стена на многостена и такива, в които някои две точки не лежат в една и съща стена. Подбрани са задачи, в които поне една от точките не лежи върху права, инцидентна с ръб на многостена.

Учениците получават текуща оценка от резултата на теста. Тъй като основната му цел е учителят да направи диагностика на преподаването на темата с помощта на динамичния геометричен софтуер *GeoGebra*, учениците се стимулират да покажат максималните знания по темата, като всяка от задачите се оценява с равен брой точки - 1 точка.

Поради пандемията от Ковид – 19, тестовото изпитване се провежда онлайн с *Google Forms*.

Изследване характеристиките на теста

Спецификация на тестовите задачи – прави се оценка до колко задачите съответстват на учебните цели.

Съгласно таксономията на Блум (Bloom et al., 1956), създадена през 1956 година, учебните познавателни цели се разделят на шест основни групи – знание, разбиране, приложение, анализ, синтез и оценка. За целите на настоящата разработка някои от категориите са обединени и са възприети три категории умствена дейност: знание, разбиране и приложение. На база формулираните цели на конкретното учебно съдържание бе създадена таблица.

Психометрична характеристика на тестовите задачи – провежда се теста. Изчислява се общият бал на всеки ученик като сбор от получените точки и учениците се подреждат по възходящ ред. След това учениците се разделят на две групи – слаба и силна, с еднакъв брой членове. Изчисляват се:

✓ **Индекс на трудност на задачата** – трудността на задачите се измерва от това доколко и дали те са решени от учениците. За определяне на индекса на трудност, се използва формулата: $P = \frac{N_R}{N} \cdot 100$, където N_R е броят на тестираните лица, решили вярно задачата; N е общият брой на всички тестирани, решавали задачата.

✓ **Коефициент на дискриминативна сила на задачата** – показва степента, в която задачите разграничават силната група, в която учениците демонстрират по-стабилни знания, от слабата група, за учениците в която всяка задача е по трудна. Коефициентът на дискриминативна сила на задачата се определя по формулата: $DP = \frac{R_U - R_L}{\frac{1}{2}T}$, където:

R_U е брой на учениците от „силната“ група, които са решили вярно задачата,

R_L е брой на учениците от „слабата“ група, които са решили вярно задачата,

T е общ брой на учениците в двете групи. Средният коефициент общо за теста е 0,45.

✓ **Анализ на дистракторите** На базата на резултатите от теста е събрана информация и за това колко пъти е посочен всеки от дистракторите, както от учениците в слабата група така и от тези, които попадат в силната.

От данните става ясно, че в почти всички въпроси, всеки от дистракторите е избран повече пъти от ученици от слабата, отколкото в силната група.

✓ *Валидност на теста* - това е показател за степента на съответствие между това, което измерва тестът и целите на самото измерване. В настоящата разработка се определя съдържателната и критериалната валидност на теста.

✓ *Надеждност на теста* - това е една от най-важните характеристики на теста. Колкото по-висока е надеждността, толкова по-малка е грешката на измерването, направено със съответния тест. За да се анализира надеждността на теста е приложен методът на паралелните форми. За да се избегне повторно тестиране съм разделила задачите с четни и нечетни номера, като се оценяват и сравняват. Този начин за провеждане на критериален тест е използван в (Старибратов, 2012). Надеждността на един тест показва колко точно е измерването на онова, което сме си поставили за цел да измерим. Стойността на коефициента на надеждност е висока, което показва, че като цяло тестът е надежден.

Обработка на резултатите

Тестът не е универсално средство за диагностика, поради което резултатите от него не трябва да се приемат безрезервно и безкритично. Има различни подходи при оценката на резултатите от теста.

За установяване степента на усвоените знания и овладяване на уменията се анализират задачите от теста.

