

РЕЦЕНЗИЯ

от

**професор дн Васил Георгиев Ангелов,
катедра Математика и Информатика,
Минно-геоложки университет „Св.Иван Рилски“**

на дисертационен труд за присъждане на образователната и научна степен „доктор“
в област на висше образование 4.Природни науки., математика и информатика
професионално направление 4.5 Математика
докторска програма Диференциални уравнения

Автор: Екатерина Борисова Мадамлиева

Тема: Дробни диференциални уравнения със закъсняващ аргумент

Научен ръководител: професор д-р Андрей Иванов Захариев,

Катедра „Математически анализ“,

Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“

1. Общо описание на представените материали

Със заповед № Р33-1432 от 26.04.2021 г. на Ректора на Пловдивския университет „Паисий Хилендарски" (ПУ) съм определен за член на научното жури за осигуряване на процедура за защита на дисертационен труд на тема „Дробни диференциални уравнения със закъсняващ аргумент“ за придобиване на образователната и научна степен ‘доктор’ в област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5. Математика , докторска програма Диференциални уравнения.

Автор на дисертационния труд е Екатерина Борисова Мадамлиева – докторантка в редовна форма на обучение към катедра „Математически анализ“ с научен ръководител професор д-р Андрей Иванов Захариев, Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“.

Представеният от Екатерина Борисова Мадамлиева комплект материали на хартиен носител е в съответствие с Чл.36 (1) от Правилника за развитие на академичния състав на ПУ, включва следните документи:

- молба до Ректора на ПУ за разкриване на процедурата за защита на дисертационен труд;
- автобиография в европейски формат;
- протокол № 3 от 16.04.2021 г. (препис-извлечение) на КС, свързан с предварително обсъждане на дисертационния труд в катедра „Математически анализ“;
- дисертационен труд с декларация за оригиналност;
- автореферат;
- списък на научните публикации по темата на дисертацията;
- копия на научните публикации;
- декларация за оригиналност и достоверност на приложените документи;
- справка за спазване на специфичните изисквания на ФМИ при ПУ;
- удостоверение за идентичност на лице с различни имена изх. № 1400-40021/30.11.2018;
- служебна бележка Изх. № НПД 177/09.03.2021 за участие в научни проекти.

Докторантът е приложил 3 публикации.

2. Кратки биографични данни за докторанта

Представяне на докторанта с акцент върху биографични данни във връзка с процедурата.

Екатерина Б. Мадамлиева е родена е на 02.12.1993 г. Завършила е висше образование бакалавър „Приложна математика“ в ПУ „Паисий Хилендарски“ през 2016 г. След това завършва магистратура „Приложна математика“ през 2017 г. пак в ПУ „Паисий Хилендарски“. И двете степени на висше образование е завършила с пълно отличие. Представени са грамоти и награди от студентски олимпиади и придобита квалификация за „учител по математика“. От септември 2018 г. до момента е учител в гимназиален етап в СУ „Св. Паисий Хилендарски“, гр. Пловдив и освен това води часове, като хоноруван асистент в ПУ „Паисий Хилендарски“.

През април 2021 г. е назначена като млад учен/изследовател към ПУ „Паисий Хилендарски“.

Със заповед на Ректора на ПУ „Паисий Хилендарски“ № Р33 – 461/ 01.02.2018 г.

Екатерина Мадамлиева е зачислена като редовен докторант в област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5. Математика, докторска програма Диференциални уравнения към катедра „Математически анализ“ на Фа-

култет по математика и информатика (ФМИ) при Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“ със срок на обучение 3 години, считано от 01.03.2018 г. до 01.03.2021 г. За научни ръководители са определени проф. д-р Михаил Михайлов Константинов и проф. д-р Андрей Иванов Захариев и тема на дисертационния труд „Дробни диференциални уравнения със закъсняващ аргумент“. По-късно със заповед на Ректора № Р33 – 610/ 05.02.2019 г. проф д-р Михаил Константинов е освободен от научно ръководство, поради служебна заетост.

