ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ
“ПАИСИЙ ХИЛЕНДАРСКИ”
ФАКУЛТЕТ ПО “МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА”
КАТЕДРА “МАТЕМАТИЧЕСКИ АНАЛИЗ”

ЕКАТЕРИНА БОРИСОВА МАДАМЛИЕВА

Дробни диференциални уравнения със закъсняващ аргумент

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертационен труд
за присъждане на образователната и научна степен “доктор”
в област на висше образование
4. Природни науки, математика и информатика,
професионално направление 4.5 Математика,
докторска програма Диференциални уравнения

Научен ръководител: проф. д-р Андрей Захариев

Рецензенти:

Пловдив, 2021 г.

Съдържание

Дисертационният труд "Дробни диференциални уравнения със закъсняващ аргумент" е написан на 102 страници, от които 10 страници използвана литература. Библиографията включва 85 заглавия. Списъкът на авторските публикации се състои от 3 заглавия.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на г. от часа в заседателната зала на новата сграда на ПУ "Паисий Хилендарски" пред научно жури в състав:

1.
2.
3.
4.
5.

Материалите по защитата са на разположение на интересуващите се в секретариата на ФМИ, нова сграда на ПУ, каб. 330 всеки работен ден от 10 : 30 до 16 : 00 часа.

Дисертацията се състои от увод, три глави, заключение, апробация на резултатите, публикации по дисертационния труд и използвана литература.

Увод

0.1 Исторически обзор на дробното смятане

Дробното смятане е обобщение на класическото инфинитезимално смятане с повече от 300 годишна история. Като предмет на дробното смятане, най–общо казано, можем да определим пресмятането на интеграли и производни от произволен реален или комплексен ред (порядък). Дробното смятане (ДС) е придобило значителна популярност и значение през последните три десетилетия, най–вече благодарение на демонстрираните му приложения в много разнообразни и широко разпространени области на науката и инженерството. ДС предоставя много полезни инструменти при анализа и решаването на диференциални и интегрални уравнения, както и на различни други проблеми, включващи специалните функции на математическата физика и техните разширения и обобщения за една и повече променливи [7].

Повечето автори по тази тема биха посочили като рожден ден на ДС датата на писмото от 30 септември 1695 г., в което Лопитал пише до Лайбниц с въпрос относно конкретно означение, което той е използвал в своите публикации за n–та производна на линейна функция $f(x) = x$, $\frac{D^n x}{Dx^n}$. Лопитал поставя въпроса, какъв би бил резултатът ако $n = \frac{1}{2}$. Отговорът на Лайбниц: „Това е явен парадокс.“, но добавя пророчески: „Парадокс, от който един ден ще бъдат извлечени полезни последствия.“ След тези думи се ражда ДС.

Този въпрос впоследствие привлича интереса на много известни математици, включително Ойлер, Лаплас, Лагранж, Фурие, Абел, Лиувил, Грунвалд, Летников, Сонин, Риман, Лоран, Некрасов, Хевисайд, Вейл, Олдъм и Спайнер, Милър и Рос, и редица други не толкова популярни.

Интересно е да се отбележи, че още през 1823 г. може да бъде открито и първото практическо приложение на ДС, в което Абел разглежда решението на интегрално уравнение, свързано с проблема за таутохрона – това е кривата, за която времето за движение, употребено от обект, плъзгащ се по нея без триене, при равномерна гравитация, до най–ниската ѝ точка, е независимо от избора на началната точка върху на кривата. Кривата е циклоидна, а времето е равно на π, умножено по квадратния корен от радиуса (на окръжността, която генерира циклоидната) спрямо ускорението на гравитацията. Абел доказва, че решението може да бъде постигнато чрез интегрална трансформация, която може да бъде записана като полупроизводна (semi–derivative), т.е. производна с ред $n = \frac{1}{2}$.

Решението на Абел привлякло вниманието на Лиувил, който прави първото голямо изследване на ДС през 1832 г. Използвайки добре познатия резултат за производни от целочислен ред n, Лиувил успява да приложи резултатите си към проблеми в потенциалната теория.

През 1822 г. Фурие получава интегрални представяния за функция $f(x)$ и нейната производна от ред α, където α е произволно реално число. След това, през 1858 г, Гриър извежда формули за дробни производни на тригонометрични функции.

Вероятно най–полезният напредък в развитието на ДС се дължи на статия, написана от Риман през студентските му години. За съжаление, статията е публикувана посмъртно през 1892 г. В опит да обобщи ред на Тейлър през 1853 г., Риман извежда различна дефиниция, която включва определен интеграл, приложен към развитие в редове с нецели експоненти. Всъщност, полученият израз е най–широко използваният в съвременното ДС за дефиниция на дробния интеграл. Поради неяснота в долната граница на интегриране, Риман добавя към дефиницията си „допълваща“ функция. Тъй като нито Риман, нито Лиувил са решили проблема за допълващата функция, тя е от исторически интерес, поради въпросът как е изведена днешната дефиниция на Риман–Лиувил.

Изглежда, най–ранната работа, която в крайна сметка довежда до това, което сега се нарича дефиниция на Риман–Лиувил, се намира в доклада на Сонин през 1869 г., където той използва интегралната формула на Коши като отправна точка за диференциране от произволен ред.

Летников разширява идеята на Сонин малко по-късно през 1872 г. И двамата се опитват да дефинират производни от произволен ред, като използват затворен контур, обаче директното разширение до нецели стойности води до проблем, че при интегриране се съдържа точка на разклонение. И накрая, Лоран използва контур, даден като отворен кръг (известен като контур на Лоран) вместо затворен контур, който използват Сонин и Летников и по този начин се получава днешната дефиниция на дробния интеграл на Риман–Лиувил.

Хевисайд въвежда т.нар. операторно смятане, което обогатява ДС с явни решения за решаване на някои проблеми от електромагнитната теория, което е важна следваща стъпка в прилагането на дробни производни.

Към втората половина на XX век, изследванията в областта на ДС са нараснали до такава степен, че през 1974 г. е проведена първата конференция, в Ню Хейвън – „The First Conference on Fractional Calculus and its Applications“, която е посветена само на ДС и неговите приложения. През същата година е публикувана една от първите фундаментални монографии по ДС на Олдъм и Спайнер, последвана след това от монографиите на МъкБрайд, Милър и Рос, Кирякова, Подлубни, Килбас и др. През 1998 г. е отпечатан първият брой на математическото списание „Fractional Calculus & Applied Analysis“, посветено на актуалните резултати в областа на ДС и неговите приложения. През 2004 г. в Бордо се провежда първата конференция „Fractional Differentiation and its Applications“, която се превръща в периодична и се организира вече всяка втора година, считано от 2004 г. За по–детайлна информация, относно историческия преглед по темата насочваме читателя към [14].

В заключение ще отбележим монографиите на Килбас и др. [7], Подлубни [17] и Дитхелм [3], чийто автори освен, че имат съществен принос за развитието на ДС и дробните диференциални уравнения, са написали и книги, които перфектно преставят ДС и неговите приложения.

От изследванията на български математици по тази тематика, на първо място, ще отбележим фундаменталната монография на Кирякова [8], посветена на ДС, специалните функции и техните приложения. Внимание заслужава и монографията на Стамова и Стамов [18], посветена на импулсните диференциални и функционално диференциални уравнения с дробни производни и техните приложения. Следва да отбележим и резултатите на Захариев и Кискинов [9, 21, 22, 23], свързани с изследването дробни системи с разпределени закъснения от закъсняващ и неутралени тип с производни от типа на Риман–Лиувил и Капуто.

0.2 Обзор на дисертационния труд

Целта на настоящата работа е изследването на системи линейни дробни диференциални уравнения с производни от тип на Капуто и разпределени закъснения. Ще отбележим, че изследваните системи са от закъсняващ или неутрален тип, с рационално несъизмерими редове (порядъци) на диференциране. Основната цел на представения дисертационен труд е получаването на достатъчни условия, които гарантират глобалната асимптотична устойчивост на нулевото решение на задачата на Коши, за системите с нелинейна пертурбация, ако нулевото решение на задачата на Коши за съответната линейна система, без пертурбации, е глобално асимптотично устойчиво.

За постигане на формулираната по–горе основна цел, се налага да се решат следните основни задачи.

А. Получаване на интегрална формула за представяне на решенията на задачата на Коши за линейни автономни неутрални системи, с производни от тип на Капуто и разпределени закъснения, в случая на частично непрекъсната начална функция.

Б. Намиране на достатъчни условия за съществуване и единственост на решението на задачата на Коши за нелинейно пертурбирани линейни неутрални системи с разпределени закъснения и производни от типа на Капуто, в случая на частично непрекъсната начална функция.

В. Намиране на достатъчни условия за запазване на глобална асимптотична устойчивост на нулевото решение на задачата на Коши за нелинейно пертурбирани линейни автономни неутрални системи с производни от тип на Капуто и разпределени закъснения, в случая, когато нулевото решение на задачата на Коши за съответната линейна системата, без пертурбации, е глобално асимптотично устойчиво.

Г. Намиране на достатъчни условия за съществуване и единственост на решението на задачата на Коши за линейни неавтономни системи дробни диференциални уравнения, с производни от тип на Капуто и разпределени закъснения.

Д. Намиране на достатъчни условия, гарантиращи съществуване на абсолютно непрекъсната фундаментална матрица на линейна неавтономна хомогенна система, с производни от тип на Капуто и разпределени закъснения.

Е. Получаване на интегрална формула за представяне на решенията на линейни неавтономни системи дробни диференциални уравнения, с производни от тип на Капуто и разпределени закъснения, в случая на начална функция с ограничена вариация.

В Глава 1 се съдържат четири параграфа, в които е направен обзор на използваните в дисертацията означения, както и необходимите за изложението по–долу резултати от функционалния анализ, дробното смятане и системите линейни дробни диференциални уравнения със закъсняващ аргумент. В § 1.1 са приведени всички използвани в дисертационния труд означения, а § 1.2 съдържа някои елементи от функционалния анализ. В него са изложени необходимите дефиниции и теореми от функционалния анализ, касаещи понятията мярка, функция с ограничена вариация, декомпозиция на Лебег и интеграл на Лебег–Стилтес, теорема на Фубини, теореми за неподвижни точки и др. В § 1.3 са изложени необходимите за изложението по–долу определения за дробен интеграл на Риман–Лиувил, дробни производни на Риман–Лиувил и Капуто, както и необходимата част от техните основни свойства. Освен това са представени използваните по–долу специални функции, като Ойлерова гама и бета функции, едно–параметричната функция на Митаг–Лефлер, както и основни факти, относно трансформация на Лаплас. В § 1.4 са представени някои основни резултати за дробни диференциални уравнения със закъсняващ аргумент и системи с разпределени закъснения, необходими за изследванията на по–късен етап.

Глава 2 е посветена на изследването на линейните системи от неутрален тип, с производни от тип на Капуто и разпределени закъснения, и се състои от два параграфа. В § 2.1 е изследвана задачата на Коши за линейни автономни системи от неутрален тип, с производни от тип на Капуто и разпределени закъснения. Получена е интегрална формула за представяне на решението на задачата на Коши за произволна, частично непрекъсната начална функция, както в хомогенния, така и нехомогенния случай, при експоненциално ограничена дясна част. В § 2.2 е изучена устойчивостта на нелинейно пертурбирани линейни автономни системи от неутрален тип с разпределени закъснения. Получени са достатъчни условия, които гарантират, че ако нулевото решение на линейната част на разглежданата нелинейната система е глобално асимптотично устойчиво, то тогава нулевото решение на пертурбираната система, също е глобално асимптотично устойчиво. Резултатите, получени в този параграф, са базирани на получената в предходния параграф формула за интегрално представяне на общото решение на задачата на Коши за линейна автономна неутрална система с разпределено закъснение.

