ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ „ПАИСИЙ ХИЛЕНДАРСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
КАТЕДРА „АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ“

ВЕСЕЛИНА РУМЕНОВА ТАВКОВА

ДИФЕРЕНЦИАЛНА ГЕОМЕТРИЯ НА ПОЧТИ ПАРАКОНТАКТНИ ПОЧТИ ПАРАКОМПЛЕКСНИ РИМАНОВИ МНОГООБРАЗИЯ

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертационен труд
за присъждане на
образователната и научна степен *Доктор*

Област на висше образование:
4. Природни науки, математика и информатика

Професионално направление: *4.5. Математика*

Докторска програма: *Геометрия и топология*

Научен ръководител: проф. д.м.н. Манчо Христов Манев

Пловдив, 2021 г.

Дисертационният труд е обсъден и насочен за защита от Катедрения съвет в разширен състав на катедра „Алгебра и геометрия“ при ФМИ на ПУ „Паисий Хилендарски“, проведен на 17.09.2021 г.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на открито заседание на Научното жури, което ще се проведе на 26.11.2021 г. от 14:00 ч. в Заседателната зала на ФМИ на ПУ „Паисий Хилендарски“.

Научно жури:

- чл.-кор. проф. дмн Стефан Петров Иванов (ФМИ на СУ),
- проф. дмн Манчо Христов Манев (ФМИ на ПУ),
- доц. д-р Галя Василева Накова (ФМИ на ВТУ),
- доц. д-р Юлиан Цанков Цанков (ФМИ на СУ),
- доц. д-р Александър Владимиров Петков (ФМИ на СУ).

Дисертационният труд се състои от 100 страници и съдържа увод, две глави, осем параграфа, заключение и библиография от 50 заглавия.

Заглавията и номерациите на главите и параграфите, номерациите на твърденията, както и цитиранията в автореферата съвпадат със съответните заглавия и номерации в дисертационния труд.

Основната част от резултатите на настоящия труд са включени в 4 статии в рецензирани и индексирани научни списания ([19]–[22]). Те са публикувани в списанията *Facta Universitatis. Series: Mathematics and Informatics* – Web of Science, *Journal of Geometry* – SJR(2018):0.376, Web of Science, *Balkan Journal of Geometry and its Applications* – SJR(2020):0.220 и *Novi Sad Journal of Mathematics* – SJR(2020):0.262. Някои от резултатите са изнесени в 9 доклада на 6 научни форума, от които 5 са международни конференции.

* * *

Целта на дисертационния труд е изучаването на основните диференциалногеометрични въпроси за почти параконтактни почти паракомплексни риманови многообразия от произволна размерност и в частност при най-ниската размерност 3, като по-специално:

• да се определят компонентите на фундаменталния тензор F, съответни на основните класове от класификацията на Манев-Стайкова, както и да се характеризират тези класове чрез основните тензори на многообразието;

• да се дефинират и характеризират някои специални класове на тези многообразия, свързани с условия за интегруемост, парасасакиевост и други подобни;

• да се въведе симетричен аналог на тензора на Нейенхаус и разглежданите многообразия да се характеризират относно тази двойка тензори;

• да се конструират и характеризират тримерни риманови П-многообразия като хиперсфера в четиримерно пространство и като произведение на реалната права и двумерно паракомплексно риманово многообразие;

• да се породят и изучат риманови П-многообразия върху тримерна група на Ли и да се намери съответно явно матрично представяне.

* * *

Увод

Диференциалната геометрия на гладки многообразия с допълнителна тензорна структура от тип $(1,1)$ (т.е. ендоморфизъм в допирателното разслоение) и съгласувана с нея метрика се определя основно от квадрата на ендоморфизма и индуцираното му действие относно метриката върху допирателното разслоение на многообразието. Най-простото свойство на един ендоморфизъм, който е различен от идентитета $\mathcal{I}$, е квадратът му да съвпада с $\mathcal{I}$ или с противоположното изображение на $\mathcal{I}$.

Изучавани са като основни следните ендоморфизми: *почти продуктна структура* P и *почти комплексна структура* J. Почти продуктната структура (или още *структура на почти произведение*) има квадрат равен на $\mathcal{I}$, но е различна от него, т.е. $P^2 = \mathcal{I}$, $P \neq \mathcal{I}$. От своя страна почти комплексната структура има квадрат равен на $-\mathcal{I}$, т.е. $J^2 = -\mathcal{I}$.

Многообразие $\mathcal{M}$ снабдено с почти продуктна структура P може да бъде от произволна размерност, докато почти комплексното многообразие $(\mathcal{M}, J)$ е по необходимост четномерно, т.е. $\dim \mathcal{M} = 2n$. Това е така, защото собствените стойности на ендоморфизма J са i и $-\mathrm{i}$ ($+1$ и -1 за P), като кратността им е равна в случая на J, а при P тя може да бъде различна. В частност на случая за P, когато кратностите на двете собствени стойности са равни, т.е. следата на P е нула, то тази специална почти продуктна структура е известна като *почти паракомплексна структура*. Съответното многообразие $(\mathcal{M}, P)$ очевидно е четномерно.

Естествен е въпросът, кои са аналозите на структурите P и J в случаите, когато многообразието има размерност с единица повече или по-малко. Това са *почти параконтактната структура* (ϕ, ξ, η), съответна на P, и *почти контактната структура* (φ, ξ, η) за J, където ϕ и φ са съответните ендоморфизми на P и J, а ξ и η са векторно поле и дуалната му 1-форма.

Възможни са два най-прости начина за съгласуване със структурата P (съотв. J) на въведената върху многообразието метрика h. Структурният ендоморфизъм индуцира изометрия или антиизометрия върху всеки допирателен слой. Многообразията, за които е изпълнено $h(J\cdot, J\cdot) = h$ (съотв. $h(J\cdot, J\cdot) = -h$), са известни като *ермитови* (съотв. *норденови*). Аналогичните случаи са при $h(P\cdot, P\cdot) = h$ (съотв. $h(P\cdot, P\cdot) = -h$) и се използват термините *съвместими* (съотв. *метрични*). Структурните групи на тези четири типа многообразия са съответно следните: унитарната група $\mathcal{U}(n)$; сечението $\mathcal{GL}(n, \mathbb{C}) \cap \mathcal{O}(n, n)$ на общата линейна комплексна група и неутралната индефинитна ортогонална група; произведението $\mathcal{O}(n) \times \mathcal{O}(n)$ за ортогоналната група $\mathcal{O}(n)$; параунитарната група $\mathcal{PU}(n)$.

От своя страна метриката, с която се снабдява многообразието, може да бъде риманова или псевдориманова. Като се вземе предвид съгласуваността със структурата, в норденовия и в метричния случай метриката е възможно да бъде само псевдориманова.

В настоящата дисертация изучаваме почти параконтактни почти паракомплексни риманови многообразия, които са най-малко изучени от останалите споменати.

Началото на изследването на геометрията на почти продуктни риманови многообразия е поставено през 1965 г. от Кентаро Яно в [48]. По-късно, през 1983 г., Антонио М. Навейра дава в [29] класификация на почти продуктни риманови многообразия по отношение на ковариантната производна на P относно свързаността на Леви-Чивита за риманова метрика h.

Почти паракомплексните риманови многообразия са изучавани от различни гледни точки, започвайки с първите статии през 1948–1954 г. на Пьотр К. Рашевский [35], Полет Либерман [12] и Едуард М. Патерсън [34]. В частност тези многообразия са изследвани от български геометри в статиите [26], [42], [43], [45], [46] на Веселка Михова, Мария Стайкова, Костадин Грибачев, Димитър Мекеров в периода 1987–1991 г. Използвайки класификацията на Навейра, през 1992 г. М. Стайкова и К. Грибачев представят класификация на почти паракомплексните риманови многообразия в [44]. По-късно изследванията продължават в [25], [8], [6], [7] на Д. Мекеров и Добринка Грибачева. Основните класове в тази класификация са три – $\mathcal{W}_1$, $\mathcal{W}_2$, $\mathcal{W}_3$, като тяхното сечение е класът $\mathcal{W}_0$, определен чрез условието P да бъде ковариантно постоянна. Многообразията от последния клас са известни като локално продуктни риманови многообразия [29], риманови P-многообразия [44] или парахоломорфни паракомплексни риманови многообразия [9]. Един подробен обзор на паракомплексната геометрия е направен през 1996 г. в [3] от В. Кручану, П. Фортуни и П. М. Гадея.

Началото на изучаването на почти параконтактните многообразия с риманова метрика е поставено през 1976 г. от Исуке Сато в [37]. В периода 1977–1979 г. и други геометри допринасят за началното развитие на диференциалната геометрия на тези многообразия и в частност на параконтактните и парасасакиевите от тях, например И. Сато, Т. Адати, Т. Миядзава, К. Мацумото с работите [38], [2], [39], [40]. През 1980 г. Шигео Сасаки дефинира в [36] понятието *почти параконтактно риманово многообразие от тип* (p, q), където p и q са кратностите на собствените стойности $+1$ и -1 на структурния ендоморфизъм ϕ, като в допълнение на това ϕ има 1-кратна собствена стойност 0.

Върху параконтактното многообразие може да се разглеждат два типа метрики според съгласуваността им с почти параконтактната структура – определящи съвместимия и метричния случай.

В метричния случай, т.е. случая на почти параконтактно метрично многообразие, метриката е псевдориманова със сигнатура $(n+1, n)$. Този случай е добре изучен от редица автори, например у нас от Стефан Иванов, Симеон Замковой и Галя Накова в [10], [49], [28], [50], а сред чуждестранните автори да отбележим например Збигнев Олшак, Удай Ч. Де, Кришану Мандал, Вероника М. Молина, Йоана Величко с работите [13], [24], [32], [47].

Основната разлика между метричния и съвместимия случай е при асоциирания тензор от тип $(0, 2)$ на метриката относно структурата. При метричните той е 2-форма, а при съвместимите е метрика.

През 2001 г. в работата [18] на М. Манев и М. Стайкова се разглеждат почти параконтактни риманови многообразия от тип (n, n), съгласно понятието въведено от Сасаки. Тези многообразия са нечетномерни, имат структурна група $\mathcal{O}(n) \times \mathcal{O}(n) \times 1$ и индуцираната почти продуктна структура върху параконтактното разпределение е почти паракомплексна структура. Авторите дават една класификация на тези многообразия, която се състои от единадесет основни класа $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_{11}$, всеки от които съдържа специалния клас $\mathcal{F}_0$. За дефинирането на класовете се използват свойствата на фундаменталния тензор F, който е дуален на ковариантната производна на ϕ относно свързаността на Леви-Чивита за основната метрика. В същата работа са дадени компонентите F_i на F за всеки основен клас. В основата на нашите разглеждания стои класификацията на Манев-Стайкова от [18].

По-късно, през 2020 г. Стефан Иванов, Христо Манев и Манчо Манев продължават изледванията на тези многообразия с [9]. В тази работа се дефинира понятието *параконтактно паракомплексно риманово многообразие* и е получен нов специален тип на тези многообразия чрез конусна конструкция на парахоломорфно паракомплексно риманово многобразие, които са наречени *парасасакиевоподобни параконтактни паракомплексни риманови многообразия*. Пак там авторите пораждат въведеният тип многообразия чрез хиперболично разширение на парахоломорфно паракомплексно риманово многообразие.

Изследванията за разглежданите многообразия продължават с работата [15] на Х. Манев и М. Манев, в която се въвежда и изучава двойката афинни свързаностти на Схоутен-ван Кампен, адаптирани към параконтактното разпределение и почти параконтактната почти паракомплексна риманова структура, породени от двойката асоциирани метрики и техните свързаности на Леви-Чивита.

Цел на настоящия дисертационен труд е да се изучи в основна степен диференциалната геометрия на почти параконтактните почти паракомплексни риманови многообразия, които наричаме тук за краткост *риманови* П-*многообразия.*

По-подробно, риманово П-многообразие $(\mathcal{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ е гладко многообразие $\mathcal{M}$ с размерност $2n+1$ и риманова метрика g, което е снабдено с почти параконтактна структура (ϕ, ξ, η), където ϕ е ендоморфизъм в допирателното пространство на $\mathcal{M}$, ξ е единично векторно поле, а η е дуалната му 1-форма. Освен това, ϕ действа като почти паракомплексна структура $P = \phi|_{\mathcal{H}}$ във всеки слой на параконтактно разпределение $\mathcal{H} = \ker\eta$ на допирателното разслоение $T\mathcal{M}$. Двойката $(\mathcal{H}, \phi)$ индуцира $2n$-мерно почти паракомплексно многообразие $(\mathcal{N}, P)$. Тогава (ϕ, ξ, η) има $\mathrm{tr}\phi = 0$ и се нарича тук почти параконтактна почти паракомплексна структура или за краткост П-*структура.*

Да отбележим, че рестрикцията на g върху $\mathcal{H}$ съвпада със съответната ѝ риманова метрика h относно $\phi|_{\mathcal{H}}$, т.е. $h = g|_{\mathcal{H}}$. По този начин има съответствие между $(2n+1)$-мерното риманово П-многообразие $(\mathcal{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ и $2n$-мерното почти паракомплексно риманово многообразие $(\mathcal{N}, P, h)$. Изискването за положителна дефинитност на g не е задължителна, но в настоящата работа разглеждаме римановия случай като основен.

