ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ
“ПАИСИЙ ХИЛЕНДАРСКИ”
ФАКУЛТЕТ ПО “МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА”
КАТЕДРА “МАТЕМАТИЧЕСКИ АНАЛИЗ”

ХРИСТО СТЕФАНОВ КИСКИНОВ

ОБИКНОВЕНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ С ДИХОТОМИЧНО-ПОДОБНА ЛИНЕЙНА ЧАСТ В БАНАХОВИ ПРОСТРАНСТВА

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертационен труд
за присъждане на образователната и научна степен “доктор”
в област на висше образование
4. Природни науки, математика и информатика,
професионално направление 4.5 Математика
докторска програма Диференциални уравнения

Научен ръководител: проф. д-р Степан Костадинов

Пловдив, 2012 г.

Съдържание

Увод

Експоненциалната и обикновена дихотомии са фундаментални понятия в качествената теория на обикновените диференциални уравнения. От основополагащата публикация [21] на Оскар Перон през далечната 1930 г. до днешни дни темата дихотомия не престава да е актуална и търпи непрестанно развитие.

Понятието дихотомия е въведено от Оскар Перон [21,22] за стационарни хомогенни линейни диференциални уравнения от вида

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax$$

с начално условие $x(t_0) = x_0$, където A е (n, n) матрица, чиито собствени стойности имат реална част, различна от нула. Тогава съгласно теорията на Рис [23], фазовото пространство се разбива на две допълващи се подпространства, такива че решенията, започващи в едното остават завинаги в него и са устойчиви, а решенията, започващи в другото също остават в него и са неустойчиви.

След близо 35-годишен застой В.А.Копел [5,6] обобщава понятието дихотомия и за неавтономни уравнения. Той доказва и първите теореми за устойчивост на това понятие и за връзката между дихотомия и съществуване на ограничени решения на съответното нехомогенно уравнение.

Въвеждането на дихотомия за уравнения с линеен ограничен оператор в произволно банахово пространство се извършва от Ю.Л.Далецкий и М.Г.Крейн [1]. По-общ вариант и отново при предположение, че фазовото пространство е произволно банахово, е разгледан в забележителната монография на Х.Массера и Х.Шефер [3].

Различни дихотомии, явяващи се по-нататъшни обобщения на това понятие, се разглеждат в работите на Мартин [15], Мълдоуни [16] и Наулин и Пинто [17-20].

Цел на настоящата работа е въвеждането и изследването на дихотомично-подобно свойство за клас от хомогенни линейни обикновени диференциални уравнения в произволно банахово пространство. Дефинират се нови (D_1, D_2, M, N) и (M, N, R)-дихотомии, които се явяват съществено обобщение на повечето известни дихотомии.

Задачите, които трябва да се решат за постигане на тази цел, представляват изследването и доказването за уравнения с такива дихотомии на типичните за дихотомичните уравнения свойства като :

А. - съществуване на "ограничени" решения на хомогенното и съответното нехомогенно уравнение,

Б. - грубост (устойчивост) на дихотомията при "малки" смущения,

В. - съществуване на решения на нелинейно уравнение с дихотомична линейна част.

Работата се състои от увод, три глави, заключение, публикации по проекта за дисертационен труд и използвана литература.

Първа глава е обзорна. В нея се разглеждат основните теоретични средства и факти, свързани с понятието дихотомия за обикновени линейни диференциални уравнения в банахови пространства и се прави кратък обзор на различните видове. Подробно е разгледана експоненциалната дихотомия. За нея се показани основните резултати, свързани със съществуването на ограничени решения на съответното нехомогенно уравнение, нейната грубост (устойчивост) и съществуването на решения на нелинейно уравнение с дихотомична линейна част.

Във втора глава се въвежда нова (M, N, R)-дихотомия, която се явява обобщение на почти всички известни на автора дихотомии. Изследва се връзката между нея и съществуването на решения на съответното нехомогенно диференциално уравнение, лежащи в специален вид банахови пространства. Дадени са оценки за решенията на хомогенното (M, N, R)-дихотомично уравнение. Разгледани са примери за обикновени линейни диференциални уравнения с (M, N, R)-дихотомичност, които не са класически дихотомични. За нехомогенното уравнение с (M, N, R)-дихотомичност на съответстващото хомогенно уравнение са намерени достатъчни условия за съществуване на ограничени решения, лежащи в пространствата $L_p(\phi, \psi)$. Въведена и изследвана е специален вид грубост (устойчивост) на тази дихотомия. Разглежда се и нелинейно диференциално уравнение с (M, N, R)-дихотомична линейна част. С помощта на принципите за неподвижната точка на Банах и на Шаудер-Тихонов са намерени достатъчни условия за съществуването на решения на това нелинейно уравнение. В тази връзка е конструиран пример за нелинейно уравнение с (M, N, R)-дихотомична линейна част в абстрактно безкрайномерно пространство. Показано е, че класическите дихотомии - обикновената и експоненциалната дихотомии, както и тези на Мълдоуни, Пинто и Наулин, се явяват частен случай на тук въведената (M, N, R)-дихотомия.

В трета глава се въвежда (D_1, D_2, M, N)-дихотомия, която е по-общ вариант на въведената във втора глава (M, N, R)-дихотомия. В този по-общ вариант на дихотомията са намерени достатъчни условия за съществуването на решения на съответното нехомогенно диференциално уравнение. Конструиран е пример за диференциални уравнение, което е (D_1, D_2, M, N)-дихотомично, но не е (M, N, R)-дихотомично.

В заключението е направено обобщение на реализирането на поставените цели и задачи, и са разгледани възможности за бъдещо развитие.

Глава I
Дихотомии на линейни обикновени диференциални уравнения в банахово пространство

1.2. Видове дихотомии

Нека $J = [c, \infty)$ и $\mathfrak{B}$ е произволно Банахово пространство с норма $|.|$ и идентитет I. Разглеждаме линейното хомогенно диференциално уравнение

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A(t)x \quad (t \in J) \tag{1.2.1}$$

където $A(t)$ е линеен ограничен оператор и нека $V(t)$ е операторът на Коши за това уравнение.

Дефиниция 1.2.1. [1] *Ще казваме, че за решенията на уравнението (1.2.1) съществува експоненциална дихотомия за интервала* J, *ако за някое* $t_0 \in J$ *фазовото пространство* $\mathfrak{B}$ *се разпада на директна сума от затворени подпространства* $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1(t_0) + \mathfrak{B}_2(t_0)$ *при което са изпълнени следните три условия:*

C1. Решенията $x_1(t) = V(t)V^{-1}(t_0)x_1^0$, *излизащи в момента* $t = t_0$ *от подпространството* $\mathfrak{B}_1(t_0)$ $(x_1^0 \in \mathfrak{B}_1(t_0))$, *се подчиняват на оценката*

$$|x_1(t)| \le N_1 e^{-\nu_1(t-s)}|x_1(s)| \;\; (t \ge s;\; t, s \in J) \tag{1.2.2}$$

с някакъв показател $\nu_1 > 0$ *;*

C2. Решенията $x_2(t) = V(t)V^{-1}(t_0)x_2^0$, *излизащи в момента* $t = t_0$ *от подпространството* $\mathfrak{B}_2(t_0)$ $(x_2^0 \in \mathfrak{B}_2(t_0))$, *се подчиняват на оценката*

$$|x_2(t)| \le N_2 e^{-\nu_2(s-t)}|x_2(s)| \;\; (t \le s;\; t, s \in J) \tag{1.2.3}$$

с някакъв показател $\nu_2 > 0$ *;*

С3. Взаимният наклон между подпространствата $\mathfrak{B}_1(t) = V(t)V^{-1}(t_0)\mathfrak{B}_1(t_0)$ *и* $\mathfrak{B}_2(t) = V(t)V^{-1}(t_0)\mathfrak{B}_2(t_0)$ *не може при промяна на* t *да стане прекалено малък. По-точно, при някое* $\gamma > 0$, *трябва да е изпълнено условието* $Sn(\mathfrak{B}_1(t), \mathfrak{B}_2(t)) \geq \gamma \quad (t \in J)$.