Глава 3 съдържа два параграфа и е посветена на изследването на линейните неавтономни системи от закъсняващ тип, с производни от тип на Капуто и разпределени закъснения. В § 3.1 е формулирана задачата на Коши за тези системи, с частично абсолютно непрекъсната начална функция. Получени са достатъчни условия, които гарантират съществуване и единственост на решението на формулираната в точка 3.1.1 задача на Коши. В точка 3.1.2 на базата на резултатите в предходната точка, за съответната хомогенна система е доказано съществуване и единственост на фундаментална матрица $C(t,s)$, абсолютно непрекъсната по t при $t \in [s,\infty)$, $s \in J_a$ и непрекъсната по s при $s \in [a,\bar{t})$, за $\bar{t} \in J_a$. В случая, когато $s = \bar{t}$, фундаменталната матрица $C(t,s)$ има ограничен скок, т.е. има скок от първи род. Аналогични резултати са доказани и за модифицираната фундаментална матрица $T_{s^*}(t,s)$, $t \in J_a$, а $s^* \in [a-h,a]$. В § 3.2 са дадени някои приложения на получените в дисертационния труд резултати. Използвайки доказаните свойства на фундаменталната матрица $C(t,s)$ и модифицираната фундаментална матрица $T_{s^*}(t,s)$, са получени интегрално представяне за конкретното решение на нехомогенната система, с нулеви начални условия, при локално ограничена $F \in L^1_{loc}(J_a,\mathbb{R}^n)$ и $D^{\alpha}_{a+}F \in L^1_{loc}(J_a,\mathbb{R}^n)$. Получено е също така и интегрално представяне на решението на задачата на Коши за хомогенната система, в случая на $\Phi(t) \in BV([a-h,a],\mathbb{R}^n)$, а като следствие от двете представяния и интегрално представяне на решението на задачата на Коши за нехомогенната система в случая на $\Phi(t) \in BV([a-h,a],\mathbb{R}^n)$. Едно сравнение с аналогичните резултати за производни от цял ред показва, че получените резултати съвпадат с тях при $\alpha = 1$, което означава, че те са естествено обобщение на класическите. Ще отбележим, че доколкото ни е известно, няма други статии, в които да се изследвани свойствата на фундаменталната матрица $C(t,s)$, относно променливата s, за линейните неавтономни системи от закъсняващ тип, с производни от тип на Капуто.

Глава 1

Въведение в дробните диференциални уравнения

1.1 Основни означения

В изложението по–долу ще използваме следните означения
$\mathbb{N}$ е множеството от естествените числа;
$\mathbb{R}$ е множеството на реалните числа, $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty)$;
$\mathbb{C}$ е множеството на комплексните числа, $\mathbb{C}_+ = \{p \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}\ p > 0\}$,
$\overline{\mathbb{C}}_+ = \{p \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}\ p \geq 0\}$, $\mathbb{C}_- = \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{C}}_+$;
$\mathbb{R}^n$ – реалното n–мерно векторно пространство;
$\mathbb{R}^{n\times n}$ – пространството от реални $n \times n$ матрици A с елементи a_{kj}, $k, j = 1, 2, \ldots, n$;
$A^\top$ – транспонираната матрица на матрицата $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$;
I и Θ – единичната и нулевата матрица, съответно в $\mathbb{R}^{n\times n}$;
$Sp(A)$ – спектъра на матрицата $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$;
$S(A) := \sup\{\mathrm{Re}\ \lambda | \lambda \in Sp(A)\}$ – спектралната граница на $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$;
$L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ – линейното пространство от всички локално интегруеми
по Лебег функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
$D_{a+}^{-\alpha}$ – левият дробен интеграл на Риман–Лиувил, с долен терминал a, $a \in \mathbb{R}$;
${}_{RL}D_{a+}^{\alpha}$ – лявата дробна производна в смисъл на Риман–Лиувил, с долен терминал a, $a \in \mathbb{R}$;
$D_{a+}^{\alpha} = {}_{C}D_{a+}^{\alpha}$ – лявата дробна производна в смисъл на Капуто, с долен терминал a, $a \in \mathbb{R}$;
$\mathfrak{L}f(p)$ – трансформацията на Лаплас на функцията $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $p \in \mathbb{C}$ и f е експоненциално ограничена;
$C(X, Y)$ – множеството на всички непрекъснати изображения
$f : X \to Y$, $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$, $n, m \in \mathbb{N}$;
$AC(X, Y)$ – множеството на всички абсолютно непрекъснати
изображения $f : X \to Y$, $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$, $n, m \in \mathbb{N}$;
$PC(X, Y)$ – множеството от всички частично непрекъснати
изображения $f : X \to Y$, $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$, $n, m \in \mathbb{N}$;
$PAC(X, Y)$ – множеството на всички частично абсолютно непрекъснати
изображения $f : X \to Y$, $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$, $n, m \in \mathbb{N}$;
S_Φ – множеството от всички скокове от първи род на векторната функция $\Phi \in PC(X, Y)$;
$J_a = [a, \infty)$, $a \in \mathbb{R}$, $J_{s,M} = [s, s + M]$;
$\langle m, n\rangle$ – множеството от натурални числа $\{m, m + 1, \ldots, n\}$, $m \leq n$, $m, n \in \mathbb{N}$,
$\langle n\rangle = \{1, 2, \ldots, n\}$, $\langle n\rangle_0 = \langle n\rangle \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$;
$\xi = [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]$ – n–вектор ред;
$x = [x_1; x_2; \ldots; x_n]$ – n–вектор колона;
$BV([a, b], \mathbb{R}^{n\times n})$ – линейното пространство от матричните функции $W(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ с ограничена вариация върху интервала $[a, b]$, където $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$;
$I_\beta(Y(t)) = \mathrm{diag}\left((y_1(t))^{\beta_1}, (y_2(t))^{\beta_2}, \ldots, (y_n(t))^{\beta_n}\right)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, $\beta_k \in [-1, 1]$,

1.2 Елементи от функционалния анализ

В настоящия параграф ще представим някои необходими за изложението по–долу дефиниции и теореми от функционалния анализ.

Нека X е произволно множество, а $\mathfrak{J}$ е множество с елементи подмножества на X.

Дефиниция 1.2.1. *[6] Изображението $\mu : \mathfrak{J} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ наричаме мярка, ако са изпълнени релациите:*

(a) $\mu(\emptyset) = 0$;

(b) $\mu : \mathfrak{J} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *е изброимо адитивна, т.е. ако* $\{S_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{J}$ *е произволна редица, такава че* $S_k \cap S_j = \emptyset,\ k \neq j,\ k,j \in \langle n\rangle$, *то* $\mu(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} S_k) = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mu(S_k)$.

Тройката $(X, \mathfrak{J}, \mu)$ наричаме пространство с мярка. В частност, ако $\mathfrak{J} = \boldsymbol{B}(X)$, то мярката се нарича борелева.

Нека $[a,b] \subset \mathbb{R},\ a \leq b$ е произволен интервал и да означим с $\Pi([a,b])$ множеството от всички крайни редици $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\},\ m \in \mathbb{N},\ p \subset [a,b]$, за които е изпълнено $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{m-1} < t_m = b$ и които наричаме разбивания на интервала $[a,b] \subset \mathbb{R},\ a \leq b$.

Дефиниция 1.2.2. *[1] За всяко разбиване $P \in \Pi([a,b])$ и функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, неотрицателното реално число $\mathrm{Var}_{P\in\Pi([a,b])}(f,P) = \sum\limits_{j=1}^{m} |f(t_j) - f(t_{(j-1)})|$ се нарича вариация (или вариация на Жордан) на f в интервала $[a,b]$, относно P. Тоталната вариация на f в интервала $[a,b]$, се дефинира като $\mathrm{Var}_{[a,b]}f(\cdot) = \sup\limits_{P\in\Pi([a,b])}\{\mathrm{Var}_{P\subset[a,b]}(f,P)\}$. Ако за някоя функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е изпълнено, че $\mathrm{Var}_{[a,b]}f(\cdot) < \infty$, то казваме, че f е функция с ограничена вариация (или функция с ограничена Жорданова вариация) в $[a,b]$ и означаваме с $f \in BV([a,b],\mathbb{R})$.*

Дефиниция 1.2.3. *[1] Функцията $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ наричаме абсолютно непрекъсната в интервала $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ($f \in AC([a,b],\mathbb{R})$), ако за всяко $\epsilon > 0$, съществува $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, такова че за всяка крайна редица от интервали $[\alpha_1,\beta_1],[\alpha_2,\beta_2],\ldots,[\alpha_m,\beta_m],\ m \in \mathbb{N},\ \bigcup\limits_{k\in\langle m\rangle}[\alpha_k,\beta_k] \subset [a,b]$, за които $[\alpha_k,\beta_k] \cap [\alpha_j,\beta_j] = \emptyset,\ k \neq j,\ \sum\limits_{k\in\langle m\rangle}(\beta_k - \alpha_k) < \delta$ е изпълнено неравенството $\sum\limits_{k\in\langle m\rangle}|f(\beta_k) - f(\alpha_k)| < \epsilon$.*

Теорема 1.2.1. *[1] (Теорема на Фубини) Нека $p + q = n$ и функцията $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ е интегруема в $\mathbb{R}^n$, $f(z) = f(x,y)$ ($x \in \mathbb{R}^p,\ y \in \mathbb{R}^q,\ z \in \mathbb{R}^n$).*

Тогава функцията $f(x,.) : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ е интегруема в $\mathbb{R}^q$ за почти всяко $x \in \mathbb{R}^p$ и функцията $f(.,y) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ е интегруема в $\mathbb{R}^p$ за почти всяко $y \in \mathbb{R}^q$. Освен това е изпълнено равенството

$$\int_{\mathbb{R}^p}\Big\{\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\mathrm{d}y\Big\}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\mathrm{d}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^q}\Big\{\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\mathrm{d}x\Big\}\mathrm{d}y \tag{1.1}$$

1.3 Дробно смятане – основни дефиниции и свойства

Нека $\alpha \in (0,1)$ е произволно число. Тогава за $a \in \mathbb{R}$, всяко $t > a$ и $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ левият дробен интегрален оператор и лявата дробна производна от ред α на Риман–Лиувил и Капуто са дефинирани съответно с [7]:

$$(D_{a+}^{-\alpha}f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^t (t-s)^{\alpha-1}f(s)\mathrm{d}s, \quad t > a,$$

$${}_{RL}D_{a+}^{\alpha}f(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(D_{a+}^{-(1-\alpha)}f(t))\ ;{}_C\, D_{a+}^{\alpha}f(t) ={}_{RL}\, D_{a+}^{\alpha}[f(s)-f(a)](t);$$

$${}_C D_{a+}^{\alpha}f(t) ={}_{RL}\, D_{a+}^{\alpha}f(t) - \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha},$$

където $t > a$.

Връзката между дробните производни на Риман–Лиувил и Капуто се описва по следния начин [7]:

$${}_C D_{a+}^{\alpha}f(t) ={}_{RL}\, D_{a+}^{\alpha}f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(t-a)^{k-a}$$

Ще бъдат използвани следните релации [17], съдържащи дробни производни

a) $(D_{a+}^{0}f)(t) = f(t)$;

b) ${}_C D_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{-\alpha}f(t) = f(t)$;

c) $D_{a+}^{-\alpha}\ {}_C D_{a+}^{\alpha}f(t) = f(t) - f(a)$.

Ако $f \in AC^{n-1}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, тогава следващата формула дава директна дефиниция на лявата производна на Капуто[7]:

$${}_C D_{a+}^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int\limits_a^t \frac{f^{(n)}(s)\mathrm{d}s}{(t-s)^{\alpha-n+1}}.$$

Във връзка с трансформацията на Лаплас $\mathfrak{L}$,

$$\mathfrak{L}f(p) = \int_0^{\infty}\exp(-pt)f(t)\mathrm{d}t,\ p \in \mathbb{C},$$

ще използваме следните равенства

(i) $(\mathfrak{L}D_{0+}^{-\alpha}f)(p) = p^{-\alpha}(\mathfrak{L}f)(p)$;

(ii) $(\mathfrak{L}\ {}_{RL}D_{0+}^{\alpha}f)(p) = \int\limits_0^{\infty}\exp(-pt)_{RL}D_{0+}^{\alpha}f(t)\mathrm{d}t$

$= p^{\alpha}(\mathfrak{L}f)(p) - \left[{}_{RL}D^{\alpha-1}f(t)\right]_{t=0}$;

(iii) $(\mathfrak{L}\ {}_C D_{0+}^{\alpha}f)(p) = \int\limits_0^{\infty}\exp(-pt)_C D_{0+}^{\alpha}f(t)\mathrm{d}t = p^{\alpha}(\mathfrak{L}f)(p) - p^{\alpha-1}f(0)$.