Глава I (*Почти параконтактни почти паракомплексни риманови многообразия с произволна размерност*) съдържа §1 (*Основни понятия и зависимости за римановите* П-*многообразия*), §2 (*Тензор на Нийенхаус и неговия присъединен тензор*) и §3 (*Параконтактни почти паракомплексни риманови многообразия*). Глава II (*Почти параконтактни почти паракомплексни риманови многообразия от най-ниска размерност*) съдържа §4 (*Компонентите на фундаменталния тензор на римановите* П-*многообразия от най-ниска размернот*), §5 (*Групи на Ли като тримерни риманови* П-*многообразия*), §6 (*Матрични групи на Ли като тримерни риманови* П-*многообразия*), §7 (*Тримерни хиперсфери в евклидово пространство и пространство на Минковски като риманови* П-*многообразия*) и §8 (*Разширения на двумерни пространствени форми като тримерни риманови* П-*многообразия*).

* * *

В **§1** въвеждаме някои основни понятия и зависимости, свързани с изучаваните многообразия, които са необходими за по-нататъшните ни изследвания.

Нека $\mathcal{M}$ е m-мерно реално диференцируемо многообразие, $T_p\mathcal{M}$ е допирателното пространство на $\mathcal{M}$ в произволна точка $p \in \mathcal{M}$, а $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ е алгебрата на диференцируемите векторни полета върху $\mathcal{M}$. Разглеждаме почти параконтактна почти паракомплексна структура (ϕ, ξ, η) върху $\mathcal{M}$, която за краткост наричаме П-структура: $\eta(\xi) = 1$, $\phi^2 = \mathcal{I} - \eta \otimes \xi$, $\phi\xi = 0$, $\eta \circ \phi = 0$, $\mathrm{tr}\phi = 0$ и риманова метрика g: $g(\phi x, \phi y) = g(x, y) - \eta(x)\eta(y)$. Тогава $\mathcal{M}$ се нарича *почти параконтактно почти паракомплексно риманово многообразие* или за краткост *риманово* П*-многообразие* и се означава с $(\mathcal{M}, \phi, \xi, \eta, g)$. Присъединеното тензорно поле на g се задава чрез $\widetilde{g}(x, y) = g(x, \phi y) + \eta(x)\eta(y)$.

Допирателното пространство $T_p\mathcal{M}$ има следното ортогонално разлагане $T_p\mathcal{M} = h(T_p\mathcal{M}) \oplus v(T_p\mathcal{M})$, където линейните оператори h и v в $T_p\mathcal{M}$ са дефинирани чрез $hx = \phi^2 x$, $vx = \eta(x).\xi_p$. Разглеждаме пространството $\mathcal{S}$ на тензорите S от тип $(0, 2)$ върху $(\mathcal{M}, \phi, \xi, \eta, g)$. Линейните оператори h и v генерират съответно ортогонално разлагане на $\mathcal{S}$. Използваме следните линейни оператори в пространството $\mathcal{S}$: $\ell_1(S)(x, y) = S(hx, hy)$, $\ell_2(S)(x, y) = S(vx, vy)$ и $\ell_3(S)(x, y) = S(vx, hy) + S(hx, vy)$.

Нека ∇ е свързаността на Леви-Чивита, която е породена от метриката g. Важна роля в теорията на риманови П-многообразия $(\mathcal{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ играе фундаменталният тензор F от тип $(0, 3)$ и присъединените му 1-форми θ, θ^* и ω (лиеви форми), зададени чрез $F(x, y, z) = g\big((\nabla_x \phi)\, y, z\big)$, $\theta(z) = g^{ij} F(e_i, e_j, z)$, $\theta^*(z) = g^{ij} F(e_i, \phi e_j, z)$, $\omega(z) = F(\xi, \xi, z)$. Една класификация на риманови П-многообразия относно тензора F е дадена в [18]. Тя е съставена от единадесет основни класа $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\dots$, $\mathcal{F}_{11}$ със сечение специалният клас $\mathcal{F}_0 : F = 0$.

Нека R е *тензорът на кривина* от тип $(1, 3)$ за ∇ върху (M, ϕ, ξ, η, g), т.е. $R(x, y)z = \nabla_x \nabla_y z - \nabla_y \nabla_x z - \nabla_{[x,y]} z$. Съответният му тензор от тип $(0, 4)$ се бележи със същата буква и се определя чрез равенството $R(x, y, z, w) = g(R(x, y)z, w)$. За тензора R са в сила следните свойства $R(x, y, z, w) = -R(y, x, z, w) = -R(x, y, w, z)$ и $R(x, y, z, w) + R(y, z, x, w) + R(z, x, y, w) = 0$.

За R се дефинират *тензор на Ричи* ρ чрез $\rho(x, y) = g^{ij} R(e_i, x, y, e_j)$ и *скаларна кривина* τ чрез $\tau = g^{ij} \rho(e_i, e_j)$. *Присъединените величини* ρ^*

и τ^* на ρ и τ се дефинират съответно чрез: $\rho^*(x,y) = g^{ij}R(e_i,x,y,\phi e_j)$ и $\tau^* = g^{ij}\rho^*(e_i,e_j)$.

По-нататък използваме означението $g \owedge h$ за произведението на Кулкарни-Номидзу на два тензора g и h от тип (0,2), т.е. $(g \owedge h)(x,y,z,w) = g(x,z)h(y,w) - g(y,z)h(x,w) + g(y,w)h(x,z) - g(x,w)h(y,z)$.

Една площадка (2-мерна равнина) α във векторното пространство $T_p\mathcal{M}$ се нарича *неизродена*, ако рангът на рестрикцията на g върху α е 2. Площадката α се нарича *ϕ-холоморфна*, ако $\phi\alpha = \alpha$, а *ξ-площадка*, ако съдържа вектора ξ.

Нека $k(\alpha;p)$ е *секционната кривина* на неизродена площадка α в точка p относно ортогонална база $\{x,y\}$ на α, дефинирана чрез равенството $k(\alpha;p) = -\frac{2R(x,y,y,x)}{g\owedge g(x,y,y,x)}$.

* * *

В **§2** получаваме характеристики за основните класове от класификацията на Манев-Стайкова на многообразията от изследвания тип чрез тензора на Нейенхаус, присъединения му симетричен тензор и свързаните с тях величини. За тези характеристики намираме съответната геометрична интерпретация. Получаваме, че класовете на изучаваните многообразия могат да бъдат определени само от двойката Нейенхаус тензори.

Съгласно [37], условието за нормалност е еквивалентно на анулирането на следните четири тензора: $N^{(1)}(x,y) = [\phi,\phi](x,y) - \mathrm{d}\eta(x,y)\xi$, $N^{(2)}(x,y) = (\mathfrak{L}_{\phi x}\eta)(y) - (\mathfrak{L}_{\phi y}\eta)(x)$, $N^{(3)}(x) = (\mathfrak{L}_\xi\phi)x$ и $N^{(4)}(x) = (\mathfrak{L}_\xi\eta)(x)$, където $[\phi,\phi]$ от тип (1.2) се определя чрез $[\phi,\phi](x,y) = [\phi x,\phi y] + \phi^2[x,y] - \phi[\phi x,y] - \phi[x,\phi y]$, $[x,y] = \nabla_x y - \nabla_y x$ и $\mathrm{d}\eta(x,y) = (\nabla_x\eta)(y) - (\nabla_y\eta)(x)$. В [37] е доказано, че анулирането на тензора $N^{(1)}$ води до анулирането на останалите три тензора $N^{(2)}$, $N^{(3)}$, $N^{(4)}$. Тогава $N^{(1)}$ се означава просто чрез N.

Дефиниция 2.1. *Тензорът N от тип $(1,2)$ се нарича Нейенхаус тензор на структурата (ϕ,ξ,η).*

Твърдение 2.2. *Тензорът на Нейенхаус N се изразява по следния начин по отношение на $\nabla\phi$ и $\nabla\eta$: $N(x,y) = (\nabla_{\phi x}\phi)\,y - \phi\,(\nabla_x\phi)\,y - (\nabla_x\eta)\,(y)\xi - (\nabla_{\phi y}\phi)\,x + \phi\,(\nabla_y\phi)\,x + (\nabla_y\eta)\,(x)\xi$.*

Твърдение 2.3. *За всяко риманово Π-многообразие, тензорът на Нейенхаус притежава следните свойства*

$$N(\phi^2x,\phi y,\phi z) = -N(\phi^2x,\phi^2y,\phi^2z), \quad N(\phi^2x,\phi^2y,\phi^2z) = N(\phi x,\phi y,\phi^2z),$$

$$N(x,\phi^2y,\phi^2z)=-N(x,\phi y,\phi z),\quad N(\phi^2x,\phi^2y,z)=N(\phi x,\phi y,z),$$
$$N(\xi,\phi y,\phi z)=-N(\xi,\phi^2y,\phi^2z),\quad N(\phi x,\phi y,\xi)=N(\phi^2x,\phi^2y,\xi).$$

Твърдение 2.4. *Нека $(\mathcal{M},\phi,\xi,\eta,g)$ е $\mathcal{F}_i$-многообразие $(i=1,2,\dots,11)$. Тогава в Таблица 2.1 е даден видът на четирите тензора $N^{(k)}$ $(k=1,2,3,4)$ върху това многообразие в съответния клас $\mathcal{F}_i$.*

Таблица 2.1. Тензорите $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $N^{(3)}$ и $N^{(4)}$

	$N^{(1)}(x,y,z)$	$N^{(2)}(x,y)$	$N^{(3)}(x,y)$	$N^{(4)}(x)$
$\mathcal{F}_1$	0	0	0	0
$\mathcal{F}_2$	0	0	0	0
$\mathcal{F}_3$	$-2\{F(\phi x,\phi y,\phi z)+F(\phi^2x,\phi^2y,\phi z)\}$	0	0	0
$\mathcal{F}_4$	0	0	0	0
$\mathcal{F}_5$	0	0	0	0
$\mathcal{F}_6$	0	0	0	0
$\mathcal{F}_7$	$4F(x,\phi y,\xi)\eta(z)$	$-4F(x,y,\xi)$	0	0
$\mathcal{F}_8$	$2\{\eta(x)F(y,\phi z,\xi)-\eta(y)F(x,\phi z,\xi)\}$	0	$-2F(x,y,\xi)$	0
$\mathcal{F}_9$	$2\{\eta(x)F(y,\phi z,\xi)-\eta(y)F(x,\phi z,\xi)\}$	0	$-2F(x,y,\xi)$	0
$\mathcal{F}_{10}$	$-\eta(x)F(\xi,y,\phi z)+\eta(y)F(\xi,x,\phi z)$	0	$F(\xi,x,y)$	0
$\mathcal{F}_{11}$	$\eta(z)\{\eta(x)\omega(\phi y)-\eta(y)\omega(\phi x)\}$	$\eta(y)\omega(x)-\eta(x)\omega(y)$	$\eta(y)\omega(x)$	$-\omega(\phi x)$

Теорема 2.5. *Едно риманово* Π*-многообразие* $(\mathcal{M},\phi,\xi,\eta,g)$ *има:*

а) *нулев $N^{(1)}$ тогава и само тогава, когато то принадлежи на някои от основните класове $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_4$, $\mathcal{F}_5$, $\mathcal{F}_6$ или на техните директни суми;*

б) *нулев $N^{(2)}$ тогава и само тогава, когато то принадлежи на някои от основните класове $\mathcal{F}_1,\dots,\mathcal{F}_6$, $\mathcal{F}_8$, $\mathcal{F}_9$, $\mathcal{F}_{10}$ или на техните директни суми;*

в) *нулев $N^{(3)}$ тогава и само тогава, когато то принадлежи на някои от основните класове $\mathcal{F}_1,\dots,\mathcal{F}_7$ или на техните директни суми;*

г) *нулев $N^{(4)}$ тогава и само тогава, когато то принадлежи на някои от основните класове $\mathcal{F}_1,\dots,\mathcal{F}_{10}$ или на техните директни суми.*

Следствие 2.6. *Класът на нормалните риманови* Π*-многообразия е* $\mathcal{F}_1\oplus\mathcal{F}_2\oplus\mathcal{F}_4\oplus\mathcal{F}_5\oplus\mathcal{F}_6$.