3. Актуалност на тематиката и целесъобразност на поставените цели и задачи

Дробното смятане предоставя полезни инструменти при анализа и решаването на диференциални и интегрални уравнения, както и на различни други проблеми, включващи специалните функции на математическата физика и техните разширения и обобщения за една и повече променливи.

Много физични процеси и явления, имащи памет и генетични характеристики могат да бъдат описани чрез използване на системи дробни диференциални уравнения. Съществен макар и елементарен пример е логистичното уравнение, което е един от най-важните и полезни модели в екологията. Класическото логистично уравнение приема, че растежът на популацията по всяко време t зависи от относителния брой индивиди по това време. На практика обаче, се оказва, че текущият прираст на популацията трябва да бъде повлиян и от миналата история на вида. Ясно е, че размерът на популацията по-рано може да повлияе на текущата наличност на ресурсите. Например, ако размерът на дадена популация е бил голям през миналата година, ресурсът може да бъде унищожен и възстановяването му може да отнеме дълго време. В такъв случай, текущата наличност на ресурса намалява, което води до намаляване растежа на популацията. По този начин се въвеждат разпределени закъснения, с помощта на които се описва настоящия ефект от миналата история на вида.

В дисертационния труд са изследвани два типа линейни системи дробни диференциални уравнения с разпределени закъснения- от неутрален тип и от закъсняващ тип.

Съществуването на фундаментална матрица, с подходящи свойства е основен инструмент за получаването на интегрално представяне на решението на различни видове системи диференциални уравнения. С помощта на получените интегрални представяния се изследва въпроса за устойчивост.

Резултатите, получени в дисертационния труд са **актуални**, което може лесно да се потвърди с публикационната активност по темата в научни списания (напр. математическото списание „Fractional Calculus and Applied Analysis“, което е посветено на актуалните резултати

в областта на дробното смятане и неговите приложения е сред първите 10 в световната ранглиста на списанията с импакт фактор (Impact Factor: 3.170)).

4. Познаване на проблема

Считам, че докторантът е добре запознат със съвременното състояние и историческото развитие на разгледаните научни проблеми.

Основание за направеното твърдение са следните факти:

- Направеният от автора изчерпателен исторически обзор в увода на дисертационния труд;
- Богато на съдържание въведение в темата на дисертацията. Представени са основни дефиниции и резултати от функционалния анализ и дробните диференциални уравнения със закъсняващ аргумент;
- В литературата, която включва 85 заглавия, участват основни резултати на водещи автори в престижни научни списания.

5. Методика на изследването

Авторът използва традиционните методи на реалния и функционалния анализ и методите на функционално-диференциалните уравнения от целочислен ред. С помощта на създадения вече математически апарат и аналогичните резултати за диференциални уравнения от целочислен ред са създадени конкретни доказателства при изследването на свойствата на фундаменталната матрица за разгледаните дробни системи и изследването на асимптотичните свойства на решенията на линейни дробни системи при нелинейни пертурбации.

6. Характеристика и оценка на дисертационния труд

Настоящата дисертация е посветена на изследването на системи дробни диференциални уравнения със закъсняващ аргумент. Дробните производни са в смисъл на Капуто. Решават се следните задачи: получаване на интегрална формула за представяне на решенията на задачата на Коши за линейни автономни неутрални системи с разпределени закъснения, в случая на частично непрекъснатата начална функция и за неавтономни системи от закъсняващ тип, в случая на начална функция с ограничена вариация; изследване въпросът за съществуване и единственост на решението на задачата на Коши за линейни неавтономни системи от закъсняващ или неутрален тип с разпределени закъснения; намиране на достатъчни условия за запазване на глобална асимптотична устойчивост на нулевото решение на задачата на Коши за нелинейно пертурбирани линейни автономни неутрални; намиране на достатъчни условия относно абсолютната непрекъснатост на фундаменталната матрица на линейна неавтономна

хомогенна система с разпределени закъснения. Решаваните в дисертацията задачи са ясно формулирани в шест точки.

