

РЕЦЕНЗИЯ

от дн Ангел Борисов Дишлиев – професор в Химикотехнологичен и металургичен университет – София върху

дисертационен труд за присъждане на образователната и научна степен „доктор“;

област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика;

професионално направление: 4.5. Математика;

докторска програма: Диференциални уравнения;

автор на дисертационния труд: Екатерина Борисова Мадамлиева;

тема на дисертационния труд: Дробни диференциални уравнения със закъсняващ аргумент;

научен ръководител: проф. д-р Андрей Иванов Захариев – Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“

1. Общо описание на представените материали

Със заповед № РЗЗ-1432 от 26.04. 2021 г. на Ректора на Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“ (ПУ) съм определен за член на научното жури за осигуряване на процедура за защита на посочения по-горе дисертационен труд. На първото заседание на журито съм избран за рецензент.

Представеният от докторанта Екатерина Мадамлиева комплект материали на електронен носител е в съответствие с чл. 36 (1) от Правилника за развитие на академичния състав на ПУ.

Дисертационният труд е поместен на 102 стандартни страници. Състои се от:

- увод;
- три глави (всяка съдържаща няколко параграфа);
- заключение, което представлява авторска справка на приносите в рецензирания труд. Посочени са общо шест основни приноса;
- апробация на резултатите: 1 проект към ФНИ при МОН, 2 проекта към ФНИ при ПУ и 1 международна конференция (Приложение на математиката в техниката и икономиката, Созопол);
- списък на публикациите по дисертационния труд – общо 3 публикации;
- декларация за оригиналност на резултатите;
- библиография, включваща 85 заглавия.

Освен дисертационния труд докторантът е приложил към документите по процедурата за придобиване на образователната и научна степен „доктор“:

- Автореферат;
- Декларация за оригиналност и достоверност;
- Автобиография (Европейски формат);
- Копия на три броя научни статии, публикувани в пълен текст и които са свързани с темата на дисертационния труд. Докторантът е член на авторските колективи на тези статии. Може да се каже, че дисертацията се основава на тези публикации;
- Други документи, които са свързани с процедурата по защита на дисертационния труд и са изискуеми от съответните правилници, на които няма да се спирам.

2. Кратки биографични данни за докторанта

Екатерина Мадамлиева (в автобиографията се използва фамилията Лазарова – надявам се двете фамилии да се отнасят за един човек) завършва в ПУ „Паисий Хилендарски“ следните образователно-квалификационни степени и обучения:

- „бакалавър“ (2012 г. - 2016 г.), специалност „Приложна математика“;
- „магистър“ (2016 г. – 2017 г.), специалност „Приложна математика“;
- „учител по математика“ (2016 г. - 2017 г.), допълнителна квалификация;
- „докторска програма Диференциални уравнения“ (2018 г. – 2021 г.), като редовен докторант.

През този висш период от своето обучение тя е положила сериозен брой изпити. Забележително е, че всички изпитни оценки са отличен (6) (по шестобалната система). Ще отбележа, че много лесно се изчислява средния ѝ успех за всеки от посочените по-горе етапи на нейното следване. Освен това тя е носител на няколко грамоти, свързани с нейните успешни участия и заемането на призови места в студентски олимпиади по математика и компютърна математика. Притежава няколко похвални грамоти, чрез които е удостоена като първенец на випуски в ПУ в отделните ОКС.

Трудовата дейност на Екатерина е кратка по обективни причини:

- от 2017 г. е учител по математика в средно училище в град Пловдив;
- от м. април тази година е изследовател (млад учен) в ПУ.

3. Актуалност на тематиката и целесъобразност на поставените цели и задачи

Дробното смятане представлява разширение на класическото диференциално смятане, като се дефинира понятието производна от произволен реален ред. Първите резултати и идеи, отнасящи се този вид производни са плод на класиците на математическия анализ: Лайбниц, Лиувил, Лаплас, Лагранж, Ойлер, Риман, Фурие и др. Това безспорно е атестат за значимост на това направление в математическия анализ. През последните петдесет години теорията на дробното смятане се развива сравнително интензивно във връзка с приложенията на обобщените производни в моделирането на реални процеси. Напоследък водещи български изследователи се включиха устремно в развитието на този дял на анализа и съответните диференциалните уравнения, от които ще отбележа: С. Христова, В. Кирякова, Й. Панева, И. Стамова, Г. Стамов, А. Захариев, Х. Кискинов, М. Веселинова, Е. Ангелова и др.