Теорема 1.2.1. [1] *Уравнението (1.2.1) е експоненциално дихотомично на интервала* J, *тогава и само тогава, когато съществуват двойка допълващи се проектори* P *и* $I - P$ *и положителни константи* K_1, K_2, ν_1, ν_2, *такива че*

$$\begin{aligned} &||V(t)PV^{-1}(s)|| \leq K_1 e^{-\nu_1(t-s)} \ (t \geq s) \\ &||V(t)(I-P)V^{-1}(s)|| \leq K_2 e^{-\nu_2(s-t)} \ (s \geq t) \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

Уравнението (1.2.1) е обикновено дихотомично, ако условията (1.2.4) са изпълнени при $\nu_1 = \nu_2 = 0$.

Едно обобщение на експоненциалната и обикновена дихотомия са явява (β_1, β_2)-дихотомията на Мартин и Мълдоуни [15], [16]. Нека β_1, β_2 са непрекъснати реалнозначни функции върху J. Уравнението (1.2.1) притежава (β_1, β_2)-дихотомия, ако съществува проектор P такъв, че

$$\begin{aligned} &||V(t)PV^{-1}(s)|| \leq K_1 e^{\int_s^t \beta_1(\tau)\mathrm{d}\tau} \quad (t \geq s) \\ &||V(t)(I-P)V^{-1}(s)|| \leq K_2 e^{\int_s^t \beta_2(\tau)\mathrm{d}\tau} \quad (s \geq t) \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

Когато β_1 и β_2 са константи и $\beta_1 < 0 < \beta_2$, условията (1.2.5) дефинират експоненциална дихотомия. А ако $\beta_1 = \beta_2 = 0$, то получаваме обикновена дихотомия.

Удачно обобщение на експоненциалната и обикновена дихотомии представлява $h - k$ дихотомията на Наулин и Пинто [19], [20]. Нека $h, k : [0, \infty) \to (0, \infty)$ се две непрекъснати функции. Уравнението (1.2.1) притежава $h - k$ дихотомия на полуоста, ако съществуват положителна константа K и проектор P такива, че

$$\begin{aligned} &||V(t)PV^{-1}(s)|| \leq Kh(t)h^{-1}(s) \quad (t \geq s \geq 0) \\ &||V(t)(I-P)V^{-1}(s)|| \leq Kk(t)k^{-1}(s) \quad (s \geq t \geq 0) \end{aligned} \tag{1.2.6}$$

При $h(t) = e^{-\alpha t}$ и $k(t) = e^{-\beta t}$ се получават условията за експоненциална дихотомия, а при $h(t) = 1$ и $k(t) = 1$ се получава обикновена дихотомия.

Ако уравнението е автономно с постоянен ограничен оператор

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax \tag{1.2.7}$$

то то е експоненциално дихотомично точно тогава, когато спектърът на оператора A не се пресича с имагинерната ос: $\sigma(A) = \sigma_+(A) \cup \sigma_-(A)$. Тогава съответните спектрални проектори $P_+ = P_+(A)$ и $P_- = P_-(A)$, дефинирани с помощта на интеграла на Рис, разбиват пространството $\mathfrak{B}$ на директна сума от две инвариантни на A подпространства $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_- \dot{+} \mathfrak{B}_+$. Понеже $\mathfrak{B}_-$ и $\mathfrak{B}_+$ са инвариантни и относно операторите e^{At} $(t \in J)$ [1], то решенията, започващи в някое от тях, вече не излизат от съответните подпространства.

1.3. Експоненциална дихотомия и съществуване на ограничени решения на съответното нехомогенно уравнение

Разглеждаме нехомогенното уравнение с постоянен ограничен оператор

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax + f(t) \qquad (t \in J) \tag{1.3.1}$$

с непрекъсната функция $f(t)$.

Да предположим, че спектърът на A не се пресича с имагинерната ос и нека P_- и P_+ са съответните спектрални проектори. Въвеждаме главната функция на Грийн на уравнението (1.3.1) чрез формулата

$$G_A = \begin{cases} e^{At}P_- & (t > 0) \\ -e^{At}P_+ & (t < 0) \end{cases} \tag{1.3.2}$$

Теорема 1.3.1. [1] *За да може на всяка непрекъсната и ограничена върху цялата ос вектор-функция $f(t)$ да съответствува едно и само едно ограничено на цялата ос решение на уравнението (1.3.1), е необходимо и достатъчно спектърът $\sigma(A)$ да не се пресича с имагинерната ос. Това решение се дава с формулата*

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_A(t-s)f(s)\mathrm{d}s$$

където $G_A(t)$ е главната функция на Грийн за уравнението (1.3.1).

Разглеждаме нехомогенното уравнение с нестационарен оператор

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A(t)x + f(t) \qquad (t \in J) \tag{1.3.3}$$

Нека $V(t)$ е операторът на Коши за съответното хомогенно уравнение (1.2.1). Нека P_1 и P_2 са допълващите се проектори, съответствуващи на разлагането $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2$, при които се появява експоненциална дихотомия за хомогенното уравнение (1.2.1). С тяхна помощ се получава главната функция на Грийн за уравнението (1.3.3)

$$G(t,s) = \begin{cases} V(t)P_1V^{-1}(s) & (t > s) \\ -V(t)P_2V^{-1}(s) & (t < s) \end{cases} \qquad (t, s \in J) \tag{1.3.4}$$

Нека $C(\mathfrak{B})$ е банаховото пространство на всички непрекъснати и ограничени върху J функции със стойности в $\mathfrak{B}$ и норма $|||f||| = \sup_J |f(t)|$.

Теорема 1.3.2. [1] *Ако хомогенното уравнение (1.2.1) е експоненциално дихотомично на интервала J, то нехомогенното уравнение (1.3.3) за* *всяка функция* $f(t) \in C(\mathfrak{B})$ *има поне едно решение* $x(t) \in C(\mathfrak{B})$. *Това решение се дава с формулата*

$$x(t) = \int_J G(t,s)f(s)\mathrm{d}s \tag{1.3.5}$$

където $G(t,s)$ *е главната функция на Грийн на уравнението (1.3.3).*

Общият вид на ограничените върху полуоста решения на нехомогенното уравнение (1.3.3) се получава, като добавим към вече намереното решение произволно ограничено решение на хомогенното уравнение (1.2.1). Такива се явяват решенията, започващи в $\mathfrak{B}_1$ и само те. Те се описват с формулата

$$x(t) = V(t)y + \int_0^\infty G(t,s)f(s)\mathrm{d}s \tag{1.3.6}$$

където $y = P_1 x(0)$ е произволен елемент от $\mathfrak{B}_1$.