Уводът на дисертационния труд съдържа изчерпателен исторически обзор, с акцент върху актуалността на темата и обзор на дисертационния труд, в който е дадена структурата на дисертационния труд и накратко е посочено съдържанието на отделните глави и параграфи.

В Глава 1 е направен обзор на използваните в дисертацията означения, както и необходимите за изложението резултати от функционалния анализ, дробното смятане и системите линейни дробни диференциални уравнения със закъсняващ аргумент. Приведени са всички използвани в дисертационния труд означения, изложени са необходимите дефиниции и теореми от функционалния анализ и са представени основни определения от дробното смятане, като дефиниции за дробен интеграл на Риман-Лиувил, дробни производни на Риман-Лиувил и Капуто, както и необходимата част от техните основни свойства. В последния параграф са представени някои основни резултати за дробни диференциални уравнения със закъсняващ аргумент и системи с разпределени закъснения и/или обобщени в дисертационния труд.

Основните приноси в дисертацията се съдържат в Глави 2 и 3, поради което ще се спрем по-подробно на получените там резултати.

Глава 2 се състои от два раздела: 2.1 и 2.2.

В раздел 2.1 е разгледана задачата на Коши за линейни автономни системи от неутрален тип, с производни от тип на Капуто и разпределени закъснения. В подраздел 2.1.1 е разгледана линейната автономна система от неутрален тип с разпределено закъснение

$$D^\alpha(X(t) - \sum_{l=1}^r \int_{-\tau}^0 [d_\theta V^l(\theta)] X(t+\theta)) = \sum_{i=0}^m \int_{-\sigma}^0 [d_\theta U^i(\theta)] X(t+\theta) + F(t),$$

където производната е от типа на Капуто, а редовете на диференциране са от несъизмерим дробен ред. За ядрата са изпълнени условията (SA), които се използват при доказателството на теоремата за съществуване и единственост, целта на условията е коментирана в Забележка 2.1.1. Добре известно е, че проблемът за съществуването на фундаментална матрица, за линейна хомогенна система с дробни производни (със закъснение или неутрална) води до установяване, че съответната начална задача с частично непрекъснатата начална функция има единствено решение. Във връзка с фундаменталната матрица на системата, въведена в подраздел 2.1.2, теорема 2.1.1 играе съществена роля при доказване на основния резултат. Като следствие от получените интегрални представяния на решението на хомогенната и частно решение на нехомогенната система, по-конкретно получени в теорема

2.1.2 и 2.1.3, в подраздел 2.1.3 е получена интегрална формула за представяне на решението на задачата на Коши, като сума от двете интегрални представяния, за произволна, частично непрекъснатата начална функция за разглежданата нехомогенна система. Техниката на доказателството се основава на трансформацията на Лаплас.

В раздел 2.2 са разгледани нелинейно пертурбирани линейни автономни системи от неутрален тип с разпределени закъснения. В подраздел 2.2.1 е разглеждана нелинейната система от неутрален тип, с дробни производни от несъизмерим порядък и разпределени закъснения

$$D_{a+}^{\alpha}(X(t) - \int_{-h}^0 [dV(t, \theta)]X(t, \theta)) = F(t, X_t)$$

В подраздел 2.2.2 са въведени условията C за векторния функционал F и условията S , аналогични на условията SA за ядрата. С помощта на теоремата на Банах за свиващите изображения, с подходящо въведена метрика в него в подраздел 2.2.3 е доказана теорема 2.2.3 за съществуване и единственост на решението на разглежданата система. Това е безспорен принос в дисертацията.