Математическата теория на диференциалните уравнения заема най-голям относителен дял в математическите изследвания на учените в световен мащаб. Това се дължи на факта, че диференциалните уравнения са най-приложимия и адаптивен апарат за изучаване и прогнозиране на количествените характеристики на динамични процеси – основния вид процеси в нашето съвремие. Разнообразието от класове уравнения и богатството от качества, които притежават техните решения, е определящо при избора им за модели на реални явления. Това означава, че изследването на нови класове уравнения и свойствата, които те притежават е дейност, която постоянно ще се разраства. Точно на изучаване на някои съвременни

класове диференциални уравнения е посветена рецензираната работа. Актуалността на тематиката на дисертацията виждам в следните аспекти:

- Възникването и откриването на все по сложни динамични взаимовръзки между обекти в реалния свят провокират въвеждането на нови класове диференциални уравнения, които са пригодени адекватно да описват откритите, променящи се във времето зависимости. Тъкмо това наблюдаваме в разглеждания дисертационен труд, който е посветен на изследване на диференциални уравнения, съдържащи дробни производни със закъсняващ аргумент на търсената функция;
- Намирането на точните решения на моделиращите диференциални уравнения в общия случай е невъзможно (не само поради липса на знания и създадени методи за решаването им, а по принцип). Изследването на качествата на решенията в тези случаи е единственият възможен подход за придобиване на търсените и необходими знания за процесите, които са подложени на моделиране. В разглежданата дисертация са намерени конкретни ясни условия, гарантиращи различни качества на решенията на посочения по-горе клас уравнения;
- Известно е, че математиката и в частност диференциалните уравнения се развиват не само заради техните приложения. Науката се развива и заради самата нея. Изграждането на много теории, по-голямата част от които ще „отпаднат“ по обективни причини във времето, е способ да се съхрани жизнеността на познанието и неговия стремеж за развитие.

В края на тази точка ще резюмирам моето убеждение, че резултатите в дисертацията са актуални и са в синхрон със съвременните тенденции в теорията на диференциалните уравнения. Мястото на представените изследвания в дисертацията ще бъде определено от интересът, който те ще предизвикат в математическата общественост.

4. Познание на проблема

Известно е, че един отделен учен (колкото и да е талантлив и отдаден на науката) не е в състояние да се запознае и усвои всички резултати по дадена научна тема (дори и в сравнително „тясно“ направление). Причините за това са много: наличието на огромен обем източници на информация; ограничен достъп до информацията; съществуване на повтораемост на изследванията; липса на интерес от страна на изследователя към определени аспекти на теорията и т.н. Поради тези причини познаването на даден научен проблем би трябвало да означава, че на изследователя са известни достатъчно научни сведения за да може да вникне в съдържанието на по-голямата част от научните резултати по темата и да е в състояние да осъществява самостоятелни научни търсения.

Считам, че докторантът познава детайлно моментното състояние (както и историческото развитие) на разглежданите научни проблеми и съответните математически обекти на изследване в представения за рецензиране научен труд. До този извод достигам, като имам предвид:

- Направените предварително от автора сериозни, богати на съдържание и основополагащи увод и въведение в темата на дисертацията. Посочени са основни дефиниции и резултати на водещи наши и чуждестранни автори, на които се базират изследванията. Представени са достатъчно конкретни приложения на

разглежданите типове уравнения, които още веднъж ни убеждават в достоверността на представените резултати;

- При четенето, дори и при първичното запознаване с научния труд, не е необходимо използването на допълнителна, въвеждаща, справочна литература по темата. С други думи, началото на дисертационния труд притежава качеството на учебно помагало (за напреднали). От една страна това обстоятелство е удобно за професионалния читател без предварителна подготовка по темата на дисертацията, а от друга - потвърждава изказаното по-горе мнение за детайлното познаване на генезиса на дробното смятане и съответните дробни диференциални уравнения;
- Свободното владение на терминологията и основните дефиниции по темата и умението да се съчетават определящи качества на различни математически обекти (както в случая са дробните производни на неизвестната функция от една страна и наличието на изместен времеви аргумент на неизвестната функция от друга) е основание за изказаното от мен твърдение за компетентност на докторанта по въпросите, разгледани в дисертацията;
- Дълбокото вникване в същността на дробните производни (тяхната нелокалност – наличие на памет) и съществената им разлика с производните от цял ред ме убеждава в добрата предварителна научна подготовка на докторанта по темата на дисертацията;
- Посочената използвана литература и някои коментари върху произведенията на други автори представляват потвърждение на съпричастността на автора към разглеждания клас уравнения;
- Множеството съществени забележки и следствия (някои от тях със самостоятелен интерес), които доизясняват и допълват теоретичните резултати на автора на дисертационния труд, дават основание да считам, че теорията на тези сложни математически обекти е осмислена дълбоко;
- На няколко места в рецензирания труд се вижда, че докторантът умее творчески да прилага известни резултати и методи на изследване на други автори. Притежава качеството разумно да допълва и приспособява ограниченията, наложени на разглежданите обекти, а в някои случаи да преодолява трудности от технически характер. Убедено считам, че представените изследвания са постигнати за първи път от докторанта или поне със съществено негово участие. Отговарям и на станалия напоследък стандартен въпрос, отнасящ се за оригиналност на резултатите:

В дисертацията липсват елементи на повторемост и плагиатство от чужди изследователи.

Да не забравим за какво се отнася тази част от рецензията. Завършвам с резюме на направеното изложение по точката: Екатерина притежава необходимите знания за водене на самостоятелни изследвания по дискутираната тема.