Всеки тест се обработва поотделно, като получените данни се представят в таблица, наречена първичен протокол (Приложение №4), в която се вписват номерата на учениците и броят точки, получени за всяка задача. За всеки ученик се изчислява общия тестов бал –сборът от получените за всяка задача точки и индивидуален коефициент по формулата: $K_{ind} = \frac{a}{b}$, където a – тестов бал на конкретния ученик; b – общ тестов бал, $K_{cp} = \frac{\sum K_{ind}}{n}$.

Подреждаме получения статистически ред от тестови балове и индивидуални коефициенти в нарастващ ред и групираме повтарящите се стойности. По този начин получаваме честотно разпределение.

Основните характеристики на честотното разпределение са показателите на централната тенденция и разсейването.

Показатели на централната тенденция са средното аритметично, медиана и мода.

Средно аритметично ($\bar{X}$) – сбора на общите тестови балове на всички изследвани ученици се дели на обема на извадката.

Медиана (M_e) – точката, която разполовява статистическия ред. След подреждането на статистическия ред във възходящ ред се намира този тестов бал, който е в средата и го разполовява. Ако обемът на извадката е четно число, медианата е полусборът на двата средни тестови бала.

Мода (M_o) – най-често срещаната варианта в ранговия ред. В идеалния случай показателите на централната тенденция съвпадат.

Резултатите от тестването са добри. Те са между 41% и 88%. Слабите оценки са сведени до минимум. Обучението по темата се извършва с помощта на динамичен геометричен софтуер, което е и предпоставка за добрите резултати.

В дългогодишния ни опит слабите оценки (слаб 2 и среден 3) върху темата сечение на многостен с равнина винаги са били около 35%. Настоящите резултати са значително по-високи, което показва, че използването на ДГС при преподаването и оценяването по темата, повишава успеваемостта на учениците с по-слаб интерес към математиката.

Увеличението на резултатите може да се дължи на двата фактора:

- добре конструиран дидактически тест;
- използване на динамичен геометричен софтуер.

С помощта на Информационните технологии се повишава интереса на учениците с ниски резултати по математика и с отрицателна нагласа към предмета.

Анализът на резултатите от проведената диагностична процедура показва, че приложената методика дава добри резултати при усвояване на учебното съдържание и оценяване на знанията и уменията на учениците по темата сечение на многостен с равнина с помощта на ДГС.

От всичко казано до тук може да се твърди, че формулираната хипотеза е вярна.

Заклучение

Резюме на получените резултати

Настоящото поколение ученици и студенти не само са подготвени активно да използват компютри в своето обучение, но те са нетърпеливи да прилагат своите дигитални умения в учебния процес (Zlatanov, 2018). Безспорен факт е, че математическите знания, получени чрез самостоятелно наблюдение и изследвания са по-дълбоки и по-издръжливи.

Присъствието на евристичните моменти и използването на динамичен геометричен софтуер прави обучението увлекателно, атрактивно, съвременно и формира позитивно отношение към математиката. Следвайки този подход, учителят преподава не само знания, а и методи на изследователско мислене, той стимулира креативността на учениците и обогатява математическата им култура.

Бихме искали да кажем, че използването на ДГС в часовете по геометрия внесе в тях ново настроение и дух. Учениците започват да работят по-внимателно. Повишава едновременно интереса и резултатите им. То дава възможност за оптимизиране на чертожната работа и усвояването на по-голям обем от знания. С илюстрираните примери смятаме, че използването на ДГС е удачно, както при илюстрация на теоремите и задачите от училищния материал, така и за стимулиране на творческата активност на учениците, чрез самостоятелното откриване и формулиране на известни резултати и чрез обобщаването на такива, както на стандартни задачи от учебниците, така и на задачи с повишена трудност от състезания. Използването на функцията за размяна на крайни и безкрайни точки дава възможност за откриване на общите корени в доказателствата на задачи, които на пръв поглед са различни.