Твърдение 2.7. *Нека $(\mathcal{M},\phi,\xi,\eta,g)$ е риманово* Π*-многообразие. Тогава:*

а) *параконтактното разпределение $\mathcal{H}$ на $(\mathcal{M},\phi,\xi,\eta,g)$ е инволютивно тогава и само тогава, когато $\ell_1(\mathrm{d}\eta)=0$;*

б) *интегралните линии на структурното поле* ξ *са геодезични върху* $(\mathcal{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ *тогава и само тогава, когато* $\ell_3(\mathrm{d}\eta) = 0$.

Твърдение 2.8. *Нека* $(\mathcal{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ *е риманово* Π*-многообразие. Тогава:*

а) $\mathrm{d}\eta = 0$ *тогава и само тогава, когато* $(\mathcal{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ *принадлежи на* $\mathcal{F}_i$ *(*$i = 1, \dots, 6, 9, 10$*) или на техните директни суми;*

б) $\mathrm{d}\eta = \ell_1(\mathrm{d}\eta) = 2\big(\nabla_x \eta\big)(y)$ *тогава и само тогава, когато* $(\mathcal{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ *принадлежи на* $\mathcal{F}_7$, $\mathcal{F}_8$ *или* $\mathcal{F}_7 \oplus \mathcal{F}_8$*;*

в) $\mathrm{d}\eta = \ell_3(\mathrm{d}\eta) = -\eta(x)\omega(\phi y) + \eta(y)\omega(\phi x)$ *тогава и само тогава, когато* $(\mathcal{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ *принадлежи на* $\mathcal{F}_{11}$.

Теорема 2.9. *Нека* $(\mathcal{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ *е риманово* Π*-многообразие. Тогава:*

а) *структурната 1-форма* η *е затворена тогава и само тогава, когато* $(\mathcal{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ *принадлежи на* $\mathcal{F}_i$ *(*$i = 1, \dots, 6, 9, 10$*) или на техните директни суми;*

б) *параконтактното разпределение* $\mathcal{H}$ *на* $(\mathcal{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ *е инволютивно тогава и само тогава, когато* $(\mathcal{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ *принадлежи на* $\mathcal{F}_i$ *(*$i = 1, \dots, 6, 9, 10, 11$*) или на техните директни суми;*

в) *интегралните линии на структурното векторно поле* ξ *са геодезични върху* $(\mathcal{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ *тогава и само тогава, когато* $(\mathcal{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ *принадлежи на* $\mathcal{F}_i$ *(*$i = 1, \dots, 10$*) или на техните директни суми.*

Твърдение 2.10. *Нека* $(\mathcal{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ *е риманово* Π*-многообразие. Тогава за тензорът* $hN \equiv [\phi, \phi]$ *имаме:*

а) $[\phi, \phi](x, y) = 0$ *тогава и само тогава, когато* $(\mathcal{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ *принадлежи на* $\mathcal{F}_i$ *(*$i = 1, 2, 4, 5, 6, 11$*) или на техните директни суми;*

б) $[\phi, \phi](x, y) = -2\left\{\phi\left(\nabla_{\phi x}\phi\right)\phi y + \phi\left(\nabla_{\phi^2 x}\phi\right)\phi^2 y\right\}$ *тогава и само тогава, когато* $(\mathcal{M}, \phi, \xi, \eta, g) \in \mathcal{F}_3$*;*

в) $[\phi, \phi](x, y) = -2\left(\nabla_x \eta\right)(y)\,\xi$ *тогава и само тогава, когато* $(\mathcal{M}, \phi, \xi, \eta, g) \in \mathcal{F}_7$*;*

г) $[\phi, \phi](x, y) = -2\left\{\eta(x)\nabla_y \xi - \eta(y)\nabla_x \xi - \left(\nabla_x \eta\right)(y)\,\xi\right\}$ *тогава и само тогава, когато* $(\mathcal{M}, \phi, \xi, \eta, g) \in \mathcal{F}_8$*;*

д) $[\phi, \phi](x, y) = -2\left\{\eta(x)\nabla_y \xi - \eta(y)\nabla_x \xi\right\}$ *тогава и само тогава, когато* $(\mathcal{M}, \phi, \xi, \eta, g) \in \mathcal{F}_9$*;*

е) $[\phi, \phi](x, y) = -\eta(x)\,\phi\left(\nabla_\xi \phi\right) y + \eta(y)\,\phi\left(\nabla_\xi \phi\right) x$ *тогава и само тогава, когато* $(\mathcal{M}, \phi, \xi, \eta, g) \in \mathcal{F}_{10}$.

Дефинираме следните четири тензора $\widehat{N}^{(k)}$ $(k = 1,2,3,4)$ съответно от тип $(1,2)$, $(0,2)$, $(1,1)$, $(0,1)$: $\widehat{N}^{(1)}(x,y) = \{\phi,\phi\}(x,y) - (\mathfrak{L}_\xi g)(x,y)\xi$, $\widehat{N}^{(2)}(x,y) = (\mathcal{L}_\xi g)(\phi x,y) + (\mathfrak{L}_\xi g)(x,\phi y)$, $\widehat{N}^{(3)}(x) = \{\phi x,\xi\} - \phi\{x,\xi\}$ и $\widehat{N}^{(4)}(x) = (\mathfrak{L}_\xi g)(x,\xi)$, където $\{\phi,\phi\}(x,y) = \{\phi x,\phi y\} + \phi^2\{x,y\} - \phi\{\phi x,y\} - \phi\{x,\phi y\}$, $\{x,y\} = \nabla_x y + \nabla_y x$ и $(\mathcal{L}_\xi g)(x,y) = g(\nabla_x\xi,y) + g(\nabla_y\xi,x) = (\nabla_x\eta)\,y + (\nabla_y\eta)\,x$.

Теорема 2.11. *За риманово* П*-многообразие имаме следните импликации:*

а) *Ако $\widehat{N}^{(1)}$ се анулира, тогава всички останали тензори $\widehat{N}^{(2)}$, $\widehat{N}^{(3)}$ и $\widehat{N}^{(4)}$ се анулират;*

б) *Ако някой от $\widehat{N}^{(2)}$ или $\widehat{N}^{(3)}$ се анулира, то $\widehat{N}^{(4)}$ се анулира.*

Като имаме предвид Теорема 2.11, разбираме, че $\widehat{N}^{(1)}$ играе основна роля сред останалите тензори $\widehat{N}^{(k)}$ и го означаваме просто като $\widehat{N}$.

Дефиниция 2.12. *Тензорът $\widehat{N}$ от тип $(1,2)$ се нарича присъединен Нейенхаус тензор на структурата (ϕ,ξ,η,g).*

Твърдение 2.13. *Присъединеният Нейенхаус тензор $\widehat{N}$ се изразява по следния начин по отношение на $\nabla\phi$ и $\nabla\eta$: $\widehat{N}(x,y) = (\nabla_{\phi x}\phi)\,y - \phi\,(\nabla_x\phi)\,y - (\nabla_x\eta)\,(y)\xi + (\nabla_{\phi y}\phi)\,x - \phi\,(\nabla_y\phi)\,x - (\nabla_y\eta)\,(x)\xi$.*

Твърдение 2.14. *За всяко риманово* П*-многообразие присъединеният тензор на Нейенхаус притежава следните свойства:*

$$\widehat{N}(\phi^2x,\phi y,\phi z) = -\widehat{N}(\phi^2x,\phi^2y,\phi^2z), \quad \widehat{N}(\phi^2x,\phi^2y,\phi^2z) = \widehat{N}(\phi x,\phi y,\phi^2z),$$
$$\widehat{N}(x,\phi^2y,\phi^2z) = -\widehat{N}(x,\phi y,\phi z), \quad \widehat{N}(\phi^2x,\phi^2y,z) = \widehat{N}(\phi x,\phi y,z),$$
$$\widehat{N}(\xi,\phi y,\phi z) = -\widehat{N}(\xi,\phi^2y,\phi^2z), \quad \widehat{N}(\phi x,\phi y,\xi) = \widehat{N}(\phi^2x,\phi^2y,\xi).$$

Твърдение 2.15. *Нека $(\mathcal{M},\phi,\xi,\eta,g)$ е $\mathcal{F}_i$-многообразие $(i = 1,2,\dots,11)$. Тогава видът на четирите тензора $\widehat{N}^{(k)}$ $(k = 1,2,3,4)$ в съответния клас $\mathcal{F}_i$ е даден в Таблица 2.2.*

Теорема 2.16. *Едно риманово* П*-многообразие $(\mathcal{M},\phi,\xi,\eta,g)$ има:*

а) *нулев $\widehat{N}^{(1)}$ тогава и само тогава, когато то принадлежи на някои от основните класове $\mathcal{F}_3$, $\mathcal{F}_7$ или на тяхната директна сума;*

б) *нулев $\widehat{N}^{(2)}$ тогава и само тогава, когато то принадлежи на някои от основните класове $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$, $\mathcal{F}_7$, ..., $\mathcal{F}_{10}$ или на техните директни суми;*

в) *нулев $\widehat{N}^{(3)}$ тогава и само тогава, когато то принадлежи на някои от основните класове $\mathcal{F}_1,\dots,\mathcal{F}_7$ или на техните директни суми;*

г) *нулев* $\widehat{N}^{(4)}$ *тогава и само тогава, когато то принадлежи на някои от основните класове* $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{10}$ *или на техните директни суми.*

Таблица 2.2. Тензорите $\widehat{N}^{(1)}$, $\widehat{N}^{(2)}$, $\widehat{N}^{(3)}$ и $\widehat{N}^{(4)}$

	$\widehat{N}^{(1)}(x,y,z)$	$\widehat{N}^{(2)}(x,y)$	$\widehat{N}^{(3)}(x,y)$	$\widehat{N}^{(4)}(x)$
$\mathcal{F}_1$	$\frac{2}{n}\{g(x,\phi y)\theta(\phi^2 z) - g(\phi x,\phi y)\theta(\phi z)\}$	0	0	0
$\mathcal{F}_2$	$-2\{F(\phi x,\phi y,\phi z) + F(\phi^2 x,\phi^2 y,\phi z)\}$	0	0	0
$\mathcal{F}_3$	0	0	0	0
$\mathcal{F}_4$	$\frac{2}{n}\theta(\xi)g(x,\phi y)\eta(z)$	$-\frac{2}{n}\theta(\xi)g(\phi x,\phi y)$	0	0
$\mathcal{F}_5$	$\frac{2}{n}\theta^*(\xi)g(\phi x,\phi y)\eta(z)$	$-\frac{2}{n}\theta^*(\xi)g(x,\phi y)$	0	0
$\mathcal{F}_6$	$4F(x,\phi y,\xi)\eta(z)$	$-4F(x,y,\xi)$	0	0
$\mathcal{F}_7$	0	0	0	0
$\mathcal{F}_8$	$-2\{\eta(x)F(y,\phi z,\xi) + \eta(y)F(x,\phi z,\xi)\}$	0	$2F(x,y,\xi)$	0
$\mathcal{F}_9$	$-2\{\eta(x)F(y,\phi z,\xi) + \eta(y)F(x,\phi z,\xi)\}$	0	$2F(x,y,\xi)$	0
$\mathcal{F}_{10}$	$-\eta(x)F(\xi,y,\phi z) - \eta(y)F(\xi,x,\phi z)$	0	$F(\xi,x,y)$	0
$\mathcal{F}_{11}$	$\eta(z)\{\eta(x)\omega(\phi y) + \eta(y)\omega(\phi x)\}$ $-2\eta(x)\eta(y)\omega(\phi z)$	$-\eta(x)\omega(y) - \eta(y)\omega(x)$	$\omega(x)\eta(y)$ $+2\eta(x)\omega(y)$	$-\omega(\phi x)$

Следствие 2.17. *Класът* $\mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_7$ *е класът на риманови* Π*-многообразия с нулев присъединен Нейенхаус тензор.*

Твърдение 2.18. *Нека* $(\mathcal{M},\phi,\xi,\eta,g)$ *е риманово* Π*-многообразие. Тогава имаме:*

а) $(\mathfrak{L}_\xi g)(x,y) = 0$ *тогава и само тогава, когато* $(\mathcal{M},\phi,\xi,\eta,g)$ *принадлежи на* $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_7 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$*;*

б) $(\mathfrak{L}_\xi g)(x,y) = -\frac{1}{n}\theta(\xi)g(x,\phi y)$ *тогава и само тогава, когато* $(\mathcal{M},\phi,\xi,\eta,g)$ *принадлежи на* $\mathcal{F}_4$*;*

в) $(\mathfrak{L}_\xi g)(x,y) = -\frac{1}{n}\theta^*(\xi)g(\phi x,\phi y)$ *тогава и само тогава, когато* $(\mathcal{M},\phi,\xi,\eta,g)$ *принадлежи на* $\mathcal{F}_5$*;*

г) $(\mathfrak{L}_\xi g)(x,y) = 2\big(\nabla_x\eta\big)(y)$ *тогава и само тогава, когато* $(\mathcal{M},\phi,\xi,\eta,g)$ *принадлежи на* $\mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_9$*;*

д) $(\mathfrak{L}_\xi g)(x,y) = -\eta(x)\omega(\phi y) - \eta(y)\omega(\phi x)$ *тогава и само тогава, когато* $(\mathcal{M},\phi,\xi,\eta,g)$ *принадлежи на* $\mathcal{F}_{11}$.