1.4. Грубост (устойчивост) на експоненциалната дихотомия

Важно свойство на екцпоненциалната дихотомия е нейната грубост (roughness). Това означава, че тя е устойчива спрямо малки смущения на оператора A, т.е. че смутеното уравнение също е експоненциално дихотомично.

Нека $J = [0,\infty)$ и линейното диференциално уравнение

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A(t)x \quad (t \in J) \tag{1.4.1}$$

с интегрално ограничена оператор-функция $A(t)$ е експоненциално дихотомично.

Разглеждаме смутеното уравнение

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (A(t) + B(t))x \quad (t \in J) \tag{1.4.2}$$

Приемаме, че смущението $B(t)$ е достатъчно малко в смисъл, че при някое $\tau_0 > 0$ се изпълнява условието

$$\frac{1}{\tau_0}\int_t^{t+\tau_0} ||B(\tau)||\mathrm{d}\tau < \delta \qquad (t \in J) \tag{1.4.3}$$

с достатъчно малко $\delta > 0$.

Теорема 1.4.1. [1] *Нека уравнението (1.4.1) с интегрално ограничен оператор* $A(t)$ *е експоненциално дихотомично. Тогава съществува число* $\epsilon_0 > 0$ *такова, че за всяко* $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ *съществува число* $\delta > 0$*, зависещо само от уравнението (1.4.1) и числото* ϵ*, притежаващо свойството, че ако е изпълнено условието (1.4.3), то уравнението (1.4.2) също е експоненциално дихотомично.*

1.5. Нелинейни уравнения с експоненциално-дихотомична линейна част

Ще разгледаме поведението на решенията на нелинейното уравнение

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A(t)x + F(t,x) \qquad (t \in J) \tag{1.5.1}$$

главната част на което е експоненциално дихотомична.

Най-напред да разгледаме нелинейното уравнение

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax + F(t,x) \qquad (t \in J) \tag{1.5.2}$$

със стационарна експоненциално дихотомична главна част.

Дефиниция 1.5.1. [1] *Функцията* $F(t,x)$*, определена и непрекъсната за* $J \times S_\rho$*, където* $S_\rho = \{x : |x| \leq \rho\}$*, принадлежи на класа* (M, q, ρ)*, ако тя за указаното множество се подчинява на условието* $|F(t,x)| \leq M$ *и изпълнява условието на Липшиц* $|F(t,x_2) - F(t,x_1)| \leq q|x_2 - x_1|$

Теорема 1.5.1. [1] *Нека операторът A е експоненциално дихотомичен. Тогава за всяко $\rho > 0$ съществуват константи $M > 0, q > 0$, зависещи само от A и ρ, такива, че ако $F(t, x) \in (M, q, \rho)$, то нелинейното уравнение (1.5.2) има едно единствено решение $x(t)$, оставащо в кълбото S_ρ:*

$$\sup_{-\infty<t<\infty} |x(t)| \leq \rho$$

Това решение се представя във вида

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_A(t-s)F(s, x(s))\mathrm{d}s$$

където G_A е главната функция на Грийн за оператора A.

Нека $J = [t_0, +\infty)$ и $x(t)$ е решение на (1.5.2) , не излизащо от кълбото $S_\rho = \{x : |x| \leq \rho\}$ при $t > t_0$. От резултатите, получени от нас за нехомогенното уравнение следва, че то удовлетворява интегралното уравнение

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}y_0^- + \int_{t_0}^{\infty} G_A(t-s)F(s, x(s))\mathrm{d}s \tag{1.5.3}$$

където $y_0 = P_-x(t_0)$. И обратно - решенията на интегралното уравнение (1.5.3) удовлетворяват при $t > t_0$ диференциалното уравнение (1.5.2).

Теорема 1.5.2. [1] *Нека спектърът $\sigma(A)$ не се пресича с имагинерната ос и следователно е изпълнена оценката*

$$||G_A(t)|| \leq Ne^{-\nu t} \quad (\nu > 0, N \geq 1).$$

За всяко $\rho > \rho_1 > 0$ съществуват положителни числа M, q, l, зависещи само от N, ν, ρ, ρ_1 такива, че ако функцията $F(t, x) \in (M, q, \rho)$, то на всяко $y_0 \in \mathfrak{B}_- \cap S_{\rho/2N}$ съответства едно и само едно решение на уравнението (1.5.2), удовлетворяващо условието $P_-x(t_0) = y_0$ и $\sup\limits_{t_0+l\leq t} |x(t)| \leq \rho_1$.

За всеки две решения, отговарящи на различните стойности на y_0 е в сила оценката

$$|x_2(t) - x_1(t)| \leq c_\mu e^{-\mu(t-t_0)}|y_{20} - y_{10}|$$

където c_μ е някоя положителна константа, не зависеща от t_0, а $\mu \in (0, \nu)$ и може да бъде направено произволно близко до ν при намаляне на q.

Описаните резултати без затруднения се пренасят за уравнението (1.5.1) с нестационарна главна част, допускаща експоненциална дихотомия на решенията.

Глава II

(M, N, R) - дихотомия

2.1. Постановка на проблема

Нека X е произволно банахово пространство с норма $|.|$ и идентитет I и нека $J = [0, \infty)$. Нека $L(X)$ е банаховото пространство на всички линейни ограничени оператори, действуващи в X с норма $||.||$, а $E(X)$ е линейното пространство на всички непрекъснати оператори, действуващи в X.

Разглеждаме хомогенното линейно диференциално уравнение

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A(t)x \tag{2.1.1}$$

и съответното нехомогенно уравнение

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A(t)x + f(t), \tag{2.1.2}$$

където $A(t) \in L(X), f(t) \in X, t \in J$.

С $V(t)$ ще означаваме оператора на Коши на (2.1.1).

За уравненията (2.1.1) и (2.1.2) ще предполагаме, че функциите $A(t)$

и $f(t)$ са силно измерими и интегрируеми по Бохнер за всеки краен подинтервал на J.

Нека $R(t) : J \to E(X)$ е оператор-функция, непрекъсната за всяко $t \in J$.

Лема 2.1.1. *Функцията*

$$x(t) = \int_0^t V(t)R(s)V^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s - \int_t^\infty V(t)(I - R(s))V^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s \quad (2.1.3)$$

е решение на уравнението (2.1.2), ако съществуват интегралите в (2.1.3).

Нека $M(.,.), N(.,.) : J \times J \to (0, \infty)$ са две непрекъснати функции.

Въвеждаме следните условия

(H1). $\mid V(t)R(s)V^{-1}(s)z \mid\le M(t,s)|z|, \quad t \ge s, z \in X$

(H2). $\mid V(t)(I - R(s))V^{-1}(s)z \mid\le N(t,s)|z|, \quad t < s, z \in X$

В някои от случаите, които се разглеждат по-надолу, дясната част на условията (H1) и (H2) има вида

$$\begin{cases} M(t,s) = \varphi_1(t)\varphi_2(s), \ (t \ge s) \\ N(t,s) = \psi_1(t)\psi_2(s), \ (t < s) \end{cases} \quad (2.1.4)$$

където $\varphi_1(.), \varphi_2(.), \psi_1(.), \psi_2(.) : J \to (0, \infty)$ са непрекъснати функции.