1.4 Дробни диференциални уравнения със закъсняващ аргумент

При по–прецизен анализ лесно се установява, че принципът на причинно–следствената връзка, който стои в основата на моделирането на реалните процеси с диференциални уравнения (с целочислени или дробни производни) често е само първо приближение към истинската ситуация. Емпиричният опит показва че по–реалистичният модел ще включва (ще зависи) и от някои от миналите състояния на системата. Също така при изследването някои проблеми обикновено е безсмислено да се строят модели, без отчитане на влиянието на миналото на процеса, независимо че наличието на дробни производни с тяхната нелокална природа частично би могла да подобри модела. Отличителна черта на разглежданите функционално–диференциални уравнения (с целочислени или дробни производни) е, че скоростта на развитие на процесите, описани от такива уравнения, зависи от миналата история.

Най–простият тип минала зависимост в едно дробно функционално–диференциално уравнение е този, при който зависимост от историята на процеса са отразява в уравнението, като то съдържа неизвестната функция при различни стойности на независимата променлива, интерпретирана като време. Най–простият случай на уравнение със закъсняващ аргумент е линейно дробно диференциално уравнение с постоянно закъснение [11]

$$D^{\alpha}_{a+}x(t) = bx(t) + cx(t-\tau),$$

където $\tau > 0$ е константа, $a, b, c \in \mathbb{R},\ \alpha \in (0,1)$, а D^{α}_{a+} означава дробна производна от типа на Капуто или Риман–Лиувил от ред α, с долен терминал $a \in \mathbb{R}$.

По–общ вариант на горното уравнение са нелинейните уравнения с променливи (съсредоточени) закъснения

$$D^{\alpha}_{a+}x(t) = f\left(t, x(t), x(t-\tau(t))\right)$$

Дробни диференциални уравнения, които съдържат най–високата производна при различни стойности на независимата променлива от вида

$$D^{\alpha}_{a+}x(t) = f\left(t, x(t), x(t-\tau(t)), D^{\alpha}_{a+}x(t-\tau(t))\right)$$

се наричат неутрални уравнения, включително и в случая, когато закъснението е постоянно.

Предвид факта, че изследванията в дисертационния труд са свързани с дробни диференциални системи с разпределени закъснения, в настоящия параграф са приведени основните определения и резултати използвани в следващите глави от дисертационния труд. От гледна точка на приложенията, постановките на задачата на Коши са дадени за случая на ограничено закъснение, като ще отбележим, че голяма част от получените резултати непосредствено се обобщават и за случая с неограничени закъснения. В дисертационния труд са представени примери, които илюстрират, че системите с дробни производни и с променливи съсредоточени закъснения, както и редица класове до интегро–диференциални системи с дробни производни са частен случай на системите с дробни производни и с разпределените закъснения.

Глава 2

Линейни системи от неутрален тип с дробни производни от тип на Капуто и разпределени закъснения

2.1 Линейни автономни системи от неутрален тип с разпределени закъснения

2.1.1 Постановка на задачата на Коши

Разглеждаме линейната автономна система от неутрален тип, с разпределено закъснение

$$D^{\alpha}\Big(X(t)-\sum_{l=1}^{r}\int\limits_{-\tau}^{0}\Big[\mathrm{d}_{\theta}V^{l}(\theta)\Big]\,X(t+\theta)\Big)=\sum_{i=0}^{m}\int\limits_{-\sigma}^{0}\left[\mathrm{d}_{\theta}U^{i}(\theta)\right]X(t+\theta)+F(t), \tag{2.1}$$

както и съответната хомогенна система

$$D^{\alpha}\Big(X(t)-\sum_{l=1}^{r}\int\limits_{-\tau}^{0}\Big[\mathrm{d}_{\theta}V^{l}(\theta)\Big]\,X(t+\theta)\Big)=\sum_{i=0}^{m}\int\limits_{-\sigma}^{0}\left[\mathrm{d}_{\theta}U^{i}(\theta)\right]X(t+\theta), \tag{2.2}$$

където

$$X,F:J_0\to\mathbb{R}^n,\ U^i,V^l:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{n\times n},\ U^i(\theta)=\left[u^i_{kj}(\theta)\right],\ V^l(\theta)=\left[v^l_{kj}(\theta)\right],$$
$$\tau,\sigma>0,\ \tau_r\in(0,\tau],\ l\in\langle 1,\ r\rangle,\ \sigma_i\in(0,\sigma],\ i\in\langle 1,m\rangle,\ h=\max(\sigma,\tau),$$
$$\sigma_0=0,\ \alpha=[\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n],\ \alpha_k\in(0,1),\ k\in\langle 1,n\rangle,\ J_s=[s,\infty).$$

За простота, с D^{α_k} ще означаваме лява дробна производна в смисъл на Капуто ${}_{C}D^{\alpha_k}_{0+}$. Ще използваме също означенията

$$D^{\alpha}X(t)=[D^{\alpha_1}x_1(t);D^{\alpha_2}x_2(t);\ldots;D^{\alpha_n}x_n(t)],\ D^{\alpha}=\mathrm{diag}(D^{\alpha_1},D^{\alpha_2},\ldots,D^{\alpha_n}),$$
$$X(t)=[x_1(t);x_2(t);\ldots;x_n(t)],\ F(t)=[f_1(t);f_2(t);\ldots;f_n(t)].$$

Означаваме с $BV[-h,0]$ линейното пространство от матрични функции $W:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{n\times n}$, $W(\theta)=[\omega_{kj}(\theta)]_{k,j\in\langle n\rangle}$ с ограничена вариация в интервала $[-h,0]$,

$$\mathrm{Var}_{[-h,0]}W(.)=\sum_{k,j=1}^{n}\mathrm{Var}_{[-h,0]}w_{kj}(.),\ |W(\theta)|=\sum_{k,j=1}^{n}|w_{kj}(\theta)|.$$

Дефиниция 2.1.1. *За произволно число $h>0$, векторната функция*

$$\Phi=[\phi_1;\phi_2;\ldots;\phi_n]:[-h,0]\to\mathbb{R}^n$$

се нарича частично непрекъсната в интервала $[-h,0]$ ($\Phi\in PC([-h,0],\mathbb{R}^n)$), ако интервалът $[-h,0]$ може да бъде разделен на краен брой подинтервали, в които функцията е непрекъсната във всеки отворен подинтервал и има крайна граница в крайните точки на всеки подинтервал.

Банаховото пространство $\widetilde{C}=PC([-h,0],\mathbb{R}^n)$ ще бъде използвано, като пространство от начални, частично непрекъснати векторни функции $\Phi=[\phi_1;\phi_2;\ldots;\phi_n]:[-h,0]\to\mathbb{R}^n$ в интервала $[-h, 0]$ с норма

$$\|\Phi\| = \sum_{k=1}^{n} \sup_{s\in[-h,0]} |\phi_k(s)| < \infty. \tag{2.3}$$

Началното условие за система (2.1) или (2.2) е

$$X(t) = \Phi(t),\ t \in [-h, 0]. \tag{2.4}$$

2.1.2 Фундаментална матрица

Дефиниция 2.1.2. *Векторната функция X е решение на началната задача* (2.1), (2.4) *в интервала J_{-h}, ако $X|_{J_0} \in C(J_0, \mathbb{R}^n)$ и ако удовлетворява система* (2.1) *за $t \in \mathbb{R}_+$ и началното условие* (2.4) *за $t \in [-h, 0]$.*

Ще казваме, че за ядрата $U^i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ и $V^l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ са изпълнени условията (SA), ако за всяко $i \in \langle 0, m\rangle$ и $l \in \langle 1, r\rangle$ са изпълнени следните условия

(SA1) Матричните функции $\theta \mapsto U^i(\theta)$ и $\theta \mapsto V^l(\theta)$ са измерими за $\theta \in \mathbb{R}$ и нормализирани, така че

$$U^i(\theta) = 0 \text{ и } V^l(\theta) = 0,\ \theta \geq 0,\ U^i(\theta) = U^i(-\sigma_i),\ \theta \leq -\sigma_i \text{ и } V^l(\theta) = V^l(-\tau_l),\ \theta \leq -\tau_l.$$

(SA2) Ядрата $U^i(\theta)$ и $V^l(\theta)$ са непрекъснати отляво по $\theta \in (-\sigma, 0)$ и $\theta \in (-\tau, 0]$, като $U^i(\cdot),\ V^l(\cdot) \in BV[-h, 0]$.

(SA3) Лебеговата декомпозиция на ядрата $U^i(\theta)$ и $V^l(\theta)$ за $\theta \in [-h, 0]$ е

$$U^i(\theta) = \aleph^i(\theta) + \int_{-h}^{\theta} B^i(s)\mathrm{d}s + \Upsilon^i(\theta),\ V^l(\theta) = \widetilde{\aleph}^l(\theta) + \int_{-h}^{\theta} \widetilde{B}^l(s)\mathrm{d}s + \widetilde{\Upsilon}^l(\theta),$$

където

$$\begin{aligned}
&A^i = \left[a^i_{kj}\right]_{k,j\in\langle n\rangle},\ \widetilde{A}^l = \left[\widetilde{a}^l_{kj}\right]_{k,j\in\langle n\rangle} \in \mathbb{R}^{n\times n}\\
&\aleph^i(\theta) = \left[a^i_{kj} H(\theta + \sigma_i)\right]_{k,j\in\langle n\rangle},\ \widetilde{\aleph}^l(\theta) = \left[\widetilde{a}^l_{kj} H(\theta + \tau_l)\right]_{k,j\in\langle n\rangle},\\
&\Upsilon^i(\theta) = \left[g^i_{kj}(\theta)\right]_{k,j\in\langle n\rangle},\ \widetilde{\Upsilon}^l(\theta) = \left[\widetilde{g}^l_{kj}(\theta)\right]_{k,j\in\langle n\rangle} \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n}),\\
&B^i(\theta) = \left[b^i_{kj}(\theta)\right]_{k,j\in\langle n\rangle},\ \widetilde{B}^l(\theta) = \left[\widetilde{b}^l_{kj}(\theta)\right]_{k,j\in\langle n\rangle} \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n}).
\end{aligned}$$

Нека $s \geq 0$ е произволно число, $J_s = [s, \infty)$ и разгледаме матричната начална задача

$$D^\alpha \left(Q(t, s) - \sum_{l=1}^{r} \int_{-\tau}^{0} \left[\mathrm{d}_\theta V^l(\theta)\right] Q(t + \theta, s) \right) = \sum_{i=0}^{m} \int_{-\sigma}^{0} \left[\mathrm{d}_\theta U^i(\theta)\right] Q(t + \theta, s) \tag{2.5}$$

с начално условие

$$Q(t, t) = I;\ Q(t, s) = 0,\ t < s. \tag{2.6}$$

Дефиниция 2.1.3. *За всяко $s \geq 0$ матричната функция $t \mapsto Q(t, s) = [\gamma_{kj}(t, s)]_{k,j\in\langle n\rangle}$, $Q(\cdot, s) : J_s \to \mathbb{R}^{n\times n}$, се нарича решение на началната задача* (2.5), (2.6) *за $t \in J_s$, ако $Q(\cdot, s)$ е непрекъсната по t от J_s и удовлетворява матричното уравнение* (2.5) *за $t \in (s, \infty)$ с начално условие* (2.6).

В случай, че $s = 0$, матрицата $Q(t) = Q(t, 0)$ ще бъде наречена фундаментална матрица (или матрица на Коши) на система (2.2).