Възможността да откриват сами експериментално връзките между изучаваните обекти ги окуражава да продължат да изследват, а по-талантливите и да творят. Динамичният геометричен софтуер позволява творчески процес на обучение и по-дълбоко разбиране на геометрията. Той е особено полезен при изучаване и визуализиране на 3D геометрични обекти и техните свойства. Използването на ДГС създава и елемент на игра и предизвикателство, което стимулира овладяването на материала от курса по геометрия в училище. Към всепризнатите предимства на обучение с ползване на динамичен геометричен софтуер трябва да прибавим и положителния психологически ефект, засвидетелстван чрез:

- радостта на учениците от усещането за свобода, характерно за младите;
- радостта на учениците от съпричастието им в откривателството.

Ясен знак за това е желанието им часовете по математика да продължат в същия формат.

Положителните резултати ни окуражават да увеличим обема на темите от учебното съдържание по геометрия, които ще преподаваме на учениците, прилагайки динамичен геометричен софтуер. Тогава и анализите ще дадат по-точна преценка за ползите при изучаване на геометрията в динамична среда.

Приноси на дисертационния труд

Основни приноси, според автора, в настоящия дисертационен труд са:

- I. Разработени системи от задачи и методически подходи за използване на ДГС в часове по геометрия от 5., 8., 9. и 11. класове.
- II. Приложение на ДГС за изследователски ориентирано обучение по геометрия на ученици – билингви и ученици с повишен интерес по математика.
- III. Създаване на дидактическа среда и технология на обучение чрез прилагане на ДГС за формиране на творческо мислене на учениците в часовете по геометрия на 11. клас.
- IV. Разработване на методически инструментариум за обучение по темата „Сечение на многостен с равнина“.
- V. Разработване на система от задачи чрез използване на ДГС за обучение по темата „Сечение на многостен с равнина“, когато се специализира вида на сечението.
- VI. Създадена тестова форма за осъществяване на диагностична процедура с последващ пълен анализ на резултатите.

Перспективи за бъдещо развитие на изследванията:

- Увеличаване на темите, в които ДГС ще се използва за илюстрация и търсене на нови обобщения.
- Разработване на дидактически тестове и за други теми от училищния учебен материал.
- Включване в обучението по математика за илюстриране и подпомагане при тежки пресмятания на алгебричната компютърна система Maple паралелно с ДГС.
- Споделяне на добри практики за използване компютърни системи с колегите учители по математика и информатика.

Списък на публикациите по дисертационния труд

- 1 Петя Трифонова, Николина Данова, **Радка Златанова**, Изследователски ориентирано обучение по темата „Средна отсечка и медицентър на триъгълника в динамична геометрична среда“, *Педагогически форум Година първа*(4), 94–105, 2013, ISSN:1314-7986 (ERIH PLUS).
- 2 Бистра Царева, **Радка Тодорова**, Интерактивно изучаване на описани четириъгълници в динамична среда, *Математика и информатика*, **56**(2), 142–158, 2013, ISSN: 1310-2230, eISSN1314-8532 (Web of Science, Accession Number WOS:000447344600005).

- 3 Сава Гроздев, Диана Стефанова, Калина Василева, Станислава Колева, **Радка Тодорова**, Стимулиране на творческа активност при билингви чрез динамичен софтуер, *Математика и Информатика*, **75**(3), 247–273, 2014, ISSN: 1310-2230, eISSN1314-8532 (Web of Science, Accession Number WOS:000450489800002).
- 4 Боян Златанов, **Радка Тодорова**, Използване на GeoGebra за развиване на творческо мислене на учениците в часовете по геометрия, *Информационни технологии в образованието – предизвикателства и възможности: сборник с научни доклади от Научно-практическа конференция „Математика, информатика, информационни технологии, приложение в образованието“*, 228–235, 10–12 Октомври, Пампорово, ISBN:978-619-202-437-6.
- 5 Ivailo Starilratov, **Radka Todorova**, One generalization of the geometric problem from 19th Junior Balkan Mathematical Olympiad, *Mathematics and Informatics*, **62**(2), 204–216, 2019, ISSN: 1310-2230, (Web of Science, Accession Number WOS:000465591000006).
- 6 Marta Teofilova, **Radka Todorova**, A New Improvisation on the Topic „Intersection of a Pyramid with a Plane“, *Global Journal of Advanced Research on Classical and Modern Geometries*, **9**(1), 15–19, 2020 (MathSciNet, MR4312719).