5. Методика на изследването

Основен апарат на провеждане на изследванията в рецензирания труд са методите и някои научни факти от няколко математически науки:

- реален математически анализ (прецизното използване на теорията на абсолютно непрекъснатите функции при формулирането на условията на нови дефиниции и теореми и при извършване на съответните доказателства в рецензирания труд);
- функционален анализ (представя основния апарат на проведените формулировки и доказателства в дисертацията);
- метод на свиващите изображения в пълни метрични пространства (този метод, използван многократно в дисертацията, изнасям извън функционалния анализ поради изключителните му приложения в научните изследвания по математика);
- фундаментална теория на диференциалните уравнения (съществуване и единственост на решения на класове уравнения);
- качествена теория на диференциалните уравнения (една от основните цели на изследванията е въпросът за асимптотична устойчивост на решенията на клас системи диференциални уравнения);
- операторно смятане (дефиниране на дробните производни и извършване на почти всички доказателства в дисертацията; използване на свойствата на оператора на Лаплас; Лебегова декомпозиция на функция и др.);
- теорията на обобщените функции (тъкмо чрез гама функцията на Ойлер се дефинират производните с дробен показател);

Както в почти всички дисертации по математика, така и тук, не се използва някакъв конкретен математически метод (и само този метод), който се прилага върху подходящи обекти с цел откриване на нови факти. Прилагането на различни знания, съчетаването им с цел постигане на нови резултати, е схемата, по която се извършват изследванията в рецензирания дисертационен труд. Ще отбележа, че този начин на разкриване на нови факти е труден и е присъщ на изследователите с обхватен творчески потенциал. Мисля, че този подход при набелязване на целите и задачите за разрешаване, методите на изследователска работа са предадени на докторанта от неговия научен ръководител.

6. Характеристика и оценка на дисертационния труд

Уводът на дисертационния труд има информационен характер. Стартира се с исторически преглед на развитието на дробното смятане и дробните диференциални уравнения. Посочени са основните източници на информация, на които се градят резултатите в дисертацията. Втората част на увода представлява обзор на дисертационния труд. Много кратко и ясно е формулирана основната цел на работата:

Получаване на достатъчни условия за глобална асимптотическа устойчивост на нулевото решение на смутена линейна система диференциални уравнения от определен клас при основно предположение, че нулевото решение на изходната (съответната) несмутена линейна система притежава споменатата устойчивост.

Следват няколко уточнения, свързани с описание на класа на системата диференциални уравнения, обект на изследване.

Пак в увода са формулирани задачите, които трябва да се решат за постигане на поставената цел. Накрая на увода е дадена структурата на дисертационния труд.

Накратко е посочено съдържанието на отделните глави и прилежащите им параграфи.

Първата глава на дисертацията, както казахме по горе, има въвеждащо – информационен характер. В първия параграф са дадени основните означения, които се използват в дисертацията. Във втория параграф са дадени пълен набор от дефиниции и теореми от функционалния анализ, които са необходими за дефинирането на дробни производни на функция и съответните диференциални уравнения, в които участват тези производни. Например, дефинирани са понятията: пространство с мярка; пълно пространство; атом; вариация на функция; абсолютно непрекъснатата функция; интеграл на Стилтес и др. Формулирани са полезни класически теореми: теорема на Фубини – даваща връзка между глобално интегрируема функция и интегрируемост по част от дефиниционните променливи; теорема на Банах за свиващото изображение; теорема за представяне на функция с ограничена вариация; необходимо и достатъчно условие за абсолютна непрекъснатост и др. В следващия параграф за удобство са припомнени дефинициите на някои специални функции: Гама функция, Бета функция, функции на Митаг – Лефлер; трансформация на Лаплас и др. С тяхна помощ са дефинирани ляв дробен интегрален оператор; лява дробна производна на Риман-Лиувил и лява дробна производна на Капуто от ред $\alpha \in (0,1)$. Посочена е връзката между тези две производни и са представени някои основни техни равенства.

В последния параграф на главата е направен кратък преглед на дробните диференциални уравнения с различни типове закъснения, които са обект на изследване в следващите глави.

Втората глава, която според мен е основна глава в дисертацията, се състои от два параграфа. Първият параграф е посветена на клас системи диференциални уравнения при следните специфични белези:

- системата е линейна (хомогенна или нехомогенна);
- неизвестната функция е n -мерна: $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$;
- производните на неизвестната функция са дробни от типа на Капуто от ред $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$; $0 < \alpha_i < 1$, $i = 1, 2, \dots, n$;
- производните на търсената функция, които участват в системата, имат вида $D^\alpha X(t) = (D^{\alpha_1} x_1(t), D^{\alpha_2} x_2(t), \dots, D^{\alpha_n} x_n(t))$, с други думи всяка координата на търсената векторна функция участва в системата с различен ред на производната;
- системата притежава неутрално закъснение, т.е. закъснения на аргумента на неизвестната функция, която се намира както под знака на дробната производна, така и извън диференциалния оператор;
- системата притежава разпределени закъснения, т.е. неизвестната функция се намира под знака на Стилтесов интеграл, като променливата на функциите в интеграла е самото закъснение.

Формулирана е съответната начална задача на Коши за посочения клас линейни системи диференциални уравнения (хомогенни и нехомогенни), като началните функции са частично непрекъснати векторни функции (непрекъснати отдясно в

техния дефиниционния интервал). Точките на прекъсване са краен брой. Разгледани за няколко фундаментални въпроса за въведените начални задачи:

Първият въпрос, разгледан в тази глава, е съществуване на фундаментална матрица на формулираната по-горе хомогенна система диференциални уравнения с дробни производни на Капуто от неутрален тип с разпределено закъснение. За удобство тази линейна система ще наричаме *основна* система. За да се установи съществуването и формата на фундаменталната матрица на основната система е доказано съществуването на единствено решение на съответна матрична начална задача (Теорема 2.1.1). Тъкмо това единствено матрично решение е основа за определяне на фундаменталната матрица на основната система. Формално фундаменталната матрица се изразява чрез обратната трансформация на Лаплас.