Векторното поле ξ е килингово върху $(\mathcal{M},\phi,\xi,\eta,g)$ тогава и само тогава, когато $(\mathfrak{L}_\xi g)(x,y) = 0$.

Следствие 2.19. *Риманово* Π*-многообразие* $(\mathcal{M},\phi,\xi,\eta,g)$ *има килингово векторно поле* ξ *тогава и само тогава, когато* $(\mathcal{M},\phi,\xi,\eta,g)$ *принадлежи на* $\mathcal{F}_i$ $(i = 1,2,3,7,8,10)$ *или на техните директни суми.*

Твърдение 2.20. *Нека $(\mathcal{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ е риманово* П*-многообразие. Тогава за тензорът $h\widehat{N} = \{\phi, \phi\}$ имаме:*

а) $\{\phi,\phi\}(x,y) = 0$ *тогава и само тогава, когато $(\mathcal{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ принадлежи на $\mathcal{F}_i$ $(i = 3, 7)$ или $\mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_7$;*

б) $g\big(\{\phi,\phi\}(x,y),z\big) = \frac{2}{n}\big\{g(x,\phi y)\theta(\phi^2 z) - g(\phi x,\phi y)\theta(\phi z)\big\}$ *тогава и само тогава, когато $(\mathcal{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ принадлежи на $\mathcal{F}_1$;*

в) $\{\phi,\phi\}(x,y) = -2\left\{\phi\left(\nabla_{\phi x}\phi\right)\phi y + \phi\left(\nabla_{\phi^2 x}\phi\right)\phi^2 y\right\}$ *тогава и само тогава, когато $(\mathcal{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ принадлежи на $\mathcal{F}_2$;*

г) $g\big(\{\phi,\phi\}(x,y),z\big) = \frac{1}{n}\theta(\xi)g(x,\phi y)\eta(z)$ *тогава и само тогава, когато $(\mathcal{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ принадлежи на $\mathcal{F}_4$;*

д) $g\big(\{\phi,\phi\}(x,y),z\big) = \frac{1}{n}\theta^*(\xi)g(\phi x,\phi y)\eta(z)$ *тогава и само тогава, когато $(\mathcal{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ принадлежи на $\mathcal{F}_5$;*

е) $\{\phi,\phi\}(x,y) = -2\left(\nabla_x\eta\right)(y)\,\xi$ *тогава и само тогава, когато $(\mathcal{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ принадлежи на $\mathcal{F}_6$;*

ж) $g\big(\{\phi,\phi\}(x,y),z\big) = -2\left\{\eta(x)F(y,\phi z,\xi) + \eta(y)F(x,\phi z,\xi)\right\}$ *тогава и само тогава, когато $(\mathcal{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ принадлежи на $\mathcal{F}_8$;*

з) $g\big(\{\phi,\phi\}(x,y),z\big) = -2\left\{\eta(x)F(y,\phi z,\xi) + \eta(y)F(x,\phi z,\xi)\right\}$ $-2\eta(z)F(x,\phi y,\xi)$ *тогава и само тогава, когато $(\mathcal{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ принадлежи на $\mathcal{F}_9$;*

и) $g\big(\{\phi,\phi\}(x,y),z\big) = -\eta(x)F(\xi,y,\phi z) - \eta(y)F(\xi,x,\phi z)$ *тогава и само тогава, когато $(\mathcal{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ принадлежи на $\mathcal{F}_{10}$.*

й) $g\big(\{\phi,\phi\}(x,y),z\big) = -2\eta(x)\eta(y)\omega(\phi z)$ *тогава и само тогава, когато $(\mathcal{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ принадлежи на $\mathcal{F}_{11}$.*

Намираме как фундаменталният тензор е определен чрез двойката Нейенхаус тензори. Тъй като F се използва за класификацията на многообразията от изучавания тип, можем да изразим класовете $\mathcal{F}_i$ $(i = 1, 2, \dots, 11)$ само чрез двойката тензори $(N, \widehat{N})$.

Теорема 2.21. *Нека $(\mathcal{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ е риманово* П*-многообразие. Тогава неговият фундаментален тензор се изразява чрез N и $\widehat{N}$ по формулата:*

$$\begin{aligned} F(x,y,z) = {} & \tfrac{1}{4}\big\{N(\phi x,y,z) + N(\phi x,z,y) + \widehat{N}(\phi x,y,z) + \widehat{N}(\phi x,z,y)\big\} \\ & - \tfrac{1}{2}\eta(x)\big\{N(\xi,y,\phi z) + \widehat{N}(\xi,y,\phi z) + \eta(z)\widehat{N}(\xi,\xi,\phi y)\big\}. \end{aligned}$$

Следствие 2.22. *Класът на риманови* П*-многообразия с нулеви тензори N и $\widehat{N}$ е специалният клас $\mathcal{F}_0$.*

* * *

В **§3** определяме класа на параконтактните почти паракомплексни риманови многообразия и класа на парасасакиеви паракомплексни риманови многообразия. Освен това, получаваме някои техни свойства.

В [38], И. Сато налага следното условие на произволно m-мерно почти параконтактно риманово многообразие: $2g(x, \phi y) = (\nabla_x \eta)(y) + (\nabla_y \eta)(x)$, което е наречено *параконтактно риманово многообразие*.

Разглеждаме $(2n+1)$-мерно риманово Π-многообразие $(\mathcal{M}, \phi, \xi, \eta, g)$.

Дефиниция 3.1. *Риманово* Π-*многообразие със свойството* $2g(x, \phi y) = (\nabla_x \eta)(y) + (\nabla_y \eta)(x) = (\mathfrak{L}_\xi g)(x, y)$ *се нарича* параконтактно почти паракомплексно риманово многообразие.

Имайки предвид класификацията в [18], означаваме чрез $\mathcal{F}_4{}'$ подкласа на основния клас $\mathcal{F}_4$, определен чрез условието $\theta(\xi) = -2n$, т.е. $\mathcal{F}_4{}' = \left\{\mathcal{F}_4 \,|\, \theta(\xi) = -2n\right\}$. Тогава компонентът $F_4{}'$ на F съответен на подкласа $\mathcal{F}_4{}'$ е следния: $F_4{}'(x, y, z) = -g(\phi x, \phi y)\eta(z) - g(\phi x, \phi z)\eta(y)$.

Теорема 3.2. *Параконтактните почти паракомплексни риманови многообразия принадлежат на* $\mathcal{F}_4{}'$ *или на неговите директни суми с* $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$, $\mathcal{F}_7$, $\mathcal{F}_8$ *и* $\mathcal{F}_{10}$.

Теорема 3.3. *Нека* $(\mathcal{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ *е параконтактно почти паракомплексно риманово многообразие. Тогава то има:*

а) *интегруема паракомплексна структура* ϕ *върху* $\mathcal{H}$, *т.е.* $[\phi, \phi] = 0$, *тогава и само тогава, когато многообразието принадлежи на* $\mathcal{F}_4{}'$ *или на неговите директни суми с* $\mathcal{F}_1$ *и* $\mathcal{F}_2$;

б) *неинтегруема почти паракомплексна структура* ϕ, *т.е.* $[\phi, \phi] \neq 0$, *тогава и само тогава, когато многообразието не принадлежи на класовете от а), но принадлежи на останалите класове, дадени в Теорема 3.2.*

Съгласно Теорема 3.3 а), класът $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_4{}'$ е класът на *параконтактните паракомплексни риманови многообразия.* В алтернативния случай (т.е. Теорема 3.3 б)), многообразията принадлежащи на останалите класове дадени в Теорема 3.2, са *параконтактните почти паракомплексни риманови многообразия* с неинтегруема ϕ.

В [40], Сато и Матсумото въвеждат понятието *парасасакиево риманово многообразие* в класа на произволни параконтактни риманови многообразия чрез условието $\phi x = \nabla_x \xi$.

Дефиниция 3.4. *Параконтактно почти паракомплексно риманово многообразие с условието* $\phi x = \nabla_x \xi$ *се нарича* парасасакиево паракомплексно риманово многообразие.

Теорема 3.5. *Класът на парасасакиевите паракомплексни риманови многообразия е* $\mathcal{F}_4{}'$.

* * *

В **§4** определяме съответните основни компоненти на фундаменталния тензор като представяме случая на най-ниската размерност три на почти параконтактни почти паракомплексни риманови многообразия.

Нека многообразията от изучавания тип $(\mathcal{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ са от най-ниската размерност, т.е. $\dim \mathcal{M} = 3$ (или $n = 1$), и нека системата от три вектора $\{e_0, e_1, e_2\}$ е ϕ-база, която удовлетворява условията:

$$\phi e_1 = e_2, \qquad \phi e_2 = e_1, \qquad \phi e_0 = 0, \qquad \xi = e_0, \qquad \eta(e_1) = \eta(e_2) = 0, \qquad \eta(e_0) = 1,$$
$$g(e_0, e_0) = g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = 1, \qquad g(e_i, e_j) = 0, \qquad i, j = 0, 1, 2,\ i \neq j.$$

Означаваме компонентите на F, θ, θ^* и ω относно ϕ-базата $\{e_0, e_1, e_2\}$ по следния начин: $F_{ijk} = F(e_i, e_j, e_k)$, $\theta_k = \theta(e_k)$, $\theta^*_k = \theta^*(e_k)$ и $\omega_k = \omega(e_k)$ и намираме:

$$\begin{gathered}
\theta_0 = F_{110} + F_{220}, \qquad \theta_1 = F_{111} = -F_{122} = -\theta^*_2, \\
\theta^*_0 = F_{120} + F_{210}, \qquad \theta_2 = F_{222} = -F_{211} = -\theta^*_1, \\
\omega_0 = 0, \qquad \omega_1 = F_{001}, \qquad \omega_2 = F_{002}.
\end{gathered}$$

Произволните вектори x, y, z, които принадлежат на $T_p\mathcal{M}$, $p \in \mathcal{M}$, се изразяват чрез $x = x^i e_i$, $y = y^i e_i$, $z = z^i e_i$ относно ϕ-базата.