В този случай полагаме

$$\alpha(t) = \max\{\varphi_1(t), \psi_1(t)\}, \quad \beta(t) = \max\{\varphi_2(t), \psi_2(t)\} \quad (t \in J)$$

Дефиниция 2.1.1. *Хомогенното диференциално уравнение (2.1.1) ще наричаме (M, N, R)-дихотомично, ако съществува непрекъсната оператор-функция $R(t) : J \to E(X)$ и непрекъснати функции M, N такива, че са изпълнени условията (H1) и (H2).*

С $I_l(J,X)$ ще означаваме линейното пространство на всички функции $g(.) : J \to X$, които са силно измерими и интегрируеми по Бохнер за всеки краен подинтервал на J.

Нека $a(.) : J \to (0,\infty)$ е произволна положителна непрекъсната функция. Въвеждаме следните банахови пространства :

$$K_a = \{g \in I_l(J,X) : \sup_{t\in J} a(t) \int_0^t M(t,s)|g(s)|\mathrm{d}s < \infty\}$$

$$L_a = \{g \in I_l(J,X) : \sup_{t\in J} a(t) \int_t^\infty N(t,s)|g(s)|\mathrm{d}s < \infty\}$$

$$C_a = \{g : J \to X : \sup_{t\in J} a(t) \mid g(t) \mid < \infty\}$$

$$T_a = \{g \in I_l(J,X) : \int_0^\infty a(s) \mid g(s) \mid \mathrm{d}s < \infty\}$$

$$\bar{T}_a = \{g : J \to \mathbb{R} : \int_0^\infty a(s)|g(s)|\mathrm{d}s < \infty\}$$

Нормите в K_a, L_a, C_a са съответните супремуми, а в $T_a, \bar{T}_a$ - стойностите на съответните интеграли.

2.2. Оценки на решенията на хомогенното и нехомогенното уравнение

Теорема 2.2.1. *Нека хомогенното уравнение (2.1.1) е (M,N,R)-дихотомично.*

Тогава за всяка функция $f \in K_a \bigcap L_a$ нехомогенното уравнение (2.1.2) има решение в пространството C_a.

Следствие 2.2.1. *Нека хомогенното уравнение (2.1.1) е (M,N,R)-дихотомично във вида (2.1.4).*

Тогава за всяка функция $f \in T_\beta$ нехомогенното уравнение (2.1.2) има решение в пространството $C_{\alpha^{-1}}$, за което е в сила следната оценка

$$\sup_{t\in J} \alpha^{-1}(t) \mid x(t) \mid \leq \int_0^\infty \beta(s) \mid f(s) \mid \mathrm{d}s < \infty$$

Следствие 2.2.2. *Нека хомогенното уравнение (2.1.1) е (M, N, R)-дихотомично върху интервала J с*

$$M(t,s) = k_1 e^{-\nu_1(t-s)} \ (t \geq s)$$

$$N(t,s) = k_2 e^{-\nu_2(s-t)} \ (s > t)$$

където k_1, k_2, ν_1, ν_2 са положителни константи.

Тогава за всяка непрекъсната и ограничена функция $f(t)$, нехомогенното уравнение (2.1.2) има поне едно непрекъснато и ограничено решение $x(t)$.

Забележка 2.2.1. *Следствие 2.2.2 обобщава Теорема 1.3.2 [1], тъй като проекторът P от Теорема 1.3.2 [1] тук е заменен от непрекъснатите оператори $R(t) \ \ (t \in J)$, които може дори да не са линейни.*

Теорема 2.2.2. *Нека хомогенното уравнение (2.1.1) е (M, N, R)-дихотомично. Тогава са в сила следните оценки:*

$$\mid x_M(t) \mid \leq M(t,s)|x_M(s)|, \ t \geq s \geq 0 \tag{2.2.1}$$

за всички решения $x_M(t)$ на (2.1.1) ,$(t \geq 0)$, с начални стойности от множеството

$$\bigcap_{s\in J} Fix \ R(s)$$

и

$$\mid x_N(t) \mid \leq N(t,s)|x_N(s)|, \ 0 \leq t < s \tag{2.2.2}$$

за всички решения $x_N(t)$ *на (2.1.1) ,*$(t \geq 0)$*, с начални стойности от множеството*

$$\bigcap_{s\in J} Fix(I - R(s))$$

2.3. Съществуване на $L_p(\phi, \psi)$-решения на нехомогенното уравнение

Нека уравнението (2.1.1), разглеждано върху интервала $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ е (M, N, R)-дихотомично и функциите M и N са във вида (2.1.4).

Разглеждаме следните банахови пространства :

$$L_p(\varphi) = \{g \in I_l(\mathbb{R}_+, X) : \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \ \varphi_1(t) \int_0^t \varphi_2(s)|g(s)|^p \mathrm{d}s < \infty\}$$

с норма

$$|g|_{L_p(\varphi)} = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \ \left(\varphi_1(t) \int_0^t \varphi_2(s)|g(s)|^p \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$L_p(\psi) = \{g \in I_l(\mathbb{R}_+, X) : \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \ \psi_1(t) \int_t^\infty \psi_2(s)|g(s)|^p \mathrm{d}s < \infty\}$$

с норма

$$|g|_{L_p(\psi)} = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \ \left(\psi_1(t) \int_t^\infty \psi_2(s)|g(s)|^p \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$L_\infty = \{g \in I_l(\mathbb{R}_+, X) : \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |g(t)| < \infty\}$$

с норма

$$|g|_{L_\infty} = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |g(t)|.$$

Ще предполагаме, че съществуват положителни константи $M_1, M_2 \in (0, \infty)$ такива, че са изпълнени следните условия :

$$\text{(H3)} \qquad \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \ \varphi_1(t) \int_0^t \varphi_2(s)\mathrm{d}s < M_1,$$

$$\text{(H4)} \qquad \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \ \psi_1(t) \int_t^\infty \psi_2(s)\mathrm{d}s < M_2.$$

Дефиниция 2.3.1. *Решението* $u(t)$ $(t \in \mathbb{R}_+)$ *на линейното нехомогенно уравнение (2.1.2) се нарича* $L_p(\varphi, \psi)$*-решение, ако* $u \in L_p(\varphi) \cap L_p(\psi) \cap L_\infty$.

За $\xi \in L_p(\varphi) \cap L_p(\psi)$ въвеждаме нормата

$$|\xi|_{L_p(\varphi) \cap L_p(\psi)} = \max\{|\xi|_{L_p(\varphi)}, |\xi|_{L_p(\psi)}\}.$$

Лема 2.3.1. *Нека са изпълнени следните условия :*

1. Оператор-функцията $A(t)$ *е непрекъсната за* $t \in \mathbb{R}_+$.

2. Условията (H3) and *(H4) са в сила.*

3. Хомогенното линейно диференциално уравнение (2.1.1) е (M, N, R)*-дихотомично във вида (2.1.4).*

Тогава за всяка функция $f \in L_p(\varphi) \cap L_p(\psi)$ *линейното нехомогенно уравнение (2.1.2) има ограничено решение* $u(t)$ $(t \in \mathbb{R}_+)$*, за което е вярна следната формула*

$$u(t) = \int_0^t V(t)R(s)V^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s - \int_t^\infty V(t)(I - R(s))V^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s \quad (2.3.1)$$

Лема 2.3.2. *Нека са изпълнени следните условия :*

1. Оператор-функцията $A(t)$ *е непрекъсната за* $t \in \mathbb{R}_+$.