Следвайки [19], въвеждаме характеристичната матрица на система (2.2)

$$G(p) = I_\alpha(p) - W(p), \tag{2.7}$$

където

$$\begin{aligned} W(p) &= \sum_{i=0}^{m} U_i(p) + I_\alpha(p) \sum_{l=1}^{r} V_l(p), \ i \in \langle 0, m\rangle, \ l \in \langle 1, r\rangle, \\ U_i(p) &= \left[\int_{-h}^{0} \exp(p\theta) \mathrm{d}u_{kj}^{i}(\theta)\right]_{k,j\in\langle n\rangle}, \ V_l(p) = \left[\int_{-h}^{0} \exp(p\theta) \mathrm{d}v_{kj}^{l}(\theta)\right]_{k,j\in\langle n\rangle} \end{aligned}$$

Резултатите в тази секция са обобщение на резултатите за автономен случай, получени в [2, 5, 16].

Теорема 2.1.1. *Нека са изпълнени условията (SA).*

Тогава началната задача (2.5), (2.6) *има единствено решение* $Q(t,s)$ *в* J_s *за всяко* $s \geq 0$ *и фундаменталната матрица* $Q(t,0) = Q(t)$ *на уравнение* (2.2) *е*

$$Q(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left(I_{\alpha-1}(p) G^{-1}(p)\right)(t). \tag{2.8}$$

Въвеждаме следните функции

$$\begin{aligned} &\Phi_l(t) = \Phi(t), \ t \in [-\tau_l, 0], \quad \Phi_l(t) = 0, \ t \in \mathbb{R} \setminus [-\tau_l, 0], \quad l \in \langle 1, r\rangle, \\ &\Phi_i(t) = \Phi(t), \ t \in [-\sigma_i, 0], \quad \Phi_i(t) = 0, \ t \in \mathbb{R} \setminus [-\sigma_i, 0], \quad i \in \langle 1, m\rangle. \end{aligned}$$

Тогава, прилагайки трансформация на Лаплас – втора теорема за транслация (the Laplace transform second shifting theorem), получаваме

$$\begin{aligned} &\int_{\theta}^{0} \exp(-p(\eta - \theta)) \Phi_l(\eta) \mathrm{d}\eta = \exp(p\theta)(\mathfrak{L}\Phi_l(t))(p) \\ &\int_{\theta}^{0} \exp(-p(\eta - \theta)) \Phi_i(\eta) \mathrm{d}\eta = \mathfrak{L}\Phi_i(t+\theta)(p) = \exp(p\theta)\mathfrak{L}\Phi_i(t)(p). \end{aligned} \tag{2.9}$$

2.1.3 Интегрално представяне на решението на задачата на Коши

С помощта на горните равенства, сме готови да докажем следната теорема

Теорема 2.1.2. *Нека са изпълнени условията (SA). Тогава за всяко* $\Phi \in \widetilde{C}$ *началната задача* (2.2), (2.4) *има единствено решение* $X_\Phi(t)$ *с интегрално представяне*

$$\begin{aligned} X_\Phi(t) &= Q(t)\left(\Phi(0) - \sum_{l=1}^{r} \int_{-h}^{0} \left[\mathrm{d}_\theta V^l(\theta)\right] \Phi_l(\theta)\right) + \sum_{l=1}^{r} \int_{-h}^{0} \left[\mathrm{d}_\theta V^l(\theta)\right] \Phi_l(t+\theta) \\ &+ \sum_{l=1}^{r} \int_{-h}^{0} \left[\mathrm{d}_\theta V^l(\theta)\right] D^{\frac{1}{2}} Q(t) * D^{\frac{1}{2}} \Phi_l(t+\theta) + \sum_{i=0}^{m} \int_{-h}^{0} [\mathrm{d}_\theta U^i(\theta)] D^{1-\alpha} Q(t) * \Phi_i(t+\theta) \\ &+ \sum_{i=0}^{m} \int_{-h}^{0} [\mathrm{d}_\theta U^i(\theta)] D^{-\alpha} \Phi_i(t+\theta). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Теорема 2.1.3. *Нека са изпълнени следните условия:*

1. *Изпълнени са условията (SA).*

2. *Функцията $F \in L_1^{\mathrm{loc}}(\bar{\mathbb{R}}_+, \mathbb{R}^n)$ е експоненциално ограничена.*

Тогава решението $X^F(t)$ на началната задача (2.1), (2.4), *с начална функция* $\Phi(t) \equiv 0,\ t \in [-h, 0]$ *има следното представяне:*

$$X^F(t) = \int\limits_0^t D^{1-\alpha} Q(t-s) F(s) \mathrm{d}s + D^{-\alpha} F(t), \tag{2.11}$$

където $Q(t)$ е фундаментална матрица на система (2.2).

Следствие 2.1.1. *Нека са изпълнени условията на теорема 2.1.3.*

Тогава за всяка начална функция $\Phi \in \widetilde{C}$, съответното единствено решение $X_\Phi^F(t)$ на началната задача (2.1), (2.4) *има интегрално представяне*

$$\begin{aligned}
X_\phi^F(t) &= \int\limits_0^t D^{1-\alpha} Q(t-s) F(s) \mathrm{d}s + D^{-\alpha} F(t) + Q(t) \left(\Phi(0) - \sum_{l=1}^r \int\limits_{-h}^0 \left[\mathrm{d}_\theta V^l(\theta) \right] \Phi(\theta) \right) \\
&+ \sum_{l=1}^r \int\limits_{-h}^0 \left[\mathrm{d}_\theta V^l(\theta) \right] \Phi(t+\theta) + \sum_{l=1}^r \int\limits_{-h}^0 \left[\mathrm{d}_\theta V^l(\theta) \right] D^{\frac{1}{2}} Q(t) * D^{\frac{1}{2}} \Phi_l(t+\theta) \\
&+ \sum_{i=0}^m \int\limits_{-h}^0 \left[\mathrm{d}_\theta U^i(\theta) \right] D^{1-\alpha} Q(t) * \Phi_i(t+\theta) + \sum_{i=0}^m \int\limits_{-h}^0 \left[\mathrm{d}_\theta U^i(\theta) \right] D^{-\alpha} \Phi_i(t+\theta),
\end{aligned}$$

където $Q(t)$ е фундаментална матрица на система (2.2).

2.1.4 Приложения

Пример 2.1.1. *Разглеждаме следната нехомогенна система за $t > 0$*

$$\begin{aligned}
&D_{0_+}^{0.5} x_1(t) = x_1(t-1) + 1 \\
&D_{0_+}^{0.5} (x_2(t) + x_1(t-1) + x_2(t-1)) = x_2(t) + x_2(t-1) + x_1(t-2)
\end{aligned} \tag{2.12}$$

с начални условия

$$\Phi(t) = [0; 2], t \in [-2, 0] \quad \text{т.е.} \quad x_1(t) = 0,\, x_2(t) = 2 \quad \text{за} \quad t \in [-2, 0]. \tag{2.13}$$

Прилагайки метода стъпка по стъпка, решението на началната задача (2.12), (2.13), *съгласно следствие 2.1.1 е*

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= x_1^\Phi(t) + x_1^F(t) \\
&= \frac{1}{\Gamma(0.5)} \int\limits_0^t (\int\limits_0^{t-s} (t-s-\eta)^{-0.5} (\mathbf{E}_1^{t^{0.5}})'(\eta) \mathrm{d}\eta) \mathrm{d}s + \frac{\sqrt{t}}{\Gamma(1.5)}, \\
x_2(t) &= x_2^\Phi(t) + x_2^F(t) \\
&= 2 + 2 \int\limits_0^t (\int\limits_0^s (s-\eta)^{-0.5} (\sum_{k=1}^\infty (-1)^{k-1} \mathbf{E}_1^{t^{0.5}} (\eta - (k-1)) H(k-\eta))' \mathrm{d}\eta) \mathrm{d}s \\
&+ \frac{2\sqrt{t}}{\Gamma(1.5)}.
\end{aligned}$$

2.2 Нелинейно пертурбирани линейни автономни системи от неутрален тип с разпределени закъснения

Нека с $\mathbf{C}^* = PC([-h,0],\mathbb{R}^n)$ да означим банаховото пространство от всички непрекъснати отдясно векторни функции $\Phi = [\phi_1; \phi_2; \ldots; \phi_n] : [-h,0] \to \mathbb{R}^n$ в интервала $[-h,0]$ с норма

$$\|\Phi\| = \sum_{k=1}^{n} \sup_{s\in[-h,0]} |\phi_k(s)| < \infty \tag{2.14}$$

и $\mathbf{C} = C([-h,0],\mathbb{R}^n)$ е подпространството от всички непрекъснати функции, т.е. $\mathbf{C} \subset \mathbf{C}^*$. И накрая, нека $\mathbf{E}^* = J_a \times \mathbf{C}^*$.

2.2.1 Постановка на задачата на Коши

Разглеждаме нелинейната система от неутрален тип, с дробни производни от несъизмерим порядък и разпределени закъснения

$$D_{a+}^{\alpha}\left(X(t) - \int_{-h}^{0}[dV(t,\theta)]X(t,\theta)\right) = F(t,X_t) \tag{2.15}$$

или описана в по–детайлна форма,

$$D_{a+}^{\alpha_k}\left(x^k(t) - \sum_{j=1}^{n}\int_{-h}^{0} x_j(t+\theta)dv_{kj}(t,\theta)\right) = f_k(t,x_t^1,x_t^2,\ldots,x_t^n), \quad k \in \langle n \rangle,$$

където $X : J_a \to \mathbb{R}^n,\ a \in \mathbb{R},\ F : \mathbf{E}^* \to \mathbb{R}^n$, а $D_{a+}^{\alpha_k} = {}_C D_{a+}^{\alpha_k}$ е лява дробна производна на Капуто, $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$, $\alpha_k \in (0,1)$, $k \in \langle n \rangle$, $D_{a+}^{\alpha} = \operatorname{diag}\left(D_{a+}^{\alpha_1}, D_{a+}^{\alpha_2}, \ldots, D_{a+}^{\alpha_n}\right)$, $D_{a+}^{\alpha}X(t) = \left[D_{a+}^{\alpha_1}x^1(t); D_{a+}^{\alpha_2}x^2(t); \ldots; D_{a+}^{\alpha_n}x^n(t)\right]$, $X_t(\theta) = [x_t^1(\theta); x_t^2(\theta); \ldots, x_t^n(\theta)]$; $x_t^k(\theta) := x^k(t+\theta)$ за $t \in J_a,\ -h \le \theta \le 0$ и $h > 0$ е произволна константа.

Разглеждаме следното начално условие

$$X_a = \Phi, \qquad \Phi \in \mathbf{C}^*, \tag{2.16}$$

т.е. за всяко $k \in \langle n \rangle$ имаме, че

$$x_a^k(\theta) = x^k(a+\theta) = \phi^k(\theta) \ \text{ за } \ -h \le \theta \le 0.$$

Отбелязваме, че от тук нататък ще предполагаме, че началната функция Φ е дефинирана в каноничен интервал $[-h,0]$, вместо в интервала $[a-h,a]$ (виж [12]). По този начин решението $t \to X(t)$ се разглежда като продължение на началната функция $t \to \Phi(t-a),\ a-h \le t \le a$.

Разглеждаме следната помощна матрица за $k \in \langle n \rangle$

$$X(t) = C_\Phi + \int_{-h}^{0}[dV(t,\theta)]X(t+\theta) + I_{-1}(\Gamma(\alpha))\int_a^t I_{\alpha-1}(t-s)F(s,X_s)\mathrm{d}s, \tag{2.17}$$

или описана в по–детайлна форма

$$x_k(t) = c_\Phi^k + \sum_{j=1}^{n}\int_{-h}^{0} x_j(t+\theta)\mathrm{d}v_{kj}(t,\theta) + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)}\int_a^t (t-s)^{\alpha_k-1}f_k(s,x_s^1,x_s^2,\ldots,x_s^n)\mathrm{d}s,$$

където $C_\Phi = \Phi(a) - \int_{-h}^{0}[dV(a,\theta)]\Phi(a+\theta)$, $c_\Phi^k = \phi_k(a) - \sum_{j=1}^{n}\int_{-h}^{0}\phi_j(a+\theta)\mathrm{d}v_{kj}(a,\theta)$, т.е. $C_\Phi = [c_\Phi^1; c_\Phi^2; \ldots; c_\Phi^n]$, $\Gamma(\alpha) = [\Gamma(\alpha_1); \Gamma(\alpha_2); \ldots; \Gamma(\alpha_n)]$.