При условията за съществуване на фундаменталната матрица на основната система е представена интегрална форма на единственото решение на съответната начална задача на Коши за основната система. Намирането на формата на решението се осъществява отново чрез трансформацията на Лаплас. Извършените пресмятания тук и в следващите теореми имат технически характер и е необходима съсредоточена работа, за да не се пропусне или сгреша детайл от пресмятанията.

Третият въпрос, разгледан в главата (следвайки класиката във фундаменталната теория на линейните диференциалните уравнения с цял ред на производната), е свързан с формата на решението на началната задача на Коши за линейната нехомогенна основна система. Отделно са разгледани случаите, когато началната функция е нулева и ненулева. Условията върху хомогенната част на системата са същите както при разглежданията за съществуване на фундаментална матрица. Нехомогенната нелинейна част е от класа на локално интегрируемите по Лебег функции, които са експоненциално ограничени.

Във втория параграф на втора глава се изучава клас системи диференциални уравнения при следните характеристики:

- системата е линейна (хомогенна или нехомогенна);
- системата е нелинейно смутена, т.е. дясната страна на системата представлява нелинейна векторна функция с аргументи времето и неизвестната функция, която може да е със закъсняващ аргумент;
- производните на неизвестната векторна функция $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ са дробни от типа на Капуто от ред $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in (0, 1)^n$;
- редовете на производните $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ са несъизмерими;
- системата притежава неутрално закъснение;
- системата притежава разпределени закъснения.

Съответната начална задача се задава с помощта на частично непрекъснати начални функции от типа описан в предходния параграф, дефинирани в „стикова“ с дефиниционното множество на неизвестната функция, предварителен интервал.

Интересно е доказателството на Теорема 2.2.1. Разгледан е случаят, когато началната функция притежава един момент на прекъсване. С помощта на подходящо избран оператор, който се оказва свиващ в дефиниционното си пълно метрично пространство (при наличие на няколко ограничения), е установено съществуване и

единственост на решението на посочената по-горе начална задача на Коши в ограничен времеви интервал. В следващата теорема авторът се спира на важния и същевременно изненадващ (за праволинейния читател) вариант на разглежданата начална задача, а именно когато краят на времевия начален интервал (където решението е равно на началната функция) не съвпада с началния момент на оператора на дробните производни, т.е. липсва споменатата по-горе „стиковка“.

Основният резултат в главата е формулиран в Теорема 2.2.6. Разглеждат се смутената система, формулирана в параграф 2 на втора глава, и съответната ѝ несмутена система (по същество несмутената система е линейна хомогенна неутрална система диференциални уравнения с дробни производни от типа на Капуто и с разпределено закъснение). Предполага се, че несмутената система притежава нулево решение. Посочени са сравнително лесни за проверяване условия, при които нулевото решение на смутената задача е глобално асимптотически устойчиво, ако същото качество притежава и нулевото решение на съответната несмутена система.

В трета глава на дисертационния труд основен обект на изследване е по-проста система диференциални уравнения в сравнение с предходната глава. Тук закъснението е извън производната. Разглеждат се системи диференциални уравнения, които са:

- линейни (хомогенни и нехомогенни);
- с дробни производни, които са несъизмерими;
- разпределено закъснение на аргумента на търсената функция, когато тази функция не е диференцирана, т.е. можем да кажем, че системата не е неутрална.

Началната функция е от множеството на частично абсолютно непрекъснатите функции, които са непрекъснати от дясно в точките на прекъсване.

За така представената начална задача отново е разгледан въпросът за съществуване и единственост на решение. Намерените условия гарантират съществуване на единствена неподвижна точка (която се явява решение на началната задача) на подходящо избран свиващ оператор, дефиниран и изобразяващ в едно и също пълно метрично пространство. Ще отбележа, че някои от условията са доста „пожелателни“ и трудно „проверяеми“ в общия случай (например, вижте условия (S_2) и (S_3)). Доказателството на Теорема 3.1.3 (макар и повлияно от изследванията на други автори) изисква сериозни познания (по-точно авторът разполага с богат арсенал от помощни твърдения) и специфична техника на пресмятания, а също така познаване и свободно боравене с популярните обобщени функции.

Във втория параграф на трета глава получените теоретичните резултати са приложени върху конкретни частни варианти на разглежданите системи диференциални уравнения. Чрез свойствата на фундаменталната матрица, установени в предходния параграф, са получени интегрални представяния за решенията на:

- конкретна нехомогенна система с нулеви начални условия;
- конкретна хомогенна система със специфични начални условия.