2. Условията (H3) and *(H4) са в сила.*

3. Хомогенното линейно диференциално уравнение (2.1.1) е (M, N, R)*-дихотомично във вида (2.1.4).*

Тогава операторът G*, дефиниран с формулата*

$$Gf(t) = \int_0^t V(t)R(s)V^{-1}(s)f(s)ds - \int_t^\infty V(t)(I - R(s))V^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s \quad (2.3.2)$$

изобразява $L_p(\varphi) \cap L_p(\psi)$ *в* $L_p(\varphi) \cap L_p(\psi) \cap L_\infty$ *и са в сила следните оценки*

$$|Gf|_{L_\infty} \leq (M_1^{\frac{1}{q}} + M_2^{\frac{1}{q}})\ |f|_{L_p(\varphi) \cap L_p(\psi)} \quad (2.3.3)$$

$$|Gf|_{L_p(\varphi)} \leq 2^{\frac{1}{q}} M_1 (1 + (\frac{M_2}{M_1})^{\frac{1}{q}}) \; |f|_{L_p(\varphi)\cap L_p(\psi)} \tag{2.3.4}$$

$$|Gf|_{L_p(\psi)} \leq 2^{\frac{1}{q}} M_2 (1 + (\frac{M_1}{M_2})^{\frac{1}{q}}) \; |f|_{L_p(\varphi)\cap L_p(\psi)} \tag{2.3.5}$$

където $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Теорема 2.3.1. *Нека са изпълнени следните условия :*

1. Оператор-функцията $A(t)$ *е непрекъсната за* $t \in \mathbb{R}_+$.

2. Условията (H3) and *(H4) са в сила.*

3. Хомогенното линейно диференциално уравнение (2.1.1) е (M, N, R) *дихотомично във вида (2.1.4).*

Тогава за всяка функция $f \in L_p(\varphi) \cap L_p(\psi)$ *линейното нехомогенно уравнение (2.1.2) има* $L_p(\varphi, \psi)$*-решение.*

2.4. Грубост (устойчивост) на (M, N, R)-дихотомията

Ще въведем и разгледаме специален вид устойчивост на (M, N, R)-дихотомията на малки смущения на дихотомичните функции M, N. Ще покажем, че ако съществуват $\tilde{M}, \tilde{N}, \tilde{R}$ такива, че смутеното уравнение да е $(\tilde{M}, \tilde{N}, \tilde{R})$-дихотомично, то важните за тази дихотомия пространства $C_{\alpha^{-1}}, C_{\tilde{\alpha}^{-1}}$ и $T_\beta, T_{\tilde{\beta}}$ ще бъдат съответно произволно близки съгласно метриката на Хаусдорф.

Нека Z е произволно банахово пространство. В множеството от всички подпространства на Z можем да дефинираме следната метрика [3]:

$$\rho(Z_1, Z_2) = \rho_H(\Sigma(Z_1), \Sigma(Z_2)) \tag{2.4.1}$$

където с $\Sigma(Y)$ $(Y \subset Z)$ означаваме затвореното единично кълбо на подпространството Y и ρ_H е хаусдорфова метрика.

Съгласно [2] в произволно метрично пространство хаусдорфовото разстояние между две затворени и ограничени множества X и Y се задава чрез:

$$\rho_H(X,Y) = \max\{\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}\rho(x,y), \sup_{y\in Y}\inf_{x\in X}\rho(x,y)\}.$$

Нека $J = [0,\infty)$. Разглеждаме хомогенното диференциално уравнение

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = B(t)x \quad (t \in J) \tag{2.4.2}$$

Теорема 2.4.1. *Нека са изпълнени следните условия:*

1. Уравнението (2.1.1) е (M,N,R)-дихотомично и функциите M и N имат вида (2.1.4):

$$\begin{cases} M(t,s) = \varphi_1(t)\varphi_2(s), \ (t \geq s) \\ N(t,s) = \psi_1(t)\psi_2(s), \ (t < s) \end{cases}$$

където $\varphi_1(.), \varphi_2(.), \psi_1(.), \psi_2(.) : J \to (0,\infty)$ са непрекъснати и ограничени функции.

2. Съществува число $\Delta > 0$, такова че

$$\Delta = \min\{\inf_{t\in J}\alpha(t), \inf_{t\in J}\beta(t)\},$$

където $\alpha(t) = \max\{\varphi_1(t), \psi_1(t)\}, \ \beta(t) = \max\{\varphi_2(t), \psi_2(t)\} \ (t \in J)$.

3. Уравнението (2.4.2) е $(\tilde{M}, \tilde{N}, \tilde{R})$-дихотомично и функциите $\tilde{M}$ и $\tilde{N}$ имат вида (2.1.4):

$$\begin{cases} \tilde{M}(t,s) = \tilde{\varphi}_1(t)\tilde{\varphi}_2(s), \ (t \geq s) \\ \tilde{N}(t,s) = \tilde{\psi}_1(t)\tilde{\psi}_2(s), \ (t < s) \end{cases}$$

с непрекъснати функции $\tilde{\varphi}_1(.), \tilde{\varphi}_2(.), \tilde{\psi}_1(.), \tilde{\psi}_2(.) : J \to (0,\infty)$. Нека положим $\tilde{\alpha}(t) = \max\{\tilde{\varphi}_1(t), \tilde{\psi}_1(t)\}, \ \tilde{\beta}(t) = \max\{\tilde{\varphi}_2(t), \tilde{\psi}_2(t)\} \ (t \in J)$.

Тогава за всяко $\epsilon > 0$ *съществува* $\delta > 0$ *такова, че ако*

$$\max\{\sup_{t\in J}|\alpha(t)-\tilde{\alpha}(t)|, \sup_{t\in J}|\beta(t)-\tilde{\beta}(t)|\} \leq \delta$$

то

$$\rho_1(C_{\alpha^{-1}}, C_{\tilde{\alpha}^{-1}}) \leq \epsilon,\ \ \rho_2(T_\beta, T_{\tilde{\beta}}) \leq \epsilon,$$

където ρ_1, ρ_2 *са метрики, дефинирани посредством (2.4.1).*

2.5. Съществуване на решения на нелинейни уравнения с (M, N, R)-дихотомична линейна част

Нека $J = [0, \infty)$. Разглеждаме нелинейното диференциално уравнение

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A(t)x + F(t,x) \quad (t \in J) \tag{2.5.1}$$

където $A(.) : J \to L(X),\ F(.,.) : J \times X \to X$. Нека F е непрекъсната относно t и x.

С $V(t)$ ще отбелязваме оператора на Коши на линейната част на (2.5.1), т.е. на уравнението (2.1.1).

В следващата теорема с помощта на принципа за неподвижната точка на Банах ще намерим достатъчни условия за съществуване на решения на нелинейното уравнение (2.5.1).

Използваните в теоремата функции $\alpha, \beta, \varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$, както и пространствата $C_{\alpha^{-1}}, T_\beta, \bar{T}_\beta$, са дефинирани в параграф 2.1 на Глава II.