2.2.2 Дефиниции и помощни резултати

Дефиниция 2.2.1. *Функцията* $X(t) = [x_1(t); x_2(t); \dots ; x_n(t)] \in C(J_{a,M}, \mathbb{R}^n)$, $X(t) \in C(J_a, \mathbb{R}^n)$, $M \in \mathbb{R}_+$, *е решение на началната задача* (2.15), (2.16) *или* (2.17), (2.16) *в* $J_{a,M}$ *(респ. в* (J_a)*), ако удовлетворява системата* (2.15) *или* (2.17) *за всяко* $t \in (a, M)$ $(t \in (a, \infty))$ *и началното условие* (2.16).

Ще казваме, че за векторния функционал $F : \mathbf{E}^* \to \mathbb{R}^n$ са изпълнени условията **(C)**, ако са изпълнени следните условия.

(C1) За почти всяко фиксирано $t \in J_a$, функцията $(t, \Psi) \to F(t, \Psi)$ е непрекъсната по произволна $\Psi \in \mathbf{C}^*$ и за всяка фиксирана функция $\Psi \in \mathbf{C}^*$ функцията $(t, \Psi) \to F(t, \Psi)$ е измерима по Лебег и локално ограничена за $t \in J_a$.

(C2) (Локално условие на Липшиц) За всяко $(t, \Psi) \in \mathbf{E}^*$ и за някое от околността $O(t, \Psi) \subset \mathbf{E}^*$ съществува локално ограничена, измерима по Лебег функция $\ell \in L_1^{\text{loc}}(J_a, \mathbb{R}_+)$, такава че са изпълнени неравенствата

$$|F(t, \Psi_*)| \le \ell(t), \qquad |F(t, \Psi_1) - F(t, \Psi_2)| \le \ell(t)\|\Psi_1 - \Psi_2\|, \tag{2.18}$$

за всяко $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_* \in O(t, \Psi)$ и $t \in J_M(J_a)$.

Ще казваме, че за ядрото $W : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n \times n}$, условията **(S)** са изпълнени, ако са изпълнени следните условия.

(S1) Функцията $(t, \theta) \to W(t, \theta)$ е измерима по $(t, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ и нормализирана, така че $W(t, \theta) = 0$ за $\theta \ge 0$ и $W(t, \theta) = W(t, -h)$ за $\theta \le -h$.

(S2) $W(t, \cdot) \in BV[-h, 0]$ и за всяко $t \in J_a$ ядрото $W(t, \theta)$ е непрекъснато отляво по $\theta \in (-h, 0)$.

(S3) Съществува функция $z \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$, такава че $\text{Var}_{[-h,0]} W(t, \cdot) \le z(t)$.

(S4) За всяко $t \in J_a$ са изпълнени следните релации

$$\int_{-h}^{0} |W(t, \theta) - W(t_*, \theta)| \mathrm{d}\theta \to 0, \; t_* \to t.$$

(S5) Функцията $W(t, \theta)$ е равномерно неатомична в нулата, т.е. за всяко $\varepsilon > 0$, съществува $\delta(\varepsilon) > 0$, такова че

$$\text{Var}_{[-h,0]} W(t, \cdot) = \sum_{k,j=1}^{n} \text{Var}_{[-\delta,0]} w_k^j(t, \cdot) < \varepsilon.$$

(S6) За $(t, \theta) \in J_a \times [-h, 0]$ и някое $m \in \mathbb{N}$, Лебеговата декомпозиция на ядрото $W(t, \theta)$ не притежава сингулярна част и има вида

$$W(t, \theta) = \sum_{l=1}^{m} H(\theta + \tau_l(t)) A^l(t) + \int_{-h}^{0} B(t, s) \mathrm{d}s,$$

където $H(t)$ е функцията на Хевисайд, $A^l(t) = \left[a_{kj}^l(t)\right]_{k,j \in \langle n \rangle} \in C(J_a, \mathbb{R}^{n \times n})$, $\tau_l(t) \in C(J_a, \overline{\mathbb{R}}_+)$, $\tau_l(t) \le t, \; \tau_l(a) > 0, \sup_{t \in J_a}(t - \tau_l(t)) \le h$, $l \in \langle m \rangle$; матричната функция $B(t, s) = \left[b_k^j(t, s)\right]_{k,j \in \langle n \rangle}$ е измерима по Лебег и локално ограничена в $J_a \times [-h, 0]$, и $t \to \int_{-h}^{0} B(t, \theta) \mathrm{d}\theta \in L_1^{\text{loc}}(J_a, \mathbb{R}^{n \times n})$.

Както следва, ще предполагаме, че ядрото $V(t, \theta) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n \times n}$ удовлетворява условията **(S)**.

Лема 2.2.1. *Нека са изпълнени условията* **(S)** *и условието* **(C1)** *в* $\mathbf{E}^*$.

Тогава всяко решение $X(t)$ *на началната задача* (2.15), (2.16) *е решение на началната задача* (2.17), (2.16) *и обратно.*

2.2.3 Съществуване и единственост на решението на задачата на Коши

Теорема 2.2.1. *Нека са изпълнени следните условия.*

1. *За векторния функционал* $F : \mathbf{E}^* \to \mathbb{R}^n$, *условията* **(C)** *са изпълнени в* $\mathbf{E}^*$ *и условията* **(S)** *също са изпълнени.*
2. *Началната функция* $\Phi \in \mathbf{C}^*$ *е с най–много един скок в точката*

   $t_\Phi \in [a-h, a]$ *и непрекъсната отдясно в* S_Φ.
3. *Множествата* $S^*_\Phi = \{t \in J_a | t - \tau_l(t) \in S_\Phi,\ l \in \langle r \rangle\}$ *нямат точки на сгъстяване.*
4. *Съществува константа* $\overline{b} > a$, *такава че* $B(t, \theta) = \Theta$ *за* $t \in [a, \overline{b}]$.

Тогава съществува $b^0 > a$, *такова че началната задача* (2.17), (2.16) *има единствено решение в интервала* $t \in [a, b^0]$.

Както в [22] в следващата теорема ще изучим важен случай на началната задача, където десния край на началния интервал не съвпада с долния терминал на дробните производни. Нека $X^{b_0}(t)$ е единствено решение на началната задача (2.17), (2.16), което съществува, според теорема 2.2.1, в интервала $[a, b_0]$. Въвеждаме ново начално условие за система (2.17), с начална точка $t_0 = b_0$ и начален интервал $[b_0 - h, b_0] \subset [a - h, b_0]$ използвани като начална функция за решението $X^{b_0}(t)$ както следва

$$X_{t_0}(\theta) = X(t_0 + \theta) = X^{b_0}(t_0 + \theta),\ \theta \in [-h, 0]. \qquad (2.19)$$

Дефиниция 2.2.2. *Функцията*

$$X(t) = [x_1(t); x_2(t); \ldots; x_n(t)] \in C([t_0, b_1], \mathbb{R}^n),$$

респ. $X(t) \in C(J_{t_0}, \mathbb{R}^n)$, $b_1 > t_0 = b_0 > a$, *е решение на началната задача* (2.15), (2.19) *или на начална задача* (2.17), (2.19) *в* $[t_0, b_1]$ *(респ.* J_{t_0}*), ако удовлетворява системата* (2.17) *за всяко* $t \in (t_0, b_1]$ $(t \in (t_0, \infty))$ *и началното условие* (2.19).

Не е трудно да се установи, че най-сложният случай е когато $t_0 < a + h$ при $t_\Phi = a$, което обяснява защо само този случай е разгледан по–долу.

Теорема 2.2.2. *Нека са изпълнени следните условия.*

1. *Изпълнени са условията на теорема 2.2.1.*
2. *В сила са релациите* $t_\Phi = a$ *и* $t_0 = b_0 < a + h$.

Тогава съществува $b_1 > t_0$, *такова че началната задача* (2.17), (2.19) *има единствено непрекъснато решение в интервала* $[t_0, b_1]$.

Теорема 2.2.3. *Нека са изпълнени условията на теорема 2.2.2. Тогава началната задача* (2.17), (2.16) *има единствено решение в* J_a.

2.2.4 Асимптотична устойчивост

Разглеждаме нелинейната автономна система от неутрален тип, с разпределени закъснения

$$D^{\alpha}_{a+}\Big(X(t)-\sum_{l=1}^{r}\int\limits_{-h}^{0}\Big[\mathrm{d}_\theta V^l(\theta)\Big]\,X(t+\theta)\Big)=\sum_{i=0}^{m}\int\limits_{-h}^{0}\left[\mathrm{d}_\theta U^i(\theta)\right]X(t+\theta)+W(t,X_t), \tag{2.20}$$

и съответната хомогенна система

$$D^{\alpha}_{a+}\Big(X(t)-\sum_{l=1}^{r}\int\limits_{-h}^{0}\Big[\mathrm{d}_\theta V^l(\theta)\Big]\,X(t+\theta)\Big)=\sum_{i=0}^{m}\int\limits_{-h}^{0}\left[\mathrm{d}_\theta U^i(\theta)\right]X(t+\theta), \tag{2.21}$$

където $X(t)=[x^1(t);x^2(t);\ldots;x^n(t)]\in C(\overline{\mathbb{R}}_+,\mathbb{R}^n)$, $W:\mathbf{E}\to\mathbb{R}^n$, $\mathbf{E}=\overline{\mathbb{R}}_+\times\mathbf{C}$, $W=[w^1;w^2;\ldots;w^n]$, $w^k:\mathbf{E}\to\mathbb{R}$, $k\in\langle n\rangle$, $\tau_l\in(0,h]$, $l\in\langle r\rangle$, $\sigma_i\in[0,h]$, $i\in\langle m\rangle_0$.

Предполагаме, че ядрата $U^i(\theta)$ и $V^l(\theta)$ за $\theta\in[-h,0]$, $l\in\langle r\rangle$ и $i\in\langle m\rangle_0$ удовлетворяват условието (SA3), § 2.1.2.

За система (2.20) въвеждаме следните начални условия

$$X(t)=\Phi(t),\quad t\in[-h,0],\quad \Phi\in\mathbf{C}. \tag{2.22}$$

Навсякъде по–надолу ще предполагаме, че началната точка е $a=0$. Очевидно, система (2.20) е частен случай на система (2.15) за

$$F(t,X_t)=\sum_{i=0}^{m}\int\limits_{-h}^{0}\left[\mathrm{d}_\theta U^i(\theta)\right]X(t+\theta)+W(t,X_t),\ V(\theta)=\sum_{l=1}^{r}V^l(\theta). \tag{2.23}$$

Освен това, ако ядрата $U^i(\theta)$, $i\in\langle m\rangle_0$ и $V^l(\theta)$, $l\in\langle r\rangle$ удовлетворяват условията **(S1)** и **(S2)** то са изпълнени и условията **(S1)** – **(S5)** за тези ядра, също така е изпълнено и условието **(S6)**, но само за ядрото $V(\theta)$.

Нека $s\in\overline{\mathbb{R}}_+$ е произволно число, $J_s=[s,\infty)$ и разгледаме следната матрична начална задача

$$D^{\alpha}_{a+}\Big(Q(t,s)-\sum_{l=1}^{r}\int\limits_{-\tau}^{0}\Big[\mathrm{d}_\theta V^l(\theta)\Big]\,Q(t+\theta,s)\Big)=\sum_{i=0}^{m}\int\limits_{-\sigma}^{0}\left[\mathrm{d}_\theta U^i(\theta)\right]Q(t+\theta,s) \tag{2.24}$$

с начално условие

$$Q(t,s)=\begin{cases} I, & t=s\\ 0, & -\infty<t<s.\end{cases} \tag{2.25}$$

Дефиниция 2.2.3. *За всяко $s\in\overline{\mathbb{R}}_+$ матричната функция $t\to Q(t,s)=[\gamma_{kj}(t,s)]_{k,j\in\langle n\rangle}$, $Q(\cdot,s):J_s\to\mathbb{R}^{n\times n}$, се нарича решение на началната задача* (2.24), (2.25) *за $t\in J_s$ ако $Q(\cdot,s)$ е непрекъсната по t в J_s и удовлетворява матричното уравнение* (2.24) *за $t\in(s,\infty)$, както и началното условие* (2.25).