Апробация на получените резултати

Научна конференция „Информационни технологии в образованието – предизвикателства и възможности: сборник с научни доклади от Научно-практическа конференция „Математика, информатика, информационни технологии, приложение в образованието“, Пампорово, 7–8.11.2019.

Връзката между приносите, задачите, мястото на описание в дисертационния труд и направените публикации

Връзката между приносите, задачите, мястото на описание в дисертационния труд и направените публикации, са следните:

Принос	Параграф или глава	Статия	Доклад
I	1.1,1.2,1.3,1.4,2.1,2.2,2.3	1,2,3,4,5,6	1
II	1.3,1.4,2.1,2.2,2.3	2,3,4,5,6	1
III	1.3,2.1,2.1,2.2	2,4,5	
IV	2.3	6	
V	2.3	6	
VI	3.3,3.4	3	

Литература

- Bloom, B., Engelhart, M., Furst, E., Hill, W., & Krathwohl, D. (1956). *Taxonomy of educational objectives: the classification of educational goals, Handbook I: Cognitive domain*. Longmans, New York.
- Coxeter, H. (1949a). *The Real Projective Plane*. McGraw–Hill Book Company, Inc., New York.

- Grozdev, S. & Nenkov, V. (2017). Gaining new knowledge by computer experiments. *Journal of Educational Sciences and Psychology*, VII (LXIX)(1B):122–125, ISSN:2247–6377, eISSN:2247–8558.
- Karaibriamov, S., Tsareva, B., & Zlatanov, B. (2012). Educational software for interactive training of students on the theme "Mutual intersection of pyramids and prisms in axonometry". *Acta Didactica Napocensia*, 5(1):29–44, ISSN:2065-1430.
- Karaibriamov, S., Tsareva, B., & Zlatanov, B. (2013). Optimization of the courses in geometry by the usage of dynamic geometry software Sam. *The Electronic Journal of Mathematics and Technology*, 7(1):22–51, ISSN:1933-2823.
- Kortenkamp, U. & Dohrmann, C. (2010). User interface design for dynamic geometry software. *Acta Didactica Napocensia*, 3(2):59–66, ISSN:2065-1430.
- Starilratov, I. & Todorova, R. (2019). One generalization of the geometric problem from 19th Junior Balkan Mathematical Olympiad. *Mathematics and Informatics*, 62(2):204–216, ISSN:1310–2230, eISSN:1314–8532.
- Teofilova, M. & Todorova, R. (2020). A new improvisation on the topic „Intersection of a pyramid with a plane“. *Global Journal of Advanced Research on Classical and Modern Geometries*, 9(1):15–19, ISSN:2284-5569.
- Tsareva, B. & Zlatanov, B. (2016). Intersection of polyhedrons and plane with GeoGebra. *North American GeoGebra Journal*, 5(1):39–52, ISSN 2162-3856.
- Wong, W.-K., Yin, S.-K., Yang, H.-H., & Cheng, Y.-H. (2011). Using computer-assisted multiple representations in learning geometry proofs. *Educational Technology and Society*, 14(3):43–54, ISSN:11763647, eISSN:14364522.
- Zlatanov, B. (2014). An etude on one Sharygin's problem. *Global Journal of Advanced Research on Classical and Modern Geometries*, 3(2):50–61, ISSN:2284-5569.
- Zlatanov, B. (2017). On a family curves of the second class. *Global Journal of Advanced Research on Classical and Modern Geometries*, 6(2):91–105, ISSN:2284-5569.
- Zlatanov, B. (2018). *Developing Creative Thinking in Geometry Classes by using dynamic geometric software*. LAP Lambert Academic Publishing, Sunnyvale, CA, USA, ISBN-10:6137424960.
- Гроздев, С. & Ненков, В. (2012а). Ортоцентър на вписан четириъгълник. *Математика +*, 2021(4):63–69, ISSN:0861-8321, eISSN:2603-4964.
- Гроздев, С. & Ненков, В. (2012b). Три забележителни точки върху медианите на триъгълника. *Архимед 2000 ЕООД, София*.
- Гроздев, С. & Ненков, В. (2013). Геометрични места при движение на вписан четириъгълник. In *Математика и математическо образование. Доклади на 42 пролетна конференция на Съюза на математиците в България*, pages 373–382, 2–6 Април, Боровец.
- Гроздев, С. & Ненков, В. (2014). Няколко свойства на Симсъновите прави, свързани с Ойлерови криви. In *Математика и математическо образование. Доклади на 43 пролетна конференция на Съюза на математиците в България*, pages 240–247, 2–6 Април, Боровец.