Теорема 2.5.1. *Нека* $r > 0$ *е произволно число и са изпълнени следните условия:*

1. Линейната част на (2.5.1) е (M, N, R)*-дихотомична с непрекъсната за всяко* $s \in J$ *оператор-функция* $R(s) : J \to L(X)$*, условията (H1) и (H2) имат вида (2.1.4) и* $\sup\limits_{t\in J} \alpha^{-1}(t) < \infty$*.*

2. Съществува положителна функция $m_r \in \bar{T}_\beta$, за която $|m_r|_{\bar{T}_\beta} < r$ и

$$|F(t,x)| \le m_r(t) \quad (|x| \le r,\ t \in J)$$

3. Съществува положителна функция $k \in \bar{T}_\beta$, за която $|k|_{\bar{T}_\beta} = q < 1$ и

$$|F(t,x_2) - F(t,x_1)| \le \alpha^{-1}(t)k(t)|x_2 - x_1| \quad (|x_1|,|x_2| \le r,\ t \in J)$$

Тогава съществува положително число $\rho < r$, такова че за начална стойност ξ, удовлетворяваща $|\xi| \le \rho$, съществува единствено решение $x(t)$, оставащо в кълбото $|\ x\ |_{C_{\alpha^{-1}}} \le r_1$ с начално условие $x(0) = \xi$, където

$$r_1 = \sup_{t \in J} \alpha^{-1}(t)\ r$$

Забележка 2.5.1. *Случаят, когато $\sup\limits_{t \in J} \alpha^{-1}(t) = \infty$ е тривиален. Тогава условията 2. и 3. в Теорема 2.5.1 трябва да бъдат изпълнени за всяко $x, x_1, x_2 \in X$, функциите m и k няма да зависят от r, а уравнението 2.5.1 ще има единствено решение $x(t) \in C_{\alpha^{-1}}$.*

Като използваме принципа на неподвижната точка на Шаудер-Тихонов ще получим други достатъчни условия за съществуване на решение на уравнението (2.5.1).

Нека $S(J,X)$ е линейното пространство на всички непрекъснати функции, изобразяващи J в X. Множеството $S(J,X)$ е локално изпъкнало пространство относно топологията, зададена с метриката

$$\rho(u,v) = \sup_{0<T<\infty} (1+T)^{-1} \frac{\max\limits_{0\le t\le T} |u(t)-v(t)|}{1 + \max\limits_{0\le t\le T} |u(t)-v(t)|}.$$

Сходимостта по тази метрика съвпада с равномерната сходимост върху всеки ограничен интервал. За това пространство е валиден аналог на теоремата на Арцела-Асколи.

Нека

$$C_{\alpha^{-1}}(r_1) = \{x \in S(J,X) : |x|_{C_{\alpha^{-1}}} \leq r_1\}$$

Очевидно $C_{\alpha^{-1}}(r_1)$ е непразно, изпъкнало и затворено.

Теорема 2.5.2. *Нека $r > 0$ е произволно число и са изпълнени следните условия:*

1. Линейната част на (2.5.1) е (M, N, R)-дихотомична, условията (H1) и (H2) имат вида (2.1.4) и $\sup\limits_{t \in J} \alpha^{-1}(t) < \infty$.

2. Съществува положителна и ограничена върху всеки компактен подинтервал на J функция $m \in \bar{T}_\beta$ такава, че $|m|_{\bar{T}_\beta} < r$ и

$$\sup_{|x| \leq r} |F(t,x)| \leq m(t), \quad (t \in J).$$

3. Функцията $F(t,x) : J \times \{x \in X : |x| \leq r\} \to X$ е непрекъсната.

4. Множеството $K(r) = \{m^{-1}(t)F(t,x) : t \in J, |x| \leq r\}$ е относително компактно.

Тогава нелинейното уравнение (2.5.1) с начално условие

$$x(0) = \xi \quad (|\xi| \leq r)$$

при достатъчно малко $|\xi|$ има решение $x \in C_{\alpha^{-1}}(r_1)$, където

$$r_1 = \sup_{t \in J} \alpha^{-1}(t)\ r$$

Забележка 2.5.2. *При $\dim X < \infty$ условието 4. на Теорема 2.5.2 е излишно.*

2.6. Оценка на получените резултати

Най-напред трябва да отбележим, че въведената (M, N, R)-дихотомия с $M(t,s)$ и $N(t,s)$ се явява по-общ вариант от (M, N, R)-дихотомията, при която условията (H1) и (H2) са във вида (2.1.4), т.е. във вида:

$$\begin{cases} M(t,s) = \varphi_1(t)\varphi_2(s), \ (t \geq s) \\ N(t,s) = \psi_1(t)\psi_2(s), \ (t < s) \end{cases}$$

където $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \psi_1(t), \psi_2(t)$ са положителни непрекъснати скаларни функции.

В по-общия вариант, т.е. за (M, N, R)-дихотомични уравнения (без да се предполага условията (H1) и (H2) да са от вида (2.1.4)), са доказани Теорема 2.2.1 за съществуването на "ограничени" решения на нехомогенното диференциално уравнение, както и Теорема 2.2.2 за оценка на решенията на хомогенното уравнение.

Теорема 2.3.1 за съществуване на $Lp(\phi, \psi)$-решения на нехомогенното уравнение, Теорема 2.4.1 за грубост (устойчивост) на дихотомията, както и Теореми 2.5.1 и 2.5.2 за съществуване на решения на нелинейни уравнения с дихотомична линейна част, са доказани за по-малко общия вариант на (M, N, R)-дихотомията, т.е. за условия (H1) и (H2) във вида (2.1.4), показан по-горе.

Най-съществената особеност на (M, N, R)-дихотомията е наличието на двете фамилии от непрекъснати оператори $R(t)$ и $I - R(t)$, $(t \in J)$. Те може дори да не са линейни. Тяхната линейност се иска единствено в Теорема 2.5.1.

Всичките частни случаи на (M, N, R)-дихотомията, описани по-долу се получават, когато

$$R(s) = P \quad (s \in J),$$

където $P, I - P : X \to X$ са двойка допълващи се проектори.

Тогава множествата от неподвижните точки на операторите $R(s)$ и $I - R(s)$, описани в Теорема 2.2.2 се превръщат в допълващите се подпространства $\mathfrak{B}_1(s)$ и $\mathfrak{B}_2(s)$, описани в параграф 1.2, играещи основна роля в оценката на решенията на хомогенното диференциално уравнение.

Сега вече, в зависимост от избора на непрекъснати функции $M(t,s)$ и $N(t,s)$, като частни случаи получаваме дихотомиите:

За

$$M(t,s) = K_1 e^{\int_s^t \delta_1(\tau)\mathrm{d}\tau} \ (t \geq s)$$

$$N(t,s) = K_2 e^{\int_s^t \delta_2(\tau)\mathrm{d}\tau} \ (s > t)$$

където K_1, K_2 са положителни константи и δ_1, δ_2 са непрекъснати функции, приемащи реални стойности върху J, получаваме експоненциалната дихотомия на Мълдоуни [16].

Като частен случай на горната експоненциална дихотомия на Мълдоуни [16] при $\delta_1(t) = -\nu_1, \delta_2(t) = \nu_2$ ($\nu_i = \mathrm{const} > 0,\ 0 \leq t < \infty,\ i = 1,2$) се получава регулярната експоненциална дихотомия на Копел [5-7], Далецкий и Крейн [1], Финк [9], Масера и Шефер[3].