В случай, че $s=0$, матрицата $Q(t)=Q(t,0)$ ще бъде наречена фундаментална матрица (или матрица на Коши) за система (2.21). Ако са изпълнени условията **(S)**, то матричната начална задача (2.24), (2.25) има единствено решение (виж [21, 23]).

Теорема 2.2.4. *Нека са изпълнени следните условия.*

1. *За векторния функционал $W:\mathbf{E}\to\mathbb{R}^n$ в дясната част на системата с нелинейно смущение* (2.20) *са изпълнени условията* **(C)** *в* **E**.

2. *За ядрата* $U^i(\theta),\ i \in \langle m \rangle_0$, *и* $V^l(\theta),\ l \in \langle r \rangle$ *са изпълнени условията* **(S1)** *и* **(S2)**.

3. *Съществува константа* $\overline{\theta} < 0$, *такава че* $B(\theta) = \Theta$ *за* $\theta \in [\overline{\theta}, 0]$.

Тогава, за всяка фиксирана начална функция $\Phi \in \mathbf{C}$, *началната задача* (2.20), (2.22) *има единствено решение в* J_a.

Дефиниция 2.2.4. *Нулевото решение на система* (2.15) *се нарича:*

1. *равномерно устойчиво, ако за всяко* $\varepsilon > 0$ *съществува* $\delta(\varepsilon) > 0$, *такова че за всяка начална функция* $\Phi \in \mathbf{C}$, $\|\Phi\| < \delta(\varepsilon)$ *съответното решение* $X(t)$ *удовлетворява неравенството* $|X(t)| \le \varepsilon$, *за всяко* $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$;

2. *глобално асимптотично устойчиво (ГАУ), ако за всяка начална функция* $\Phi \in \mathbf{C}$, *за съответното решение* $X(t)$ *имаме* $\lim\limits_{t\to\infty} |X(t)| = 0$.

Дефиниция 2.2.5. *Ще казваме, че векторният функционал* $W : \mathbf{E} \to \mathbb{R}^n$ *е експоненциално ограничен в* $C(\overline{\mathbb{R}}_+, \mathbb{R}^n)$, *ако за всяко*

$$X(t) = [x^1(t); x^2(t); \ldots; x^n(t)] \in C(\overline{\mathbb{R}}_+, \mathbb{R}^n)$$

съществуват константи $C_X \in \mathbb{R}_+$ *и* $\gamma_X \in \mathbb{R}$ *(т.е. константите може да зависят от* X*), такива че функцията* $F(t) = W(t, X_t)$ *е поне частично непрекъсната и е изпълнена оценката*

$$|W(t, X_t)| \le C_X \exp(\gamma_X t),\ t \in \mathbb{R}_+$$

Теорема 2.2.5. *Нека са изпълнени следните условия.*

1. *За ядрата* $U^i(\theta),\ i \in \langle m \rangle_0$, *и* $V^l(\theta),\ l \in \langle r \rangle$, *са изпълнени условията* **(S1)** *и* **(S2)**.

2. *Нулевото решение на система* (2.21) *е глобално асимптотично устойчиво.*

Тогава за всяко $\beta \in (0,1)$ *имаме, че* $\lim_{t\to\infty} {}_C D^\beta Q(t) = \Theta$, *където* $Q(t)$ *е фундаментална матрица на система* (2.21).

Теорема 2.2.6. *Нека са изпълнени следните условие.*

1. *Изпълнени са условията на теорема 2.2.4.*

2. *Векторният функционал* $W : \mathbf{E} \to \mathbb{R}^n$ *е експоненциално ограничен по смисъла на дефиниция 2.2.5.*

3. *Нулевото решение на* (2.21) *е ГАУ.*

Тогава нулевото решение на началната задача (2.20), (2.22) *е ГАУ за всяко* $\Phi \in \mathbf{C}$.

Глава 3

Линейни неавтономни системи от закъсняващ тип с дробни производни от тип на Капуто и разпределени закъснения

3.1 Линейни неавтономни системи от закъсняващ тип с дробни производни от тип на Капуто и разпределени закъснения

3.1.1 Постановка на задачата на Коши и основни определения

Разглеждаме линейната хомогенна система с дробни производни от несъизмерим порядък и с разпределени закъснения

$$D_{a+}^{\alpha}X(t) = \int_{-h}^{0} [\mathrm{d}_\theta U(t,\theta)]X(t+\theta),\ t > a \tag{3.1}$$

или описана в по–детайлна форма

$$D_{a+}^{\alpha_k}x_k(t) = \sum_{j=1}^{n}\int_{-h}^{0} x_j(t+\theta)\mathrm{d}_\theta u_{kj}(t,\theta),\quad k \in \langle n\rangle, t > a$$

и съответната нехомогенна

$$D_{a+}^{\alpha}X(t) = \int_{-h}^{0} [\mathrm{d}_\theta U(t,\theta)]X(t+\theta) + F(t),\ t > a \tag{3.2}$$

където $h \in \mathbb{R}_+,\ X(t) = [x_1(t);\ldots;x_n(t)]$, $F(t) = [f_1(t);\ldots;f_n(t)] : J_a \to \mathbb{R}^n$, $\alpha = [\alpha_1,\ldots,\alpha_n]$, $\alpha_k \in (0,1)$, $\alpha_m = \min\limits_{k\in\langle n\rangle}\alpha_k$, $D_{a+}^{\alpha} = \mathrm{diag}[D_{a+}^{\alpha_1};\ldots;D_{a+}^{\alpha_n}]$, $U : J_a \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $U(t,\theta) = [u_{kj}(t,\theta)]_{k,j\in\langle n\rangle}$.

Дефиниция 3.1.1. *Ще казваме, че функция $Z(t) = [z_1(t);\ldots;z_n(t)] : J \to \mathbb{R}^n$ е частично абсолютно непрекъсната в интервал $J \subset \mathbb{R}$, означаваме $Z(t) \in PAC(J,\mathbb{R}^n)$, ако тя е с ограничена вариация (BV) в t от J, съществува несингулярен елемент в Лебеговата декомпозиция на $Z(t)$ и множеството от точките на прекъсване на функцията $Z(t)$ няма точки на сгъстяване в J.*

Дефиниция 3.1.2. *С $\boldsymbol{C}_a^*$, $a \in \mathbb{R}$ означаваме Банаховото пространство от всички непрекъснати отдясно векторни функции $\Phi(t) \in PAC([a-h,a],\mathbb{R}^n)$ с норма*

$$||\Phi|| = \sup_{t\in[a-h,a]}|\Phi(t)| = \sup_{t\in[a-h,a]}\sum_{k=1}^{n}|\phi_k(t)| < \infty$$

и подпространството на всички абсолютно непрекъснати функции $\boldsymbol{C}_a = AC([a-h,a],\mathbb{R}^n)$, т.е., $\boldsymbol{C}_a \subset \boldsymbol{C}_a^*$.

Множеството от точки, в които всяка начална векторна функция $\Phi \in \boldsymbol{C}_a^*$ има скок, означаваме с S_Φ.

За система (3.1) или (3.2) въвеждаме следните начални условия:

$$X(t) = \Phi(t)\quad (x_k(t) = \phi_k(t), k \in \langle n\rangle),\quad t \in [a-h,a], \Phi \in \boldsymbol{C}_a^* \tag{3.3}$$

Ще казваме, че за ядрото $U : J_a \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ са изпълнени условията **(S)**, ако са изпълнени следните условия:

(S1) Функциите $(t,\theta) \to U(t,\theta)$ са измерими в $(t,\theta) \in J_a \times \mathbb{R}$ и нормализирани така, че за $t \in J_a, U(t,\theta) = 0$, когато $\theta \in \bar{\mathbb{R}}_+$ и $U(t,\theta) = U(t,-h)$, за всяко $\theta \in (-\infty,-h]$, $h \in \mathbb{R}_+$ и $\mathrm{Var}_{\theta\in[-h,0]} U(t,\cdot) < \infty$ за $t \in J_a$.

(S2) Лебеговата декомпозиция на ядрото $U(t,\theta)$ за $t \in J_a$ и $\theta \in [-h,0]$ има вида:

$$U(t,\theta) = U_J(t,\theta) + U_{AC}(t,\theta) + U_S(t,\theta)$$

където $U_J(t,\theta) = \sum\limits_{i=0}^{m} A^i(t)H(\theta+\sigma_i(t)), m \in \mathbb{N}, A^i(t) = \left[a^i_{kj}(t)\right]_{k,j\in\langle n\rangle} \in L_1^{loc}(J_a,\mathbb{R}^{n\times n}),\ i \in \langle m\rangle_0$ са локално ограничени в J_a, $H(t)$ е функцията на Хевисайд, закъсненията $\sigma_i(t) \in C(J_a,\bar{R}_+)$ са ограничени с $\sigma_i = \sup\limits_{t\in J_a} \sigma_i(t),\ \max\limits_{i\in\langle m\rangle_0} \sigma_i \le h$ и $A^i(t)H(\theta+\sigma_i(t))$ са непрекъснати отляво по θ в $(-\sigma_i,0)$, $i \in \langle m\rangle, \sigma_0(t) \equiv 0$ и

$$U_{AC}(t,\theta) = \int\limits_{-h}^{0} B(t,\theta)\mathrm{d}\theta, B(t,\theta) = \left[b^j_k(t,\theta)\right]_{k,j\in\langle n\rangle} \in L_1^{loc}(J_a\times\mathbb{R},\mathbb{R}^{n\times n})$$

са локално ограничени в J_a и $U_S(t,\theta) \in C(J_a\times\mathbb{R},\mathbb{R}^{n\times n})$.

(S3) Съществува локално ограничена функция $z_u \in L_1^{loc}(J_a,\mathbb{R}_+)$ такава, че $\mathrm{Var}_{[-h,0]}U(t,\cdot) \le z_u(t)$ за $t \in J_a$ и за всяко $t_* \in J_a$ е изпълнено:

$$\lim_{t\to t_*} \int\limits_{-h}^{0} |U(t,\theta) - U(t_*,\theta)|\mathrm{d}\theta = 0.$$

(S4) Множествата $S^i_\Phi = \{t \in J_a \mid t-\sigma_i(t) \in S_\Phi\}$ за всяко $i \in \langle m\rangle$ нямат точки на сгъстяване.

Разглеждаме следната помощна система в матричен вид

$$\begin{aligned} X(t) = \Phi(a) + I_{-1}(\Gamma(\alpha)) \int\limits_a^t I_{\alpha-1}(t-\eta)F(\eta)\mathrm{d}\eta \\ + I_{-1}(\Gamma(\alpha)) \int\limits_a^t I_{\alpha-1}(t-\eta) \int\limits_{-h}^{0} [\mathrm{d}_\theta U(\eta,\theta)]X(\eta+\theta)\mathrm{d}\eta,\ t > a \end{aligned} \tag{3.4}$$

където $I_{-1}(\Gamma(\alpha)) = \mathrm{diag}(\Gamma^{-1}(\alpha_1),\ldots,\Gamma^{-1}(\alpha_n))$, или за $k \in \langle n\rangle$ в по–детайлна форма

$$\begin{aligned} x_k(t) =& \phi_k(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int\limits_a^t (t-\eta)^{\alpha_k-1} f_k(\eta)\mathrm{d}\eta \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int\limits_a^t (t-\eta)^{\alpha_k-1} (\sum_{j=1}^{n} \int\limits_{-h}^{0} x_j(\eta+\theta)\mathrm{d}_\theta u_{kj}(\eta,\theta))\mathrm{d}\eta, t > a \end{aligned} \tag{3.5}$$

с начално условие (3.3).

Дефиниция 3.1.3. *Векторната функция $X(t) = [x_1(t);\ldots;x_n(t)]$ е решение на началната задача* (3.2) *и* (3.3) *или началната задача* (3.3) *и* (3.4) *в $J_{a,M}(J_a), M \in \mathbb{R}_+$, ако $X \in C(J_{a,M},\mathbb{R}^n)(X \in C(J_a,\mathbb{R}^n))$ удовлетворява система* (3.2), *респективно* (3.4), *за всяко $t \in (a,a+M](t \in (a,\infty))$ и началното условие* (3.3), *за всяко $t \in [a-h,a]$.*

Нека $\boldsymbol{B}$ е произволно реално банахово пространство.