Твърдение 4.1. *Компонентите* F^i $(i = 1, 2, \dots, 11)$ *на* F *за тримерното риманово* Π*-многообразие са следните:*

$$\begin{aligned}
&F^1(x,y,z) = \left(x^1\theta_1 - x^2\theta_2\right)\left(y^1z^1 - y^2z^2\right), \\
&\qquad \theta_1 = F_{111} = -F_{122}, \quad \theta_2 = -F_{211} = F_{222}; \\
&F^2(x,y,z) = F^3(x,y,z) = 0, \\
&F^4(x,y,z) = \tfrac{1}{2}\theta_0\Big\{x^1\left(y^0z^1 + y^1z^0\right) + x^2\left(y^0z^2 + y^2z^0\right)\Big\}, \\
&\qquad \tfrac{1}{2}\theta_0 = F_{101} = F_{110} = F_{202} = F_{220}; \\
&F^5(x,y,z) = \tfrac{1}{2}\theta^*_0\big\{x^1\left(y^0z^2 + y^2z^0\right) + x^2\left(y^0z^1 + y^1z^0\right)\big\}, \\
&\qquad \tfrac{1}{2}\theta^*_0 = F_{102} = F_{120} = F_{201} = F_{210}; \\
&F^6(x,y,z) = F^7(x,y,z) = 0, \\
&F^8(x,y,z) = \lambda\big\{x^1\left(y^0z^1 + y^1z^0\right) - x^2\left(y^0z^2 + y^2z^0\right)\big\}, \\
&\qquad \lambda = F_{101} = F_{110} = -F_{202} = -F_{220};
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&F^9(x,y,z)=\mu\{x^1\left(y^0z^2+y^2z^0\right)-x^2\left(y^0z^1+y^1z^0\right)\},\\
&\qquad \mu=F_{102}=F_{120}=-F_{201}=-F_{210};\\
&F^{10}(x,y,z)=\nu\,x^0\left(y^1z^1-y^2z^2\right),\\
&\qquad \nu=F_{011}=-F_{022};\\
&F^{11}(x,y,z)=x^0\{\omega_1\left(y^0z^1+y^1z^0\right)+\omega_2\left(y^0z^2+y^2z^0\right)\},\\
&\qquad \omega_1=F_{001}=F_{010},\quad \omega_2=F_{002}=F_{020}.
\end{aligned}
$$

Теорема 4.2. *Тримерните риманови* Π*-многообразия принадлежат на основните класове* $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_4$, $\mathcal{F}_5$, $\mathcal{F}_8$, $\mathcal{F}_9$, $\mathcal{F}_{10}$, $\mathcal{F}_{11}$ *и на техните директни суми.*

* * *

В **§5** разглеждаме почти параконтакти почти паракомплексни риманови многообразия от най-ниска размерност. Конструираме семейства на алгебри на Ли съответни на групи на Ли снабдени с изучаваните структури. Установяваме необходими и достатъчни условия полученото тримерно многообразие да принадлежи на основен клас $\mathcal{F}_s$ $(s=1,4,5,8,9,10,11)$ от използваната класификацията в [18]. Разглеждаме някои специални структури и изучаваме конструираните многообразия относно техните геометрични характеристики. Накрая намираме основни кривинни свойства от всеки клас на изследваните многообразия.

Нека $\mathcal{L}$ е тримерна реална свързана група на Ли и нека $\mathfrak{l}$ е съответната алгебра на Ли. Ако $\{E_0,E_1,E_2\}$ е база от лявоинвариантни векторни полета върху $\mathfrak{l}$, тогава дефинираме Π-структура (ϕ,ξ,η), т.е. почти параконтактна почти паракомплексна структура (ϕ,ξ,η), по следния начин:

$$\phi E_0=0,\quad \phi E_1=E_2,\quad \phi E_2=E_1,\quad \xi=E_0,\quad \eta(E_0)=1,\quad \eta(E_1)=\eta(E_2)=0$$

и риманова метрика g дефинирана чрез $g(E_i,E_j)=\delta_{ij}, i,j\in\{0,1,2\}$. Полученото многообразие означаваме с $(\mathcal{L},\phi,\xi,\eta,g)$.

Твърдение 5.1. *Многообразието* $(\mathcal{L},\phi,\xi,\eta,g)$ *е тримерно риманово* Π*-многообразие.*

Теорема 5.2. *Многообразието* $(\mathcal{L},\phi,\xi,\eta,g)$ *принадлежи на основния клас* $\mathcal{F}_s$ $(s\in\{1,4,5,8,9,10,11\})$ *тогава и само тогава, когато съответната алгебра на Ли* $\mathfrak{l}$ *е определена чрез следните комутатори:*

$$
\begin{array}{llll}
\mathcal{F}_1: & [E_0,E_1]=0, & [E_0,E_2]=0, & [E_1,E_2]=\alpha E_1-\beta E_2;\\
\mathcal{F}_4: & [E_0,E_1]=\alpha E_2, & [E_0,E_2]=\alpha E_1, & [E_1,E_2]=0;\\
\mathcal{F}_5: & [E_0,E_1]=\alpha E_1, & [E_0,E_2]=\alpha E_2, & [E_1,E_2]=0;
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
\mathcal{F}_8: & [E_0,E_1]=\alpha E_2, & [E_0,E_2]=-\alpha E_1, & [E_1,E_2]=2\alpha E_0;\\
\mathcal{F}_9: & [E_0,E_1]=\alpha E_1, & [E_0,E_2]=-\alpha E_2, & [E_1,E_2]=0;\\
\mathcal{F}_{10}: & [E_0,E_1]=-\alpha E_2, & [E_0,E_2]=\alpha E_1, & [E_1,E_2]=0;\\
\mathcal{F}_{11}: & [E_0,E_1]=\alpha E_0, & [E_0,E_2]=\beta E_0, & [E_1,E_2]=0,
\end{array}
$$

където α и β са произволни реални параметри. Освен това връзките на α и β с ненулевите компоненти на F_{ijk} за съответния клас $\mathcal{F}_s$, са следните:

$$
\begin{array}{llll}
\mathcal{F}_1: & \alpha=\frac{1}{2}\theta_1, \quad \beta=-\frac{1}{2}\theta_2; & \mathcal{F}_4: & \alpha=\frac{1}{2}\theta_0;\\
\mathcal{F}_5: & \alpha=\frac{1}{2}\theta_0^*; & \mathcal{F}_8: & \alpha=\lambda;\\
\mathcal{F}_9: & \alpha=\mu; & \mathcal{F}_{10}: & \alpha=\frac{1}{2}\nu;\\
\mathcal{F}_{11}: & \alpha=\omega_2, \quad \beta=\omega_1, & &
\end{array}
$$

където θ_0, θ_1, θ_2, θ_0^*, λ, μ, ν, ω_1 и ω_2 са определени в Твърдение 4.1.

Следствие 5.3. *Многообразието $(\mathcal{L},\phi,\xi,\eta,g)$ е парасасакиево тогава и само тогава, когато съответната алгебра на Ли $\mathfrak{l}$ е определена чрез следните комутатори:*

$$[E_0,E_1]=-E_2, \quad [E_0,E_2]=-E_1, \quad [E_1,E_2]=0.$$

Очевидно, ако α (съответно α и β) се анулира в съответния клас, то алгебрата на Ли е абелева, т.е. всички комутатори са нулеви и многообразието принадлежи на специалния клас $\mathcal{F}_0$. По-нататък, пропускаме този тривиален случай от нашите разглеждания, т.е. предполагаме, че $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$.

Разглеждаме някои специални структури върху разглежданите многообразия.

Метриката g се нарича *килингова*, ако е в сила свойството $g([x,y],z)=g(x,[y,z])$.

Теорема 5.4. *Метриката g на $(\mathcal{L},\phi,\xi,\eta,g)$ е килингова тогава и само тогава, когато $(\mathcal{L},\phi,\xi,\eta,g)$ принадлежи на подкласа на $\mathcal{F}_8\oplus\mathcal{F}_{10}$, определен от условието $2\lambda=-\nu$.*

Теорема 5.5. *Асоциираната метрика $\widetilde{g}$ на $(\mathcal{L},\phi,\xi,\eta,g)$ е килингова тогава и само тогава, когато $(\mathcal{L},\phi,\xi,\eta,g)$ принадлежи на подкласа на $\mathcal{F}_8\oplus\mathcal{F}_9\oplus\mathcal{F}_{10}$, определен от условието $2\lambda=\mu=\nu$.*

Известно е, че един ендоморфизъм ϕ се нарича *биинвариантен*, ако удовлетворява свойството $\phi[x,y]=[x,\phi y]$.

Теорема 5.6. *Структурата ϕ на $(\mathcal{L},\phi,\xi,\eta,g)$ е биинвариантна тогава и само тогава, когато $(\mathcal{L},\phi,\xi,\eta,g)$ принадлежи на подкласа на $\mathcal{F}_4\oplus\mathcal{F}_5\oplus\mathcal{F}_8\oplus\mathcal{F}_{10}$, определен от условието $2\lambda=\nu$.*

Теорема 5.7. *Векторното поле* ξ *на* $(\mathcal{L},\phi,\xi,\eta,g)$ *е килингово тогава и само тогава, когато* $(\mathcal{L},\phi,\xi,\eta,g)$ *принадлежи на* $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_8$, $\mathcal{F}_{10}$ *или на техните директни суми.*

Изследваме кривинните свойства на разглежданите многообразия и получаваме:

Твърдение 5.8. *Нека многообразието* $(\mathcal{L},\phi,\xi,\eta,g)$ *принадлежи на основния клас* $\mathcal{F}_s$, $s\in\{1,4,5,8,9,10,11\}$*. Ако* $s=10$, $(\mathcal{L},\phi,\xi,\eta,g)$ *е плоско, докато при* $s\neq 10$, $(\mathcal{L},\phi,\xi,\eta,g)$ *е плоско тогава и само тогава, когато то е* $\mathcal{F}_0$*-многообразие. Във втория случай многообразието има следните ненулеви компоненти на* R, ρ, ρ^* *и ненулеви стойности на* τ, τ^*, k_{ij}*:*

$$
\begin{array}{ll}
\mathcal{F}_1: & R_{1212}=-\rho_{11}=-\rho_{22}=\rho^*_{12}=\rho^*_{21}=-\frac{1}{2}\tau=-k_{12}=\alpha^2+\beta^2;\\
\mathcal{F}_4: & R_{0101}=R_{0202}=-R_{1212}=-\frac{1}{2}\rho_{00}=-\rho^*_{12}=-\rho^*_{21}\\
 & \qquad =-\frac{1}{2}\tau=-k_{01}=-k_{02}=k_{12}=\alpha^2;\\
\mathcal{F}_5: & R_{0101}=R_{0202}=R_{1212}=-\frac{1}{2}\rho_{00}=-\frac{1}{2}\rho_{11}=-\frac{1}{2}\rho_{22}\\
 & \qquad =\rho^*_{12}=\rho^*_{21}=-\frac{1}{6}\tau=-k_{01}=-k_{02}=-k_{12}=\alpha^2;\\
\mathcal{F}_8: & R_{0101}=R_{0202}=-R_{1212}=-\frac{1}{2}\rho_{00}=-\rho^*_{12}=-\rho^*_{21}\\
 & \qquad =-\frac{1}{2}\tau=-k_{01}=-k_{02}=k_{12}=-\alpha^2;\\
\mathcal{F}_9: & R_{0101}=R_{0202}=-R_{1212}=-\frac{1}{2}\rho_{00}=-\rho^*_{12}=-\rho^*_{21}\\
 & \qquad =-\frac{1}{2}\tau=-k_{01}=-k_{02}=k_{12}=\alpha^2;\\
\mathcal{F}_{11}: & R_{0101}=-\rho_{11}=-k_{01}=\alpha^2,\quad \rho_{00}=\frac{1}{2}\tau=-(\alpha^2+\beta^2),\\
 & R_{0102}=-\rho_{12}=-\frac{1}{2}\rho^*_{00}=-\frac{1}{2}\tau^*=\alpha\beta,\\
 & R_{0202}=-\rho_{22}=-k_{02}=\beta^2.
\end{array}
$$

Теорема 5.9. *Нека* $(\mathcal{L},\phi,\xi,\eta,g)$ *е неплоско* $\mathcal{F}_s$*-многообразие, т.е.* $s\in\{1,4,5,8,9,11\}$*. Тогава имаме следните характеристики:*

а) *Многообразията от класовете* $\mathcal{F}_4$ *и* $\mathcal{F}_9$ *имат кривинни тензори с едни и същи компоненти относно базата;*
б) *Кривинният тензор на всяко* $\mathcal{F}_{11}$*-многообразие притежава свойството* $R(x,y,\phi z,\phi w)=0$*;*
в) *Всяко* $\mathcal{F}_8$*-многообразие има положителна скаларна кривина;*
г) *Всяко* $\mathcal{F}_s$*-многообразие* $(s\in\{1,4,5,9,11\})$ *има отрицателна скаларна кривина;*
д) *Всяко* $\mathcal{F}_s$*-многообразие* $(s\in\{1,4,5,8,9\})$ *е* $*$*-скаларно плоско;*
е) *Едно* $\mathcal{F}_{11}$*-многообразие е* $*$*-Ричи плоско тогава и само тогава, когато е* $*$*-скаларно плоско;*

ж) *Едно $\mathcal{F}_{11}$-многообразие е $*$-скаларно плоско тогава и само тогава, когато $\alpha\beta = 0$, $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$;*

з) *Едно $\mathcal{F}_{11}$-многообразие има положителна (съответно отрицателна) $*$-скаларна кривина тогава и само тогава, когато $\alpha\beta < 0$ (съответно $\alpha\beta > 0$);*

и) *Всяко $\mathcal{F}_1$-многообразие има нулеви секционни кривини на основните ξ-площадки;*

й) *Всяко $\mathcal{F}_8$-многообразие има положителни секционни кривини на основните ξ-площадки;*

к) *Всяко $\mathcal{F}_s$-многообразие ($s \in \{4, 5, 9, 11\}$) има отрицателни секционни кривини на основните ξ-площадки;*

л) *Всяко $\mathcal{F}_{11}$-многообразие има нулева скаларна кривина на основната ϕ-холоморфна площадка;*

м) *Всяко $\mathcal{F}_s$-многообразие ($s \in \{4, 9\}$) има положителна секционна кривина на основната ϕ-холоморфна площадка;*

н) *Всяко $\mathcal{F}_s$-многообразие ($s \in \{1, 5, 8\}$) има отрицателна скаларна кривина на основната ϕ-холоморфна площадка.*

Следствие 5.10. *Видът на тензора на Ричи върху $(\mathcal{L}, \phi, \xi, \eta, g)$ в съответния основен клас е:*

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{F}_1: \ \rho = \frac{\tau}{2}\left(g - \eta\otimes\eta\right); & \mathcal{F}_4: \ \rho = \tau(\eta\otimes\eta); \\
\mathcal{F}_5: \ \rho = \frac{\tau}{3}g; & \mathcal{F}_8: \ \rho = \tau(\eta\otimes\eta); \\
\mathcal{F}_9: \ \rho = \tau(\eta\otimes\eta); & \mathcal{F}_{10}: \ \rho = 0; \\
\mathcal{F}_{11}: \ \rho = -\rho(\phi\cdot, \phi\cdot) + \frac{\tau}{2}g + \tau^* g^*, &
\end{array}$$

където $g^* = \widetilde{g} - \eta\otimes\eta$.