В този случай за пространствата, използувани в Теорема 2.2.1, е в сила $K_a \bigcap L_a = C_a$ при $a(t) \equiv 1$, а оценките, получавани от Теорема 2.2.2, са необходимо и достатъчно условие за наличие на експоненциална дихотомия [1].

Както вече отбелязахме в параграф 1.2, обикновената дихотомия е частен случай на горната при $\nu_1 = \nu_2 = 0$.

За

$$M(t,s) = Kh(t)h^{-1}(s) \ (t \geq s \geq 0)$$

$$N(t,s) = Kk(t)k^{-1}(s) \ (0 \leq t \leq s)$$

където K е положителна константа и $h, k : [0,\infty) \to (0,\infty)$ са две непрекъснати функции, получаваме $(h-k)$ дихотомията на Наулин и Пинто

[19-20].

Глава III
(D_1, D_2, M, N) - дихотомия

3.1. Постановка на проблема

Нека $X, L(X), E(X)$ са пространствата, разглеждани в Глава II.

Нека $J = [0, \infty)$. Разглеждаме линейното уравнение

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A(t)x \tag{3.1.1}$$

където $A(t) \in L(X), t \in J$. Нека $V(t)$ е операторът на Коши на (3.1.1).

Разглеждаме и съответното нехомогенно уравнение

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A(t)x + f(t) \tag{3.1.2}$$

където $f(t) \in X, t \in J$.

Ще предполагаме, че функциите $A(t)$ и $f(t)$ са силно измерими и интегрируеми по Бохнер за всеки краен подинтервал на J.

Ще казваме, че непрекъснатите за всяко $t \in J$ оператор-функции $D_1(t), D_2(t) : J \to E(X)$ и функцията $f(.) : J \to X$ удовлетворяват условието (H5), ако е изпълнена следната релация

$$\text{(H5). } f(t) \in \mathrm{Fix}(V(t)(D_1(t) + D_2(t))) \quad (t \in J)$$

(С Fix (T) означаваме множеството на всички неподвижни точки на изображението T, $T : X \to X$).

Лема 3.1.1. *Нека съществуват непрекъснатите за всяко* $t \in J$ *оператор-функции* $D_1(t), D_2(t) : J \to E(X)$ *и функцията* $f : J \to X$, *удовлетворява-*

щи условието (H5). Тогава функцията

$$x(t) = \int_0^t V(t)D_1(s)f(s)\mathrm{d}s - \int_t^\infty V(t)D_2(s)f(s)\mathrm{d}s \qquad (3.1.3)$$

е решение на уравнението (3.1.2), ако съществуват интегралите в (3.1.3).

Нека $M(.,.), N(.,.) : J \times J \to (0, \infty)$ са две непрекъснати функции.

Въвеждаме следните условия

$$\text{(H6).} \ \mid V(t)D_1(s)z \mid \leq M(t,s)|z|, t \geq s, z \in X$$

$$\text{(H7).} \ \mid V(t)D_2(s)z \mid \leq N(t,s)|z|, t < s, z \in X$$

Дефиниция 3.1.1. *Хомогенното уравнение (3.1.1) ще наричаме (D_1, D_2, M, N)- дихотомично, ако съществуват непрекъснати оператор-функции $D_i(t) : J \to E(X)$ за всяко $t \in J$, $(i = 1, 2)$ и непрекъснати функции M, N такива, че са изпълнени условията (H6) и (H7).*

Разглеждаме банаховите пространства K_a, L_a, C_a, T_a, дефинирани в Глава II.

3.2. Оценка на решенията на нехомогенното уравнение

Теорема 3.2.1. *Нека уравнението (3.1.1) е (D_1, D_2, M, N)-дихотомично. За всяка функция $f \in K_a \bigcap L_a$, която удовлетворява условието (H5) с оператор-функциите D_1 и D_2, нехомогенното уравнение (3.1.2) има решение в пространството C_a.*

Следствие 3.2.1. *Нека са изпълнени следните условия:*

1. Уравнението (3.1.1) е (D_1, D_2, M, N) - дихотомично и функциите M, N са във вида (3.1.4).

2. Оператор-функциите $D_1(t), D_2(t)$ *изпълняват условието (Н5) с функция* $f \in T_\beta$.

Тогава нехомогенното уравнение (3.1.2) има решение в пространството $C_{\alpha^{-1}}$*, за което е в сила следната оценка*

$$\sup_{t\in J} \ \alpha^{-1}(t) \mid x(t) \mid \leq \int_0^\infty \beta(s) \mid f(s) \mid \mathrm{d}s < \infty$$

3.3. Оценка на получените резултати

Трябва да отбележим, че въведената в Глава III (D_1, D_2, M, N)-дихотомия е обобщение на разглежданата в Глава II на настоящата работа (M, N, R)-дихотомия.

В този по-общ вариант, т.е. за (D_1, D_2, M, N)-дихотомични уравнения е доказана Теорема 3.2.1 за съществуване на "ограничени" решения на нехомогенното уравнение. Теорема 2.2.1 от Глава II е частен случай на Теорема 3.2.1. Съществено изискване в Теорема 3.2.1 е условието:

$$\text{(H5)}. \ f(t) \in \mathrm{Fix}(V(t)(D_1(t) + D_2(t)))(t \in J)$$

Частен случай на (D_1, D_2, M, N)-дихотомията се явява въведената в Глава II (M, N, R)-дихотомия, получаваща се при

$$D_1(t) = R(t)V^{-1}(t), \quad D_2(t) = (I - R(t))V^{-1}(t),$$

където $R(t) : J \to E(X)$ е произволна непрекъсната за $t \in J$ оператор-функция. При нея условието $(H5)$ е автоматично изпълнено.

Фактът, че (M, N, R)-дихотомията, използвана в Теореми 2.2.2, 2.3.1, 2.4.1, 2.5.1 и 2.5.2, е обобщение на дихотомиите в [5-7], [1], [9], [3], [16] и [19-20], вече беше отбелязан в праграф 2.6 на Глава II. Следователно (D_1, D_2, M, N)-дихотомията също е обобщение на тези дихотомии.

Заключение

В настоящата работа се разглежда дихотомично-подобно свойство за клас от хомогенни линейни диференциални уравнения в произволно банахово пространство. Въведени са (D_1, D_2, M, N) и (M, N, R)-дихотомии, които са съществено обобщение на почти всички известни на автора видове дихотомии. За пръв път типичните за всички дихотомии проектори са заменени с произволни непрекъснати оператор-функции. За въведените дихотомии са доказани следните важни свойства, които представляват основните приноси на настоящата дисертация.

1. Намерени са достатъчни условия за съществуване на решения на нехомогенно уравнение с (D_1, D_2, M, N)-дихотомия на съответното хомогенно уравнение, лежащи в специален вид банахови простанства (Теорема 3.2.1).

2. Намерени са оценки за решенията на (M, N, R)-дихотомично хомогенно уравнение (Теорема 2.2.2).

3. Намерени са достатъчни условия за съществуване на ограничени решения на нехомогенното уравнение, лежащи в пространствата $L_p(\phi, \psi)$ с такава (M, N, R)-дихотомичност на съответното хомогенно уравнение (Теорема 2.3.1).