7. Приноси и значимост на разработката за науката и практиката

Както казах по-горе, приносите са формулирани коректно от докторанта в Заключението към дисертацията. Приносите в дисертационния труд можем да причислим към тематичното обогатяване на фундаменталната и качествената теория на специални класове диференциалните уравнения. Ще повторя част от изложението в предходната част на дисертацията, но по този начин ще подчертая два от приносите на докторанта, които според мен са най-съществени (разположени са във втората глава на дисертацията):

- Разгледана е линейна неутрална система с разпределени закъснения и дробни производни от типа на Капуто. Към тази система (която можем да наречем изходна) са добавени нелинейни смущения (векторна нелинейна функция, зависеща от времето и неизвестната функция). Новополучената система за краткост ще наричаме смутена. Съответната начална задача на Коши е с частично непрекъсната начална функция. За така формулираната начална задача на Коши за смутената система са открити достатъчни условия за съществуване и единственост на решението. При това е разгледан и вариант, при който няма „стиковка“ между дефиниционното множество на началната функция от една страна и дефиниционния интервал на оператора на дробната производна – от друга страна. По-точно горната граница на дефиниционния интервал на началната функция не съвпада с долната граница на интеграла на дробната производна;
- Да разгледаме отново изходната и смутената системи, охарактеризирани по-горе. Да предположим, че смутената система притежава нулево решение. Освен това, нека нулевото решение на изходната система е глобално асимптотически устойчиво. Намерени са достатъчни условия, при които нулевото решение на смутената система запазва същото асимптотично поведение.

Според мен изследванията са достатъчно дълбоки и важни, поради което те ще заемат достойно и трайно място в науката.

8. Преценка на публикациите по дисертационния труд

Дисертационният труд се основава на 3 научни публикации с участието на докторанта. Всяка от тези публикации е от четирима автори (различни в отделните публикации). Една от работите е публикувана в *AIP Conference Proceeding* (ежегодната конференция на ТУ-София в Созопол) и две в списанието *Mathematics*.

AIP Conference Proceeding притежава SJR = 0,19. Списанието *Mathematics* притежава SJR = 0,3 и Импакт фактор IF=1,747. Всички тези числови характеристики са от 2019 г. (последната година, за която са известни тези данни).

Публикациите са от миналата и тази година, поради което е твърде рано да се очаква цитирания на получените научни достижения.

Както казах, коментираните публикации, на които се базира дисертацията, са в съавторство с други учени. Нямам допълнителна информация, която да противоречи на моето убеждение, че участието на докторанта в изследователската работа по тези публикации е еквивалентно на работата на останалите неговите съавтори.

Изрично ще подчертая, че публикационната активност на докторанта, свързана с дисертационния труд, е повече от задоволителна. Публикациите не са много на брой, но са публикувани в реномирани научни списания, които щателно се отразяват от различни вторични бази данни и следователно лесно се следят от интересуващата се

научната общественост. Това обстоятелство според мен ще доведе до използване на резултатите и тяхното цитиране в близко бъдеще.

Част от резултатите в дисертационния труд са използвани в работата по три проекта. Два от споменатите проекти са на университетско ниво, а единият е към ФНИ при МОН.

Резултати от дисертацията са докладвани на 46-та Международна конференция „Приложение на математиката в техниката и икономиката“, Созопол, 2020 г.

В заключение на тази точка от рецензията ще отбележа, че научните публикации, с които докторанта участва в защитата на дисертационния труд, надвишават минималните изисквания на ФМИ към ПУ (3 публикации в рецензирани издания, от които поне едно е списание).

9. Лично участие на докторанта

Считам, че всеки дисертационен труд се базира на работата на няколко учени (които може да не са свързани в работен колектив). Тук ще посоча най-важните групи от учени, които (най-често неявно) участват в даден сериозен научен труд:

- учени, които са основоположници на фундаменталната теория към която можем да причислим дисертацията;
- учени, идеите на които се използват в изследването (възможно е някои от тези учени да не са специалисти в направлението на дисертационния труд);
- научният ръководител, който, съгласно приетата практика, е автор на постановките и на някои от решенията на задачите в труда;
- колеги, които са оказали съдействие при решаването на някои проблеми в работата по дисертацията;
- докторантът, който е отговорен за цялата дисертация.

Моята задача е да преценя относителния дял на участието на докторанта в този (по принцип) общ труд. За мен е без съмнение, че:

- Екатерина е подготвила и оформила дисертационния труд (не изключвам второстепенно съдействие от други колеги – отнасящо се до оказване на техническа помощ при реализирането на дисертацията);
- Пряко участва във формулировките и доказателствата на твърденията, при това, нейното участие е решаващо и отговорно;
- Заслугите на докторанта Е. Мадамлиева можем да видим и в „подреждането на изследването“, т.е. преценка на резултатите, които са включени в дисертацията, и отпадането на някои достижения, които са странични и нарушават логическата нишка на повествованието в труда;
- Заслугите на автора на рецензирания труд са в осмислянето и реализацията на концептуално завършена дисертационна тема на нивото на съвременното познание. Тази реализация минава през различни етапи:
 - запознаване с изходната информация,
 - фиксиране на основните задачи и произхождащите от тях твърдения в изследването,
 - определяне на подходите и методите за решаване на проблемите,
 - фиксиране на основните твърдения и въвеждане при необходимост на нови понятия,

- преодоляване на специфични трудности при доказателствата на твърденията и добавянето на ограничения (условия), гарантиращи верността на твърденията и т.н.