Следствие 5.11. *Видът на кривинния тензор върху $(\mathcal{L}, \phi, \xi, \eta, g)$ в съответния основен клас е:*

$$\begin{array}{ll}
\mathcal{F}_1: & R = -\frac{1}{4}\tau\left(g \owedge g\right) + \frac{1}{2}\tau\left(g \owedge (\eta\otimes\eta)\right); \\
\mathcal{F}_4: & R = \frac{1}{4}\tau\left(g \owedge g\right) - \tau\left(g \owedge (\eta\otimes\eta)\right); \\
\mathcal{F}_5: & R = -\frac{1}{2}\tau\left(g \owedge g\right); \\
\mathcal{F}_8: & R = \frac{1}{4}\tau\left(g \owedge g\right) - \tau\left(g \owedge (\eta\otimes\eta)\right); \\
\mathcal{F}_9: & R = \frac{1}{4}\tau\left(g \owedge g\right) - \tau\left(g \owedge (\eta\otimes\eta)\right); \\
\mathcal{F}_{10}: & R = 0; \\
\mathcal{F}_{11}: & R = -\rho \owedge (\eta\otimes\eta).
\end{array}$$

Едно риманово П-многообразие се нарича *η-паракомплексно-айнщайново*, когато следното условие е изпълнено $\rho = \lambda g + \mu\widetilde{g} + \nu\eta\otimes\eta$, където λ, μ и

ν са реални числа [9]. В частност, ако $\mu = 0$ тогава $\mathcal{M}$ се нарича *пара-η-айнщайново.* Едно пара-η-айнщайново многообразие е наречено *ℓ_i-пара-η-айнщайново многообразие* ($i \in \{1, 2\}$), когато условието $\rho = \lambda\, \ell_i(g)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, е изпълнено. Аналогично, има съответни понятия по отношение на $\widetilde{g}$.

Теорема 5.12. *Многообразието $(\mathcal{L}, \phi, \xi, \eta, g)$ е:*

а) *пара-η-айнщайново, ако принадлежи на $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_4$, $\mathcal{F}_5$, $\mathcal{F}_8$, $\mathcal{F}_9$ или на техните директни суми;*

б) *ℓ_1-пара-η-айнщайново, ако принадлежи на $\mathcal{F}_1$;*

в) *ℓ_2-пара-η-айнщайново, ако принадлежи на $\mathcal{F}_4$, $\mathcal{F}_8$, $\mathcal{F}_9$ или на техните директни суми;*

г) *айнщайново, ако принадлежи на $\mathcal{F}_5$.*

Следствие 5.13. *Парасасакиевото паракомплексно риманово многообразие $(\mathcal{L}, \phi, \xi, \eta, g)$ е ℓ_2-пара-η-айнщайново.*

* * *

Обект на изследване в **§6** е групи на Ли $\mathcal{L}$ с асоциирана алгебра на Ли $\mathfrak{l}$, представени като тримерни почти параконтактни почти паракомплексни риманови многообразия. Установяваме съответствие между алгебрите на Ли и явното матрично представяне на техните групи на Ли за всеки основен клас $\mathcal{F}_s$ ($s \in \{1, 4, 5, 8, 9, 10, 11\}$).

Нека $(\mathcal{L}, \phi, \xi, \eta, g)$ е тримерно риманово П-многообразие, където $\mathcal{L}$ е група на Ли с асоциирана алгебра на Ли $\mathfrak{l}$ както в §5. В Теорема 5.2 определихме вида на $\mathfrak{l}$ чрез комутатори така, че многообразието да принадлежи на всеки клас $\mathcal{F}_s$ ($s \in \{1, 4, 5, 8, 9, 10, 11\}$). В теоремата по-долу получаваме явно матрично представяне на група на Ли $\mathcal{G}$, изоморфна на $\mathcal{L}$ и имаща същата асоциирана алгебра на Ли $\mathfrak{l}$. Дадени са случаите, когато изследваното многообразие $(\mathcal{L}, \phi, \xi, \eta, g)$ принадлежи на всеки клас $\mathcal{F}_s$.

Теорема 6.1. *Нека $(\mathcal{L}, \phi, \xi, \eta, g)$ е тримерно риманово* П*-многообразие, принадлежащо на класа $\mathcal{F}_s$, ($s \in \{1, 4, 5, 8, 9, 10, 11\}$). Тогава компактната просто свързана група на Ли $\mathcal{G}$, изоморфна на $\mathcal{L}$, със същата асоциирана алгебра на Ли $\mathfrak{l}$, има следното матрично представяне: $e^A = E + tA + uA^2$, където E е единичната матрица, а A е матричното представяне на $\mathfrak{l}$. В Таблица 6.1 са дадени матричния вид на A и стойностите на t, и за различните класове $\mathcal{F}_s$, където $a, b, c \in \mathbb{R}$, а α, β са въведени в Теорема 5.2.*

Таблица 6.1. Матричният вид на A и изразите за t и u

$\mathcal{F}_1$:	$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha c & -\beta c \\ 0 & -\alpha b & \beta b \end{pmatrix}$ $\mathrm{tr}A = \alpha c + \beta b$	$t = \begin{cases} \frac{e^{\mathrm{tr}A}-1}{\mathrm{tr}A}, & \mathrm{tr}A \neq 0 \\ 1, & \mathrm{tr}A = 0 \end{cases}$ $u = 0$
$\mathcal{F}_4$:	$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha c & \alpha b \\ 0 & 0 & -\alpha a \\ 0 & -\alpha a & 0 \end{pmatrix}$ $\mathrm{tr}A^2 = 2\alpha^2 a^2$	$t = \begin{cases} \frac{\sinh\sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{tr}A^2}}{\sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{tr}A^2}}, & \mathrm{tr}A^2 > 0 \\ 1, & \mathrm{tr}A^2 = 0 \end{cases}$ $u = \begin{cases} \frac{\cosh\sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{tr}A^2}-1}{\frac{1}{2}\mathrm{tr}A^2}, & \mathrm{tr}A^2 > 0 \\ 0, & \mathrm{tr}A^2 = 0 \end{cases}$
$\mathcal{F}_5$:	$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha b & \alpha c \\ 0 & -\alpha a & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha a \end{pmatrix}$ $\mathrm{tr}A = -2\alpha a$	$t = \begin{cases} \frac{e^{\frac{1}{2}\mathrm{tr}A}-1}{\frac{1}{2}\mathrm{tr}A}, & \mathrm{tr}A \neq 0 \\ 1, & \mathrm{tr}A = 0 \end{cases}$ $u = 0$
$\mathcal{F}_8$:	$A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha c & \alpha b \\ 2\alpha c & 0 & -\alpha a \\ -2\alpha b & \alpha a & 0 \end{pmatrix}$ $\mathrm{tr}A^2 = -2\alpha^2(a^2 + 2b^2 + 2c^2)$	$t = \frac{\sin\sqrt{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}A^2}}{\sqrt{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}A^2}}, \quad \mathrm{tr}A^2 < 0,$ $u = \frac{\cos\sqrt{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}A^2}-1}{\frac{1}{2}\mathrm{tr}A^2}, \quad \mathrm{tr}A^2 < 0,$
$\mathcal{F}_9$:	$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha b & -\alpha c \\ 0 & -\alpha a & 0 \\ 0 & 0 & \alpha a \end{pmatrix}$ $\mathrm{tr}A^2 = 2\alpha^2 a^2$	$t = \begin{cases} \frac{\sinh\sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{tr}A^2}}{\sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{tr}A^2}}, & \mathrm{tr}A^2 > 0 \\ 1, & \mathrm{tr}A^2 = 0 \end{cases}$ $u = \begin{cases} \frac{\cosh\sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{tr}A^2}-1}{\frac{1}{2}\mathrm{tr}A^2}, & \mathrm{tr}A^2 > 0 \\ 0, & \mathrm{tr}A^2 = 0 \end{cases}$
$\mathcal{F}_{10}$:	$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha c & -\alpha b \\ 0 & 0 & -\alpha a \\ 0 & -\alpha a & 0 \end{pmatrix}$ $\mathrm{tr}A^2 = 2\alpha^2 a^2$	$t = \begin{cases} \frac{\sinh\sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{tr}A^2}}{\sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{tr}A^2}}, & \mathrm{tr}A^2 > 0 \\ 1, & \mathrm{tr}A^2 = 0 \end{cases}$ $u = \begin{cases} \frac{\cosh\sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{tr}A^2}-1}{\frac{1}{2}\mathrm{tr}A^2}, & \mathrm{tr}A^2 > 0 \\ 0, & \mathrm{tr}A^2 = 0 \end{cases}$
$\mathcal{F}_{11}$:	$A = \begin{pmatrix} \alpha b + \beta c & 0 & 0 \\ -\alpha a & 0 & 0 \\ -\beta a & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\mathrm{tr}A = \alpha b + \beta c$	$t = \begin{cases} \frac{e^{\mathrm{tr}A}-1}{\mathrm{tr}A}, & \mathrm{tr}A \neq 0 \\ 1, & \mathrm{tr}A = 0 \end{cases}$ $u = 0$

Следствие 6.2. *Ако* $(\mathcal{L}, \phi, \xi, \eta, g)$ *е парасасакиево паракомплексно риманово многообразие, тогава компактна просто свързана група на Ли* $\mathcal{G}$*, която е изоморфна на* $\mathcal{L}$ *и има същата алгебра на Ли, се представя във вида* $e^A = E + tA + uA^2$*, където*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -c & -b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}, \qquad a, b, c \in \mathbb{R},$$

$$t = \begin{cases} \frac{\sinh|a|}{|a|}, & a \neq 0 \\ 1, & a = 0 \end{cases}, \quad u = \begin{cases} \frac{\cosh|a|-1}{|a|}, & a \neq 0 \\ 0, & a = 0 \end{cases}.$$

* * *

В **§7** разглеждаме тримерни почти параконтактни почти паракомплексни риманови многообразия. Представяме използването на два различни начина за конструиране на изучаваното многообразие върху хиперсфера в четиримерно пространство. Първият случай е, когато пространството е евклидово, а втория – на псевдоевклидово пространство с лоренцово скаларно произведение, известно още като пространство на Минковски. Получените многообразия изучаме и характеризираме относно използваната класификация и основните геометрични свойства.

Нека $\mathbb{E}^4$ е евклидовото пространство $\big(\mathbb{R}^4, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$, където $\langle\cdot,\cdot\rangle$ е скаларното произведение определено чрез $\langle x, y\rangle = x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3 + x^4y^4$ за произволни вектори $x(x^1, x^2, x^3, x^4)$ и $y(y^1, y^2, y^3, y^4)$ от $\mathbb{R}^4$ относно канонична база.