В подраздел 2.2.4 е изучена устойчивостта на нелинейната автономна система от неутрален тип, с разпределени закъснения

$$D_{a+}^{\alpha}(X(t) - \sum_{l=1}^r \int_{-h}^0 [d_{\theta} V^l(\theta)]X(t+\theta)) = \sum_{i=0}^m \int_{-h}^0 [d_{\theta} U^i(\theta)]X(t+\theta) + W(t, X_t),$$

Доказано е, че ако нулевото решение на линейната част на разглежданата нелинейната система е глобално асимптотично устойчиво, то тогава нулевото решение на пертурбираната система, също е глобално асимптотично устойчиво. Резултатите, получени в този параграф, са базирани на получената в предходния параграф формула за интегрално представяне на общото решение на задачата на Коши за линейна автономна неутрална система с разпределено закъснение, при експоненциално ограничена дясна част. Това е аналог на класическия резултат – ако нулевото решение на хомогенната част на системата е глобално асимптотично устойчиво, то нулевото решение на нехомогенната система също е глобално асимптотично устойчиво. Нелинейната пертурбация всъщност представлява нехомогенната част на разглежданата система.

В Глава 3 са разгледани линейни неавтономни системи от закъсняващ тип с дробни производни от тип на Капуто и разпределени закъснения. Тя се състои от два раздела. Първият се състои от три подраздела, а вторият - от два.

В раздел 3.1 е разгледана линейната хомогенна система с дробни производни от несъизмерим порядък и с разпределени закъснения

$$D_{a+}^{\alpha} X(t) = \int_{-h}^0 [d_{\theta} U(t, \theta)] X(t + \theta), t > a$$

и съответната нехомогенна система.

В подраздел 3.1.1 е формулирана задачата на Коши за тази система, с частично абсолютно непрекъснатата начална функция. За по-добро разбиране са въведени дефиниция 3.1.1 и 3.1.4, относно частична абсолютна непрекъснатост на функция и понятието регулярна функция, като също така е представено необходимо и достатъчно условие функцията да бъде регулярна - теорема 3.1.1. Представени са аналогични на условията SA и S от Глава 2 изисквания за ядрата при неавтономни системи.

В подраздел 3.1.2 следва въвеждането на подходящи метрики, относно които в лема 3.1.1 се установява пълнотата на въведеното пространство от частично абсолютно непрекъснати начални векторни функции. След това помощно твърдение се стига до теорема 3.1.3 и следствие 3.1.1, които гарантират единствено абсолютно непрекъснато решение на задачата на Коши за разгледаната хомогенна система.

В подраздел 3.1.3 на базата на резултатите в предходния подраздел, за съответната хомогенна система е доказано съществуване и единственост на фундаментална матрица $C(t, s)$, абсолютно непрекъснатата по t при $t \in [s, \infty)$, $s \in J_a$ и непрекъснатата по s при $s \in [a, \bar{t})$, за $\bar{t} \in J_a$. В случая, когато $s = \bar{t}$, фундаменталната матрица $C(t, s)$ има ограничен скок, т.е. има скок от първи род. Аналогични резултати са доказани и за модифицираната фундаментална матрица $T_s^*(t, s)$, $t \in J_a$, а $s^* \in [a - h, a]$.

В раздел 3.2 са дадени някои приложения на получените в дисертационния труд резултати. Използвайки доказаните свойства на фундаменталната матрица $C(t, s)$ и модифицираната фундаментална матрица $T_s^*(t, s)$, в подраздел 3.2.1 е получено интегрално представяне за конкретното решение на нехомогенната система, с нулеви начални условия, при локално ограничена $F \in L_{loc}^1(J_a, \mathbb{R}^n)$ и $D_{a+}^{\alpha} F \in L_{loc}^1(J_a, \mathbb{R}^n)$. В подраздел 3.2.2 е получено интегрално представяне на решението на задачата на Коши за хомогенната система, в случая на $\Phi(t) \in BV([a - h, a], \mathbb{R}^n)$, а в следствие 3.2.3 е получено интегрално представяне на решението на задачата на Коши за нехомогенната система в случая на $\Phi(t) \in BV([a - h, a], \mathbb{R}^n)$.

7. Приноси и значимост на разработката за науката и практиката

В основни линии приемам претенциите на докторантката за приносите в дисертацията, а именно:

1. Изведена е интегрална формула за представяне на решенията на задачата на Коши за линейни автономни неутрални системи, с производни от тип на Капуто и разпределени закъснения, в случая на частично непрекъсната начална функция.