Според мен посочените по горе заслуги без уговорки могат да бъдат преписани на кандидатката за придобиване на докторската степен.

Вероятно част от задачите, разгледани в дисертацията, са поставени от научния ръководител на докторанта или от друг съавтор в базовите публикации. Същото се отнася и за част от подходите и методите за решаване на поставените проблеми. Това приемам за естествено и според мен не намалява глобалните заслуги на автора.

Окончателното ми мнение по тази точка от рецензията е, че:

Приносите на Екатерина в рецензирана работа са съществени и решаващи.

10. Автореферат

Авторефератът напълно отговаря на изискванията на Правилника за развитие на академичния състав на ПУ. В него са посочени:

- исторически преглед на дробното диференциално смятане (базов математически апарат в изследванията на докторанта);
- основни цели на дисертационния труд;
- основни задачи, разгледани в дисертацията;
- използвани резултати на други учени и основните техни твърдения, подпомагащи изследванията на автора на дисертацията;
- последователно (следващо изследванията в дисертацията) са дадени основните дефиниции и понятия;
- последователно (съгласно изложението в дисертационния труд) са формулирани основните ограничения и произтичащите от тях основни и помощни твърдения, получени от докторанта;
- основни приложения на теоретичните резултати на базата на конкретни примери;
- основни изводи и заключения, произтичащи от дисертационния труд, т.е. приносите на докторанта;
- насоки за бъдещо развитие на постигнатите резултати;
- авторски публикации по темата на дисертацията;
- апробация на получените резултати;
- библиография.

Тук е мястото да отбележа, че изводите, направени от докторанта, отразяват коректно постигнатото в предложения за рецензиране дисертационен труд. В автореферата и в дисертацията тези изводи са оформени в частта, озаглавена „Заключение“.

Материалът (в автореферата) е изложен така, че читателят може да придобие пълна и адекватна представа за резултатите в дисертацията.

11. Критични забележки и препоръки

Нямам съществени критични бележки и коментари, които биха могли да променят моето положително мнение за дисертационния труд на Екатерина Мадамлиева. Действително:

- Темата на дисертацията е съвременна и така да се каже „хит“ в научните изследвания по математически анализ и диференциални уравнения не само у нас, но и в световен мащаб;
- Конкретните задачи, реализиращи целите, са избрани и решени последователно в естествен порядък и сполучливо;
- Доказателствата макар и не така лесни за разбиране можем да „обобщим“, като пълни и представени в достатъчна академична подробност (все пак ще кажа, че на места са доста „пестеливо“ написани). Можем да заключим, че вникването в твърденията и съответните им доказателства изискват добра подготовка и сериозно внимание от страна на читателя, освен това за запаметяване на някои факти е задължително използване на молив и хартия;
- Някои конкретни реализации на твърденията са оформени умело, като самостоятелни твърдения под формата на приложения и следствия;
- Допълнително осмисляне на условията може да се постигне чрез внимателно проследяване на приложените примерни реализации.

Ще посоча три несъществени слабости (преценени като такива от моя милост, което означава, че други специалисти може да не се съгласят с мен):

- Номерацията (на теореми, лемми, забележки, дефиниции и пр.) в автореферата се различава от номерацията на техните оригинали от дисертационния труд. Това затруднява възможността за съпоставяне на записите на двата документа. Освен това, пълният списък на библиографията от дисертацията би трябвало без съкращения да се пренесе и в автореферата (макар, че в автореферата може да не се цитират всички източници);
- В текста на дисертацията се използват няколко нестандартни символи (означения, които не притежават широка популярност). В общия случай, те не са обяснени при първото тяхно появяване в текста на дисертацията. Ако беше направено дефиниционно въвеждане на символите при първоначалното тяхно използване, то това щеше да е удобно за читателя. В интерес на истината ще отбележа, че означенията са дефинирани в първия параграф на първа глава на дисертацията (с малки изключения). Параграфът е озаглавен „Основни означения“. За съжаление този подход за въвеждане на символите означава, че при всяка среща с такъв непопулярен символ, читателят трябва да се връща към началото на дисертацията за необходимата справка. С други думи, всяко (нестандартно) означение е удобно да се опише освен в началото на изследването (под формата на списък с означения), така и при първата среща с него;
- В дисертацията са използвани стотици означения. Между впрочем, като имаме предвид, че означенията по принцип са безбройно много (да включим индексите), то можем да заключим, че използваните символи са пренебрежимо малко. За мен обаче, те са „страховито“ много. В работата са „впрегнати“ цялата латинска азбука (малки и големи букви), половината гръцка, части от готическата, използвани са щедро долни и горни индекси, двойни индекси и т.н. Добре ще е символите да се ограничат и да се групират смислово. Изборът на подходящи и възможно най-малко на брой означения значително подобрява изложението на всеки научен труд, да не говорим за удобството на бъдещия потребител на тази информация.

Забелязал съм няколко неясноти в текста на дисертацията. Посочвам ги с единствена цел, а именно: Ако авторът реши да преобразува дисертацията в монографичен труд (което действие аз горещо препоръчвам) тези забележки да са от полза.