В $\mathbb{E}^4$ разглеждаме хиперсфера $\mathcal{S}_1$ с център началото на координатната система и радиус r, определена чрез условието $\mathcal{S}_1 : \langle z, z\rangle = r^2$, където z е радиус-векторът на произволна точка $p \in \mathcal{S}_1$.

Параметризираме $\mathcal{S}_1$ по следния начин:

$$z(r\cos u^1\cos u^2, r\cos u^1\sin u^2, r\sin u^1\cos u^0, r\sin u^1\sin u^0),$$

където u^0, u^1, u^2 са реални параметри, така че $u^0, u^1, u^2 \in [0; 2\pi)$, $u^1 \neq \frac{k\pi}{2}$ за $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Тогава за локалните базисни вектори $\partial_i = \partial z/\partial u^i$, $i \in \{0, 1, 2\}$ имаме следните скаларни произведения:

$$\langle\partial_0, \partial_0\rangle = r^2\sin^2 u^1, \quad \langle\partial_1, \partial_1\rangle = r^2, \quad \langle\partial_2, \partial_2\rangle = r^2\cos^2 u^1, \quad \langle\partial_i, \partial_j\rangle = 0,\ i \neq j.$$

Чрез субституцията $e_i = \frac{1}{\sqrt{\langle\partial_i,\partial_i\rangle}}\partial_i, \quad i \in \{0, 1, 2\}$ получаваме ортонормирана база $\{e_i\}$, $i \in \{0, 1, 2\}$ на $T_p\mathcal{S}_1$, $p \in \mathcal{S}_1$, както следва: $e_0 = \frac{\varepsilon_2}{r\sin u^1}\partial_0, e_1 = \frac{1}{r}\partial_1, e_2 = \frac{\varepsilon_1}{r\cos u^1}\partial_2$, където $\varepsilon_1 = \mathrm{sgn}(\cos u^1)$, $\varepsilon_2 = \mathrm{sgn}(\sin u^1)$.

Въвеждаме една П-структура (ϕ, ξ, η) върху $\mathcal{S}_1$. Рестрикцията на $\langle\cdot,\cdot\rangle$ върху $\mathcal{S}_1$ е метрика, която означаваме с g. Следователно $\{e_i\}$, $i \in \{0, 1, 2\}$ е ортонормирана ϕ-база относно g.

Твърдение 7.1. *Многообразието $(\mathcal{S}_1, \phi, \xi, \eta, g)$ е тримерно риманово* П*-многообразие.*

Теорема 7.2. *Нека $(\mathcal{S}_1, \phi, \xi, \eta, g)$ е хиперсфера в четиримерно евклидово пространство $\mathbb{E}^4$ снабдена с* П*-структура и риманова метрика. Тогава, римановото* П*-многообразие $(\mathcal{S}_1, \phi, \xi, \eta, g)$ има следните свойства:*

а) *то принадлежи на класа $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_{11}$, но не принадлежи на класовете $\mathcal{F}_1$ или $\mathcal{F}_{11}$;*

б) *има положителна скаларна кривина;*

в) *то е $*$-скаларно плоско;*

г) *то е пространствена форма с положителна постоянна секционна кривина.*

Сега разглеждаме псевдоевклидово пространство $\mathbb{E}_1^4$, т.е. реално четиримерно пространство $\mathbb{R}^4$ снабдено със следното лоренцово скаларно произведение $\langle x, y\rangle = x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3 - x^4y^4$ за произволни вектори $x(x^1, x^2, x^3, x^4)$ и $y(y^1, y^2, y^3, y^4)$ в $\mathbb{R}^4$ относно канонична база.

Дефинираме следната хиперсфера $\mathcal{S}_2$ в $\mathbb{E}_1^4$ с център началото на координатната система и радиус r, определена чрез условието $\mathcal{S}_2 : \langle z, z\rangle = -r^2$, където z е радиус-векторът на произволна точка $p \in \mathcal{S}_2$. Тя се нарича времеподобна, тъй като позиционният ѝ вектор е такъв, т.е. скаларният му квадрат е отрицателен.

Параметризираме $\mathcal{S}_2$ по следния начин

$$z(r \sinh u^1 \cos u^2, r \sinh u^1 \sin u^2, r \cosh u^1 \sinh u^3, r \cosh u^1 \cosh u^3),$$

където u^1, u^2, u^3 са реални параметри, такива че $u^1 \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, $u^2 \in [0; 2\pi)$, $u^3 \in (-\infty; +\infty)$.

Следователно за локалните базисни вектори $\partial_i = \partial z/\partial u^i$, $i \in \{1, 2, 3\}$, получаваме:

$$\langle\partial_1, \partial_1\rangle = r^2, \quad \langle\partial_2, \partial_2\rangle = r^2 \sinh^2 u^1, \quad \langle\partial_3, \partial_3\rangle = r^2 \cosh^2 u^1, \quad \langle\partial_i, \partial_j\rangle = 0,\ i \neq j.$$

Полагаме $e_{i-1} = \frac{1}{\sqrt{|\langle\partial_i,\partial_i\rangle|}}\partial_i$ и получаваме ортонормирана база $\{e_i\}$, $i \in \{0, 1, 2\}$ върху $T_p\mathcal{S}_2$, както следва: $e_0 = \frac{1}{r}\partial_1, e_1 = \frac{1}{r \sinh u^1}\partial_2, e_2 = \frac{1}{r \cosh u^1}\partial_3$.

Снабдяваме $\mathcal{S}_2$ с Π-структура (ϕ, ξ, η). Рестрикцията на $\langle\cdot, \cdot\rangle$ върху $\mathcal{S}_2$ е метрика, която означаваме с g. Тогава $\{e_i\}$, $i \in \{0, 1, 2\}$ е ортонормирана ϕ-база относно g.

Твърдение 7.3. *Многообразието $(\mathcal{S}_2, \phi, \xi, \eta, g)$ е тримерно риманово Π-многообразие.*

Теорема 7.4. *Нека $(\mathcal{S}_2, \phi, \xi, \eta, g)$ е времеподобна хиперсфера в четиримерно пространство на Минковски $\mathbb{E}_1^4$ снабдена с Π-структура и риманова структура. Тогава, многообразието $(\mathcal{S}_2, \phi, \xi, \eta, g)$ има следните свойства:*

а) *то принадлежи на класа $\mathcal{F}_5 \oplus \mathcal{F}_9$, но не принадлежи на класовете $\mathcal{F}_5$ или $\mathcal{F}_9$;*

б) *η е затворена и интегралните криви на ξ са геодезични;*
в) *то има отрицателна скаларна кривина;*
г) *то е $*$-скаларно плоско;*
д) *то е пространствена форма с отрицателна постоянна секционна кривина.*

* * *

Обект на изследване в **§8** са почти параконтактни почти паракомплексни риманови многообразия от най-ниска размерност, които конструираме като произведение на реална права и двумерна риманова пространствена форма. Тяхната метрика се получава по два начина: като конусна метрика и като хиперболично разширение на метриката на базовото двумерно паракомплексно многообразие. Получените многообразия се изучават и характеризират по отношение на използвана класификация и техните кривинни свойства.

Нека $(\mathcal{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ е $(2n+1)$-мерно риманово П-многообразие. С x', y', z', w' означаваме произволни векторни полета или вектори в параконтактното му разпределение $\mathcal{H}$.

Тъй като g е риманова метрика върху $(\mathcal{M}, \phi, \xi, \eta)$, тогава h е съответната риманова метрика върху $\mathcal{H}$, съгласувана с почти паракомплексната структура P както следва: $h(Px', Py') = h(x', y')$. Асоциираната риманова метрика $\widetilde{h}$ на h е определена чрез $\widetilde{h}(x', y') = h(x', Py')$ и е псевдориманова метрика със сигнатура (n, n).

Нека $\mathcal{N}$ е едно $2n$-мерно многообразие, което е снабдено с почти паракомплексна структура P и риманова метрика h. Такова многообразие се нарича *почти паракомплексно риманово многообразие* и го означаваме с $(\mathcal{N}, P, h)$. Многообразията от този тип са класифицирани в [44], като са определени три основни класа $\mathcal{W}_1$, $\mathcal{W}_2$ и $\mathcal{W}_3$, които се пресичат в специалния клас $\mathcal{W}_0$.

Едно многообразие $(\mathcal{N}, P, h)$ се нарича $\mathcal{W}_0$-многообразие, когато е в сила условието $\nabla' P = 0$ за свързаността на Леви-Чивита ∇', породена от метриката h.

Да отбележим, че $(\mathcal{N}, P, h)$ от най-ниската размерност 2 е пространствена форма, т.е. многообразието е с точково постоянна секционна кривина k' и кривинният му тензор има вида $R' = k'\,\pi_1'$, където $\pi_1' = h(y', z')x' - h(x', z')y'$. Фундаменталният тензор F' на такова двумерно многообразие

$(\mathcal{N}, P, h)$ е дефиниран чрез $F'(x', y', z') = h\big((\nabla'_{x'} P)\, y', z'\big)$. По отношение на класификацията на Стайкова-Грибачев, всяко $\mathcal{W}_1$-многообразие от размерност 2 има следния вид:

$$F'(x', y', z') = \frac{1}{2}\{h(x', y')\theta'(z') + h(x', z')\theta'(y') + h(x', Py')\theta'^*(z') + h(x', Pz')\theta'^*(y')\},$$

където лиевата форма θ' е дефинирана чрез $\theta'(z') = h^{ij} F'(e'_i, e'_j, z')$ относно произволна база $\{e'_1, e'_2\}$ на $T_{p'}M'$, $p' \in M'$ и $\theta'^* = -\theta' \circ P$.

Нека разгледаме конуса $\mathcal{C}(\mathcal{N}) = \mathbb{R}^+ \times \mathcal{N}$ върху 2-мерната паракомплексна пространствена форма $(\mathcal{N}, P, h)$, където $\mathbb{R}^+$ е множеството на положителните реални числа. Въвеждаме риманова метрика g върху $\mathcal{C}(\mathcal{N})$, дефинирана чрез $g\left(\left(x', a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right), \left(y', b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\right) = t^2\, h(x', y') + ab$, където t е координатата върху $\mathbb{R}^+$, а a и b са диференцируеми функции върху $\mathcal{C}(\mathcal{N})$.

Снабдяваме $\mathcal{C}(\mathcal{N})$ с Π-структура (ϕ, ξ, η) по следния начин $\phi|_{\mathcal{H}} = P, \xi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}, \eta = \mathrm{d}t, \phi\xi = 0, \eta \circ \phi = 0$.

Твърдение 8.1. *Многообразието $(\mathcal{C}(\mathcal{N}), \phi, \xi, \eta, g)$ е тримерно риманово Π-многообразие.*

Теорема 8.2. *Тримерното риманово Π-многообразие $(\mathcal{C}(\mathcal{N}), \phi, \xi, \eta, g)$:*

а) *принадлежи на $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_5$;*
б) *принадлежи на $\mathcal{F}_5$ тогава и само тогава, когато $(\mathcal{N}, P, h)$ е $\mathcal{W}_0$-многообразие;*
в) *не принадлежи на $\mathcal{F}_1$.*

Теорема 8.3. *Многообразието $(\mathcal{C}(\mathcal{N}), \phi, \xi, \eta, g)$ е плоско тогава и само тогава, когато $k' = 1$.*

Теорема 8.4. *Многообразието $(\mathcal{C}(\mathcal{N}), \phi, \xi, \eta, g)$ притежава следните свойства:*

а) *Секционните кривини на ξ-площадките са равни на нула;*
б) *То е $*$-скаларно-плоско, т.е. $\tau^* = 0$;*
в) *То е Ричи-плоско тогава и само тогава, когато $*$-Ричи-плоско;*
г) *То е Ричи-плоско тогава и само тогава, когато $k' = 1$;*
д) *$\tau < 0$ тогава и само тогава, когато $k' < 1$;*
е) *$\tau > 0$ тогава и само тогава, когато $k' > 1$.*

Сега конструираме специален тип на 3-мерно изкривено продуктно многообразие $\mathcal{S}(\mathcal{N})$ на $\mathbb{R}^+$ и паракомплексна пространствена форма $(\mathcal{N}, P, h)$ от класа $\mathcal{W}_1$.

Нека $\mathrm{d}t$ е координатната 1-форма върху $\mathbb{R}^+$ и нека въведем П-структура и риманова метрика върху $\mathcal{S}(\mathcal{N})$, както следва $\phi|_{\mathcal{H}} = P, \xi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}, \eta = \mathrm{d}t, \eta \circ \phi = 0, g = \mathrm{d}t^2 + \cosh 2t\, h + \sinh 2t\, \widetilde{h}$.