- Гроздев, С. & Ненков, В. (2015). Конични сечения с колинеарни центрове. In *Математика и математическо образование. Доклади на 44 пролетна конференция на Съюза на математиците в България*, pages 291–298, 2–6 Април, Боровец.
- Гроздев, С., Стефанов, Д., Василева, К., Колева, С., & Тодорова, Р. (2014). Стимулиране на творческа активност при билингви чрез динамичен софтуер. *Математика и информатика*, 57(3):247–273.
- Додунеков, С., Кожухарова, Г., Христова, М., Капралова, Д., & Дойчев, Св. (2002). *Математика 11. клас (профилирана подготовка)*. Регалия 6, София, ISBN-10:954-745-038-7.
- Златанов, Б., Караибрямов, С., & Царева, Б. (2012a). Вертикална интеграция на обучението в средното училище и университета чрез проективни методи в динамична среда. *Математика +*, 2012(1):50–60, ISSN:0861-8321, eISSN:2603-4964.
- Златанов, Б., Караибрямов, С., & Царева, Б. (2012b). Върху нова функция в динамичния софтуер. In *Практически семинар на проекта Fibonacci*, pages 133–138, 2–6 Април, Боровец, ISBN:978-954-745-224-4.
- Златанов, Б. & Тодорова, Р. (2019). Използване на geogebra за развиване на творческо мислене на учениците в часовете по геометрия. In *Информационни технологии в образованието – предизвикателства и възможности: сборник с научни доклади от Научно-практическа конференция „Математика, информатика, информационни технологии, приложение в образованието“*, pages 228–235, 10–12 Октомври, Пампорово, ISBN:978-619-202-437-6.
- Златанов, Б. & Царева, Б. (2014a). *Учебник за интерактивно обучение по Синтетична геометрия в динамична среда*. Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“, Пловдив, Проект BG051PO001-4.3.04-0064 Пловдивски електронен университет (ПеУ): национален еталон за провеждане на качествено е-обучение в системата на висшето образование, <http://fmi-plovdiv.org/GetResource?id=1761>.
- Златанов, Б. & Царева, Б. (2014b). *Учебник за интерактивно обучение по Синтетична геометрия в динамична среда – (Динамични чертежи)*. Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“, Пловдив, Проект BG051PO001-4.3.04-0064 Пловдивски електронен университет (ПеУ): национален еталон за провеждане на качествено е-обучение в системата на висшето образование, <http://fmi-plovdiv.org/GetResource?id=1186>.
- Иванов, И. (2006). *Педагогическа диагностика*. Университетско издателство „Епископ Константин Преславски“, Шумен, ISBN-10:954-577-393-6, ISBN-13:978-954-577-393-8.
- Караибрямов, С. (2010). *Едно приложение на информатиката в дескриптивната геометрия*. Дипломна работа за получаване на образователната степен Бакалавър, Факултет по математика и информатика на Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“, Пловдив.
- Караибрямов, С. (2011). *Програмата Sam за интерактивно компютърно обучение на темата „Взаимно пресичане на призми и пирамиди“*. Дипломна работа за получаване на образователната степен Магистър, Факултет по математика и информатика на Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“, Пловдив.
- Кендеров, П. (2010). Иновации в математическото образование: Европейските проекти Innomathed и Fibonacci. *Математика и математическо образование. Доклади на 39 пролетна конференция на Съюза на математиците в България*, pages 63–71, 6–10 Април, Боровец, ISSN:1313-3330.