2. Получени са достатъчни условия за съществуване и единственост на решението на задачата на Коши за нелинейно пертурбирани линейни неутрални системи с разпределени закъснения и производни от типа на Капуто, в случая на частично непрекъсната начална функция.

3. Получени са достатъчни условия за запазване на глобална асимптотична устойчивост на нулевото решение на задачата на Коши за нелинейно пертурбирани линейни автономни неутрални системи с производни от тип на Капуто и разпределени закъснения, в случая, когато нулевото решение на задачата на Коши за съответната линейна системата, без пертурбации, е глобално асимптотично устойчиво

4. Получени са достатъчни условия за съществуване и единственост на решението на задачата на Коши за линейни неавтономни системи дробни диференциални уравнения, с производни от тип на Капуто и разпределени закъснения.

5. Получени са достатъчни условия, гарантиращи съществуване на абсолютно непрекъсната фундаментална матрица на линейна неавтономна хомогенна система, с производни от тип на Капуто и разпределени закъснения.

6. Изведена е интегрална формула за представяне на решенията на линейни неавтономни системи дробни диференциални уравнения, с производни от тип на Капуто и разпределени закъснения, в случая на начална функция с ограничена вариация.

8. Преценка на публикациите по дисертационния труд

Статиите на докторантката, свързани с дисертацията, са 3 броя. Две статии са публикувани в международно списание с висок импакт фактор и една статия е публикувана в списание с импакт ранг.

Част от резултатите са докладвани на лятната конференция в Созопол "Application of Mathematics in Engineering and Economics". Докторантката е участвала в два научни проекта на университетско ниво.

9. Лично участие на докторанта(ката)

Оценка на рецензента за личното участие на докторанта(ката) в проведеното дисертационно изследване, и в каква степен формулираните приноси и получени резултати, са негова лична заслуга.

Авторството на докторантката в представените трудове е неоспоримо, тъй като те са написани в един и същи начин на изложение. Приносът в съавторските публикации е оценен и не оставя място за съмнения.

10. Автореферат

Авторефератът съдържа 32 страници и отразява правилно получените резултати, като са подчертани основните приноси. Всички твърдения са формулирани без доказателства.

11. Критични забележки и препоръки

Не съм забелязал съществени пропуски и непоправими грешки, а на по-дребните- няма да се спирам.

12. Лични впечатления

Личните ми впечатления, макар и отскоро, са много добри. Е.Мадамлиева ми отговори на някои въпроси навреме.

13. Препоръки за бъдещо използване на дисертационните приноси и резултати

Препоръчвам на Е.Мадамлиева да продължава да се занимава като не е задължително да се ограничава с настоящата тематика.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дисертационният труд **съдържа нови научни резултати, които отговарят на всички** изисквания на Закона за развитие на академичния състав в Република България (ЗРАСРБ), Правилника за прилагане на ЗРАСРБ и съответния Правилник на ПУ „Паисий Хилендарски“. Представените материали и дисертационни резултати напълно съответстват на специфичните изисквания на Факултета по математика и информатика, приети във връзка с Правилника на ПУ за приложение на ЗРАСРБ.

Дисертационният труд показва, че докторантката Екатерина Борисова Мадамлиева притежава задълбочени теоретични знания и професионални умения по научна специалност

Диференциални уравнения като демонстрира качества и умения за самостоятелно провеждане на научно изследване.

Поради гореизложеното, убедено давам своята положителна оценка за проведеното изследване, представено от рецензираните по-горе дисертационен труд, автореферат, постигнати резултати и приноси, и **предлагам на почитаемото научно жури да присъди образователната и научна степен „доктор“** на Екатерина Борисова Мадамлиева в област на висше образование: 4.Природни науки., математика и информатика, професионално направление 4.5 Математика, докторска програма Диференциални уравнения.

20.05.2020 г.

Рецензент:

/проф. дн Васил Ангелов/