Дефиниция 3.1.4 ([4]). *Функцията $f(t) : \mathbb{R} \to \boldsymbol{B}$ се нарича регулярна, ако има едностранна(лява и дясна) граница във всяка точка $t \in \mathbb{R}$.*

Забележка 3.1.1. *Ако $f(t) : J_K \to \boldsymbol{B}$, където $J_K \subset \mathbb{R}$ е произволен компактен интервал и $f(t)$ е регулярна функция, тогава предполагаме, че в левия (десния) край на интервала J_K функцията $f(t)$ има само дясна (лява) граница.*

Теорема 3.1.1. *[4] Нека $f(t) : \mathbb{R} \to \boldsymbol{B}$ е произволна функция.*

Тогава необходимо и достатъчно условие $f(t)$ да бъде регулярна функция е, че $f(t)$ трябва във всеки компактен интервал $J_K \subset \mathbb{R}$ да бъде граница на равномерно сходяща редица от стъпаловидни функции, т.е. по отношение на супремум нормата $\|\cdot\|_\infty = \sup\limits_{t \in J_K} \|\cdot\|_{\boldsymbol{B}}$.

Теорема 3.1.2. *[20]*

Нека $t_0 \in J_a$ и $\alpha > 0$ са произволни фиксирани числа и са изпълнени следните условия:

1. Функциите $p(t), u(t) \in L^1_{loc}([t_0, T), \bar{\mathbb{R}}_+)$ за някое $T \leq \infty$.

2. Функцията $g(t) \in C([t_0, T), [0, M])$ за някое $M \in \mathbb{R}_+$ и е ненамаляваща.

3. За всяко $t \in J_a$ е изпълнено

$$u(t) \leq p(t) + g(t) \int\limits_{t_0}^{t} (t-\eta)^{\alpha-1} u(\eta) \mathrm{d}\eta.$$

Тогава за $t \in J_a$ са изпълнени следните неравенства

$$u(t) \leq p(t) + \int\limits_{t_0}^{t} [\sum_{q=1}^{\infty} \frac{(g(\eta)(\Gamma(\alpha))^q}{\Gamma(\alpha q)} (t-\eta)^{\alpha q-1}] p(\eta) \mathrm{d}\eta.$$

3.1.2 Съществуване и единственост на решението на задачата на Коши

Нека за всяко $\Phi \in \boldsymbol{C}^*_a$ дефинираме множеството

$$E^\Phi = \{G : J_a \to \mathbb{R}^n \mid G|_{J_a} \in AC(J_a, \mathbb{R}^n), G(t) = \Phi(t), t \in [a-h, a]\}$$

и за всяко $M \in \mathbb{R}_+$

$$E^\Phi_M = \{G_M : J_{a,M} \to \mathbb{R}^n \mid G_M = G|_{J_{a,M}}, G \in E^\Phi),$$

където $\Phi \in \boldsymbol{C}^*_a$ е произволна начална функция и дефинираме метриката $\mathrm{d}_M : E^\Phi_M \times E^\Phi_M \to \bar{\mathbb{R}}_+$ със следното равенство

$$\mathrm{d}_M(G_M, G^*_M) = \sum_{k=1}^{n} \sup_{t \in J_{a,M}} |g_k(t) - g^*_k(t)|$$

за всяко $G_M, G^*_M \in E^\Phi_M$.

От това, че $G_M(a) = \Phi(a) = G^*_M(a)$, следва че за всяко $M \in \mathbb{R}_+$, съгласно добре известен резултат, E^Φ_M е пълно метрично пространство, относно метриката

$$\mathrm{d}^{\mathrm{Var}}_M(G_M, G^*_M) = \mathrm{Var}_{J_{a,M}}(G_M(t) - G^*_M(t)) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}_{J_{a,M}}(g_k(t) - g^*_k(t)).$$

Лема 3.1.1. *За всяко $M \in \mathbb{R}_+$ множеството E_M^Φ е пълно метрично пространство, относно метриката d_M също, като d_M и $\mathrm{d}_M^{\mathrm{Var}}$ са еквивалентни.*

Теорема 3.1.3. *Нека са изпълнени следните условия:*

1. Изпълнени са условията (S).

2. Функцията $\Phi \in \boldsymbol{C}_a^*$ е произволна.

Тогава началната задача (3.1) и (3.3) има единствено абсолютно непрекъснато решение в интервала $J_{a,M}$ за всяко $M \geq \max\{h, 1\}$.

Следствие 3.1.1. *Нека са изпълнени условията на теорема 3.1.3.*

Тогава началната задача (3.1) и (3.3) има единствено абсолютно непрекъснато решение в интервала J_a.

За произволно фиксирано $s > a$ разглеждаме следната помощна система

$$D_{a+}^\alpha X(t) = \int\limits_{-h}^{0} [\mathrm{d}_\theta U(t,\theta)] X(t+\theta) \tag{3.6}$$

със следното условие

$$X(t) = \tilde{\Phi}_{js}(t), \quad t \in (-\infty, s]. \tag{3.7}$$

Следствие 3.1.2. *Нека са изпълнени следните условия:*

1. Изпълнени са условията (S).

2. Функцията $\tilde{\Phi}_{js}$ има следния вид

$$\tilde{\Phi}_{js}(t) = \begin{cases} I^j, & t = s, j \in \langle n \rangle \\ \mathbf{0}, & t < s \end{cases}$$

Тогава за всяко $s > a$ и произволно $j \in \langle n \rangle$ задача (3.6) и (3.7) има единствено решение, което удовлетворява уравнение (3.6) за $t > s$, условието (3.7) за $t \leq s$ и е абсолютно непрекъснато в $(-\infty, s) \cup (s, \infty)$ със скок в $t = s$.

3.1.3 Фундаментална матрица

Нека $s \in J_a$ е произволно фиксирано число и дефинираме матричната функция $\bar{\Phi}(t,s) = [\bar{\varphi}_{kj}(t,s)]_{k,j \in \langle n \rangle} : \mathbb{R} \times J_a \to \mathbb{R}^{n \times n}$ по следния начин

$$\bar{\Phi}(t,s) = \begin{cases} I, & t = s \\ \Theta, & t < s \end{cases}$$

и означаваме $\bar{\Phi}_j(t,s) = [\bar{\varphi}_{1j}(t,s); \ldots ; \bar{\varphi}_{nj}(t,s)], j \in \langle n \rangle$.

За произволно фиксирано число $s \in J_a$ разглеждаме следната матрична начална задача

$$D_{a+}^\alpha C(t,s) = \int\limits_{-h}^{0} [\mathrm{d}_\theta U(t,\theta)] C(t+\theta, s), \ t \in (s, \infty) \tag{3.8}$$

$$C(t,s) = \bar{\Phi}(t,s), \ t \in (-\infty, s]. \tag{3.9}$$

Дефиниция 3.1.5. *Матричната функция* $t \to C(t,s) = (C^1(t,s), \dots, C^n(t,s))$ $= \left[c_k^j(t,s)\right]_{k,j\in\langle n\rangle}$, $s \in J_a$, *се нарича решение на началната задача* (3.8) *и* (3.9) *в* J_s, *ако* $C(\cdot,s) : [s,\infty) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ *е непрекъсната за* $t \in [s,\infty)$ *и удовлетворява матричното уравнение* (3.8) *за* $t \in [s,\infty)$, *както и началното условие* (3.9).

Теорема 3.1.4. *Нека са изпълнени условията (S).*

Тогава за всяка начална точка $s \in J_a$, *матричната начална задача* (3.8) *и* (3.9) *има единствено абсолютно непрекъснато решение* $t \to C(t,s)$ *в интервала* J_s.

Дефиниция 3.1.6. *Матрицата* $C(t,s)$, *която е решение на началната задача* (3.8) *и* (3.9), *ще наричаме фундаментална матрица (или матрица на Коши) за хомогенната система* (3.1).

Лема 3.1.2. *Нека са изпълнени условията (S) и матричната функция* $t \to C(t,s)$ *е фундаментална матрица на система* (3.1).

Тогава за всяко $\bar{t} \in J_a$ *матричната функция* $C(t,\cdot) : [a,\bar{t}] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ *е локално ограничена в* s *за* $s \in [a,\bar{t}]$ *и* $t \in (-\infty,\bar{t}]$.

Теорема 3.1.5. *Нека са изпълнени условията (S) и матричната функция* $t \to C(t,s)$ *е фундаментална матрица на система* (3.1).

Тогава за всяко фиксирано $\bar{t} \in J_a$ *матричната функция* $C(t,\cdot) : [a,\bar{t}] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ *е непрекъсната за* $s \in [a,\bar{t}]$, *където* $s \neq \bar{t}$, *за* $s = \bar{t}$ *притежава скокове от първи род и следователно е интегруема по Лебег за* s *в* $[a,\bar{t}]$ *за всяко* $t \in (-\infty,\bar{t}]$.

Нека $s^* \in [a-h,a]$ е произволно фиксирано число и дефинираме матричната функция $\Phi^*_{s^*}(t,s) = (\varphi^*_{kj}(t,s))^n_{k,j=1} : \mathbb{R}\times[a-h,a] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ по следния начин

$$\Phi^*_{s^*}(t,s) = \begin{cases} I, & s^* \le s \le t \le a \\ \Theta, & t < s \text{ } or \text{ } s < s^* \end{cases}$$

и разглеждаме следната начална задача:

$$D^\alpha_{a+}T_{s^*}(t,s) = \int_{-h}^{0} [\mathrm{d}_\theta U(t,\theta)]T_{s^*}(t+\theta,s),\ t > a \tag{3.10}$$

$$T_{s^*}(t,s) = \Phi^*_{s^*}(t,s),\ t \in (-\infty,a]. \tag{3.11}$$

Теорема 3.1.6. *Нека са изпълнени условията (S) и* $\bar{t} \in J_a$ *е произволно.*

Тогава са в сила следните твърдения:

1. *Матричната начална задача* (3.10) *и* (3.11) *има единствено абсолютно непрекъснато решение* $T_{s^*}(t,s)$ *в* t *за* $t \in J_a$ *за всяко* $s^* \in [a-h,a]$.

2. *Матричната функция* $T_{a-h}(t,\cdot) : [a,\bar{t}] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ *е непрекъсната по* s *за всяко* $s \in [a,\bar{t}]$ *с* $s \neq t$.

3. *Когато* $s = t$, $t \ge a$, T_{a-h} *притежава скокове от първи род и следователно е интегруема по Лебег за* s *в* $[a,\bar{t}]$.

3.2 Приложения

3.2.1 Интегрално представяне на решението на задачата на Коши

Както обикновено, съгласно принципа на суперпозицията, ще търсим решение на началната задача (3.2) и (3.3) с начално условие

$$\Phi(t) \equiv 0,\ t \in [a-h,a]$$

в случай, когато $F \in L_1^{loc}(J_a, \mathbb{R}^n)$ е локално ограничена.

Нека

$$X_F(t) = \int\limits_a^t K(t,s)\mathrm{d}s, \tag{3.12}$$

където $K(t,s) = C(t,s)T(s), T(s) =_{RL} D_{a+}^{1-\alpha}F(s)$.

Теорема 3.2.1. *Нека са изпълнени следните условия.*

1. Изпълнени са условията (S).

2. Функцията $F \in L_1^{loc}(J_a, \mathbb{R}^n)$ е локално ограничена и $D_{a+}^{\alpha}F(t) \in L_1^{loc}(J_a, \mathbb{R}^n)$.

Тогава векторната функция $X_F(t)$, дефинирана с равенството (3.12) е решение на началната задача (3.2) и (3.3) с начално условие $X_F(t) = \Phi(t) \equiv \mathbf{0},\ t \in [a-h,a]$.

Следствие 3.2.1. *Нека са изпълнени следните условия.*

1. Изпълнени са условията (S).

2. Функцията $F \in L_1^{loc}(J_a, \mathbb{R}^n)$ е локално ограничена и $F(a) = \mathbf{0}$.