- Кендеров, П. (2013). Fibonacci – разпространение на изследователския подход в образованието по математика и природни науки в Европа. In *Проект Fibonacci, Седма рамкова програма на Европейския съюз. Участник от България е Институтът по математика и информатика на БАН*. <http://www.math.bas.bg/omi/Fibonacci/index.htm>.
- Кендеров, П. & Чехларова, Т. (2016). *Състезание „Математика с компютър“ и изследователски подход в образованието по математика*. Макрос 2000, Пловдив, ISBN:978-954-561-422-4.
- Кендеров, П. & Чехларова, Т. (2018). *Оптимални конични съдове: изследвания с динамични конструкции*. Макрос 2000, Пловдив, ISBN:978-954-561-462-0.
- Кендеров, П., Чехларова, Т. & Гачев, Г. (2015). *Изследователски подход в математическото образование : помагало за обучение на учители*. Макрос 2000, Пловдив, ISBN:978-954-561-367-8.
- Князева, Е. & Курдюмов, С. (2010). *Основания синергетика: Человек, конструирующий себя и свое будущее*. КомКнига, Москва, ISBN:978-5-484-01240-4.
- Кокстер, Х. (1959). *Действительная проективная плоскость*. ГИФМЛ, Москва.
- Лозанов, Ч., Витанов, Т., & Недевски, П. (2009). *Математика 8. клас - (задължителна подготовка)*. Анубис, София, ISBN:978-954-426-819-0.
- Найденев, М. (1987). Описани четириъгълници. In *Математика и математическо образование, Доклади на 16 пролетна конференция на Съюза на математиците в България*, pages 63–71, 6–10 Април, Слънчев бряг, ISSN:1313-3330.
- Славчев, А. (2014). Разработване на статистическа процедура за провеждане на емпирично педагогическо изследване. *Педагогически форум*, Година първа(4):47–57, eISSN:1314-7986.
- Старибратов, И. (2012). *Методика на електронното обучение по математика*. Дисертация за придобиване на образователна и научна степен „доктор“, Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“, Пловдив.
- Танева, Б. (2015a). Информационните технологии в помощ на интерактивното обучение по геометрия. In *VIII Национална Конференция „Образованието и научното изследване в информационното общество“*, pages 219–228, 28–29 Май Пловдив, ISSN:1314-0752.
- Танева, Б. (2015b). *Формиране на дигитални компетенции прилагайки динамичен геометричен софтуер в 5 клас*. Тракийски университет, Департамент за информация и повишаване квалификацията на учителите.
- Трифенова, П., Данова, Н., & Златанова, Р. (2013). Изследователски ориентирано обучение по темата „Средна отсечка и медицентър на триъгълника в динамична геометрична среда“. *Педагогически форум*, Година първа(4):94–105, eISSN:1314-7986.
- Царева, Б. (2010). *Синтетична геометрия*. Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“, Пловдив, ISBN:978-954-423-576-5.
- Царева, Б. & Тодорова, Р. (2013). Интерактивно изучаване на описани четириъгълници в динамична среда. *Математика и информатика*, 56(2):142–158, ISSN:1310–2230, eISSN:1314–8532.