Бележки върху дисертационния труд (предварително ще изясня, че символът n^k , които използвам в първата колона на следващата таблица, означава: страница с номер n и ред k отгоре, символът n_k е с подобен смисъл):

стр.	написано	коментар на рецензента
4 ²	върху на кривата	Неясен израз.
16 ₁	$p \subset [a, b]$	Струва ми се, че трябва да се напише $P \subset [a, b]$.
29 ¹⁰	D^α	Значително по-късно от появяването на този символ се обяснява неговия смисъл. Също така, символът не е включен в означенията в началото на дисертацията.
29	равенства (2.1) и (2.2)	Не се вижда къде са използвани константите τ_r и σ_l , които са посочени непосредствено след равенства (2.1) и (2.2). Вероятно се използват на друго място. Би трябвало да се въведат там, където се използват.
29	равенства (2.1) и (2.2)	Дисертацията няма да загуби, ако равенствата (2.1) и (2.2) се разпишат по-подробно - на ниво координати на векторни функции и елементи на матрици. Нещастният и отруден читател (към множеството на който се причислявам и аз) би се зарадвал и спечелил от тези подробности, тъй като няма да си „играе“ сам да разписва тези равенства. Освен това, той (читателят) ще вникне по-лесно в смисъла на изрази от вида: $\int_{-\tau}^0 [d_\theta V^l(\theta)] X(t+\theta).$
46	в равенство (2.33) се използва оператора D_{a+}^α	Защо константата a (или по-точно символа $a+$), която участва в оператора за диференциране като долна граница на интеграла на дробната производна, не е 0 (както това е направено в (2,1) и (2,2))?
46 ₁₂	$D_{a+}^{\alpha_k} (x^k(t) - \sum \int x_j(\dots))$	Както се вижда в представения запис, координатите на неизвестната функция X веднъж се записват с горни индекси, а малко след това (буквално на същия ред) - с долни индекси. Ама, че работа?!
		В параграф 2.1 индексите на координатите на търсената функция са долни, а в следващия

		<p>параграф 2.2 са горни. Макар, че както казах в предишната бележка, не е ясно къде е мястото на тези индекси, предполагам, че са горни, тъй като може би определящо обстоятелство за тяхното местоположение е записа $X_t = (x_t^1 \dots)$, където координатните индекси са горни. Така или иначе, читателят е свикнал да чете универсален текст. В този смисъл, мястото на индексите трябва да се унифицира в цялата дисертация.</p>
46 55	равенства (2.33) и (2.47)	<p>В посочените равенства и на много други места в дисертацията се използва означението $X_t(\theta) = X(t+\theta)$ или други подобни на това означение (по-точно означения със същия смисъл). Не виждам полза от символа $X_t(\theta)$. Не облекчава читателя. Не опростява символиката. Скрива смисъла. На много места авторът допълнително повтаря подоченото в този коментар равенство (това означава, че текстът се „натоварва“ допълнително). Извод (според мен): няма полза от символа, следователно трябва да се премахне.</p>
49 ₄	<p>условие 1 на Теорема 2.2.1. (цитирам): ... условията (C) са изпълнени в E^* и условията (S) също са изпълнени.</p>	<p>Не ми харесва тази „накачулена“ формулировка.</p>
49 ₂	<p>условие 2 на Теорема 2.2.1: ... е с най-много един скок в точката t_Φ ...</p>	<p>След като скокът е най-много един, то може да няма скокове. Тогава за какво се въвежда тази точка t_Φ? Искам да кажа, че текстът трябва да се прецизира. Точката t_Φ трябва да се появи, точно когато имаме хипотеза за задължително наличие на скок.</p>
49 ₁	S_Φ	<p>Доста време дирих из дисертацията кое е това множество S_Φ, но не го намерих. Вероятно става дума за множеството от точки на прекъсване за началната функция. Възможно е моята издирвателна дейност да не е качествена. Така или иначе е добре при използването на този символ да се каже какво се означава с него.</p>
53 ⁶	$[b_0 - h, b_0] \subset [a - h, b_0]$	<p>По-просто е да се каже, че $a \leq b_0$.</p>
53	Дефиниция 2.2.2:	<p>Използването на t_0 и b_0 (които са равни) води до</p>