Твърдение 8.5. *Многообразието $(\mathcal{S}(\mathcal{N}), \phi, \xi, \eta, g)$ е тримерно риманово* П-*многообразие.*

Теорема 8.6. *Многообразието $(\mathcal{S}(\mathcal{N}), \phi, \xi, \eta, g)$:*

а) *принадлежи на $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_4$;*
б) *принадлежи на $\mathcal{F}_4$ тогава и само тогава, когато $(\mathcal{N}, P, h)$ е $\mathcal{W}_0$-многообразие;*
в) *не принадлежи на $\mathcal{F}_1$.*

Твърдение 8.7. *Многообразието $(\mathcal{S}(\mathcal{N}), \phi, \xi, \eta, g)$ има следните свойства:*

а) *Секционните кривини на ξ-площадките са постоянни;*
б) *То е $*$-скаларно-плоско.*

Теорема 8.8. *За многообразието $(\mathcal{S}(\mathcal{N}), \phi, \xi, \eta, g)$ са еквивалентни следните твърдения:*

а) *$(\mathcal{N}, P, h)$ е $\mathcal{W}_0$-многообразие;*
б) *$\rho = k' \cosh 2t\, g - (2 + k' \cosh 2t)\eta \otimes \eta$;*
в) *$\rho^* = -(1 + k' \cosh 2t)(\widetilde{g} - \eta \otimes \eta)$.*

Следствие 8.9. *Ако $(\mathcal{N}, P, h)$ е $\mathcal{W}_0$-многообразие, то $(\mathcal{S}(\mathcal{N}), \phi, \xi, \eta, g)$ има следните свойства:*

а) *$\tau = 2(k' \cosh 2t - 1)$;*
б) *$k' < 0$ тогава и само тогава, когато $\tau \leq 2(k' - 1) < -2$;*
в) *$k' = 0$ тогава и само тогава, когато $\tau = -2$;*
г) *$k' > 0$ тогава и само тогава, когато $-2 < 2(k' - 1) \leq \tau$.*

* * *

Научни приноси на дисертационния труд

- Определянето на компонентите на фундаменталния тензор F, съответни на основните класове от класификацията на М. Манев и М. Стайкова при произволна размерност и в частност при най-ниската възможна размерност на изучаваните многообразия.
- Определяне на класа на параконтактните почти паракомплексни риманови многообразия, класа на парасасакиевите паракомплексни риманови многообразия и класа на нормалните риманови П-многообразия.
- Въведен е присъединеният симетричен тензор $\widehat{N}$ на Нейенхаус тензора и разглежданите многообразия са характеризирани относно тази двойка тензори.
- Конструирането и геометричното характеризиране на тримерни риманови П-многообразия като хиперсфера в четиримерно евклидово пространство и времеподобна хиперсфера в четиримерно пространство на Минковски.
- Конструирането по два метода на тримерни риманови П-многообразия като произведение на реалната права и двумерно паракомплексно риманово многообразие и тяхното геометрично характеризиране.
- Конструирането на риманово П-многообразие върху тримерна група на Ли и установяването на необходими и достатъчни условия за съответната алгебра на Ли, при които полученото многообразие да принадлежи на основен клас от използваната класификация, както и получаването на някои кривинни характеристики на това многообразие.
- Намирането на явно матрично представяне на тримерна група на Ли, разгледана като многообразие от всеки основен клас от класификацията на М. Манев и М. Стайкова.

* * *

Литература

[1] M. Стайкова. *Върху диференциалната геометрия на риманови многгобразия със структура на почти произведение*, Докторска дисертация, Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“, Пловдив (1991).

[2] T. Adati, T. Miyazawa. *On paracontact Riemannian manifolds*, TRU Mathematics **13** (1977), 27–39.

[3] V. Cruceanu, P. Fortuny, P. M. Gadea. *A survey on paracomplex geometry*, Rocky Mountain J. Math. **26** (1996), 83–115.

[4] G. Ganchev, V. Mihova, K. Gribachev. *Almost contact manifolds with B-metric*. Math. Balkanica (N.S.) **7** (3-4) (1993), 261–276.

[5] R. Gilmore. *Lie groups, Lie algebras and some of their applications.* John Wiley & Sons, New York, (1974).

[6] D. Gribacheva. *Natural connections on Riemannian product manifolds*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. **09** art. no. 07 (2012).

[7] D. Gribacheva. *Curvature properties of two Naveira classes of Riemannian product manifolds*, Universite de Plovdiv "Paisii Hilendarski", Travaux scientifiques **39** (3) (2012), 31–42.

[8] D. Gribacheva, D. Mekerov. *Canonical connection on a class of Riemannian almost product manifolds*, J. Geom. **102** (2011), 53–71.

[9] S. Ivanov, H. Manev, M. Manev. *Para-Sasaki-like Riemannian manifolds and new Einstein metrics*, RACSAM **115** art.no. 112 (2021).

[10] S. Ivanov, S. Zamkovoy, *Para-Hermitian and para-quaternionic manifolds*, Differ. Geom. Appl. **23** (2005), 205–234.

[11] S. Kobayashi, K. Nomizu. *Foundations of differential geometry*, vol I, Wiley, (1963).

[12] P. Libermann. *Sur les structures presque paracomplexes*, C. R. Acad. Sci. I **234** (1952), 2517–2525.

[13] K. Mandal, U. Chand De. *On same slasses of 3-dimensional normal almost paracontact metric manifolds*, Southest Asian Bull. Math. **41** (2017), 231–238.

[14] H. Manev. *On the structure tensors of almost contact B-metric manifolds*, Filomat **29** (2015), 427–436.

[15] H. Manev, M. Manev. *Pair of associated Schouten-van Kampen connections adapted to an almost paracontact almost paracomplex Riemannian structure*. MDPI Mathematics **9** art. no. 736 (2021).

[16] H. Manev, D. Mekerov. *Lie groups as 3-dimensional almost contact B-metric manifolds*, J. Geom. **106** (2015), 229–242.

[17] M. Manev, M. Ivanova. *A classification of the torsion tensors on almost contact manifolds with B-metric*, Cent. Eur. J. Math. **12** (2014), 1416–1432.

[18] M. Manev, M. Staikova. *On almost paracontact Riemannian manifolds of type* (n, n), J. Geom. **72** (2001), 108–114.

[19] M. Manev, V. Tavkova. *On the almost paracontact almost paracomplex Riemannian manifolds*, Facta Univ. Ser. Math. Inform. **33** (2018), 637–657.

[20] M. Manev, V. Tavkova. *Lie groups as 3-dimensional almost paracontact almost paracomplex Riemannian manifolds*, J. Geom. **110** art. no. 43 (2019).

[21] M. Manev, V. Tavkova. *Matrix Lie groups as 3-dimensional almost paracontact almost paracomplex Riemannian manifolds*, Balkan J. Geom. Appl. **26** (2021), 55–66.

[22] M. Manev, V. Tavkova. *Hyperspheres in Euclidean and Minkowski 4-spaces as almost paracontact almost paracomplex Riemannian manifolds*, Novi Sad J. Math. (2021).

[23] M. Manev, V. Tavkova. *Almost paracontact almost paracomplex Riemannian manifolds as extensions of 2-dimensional space-forms*, arXiv:2104.11053

[24] V. Martín-Molina. *Paracontact metric manifolds without a contact metric counterpart*, Taiwanese J. Math. **19** (1) (2015), 175–191.

[25] D. Mekerov. *On Riemannian almost product manifolds with nonintegrable structure*, J. Geom. **89** art. no. 1-2 (2008), 119–129.

[26] V. Mihova. *Canonical connections and the canonical conformal group on a Riemannian almost product manifold*, Serdica Math. J. **15** (1989), 351–358.

[27] G. Nakova, K. Gribachev. *One classification of almost contact manifolds with B-metric*, In: Proc. Jubilee Sci. Session of Vassil Levsky Higher Mil. School, Veliko Tarnovo, vol. 27, Veliko Tarnovo, Bulgaria, (1993), 208–214.

[28] G. Nakova, S. Zamkovoy. *Eleven classes of almost paracontact manifolds with semi-Riemannian metric of* $(n+1,n)$, In: Recent Progress in Differential Geometry and its Related Fields (T. Adachi, H. Hashimoto, M. Hristov, eds.), World Scientific Publ., Singapore, (2012), 119–136.

[29] A. M. Naveira. *A classification of Riemannian almost product manifolds*, Rend. Math. **3** (1983), 577–592.

[30] M. Okumura. *Some remarks on space with a certain contact structure*, Tohoku Math. J. **14** (2) (1962), 135–145.

[31] Z. Olszak. *On almost cosymplectic manifolds*, Kodai Math. J. **4** (2) (1981), 239–250.

[32] Z. Olszak. *The Schouten-Van Kampen affine connection adapted to an almost (para) contact metric structure*, Publications de l'Institut Mathématique **94** (108) (2013), 31–42.

[33] M. Parchetalab. *On a class of paracontact Riemannian manifold*, Int. J. Nonlinear Anal. Appl. **7** (1) (2016), 195–205.

[34] E. M. Patterson. *Riemann extensions which have Kähler metrics*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **64** (1954), 113–126.

[35] P. K. Rashevskij. *The scalar field in a stratified space*, Trudy Seminara po Vektornomu i Tenzornomu Analizu s ikh Prilozheniyami k Geometrii, Mekhanike i Fizike, vol. 6 (1948), 225–248.

[36] S. Sasaki. *On paracontact Riemannian manifolds*, TRU Mathematics **16** (1980), 75–86.

[37] I. Satō. *On a structure similar to the almost contact structure*, Tensor (N.S.) **30** (1976), 219–224.

[38] I. Satō. *On a structure similar to almost contact structure II*, Tensor (N.S.) **31** (1977), 199–205.

[39] I. Satō. *On a Riemannian manifold admitting a certain vector field*, Kodai Mathematical Seminar Reports **29** (1978), 250–260.

[40] I. Satō, K. Matsumoto. *On P-Sasakian manifolds satisfying certain conditions*, Tensor (N.S.) **33** (1979), 173–178.

[41] B. Sinha, R. Sharma. *On para-A-Einstein manifolds*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) **34** (48) (1983), 211–215.

[42] M. Staikova. *Curvature properties of Riemannian P-manifolds*, Plovdiv Univ. Sci. Works - Math. **25** (3) (1987), 241–250.

[43] M. Staikova. *Some characteristics of Riemannian P-manifolds with vanishing Bochner tensor*, Plovdiv Univ. Sci. Works - Math. **26** (3) (1988), 235–244.

[44] M. Staikova, K. Gribachev. *Canonical connections and their conformal invariants on Riemannian P-manifolds*, Serdica Math. P. **18** (1992), 150–161.

[45] M. Staikova, K. Gribachev and D. Mekerov. *Invariant hypersurfaces of Riemannian P-manifolds*, Plovdiv Univ. Sci. Works - Math. **25** (3) (1987), 253–266. (in Bulgarian)

[46] M. Staikova, K. Gribachev and D. Mekerov. *Riemannian P-manifolds of constant sectional curvatures*, Serdica Math. J. **17** (1991), 212–219.

[47] J. Welyczko. *On Legendre curves in 3-dimensional normal almost paracontact metric manifolds*, Result Math. **54** (2009), 377–387.

[48] K. Yano. *Differential geometry of complex and almost complex spaces*, Pergamon Press, Oxford, (1965).

[49] S. Zamkovoy. *Canonical connections on paracontact manifolds*, Ann. Glob. Anal. Geom. **36** (1) (2009), 37–60.

[50] S. Zamkovoy, G. Nakova. *The decomposition of almost paracontact metric manifolds in eleven classes revisited*, J. Geom. **109** art. no. 18 (2018).

* * *

Благодарности

Изказвам най-искрена благодарност на проф. д.м.н. Манчо Манев за това, че като мой научен ръководител ме въведе в проблематиката на съвременната диференциална геометрия, както и за подкрепата, ценните съвети и напътствията при разработването и оформянето на настоящата дисертация.

Благодаря и на гл. ас. д-р Христо Манев за идеите, подкрепата и ценните съвети.

Признателна съм на всички колеги от катедра „Алгебра и геометрия“ на Факултета по математика и информатика при Пловдивския университет „Паисий Хилендарски“ за тяхната подкрепа и по специално благодаря на гл. ас. д-р Асен Христов за насърчаването да се впусна в това начинание.

Благодаря на специалистите, дали препоръки при предварителното обсъждане на дисертационния труд и допринесли за неговото подобрение.

* * *