4. Доказана е устойчивост (грубост) на (M, N, R)-дихотомията при малки смущения на дихотомичните функции M, N на уравнението (Теорема 2.4.1).

5. Намерени са достатъчни условия за съществуване на решения на нелинейното уравнение с (M, N, R)-дихотомична линейна част (Теореми 2.5.1 и 2.5.2).

Показано е, че класическите обикновена и експоненциална дихотомии, както и техните обобщения в лицето на дихотомиите на Мълдоуни, Пинто и Наулин са частен случай на (M, N, R) и (D_1, D_2, M, N)-дихотомиите, въведени в настоящата дисертация.

Конструирани и подробно са разгледани примери за (D_1, D_2, M, N) и (M, N, R)- дихотомични уравнения.

Всички получени в дисертацията резултати са в произволни банахови пространства, докато голяма част от изследванията на цитираните класически дихотомии са извършени в крайномерни пространства.

Като възможности за развитие виждам въвеждане и изследване на тази дихотомия за уравнения с неограничен оператор, както и нейното обобщаване за импулсни диференциални уравнения.

Връзките между приносите, целите, задачите, мястото на описание в дисертационния труд и направените публикации по темата са следните:

Принос	Цел	Задачи	Параграф	Публикации
1	1	А	3.2	1., 2.
2	1	А	2.2	1., 2.
3	1	А	2.3	3.
4	1	Б	2.4	
5	1	В	2.5	4.

Апробация на резултатите

Резултатите, получени в изследването, са използвани в

- Научен проект НИ11-ФМИ-004 към НПД на ПУ на тема: "Разработка и приложение на иновативни ИКТ за провеждане на качествени конкурентноспособни научни изследвания и цялостно осъвременяване процеса на обучение във ФМИ 2011-2012.

Част от получените резултати са докладвани на :

- Юбилейна международна конференция REMIA 2010, Пловдив, 10-12 декември 2010 г.

- Семинар на катедра Компютърни технологии, ФМИ, ПУ П. Хилендарски, Пловдив, 22 юни 2011 г.

- Семинар по диференциални уравнения с ръководител проф. дмн Снежана Христова, ФМИ, ПУ П. Хилендарски, Пловдив, 17 април 2012 г.

Публикации по дисертационния труд

1. Kiskinov H.S., Kostadinov S.I., A dichotomy for ordinary differential equations in a Banach space, Proceedings of the Anniversary International Conference REMIA 2010, Plovdiv, 10-12 December 2010, 153-156, ISBN 978–954–423–648–9.

2. Georgieva A., Kiskinov H., Generalized dichotomy for ordinary differential equations in a Banach space, International Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. 73 (2011), No. 3, 335-347, ISSN 1311-8080.

3. Kiskinov H., Kostadinov S., Existence of Lp-solutions of linear differential equations with generalized dichotomy in a Banach space, Scientific Works, Plovdiv University, Vol 38 (2011), No. 3, 29-35, ISSN 0204-5249.

4. Georgieva A., Kiskinov H., Existence of solutions of nonlinear differential equations with generalized dichotomous linear part in a Banach space, Rostocker Mathematisches Kolloquium, Vol. 66 (2011), 75-85, ISSN 0138-3248.

Литература

[1] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г., Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, Наука, Москва, 1970.

[2] Куратовский К., Топология, Мир, Москва, 1966.

[3] Массера Х., Шеффер Х., Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства, Мир, Москва, 1970.
impulsive differential equations, Dyn. Syst. Appl. 5 (1996), No.1, 145-152, ISSN 1056-2176.

[4] Cecci M., Marini M. and Zezza P.L., Asymptotic properties of the solutions of nonlinear equations with dichotomies and applications, Bolletino U.M.I., Analisi, Funzionale e Appl. 1 (1982), 209-234.

[5] Coppel W.A., On the Stability of Ordinary Differential Equations, J. London Math. Soc. 39 (1964), p. 255-260.

[6] Coppel W.A., Stability and asymptotic behaviour of differential equations, D.C. Health and Company, Boston, 1965

[7] Coppel W.A., Dichotomies in stability theory, Lectures Notes in Mathematics, 629, Springer Verlag, Berlin, 1978

[8] Elaydi S., Hajek O., Exponential dichotomy of nonlinear systems of ordinary differential equations, Trends in the Theory and Practice of Non-Linear Analysis, Elsevier Science Publishers B.V., North Holland, 1985, p.145-153.

[9] Fink A. M., Almost periodic differential equations, Lecture notes in math. 334, Springer Verlag, New York, 1974.

[10] Georgieva A., Kiskinov H., Generalized dichotomy for ordinary differential equations in a Banach space, International Journal of Pure and Applied Mathematics , Vol. 73 (2011), No. 3, 335-347, ISSN 1311-8080.

[11] Georgieva A., Kiskinov H., Existence of solutions of nonlinear differential equations with generalized dichotomous linear part in a Banach space, Rostocker Mathematisches Kolloquium, Vol. 66 (2011), 75-85, ISSN 0138-3248.

[12] Kiskinov H.S., Kostadinov S.I., A dichotomy for ordinary differential equations in a Banach space, Proceedings of the Anniversary International Conference REMIA 2010, Plovdiv, 10-12 December 2010, p.153-156, ISBN 978-954-423-648-9.

[13] Kiskinov H., Kostadinov S., Existence of Lp-solutions of linear differential equations with generalized dichotomy in a Banach space, Scientific Works, Plovdiv University, Vol 38 (2011), No. 3, 29-35, ISSN 0204-5249.

[14] Markus L. and Yamake, Global stability criteria for differential systems, Osaka Math.J. 12 (1960), p.305-317.

[15] Martin R. H., Conditional stability and separation of solutions to differential equations, J. Diff. Equations 13 (1973), 81-105.

[16] Mildowney J.S., Dichotomies and asymptotic behaviour for linear differential systems, Trans. Amer. Math. Soc., 283 (1984), p.465-484.

[17] Naulin, Raul, Weak dichotomies and asymptotic integration of nonlinear differential systems, Nonlinear Stud. 5 (1998), No.2, 201-218, ISSN 1359-8678.

[18] Naulin R., Pinto M., Admissible perturbations of exponential dichotomy roughness, Nonlinear Anal. 31 (1998), 559-571.

[19] Naulin R., Pinto M., Dichotomies and asymptotic solutions of nonlinear differential systems, Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. 23 (1994), No.7, 871-882.

[20] Naulin R., Pinto M., Stability of h-k Dichotomies, UCV, DGI-124 Universidad de Chile, E 3069-9012, Fondecyt 0855-91 (1991).

[21] Perron O., Die Stabilitaetsfrage bei Differentialgleichungen, Math. Z. 32 (1930), 703-728, ISSN 0025-5874; ISSN 1432-1823.

[22] Perron O., Ueber eine Matrixtransformation, Math. Z. 32 (1930), 465-473, ISSN 0025-5874; ISSN 1432-1823.
Notas Soc. Mat. Chile 6 (1987), No.1, 37-61.

[23] Riesz, Friedrich; Sz.-Nagy, Bela, Vorlesungen uber Funktionalanalysis, Hochschulbuecher fuer Mathematik. Bd. 27., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin, 1956.