	$t_0 = b_0$	объркване на читателя и допълнителното му обременяване с нови означения (които той трябва да помни). Също така, в тази дефиниция е добре да се каже: къде решението удовлетворява началното условие и къде удовлетворява системата (както това „добронамерено“ е направено в предходните подобни дефиниции).
53 ₃	подсказки	Без коментар.
63 ¹²	Множеството от точки, в които всяка начална векторна функция $\Phi \in C_a^*$ има скок, означаваме с S_Φ . Подчертаваме, че множеството $S_\Phi \cap K$ е крайно за всеки компактен интервал $K \subset R$.	Като се има предвид, че дефиниционното множество на началните функции е затворен интервал $[a-h, a]$ (т.е. компактно множество), то направеното указание, че „ $S_\Phi \cap K$ е крайно...“ е излишно и сложно. Достатъчно (и по-просто) е да се каже, че S_Φ е крайно множество.
64 ₁₀	В равенство (3.4) се използва символа $\Gamma^{-1}(\alpha_1)$	Тук символът е използван в смисъл на аритметична операция, т.е. $\Gamma^{-1}(\alpha_1) = 1/\Gamma(\alpha_1)$. Обикновено при функциите с f^{-1} означаваме обратната функция. С други думи двусмислието трябва да се отстрани: най-лесно - като се освободим от записа „ $(\cdot)^{-1}$ “.
64 ₄	началната задача (3.2) и (3.3) или началната задача (3.3) и (3.4)	И в двете посочени задачи (3.3) е началното условие. Прието е номерът на началното условие да се поставя на второ място (след номера на уравнението). С други думи, втората задача в представения текст бих написал така: (3.4), (3.3).
65	Забележка 3.1.2 ... но с малка модификация доказателството ще бъде коректно...	Забележката се нуждае от редакция. Действително, ако прочетем текста извън контекста, ще излезе, че доказателството не е вярно. Още нещо: „не е вярно“ е точният израз, който „депарфюмира“ израза „не е коректно“.
66	Лема 3.1.1.	Лемата притежава „мъглява“ формулировка и лош словоред. Много по-разбираемо е, ако твърденията в лемата се оформят като: 1...;2...
88 ¹	достатъчни условия достатъчни условия	Излишно повтаряне.

12. Лични впечатления

Не познавам лично Екатерина. Моите впечатления от нейната научна дейност ми дават основание да твърдя следното:

- Докторантът е с отлична научна подготовка по темата на дисертационния труд. Ще повторя, че темата изисква дълбоки познания в няколко математически дисциплини (реален математически анализ, функционален анализ, диференциални уравнения и др.);
- Екатерина е талантлив и трудолюбив млад математик. Това съчетание на качества според мен ще доведе в бъдеще до надстройване на получените от нея достижения, намиране на нови области на научни интереси и като резултат: достигане на следващи етапи в нейното професионално и кариерно развитие;
- Кандидатката за придобиване на образователната и научна степен „доктор“ е старателна и притежава висока „чистота на израза и записа“ на математическите резултати. Това обстоятелство води до точни формулировки и доказателства на новите математически факти – дейност с която (струва ми се) тя ще се занимава много години (дано не ѝ омръзне);
- Накрая да не забравя и нейното желание (и да го кажа по нашенски: „хъс“) за работа. Това се усеща от начина на изложение в дисертацията и разбира се е моторът за нейното израстване.

13. Препоръки за бъдещо използване на резултатите

Едва ли докторантът ще опре до моите препоръки. Почти съм сигурен, че по време на работата върху дисертацията в „научните планове“ на автора са възникнали множество въпроси и задачи, които биха могли да послужат за теми на по-нататъшни изследвания. Все пак, струва ми се, че като начало при изучаването на дробните диференциални уравнения би трябвало да се преформулират (ако е възможно и разумно) и разбира се докажат основните твърдения, които се отнасят и са валидни за „традиционните – с производни от цял ред“ диференциални уравнения. Това разбира се е „море“ от постановки и нерешени задачи. Част от тези задачи са решени, но засега липсва ясна класификация: кои от традиционните задачи се пренасят непосредствено върху дробните диференциални уравнения, кои изискват налагането на допълнителни изисквания и кои известни задачи за обикновените диференциални уравнения не могат да се решат при този нов клас уравнения. По-нататък би трябвало да се поставят и изследват специфични феномени, които се отнасят само за дробните уравнения. Това всъщност са „важните и печеливши“ изследвания. Точно в този тип изследвания трябва да се проведат и дълбоките анализи на този интересен клас уравнения.

Лично аз съм любопитен да разбера какъв ще е резултатът от изследване на устойчивостта на решенията на клас дробни нелинейни уравнения със закъснение относно големината на закъснението. Като начало е естествено да се изследват уравнения с постоянно закъснение в размер (например h), като закъснението не е задължително да е под знака на дробната производна. В разказан маниер, любопитната (за мен) задача звучи така: Нека смутеното дробно уравнение със постоянен закъсняващ аргумент да е формално същото като изходното (основното) уравнение, но със смутено закъснение в размер на $h + \Delta h$. Ако Δh е „малко число или

функция“ следва ли (и при какви условия), че съответните решения (при едно и също начално условие) на изходното и смутеното уравнения са „близки“.

Заключение

Дисертационният труд съдържа научни и научно-приложни резултати, които представляват оригинален принос в науката. Представените документи и изследвания отговарят на всички изисквания на Закона за развитие на академичния състав в Република България (ЗРАСРБ), Правилника за прилагане на ЗРАСРБ и съответния Правилник на ПУ „Паисий Хилендарски“. Освен това материалите и декларирания постижения на автора напълно съответстват на специфичните изисквания на Факултета по математика и информатика, приети във връзка с Правилника на ПУ за приложение на ЗРАСРБ.

На основание на казаното по-горе убедено давам своята **положителна оценка** за проведеното изследване, представено в рецензираните по-горе дисертационен труд, автореферат и научни публикации. Предлагам на почитаемото научно жури да присъди образователната и научна степен „доктор“ на Екатерина Борисова Мадамлиева (Лазарова) в област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика; професионално направление: 4.5. Математика; докторска програма: Диференциални уравнения.

01.06. 2021 г.

Рецензент:
(проф. дн Ангел Дишлиев)