Тогава векторната функция $X_F(t)$, дефинирана с равенството (3.12) е решение на началната задача (3.2) и (3.3) с начално условие

$$X_F(t) = \Phi(t) \equiv \mathbf{0},\ t \in [a-h,a].$$

Нека $T_{a-h}(t,s)$ е решение на началната задача (3.10) и (3.11) за $s^* \in [a-h,a]$. За произволна функция $\Phi(t) \in BV([a-h,a], \mathbb{R}^n)$, дефинираме следната функция:

$$X_\Phi(t) = \int\limits_{a-h}^{a} T_{a-h}(t,s)\mathrm{d}_s\Phi(s) + T_{a-h}(t,a-h)\Phi(a-h),\ t \in J_a \tag{3.13}$$

Теорема 3.2.2. *Нека са изпълнени следните условия.*

1. Изпълнени са условията (S).

2. Началната функция $\Phi(t) \in BV([a-h,a], \mathbb{R}^n)$ не е константа и има краен брой скокове.

Тогава функцията $X_\Phi(t)$, дефинирана с (3.13) единствено решение на началната задача (3.1) и (3.3).

Теорема 3.2.3. *Нека са изпълнени следните условия.*

1. Изпълнени са условията на теорема 3.2.2.

2. Функцията $F \in L_1^{loc}(J_a, \mathbb{R}^n)$ е локално ограничена.

3. Или $F(0) = \mathbf{0}$, или $D_{a+}^{\alpha}F(t) \in L_1^{loc}(J_a, \mathbb{R}^n)$.

Тогава функцията

$$\begin{aligned} X_F^{\Phi}(t) &= X_{\Phi}(t) + X_F(t) \\ &= \int\limits_a^t C(t,s)_{RL}D_{a+}^{1-\alpha}F(s)\mathrm{d}s + \int\limits_{a-h}^a T_{a-h}(t,s)\mathrm{d}_s\Phi(s) + T_{a-h}(t,a-h)\Phi(a-h) \end{aligned} \tag{3.14}$$

където $X_F(t)$ *и* $X_{\Phi}(t)$ *са дефинирани с* (3.12) *и* (3.13), *респективно, е единствено решение на началната задача* (3.2) *и* (3.3).

Следствие 3.2.2. *Нека са изпълнени следните условия.*

1. *Изпълнени са условията на теорема 3.2.3.*

2. *Лебеговата декомпозиция на функцията* $\Phi(t) \in BV([a-h,a],\mathbb{R}^n)$ *не включва сингулярен елемент.*

Тогава функцията $X_F^{\Phi}(t)$, *дефинирана с* (3.14) *има следното интегрално представяне:*

$$\begin{aligned} X_F^{\Phi}(t) &= T_{a-h}(t,a)(\Phi_J(a+) - \Phi_J(a-)) + \sum_i T_{a-h}(t,s_i)((\Phi_J(s_i+) - \Phi_J(s_i-)) \\ &+ \int\limits_{a-h}^a T_{a-h}(t,s)\Phi_A^{'}(s)\mathrm{d}s + \int\limits_a^t C(t,s)_{RL}D_{a+}^{1-\alpha}F(s)\mathrm{d}s + T_{a-h}(t,a-h)\Phi(a-h), \end{aligned} \tag{3.15}$$

където $\Phi(t) = \Phi_J(t) + \Phi_A(t)$ *и* $\Phi_J(t), \Phi_A(t)$ *са елементите на скок и абсолютна непрекъснатост в Лебеговата декомпозиция, съответно и сумирането е взето над всички точки* $s_i \in S^{\Phi}$, *в които функцията има скок.*

3.2.2 Абсолютна непрекъснатост на фундаменталната матрица

Теорема 3.2.4. *Нека са изпълнени условията на теорема 3.2.2 и матричната функция* $t \to C(t,s)$ *е фундаментална матрица на системата* (3.1).

Тогава за всяко фиксирано $\bar{a} \in J_a$ *матричната функция* $C(t,\cdot) : [a,\bar{a}] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ *за всяко фиксирано* $t \in (-\infty,s) \cup (s,\infty)$ *е абсолютно непрекъсната по* s *за всеки компактен подинтервал* $[a_1,a_2] \subset (a,\bar{a}),\ t \notin [a_1,a_2]$.

Следствие 3.2.3. *Нека са изпълнени следните условия.*

1. *Изпълнени са условията на теорема 3.2.2.*

2. *Лебеговата декомпозиция на функцията* $\Phi(t) \in BV([a-h,a],\mathbb{R}^n)$ *не включва сингулярен елемент.*

3. *Закъсненията* $\sigma_i(t) \in C^1(J_a,\bar{\mathbb{R}}_+), \sigma_i'(t) < 1$ *за* $t \in J_a$ *и* $i \in \langle m\rangle$.

Тогава единственото решение $X_{\Phi}(t)$ *на началната задача* (3.1) *и* (3.3), *дефинирани с* (3.13) *има следното представяне*

$$X_{\Phi}(t) = T_{a-h}(t,a)\Phi_J(a+) - \int\limits_{a-h}^a \frac{\partial T_{a-h}(t,s)}{\partial s}\Phi_A(s)\mathrm{d}s + T_{a-h}(t,a-h)\Phi(a-h) \tag{3.16}$$

Заключение

Считам, че поставената цел е постигната. Изследвани са системи линейни дробни диференциални уравнения с производни от тип на Капуто и разпределени закъснения. Ще отбележим, че изследваните системи са от закъсняващ или неутрален тип, с рационално несъизмерими редове (порядъци) на диференциране. Получените резултати гарантират глобалната асимптотична усточивост на нулевото решение на задачата на Коши, за системите с нелинейна пертурбация, ако нулевото решение на задачата на Коши за съответната линейна система, без пертурбации, е глобално асимптотично устойчиво.

Получените резултати представляват и основните приноси в дисертацията.

1. Изведена е интегрална формула за представяне на решенията на задачата на Коши за линейни автономни неутрални системи, с производни от тип на Капуто и разпределени закъснения, в случая на частично непрекъсната начална функция (теорема 2.1.2, теорема 2.1.3, следствие 2.1.1).

2. Получени са достатъчни условия за съществуване и единственост на решението на задачата на Коши за нелинейно пертурбирани линейни неутрални системи с разпределени закъснения и производни от типа на Капуто, в случая на частично непрекъсната начална функция (теорема 2.2.1, теорема 2.2.2, теорема 2.2.3).

3. Получени са достатъчни условия за запазване на глобална асимптотична устойчивост на нулевото решение на задачата на Коши за нелинейно пертурбирани линейни автономни неутрални системи с производни от тип на Капуто и разпределени закъснения, в случая, когато нулевото решение на задачата на Коши за съответната линейна системата, без пертурбации, е глобално асимптотично устойчиво (теорема 2.2.6).

4. Получени са достатъчни условия достатъчни условия за съществуване и единственост на решението на задачата на Коши за линейни неавтономни системи дробни диференциални уравнения, с производни от тип на Капуто и разпределени закъснения (теорема 3.1.3, следствие 3.1.1, теорема 3.2.3).

5. Получени са достатъчни условия, гарантиращи съществуване на абсолютно непрекъсната фундаментална матрица на линейна неавтономна хомогенна система, с производни от тип на Капуто и разпределени закъснения (теорема 3.1.5, теорема 3.1.6, теорема 3.2.4).

6. Изведена е интегрална формула за представяне на решенията на линейни неавтономни системи дробни диференциални уравнения, с производни от тип на Капуто и разпределени закъснения, в случая на начална функция с ограничена вариация (теорема 3.2.3, следствие 3.2.2).

Като възможности за развитие виждам компютърното реализиране на теоретичните резултати за интегрално представяне на решенията на разгледаните системи, както и обобщаване на някои от получените резултати за дробни диференциални уравнения с импулси.

Апробация на резултатите

Част от получените резултати, са използвани в:

- Научен проект МУ21-ФМИ-008 към ФНИ при ПУ "Паисий Хилендарски"на тема „Актуални изследвания в областта на фундаменталната и приложната математика с използване на ИКТ и развиване на съвременни методи на обучение“, 2021-2022

- Научен проект МУ19-ФМИ-020 към ФНИ при ПУ "Паисий Хилендарски"на тема „Фундаментални и приложни математически изследвания с използване на съвременни ИКТ като част от глобални научни разработки и с цел издигане нивото на обучението във ФМИ“, 2019-2020.

- Научен проект КП-06-ПРУСИЯ-126 към ФНИ при МОН на тема „Тримерни гранични задачи за уравнения от смесен тип, задачи със спектрален параметър и интегрални уравнения“, 2019-2020.

Част от получените резултати, са докладвани на:

- 46–та Международна конференция "Приложение на математиката в техниката и икономиката" (46-th International Conference "Application of Mathematics in Engineering and Economics" – AMEE'20), Созопол, 7-13 юни 2020 г.

Благодарности

Изказвам благодарност и признателност към своя научен ръководител проф. д–р Андрей Захариев, за неговата подкрепа, огромен принос и насоки по време на настоящата работа, за получените знания, професионалните напътствия и проявеното търпение.

Благодаря на проф. д–р Михаил Константинов за полезните съвети в професионален план, научните дискусии и приноси, свързани с настоящата работа.

Благодаря на колегите си и ръководството на Факултета по математика и информатика при Пловдивския университет „Паисий Хилендарски“, които по един или друг начин са допринесли за моето израстване в кариерата и като личност, за стимулиращите напътствия и реализацията на настоящия дисертационния труд.

Благодаря на съпруга ми, майка ми и баща ми, за огромната помощ, отделеното време, търпение и подкрепа.

Публикации по дисертационния труд

1. [15] E. Madamlieva, M. Konstantinov, M. Milev, and M. Petkova. Integral representation for the solutions of autonomous linear neutral fractional systems with distributed delay. *Mathematics*, 8(3):364, 2020. DOI: 10.3390/ math8030364, ISSN: 2227-7390. (IF 2019: 1.747).

2. [10] H. Kiskinov, E. Madamlieva, M. Veselinova, and A. Zahariev. Existence of absolutely continuous fundamental matrix of linear fractional system with distributed delays. *Mathematics*, 9(2), 2021. DOI: 10.3390/math9020150, ISSN: 2227-7390. (IF 2019: 1.747).

3. [13] M. Konstantinov, E. Madamlieva, M. Petkova and S. Cholakov. Asymptotic stability of nonlinear perturbed neutral linear fractional system with distributed delay. *AIP Conference Proceedings*, 2333(1) , 2021. DOI: 10.1063/5.0041726, ISBN: 978-0-7354-4077-7. (SJR 2019: 0.190).

Връзките между приносите, целите, задачите, мястото на описание в дисертационния труд и направените публикации по темата са следните:

Принос	Задачи	Параграф	Публикация No
1	А	2.1.3	1
2	Б	2.2.3	3
3	В	2.2.4	3
4	Г	3.1.2	2
5	Д	3.1.3, 3.2.2	2
6	Е	3.2.1	2

Таблица 3.1. Апробация на резултатите

Библиография

[1] J. Appell, J. Banas, and N. J. M. Diaz. *Bounded Variation and Around.* De Gruyter, Berlin, Boston, 2014. DOI: 10.1515/9783110265118, ISBN: 978-3-11-026511-8.

[2] D. Boyadzhiev, H. Kiskinov, and A. Zahariev. Integral representation of solutions of fractional system with distributed delays. *Integral Transforms and Special Functions*, 29 (9):725–744, 2018. DOI: 10.1080/10652469.2018.1497025, ISSN: 1065-2469.

[3] K. Diethelm. *The Analysis of Fractional Differential Equations: an Application–Oriented Exposition using Differential Operators of Caputo type.* Springer Science & Business Media, 2010. ISBN: 978-3-642-14573-5.

[4] J. Dieudonne. *Foundations of Modern Analysis.* Read Books Ltd, 2011. ISBN: 978-1446547519.

[5] A. Golev and M. Milev. Integral representation of the solution of the cauchy problem for autonomous linear neutral fractional system. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 119(1):235–247, 2018. DOI: 10.12732/ijpam.v119i1.19, ISSN: 1311-8080.

[6] H. D. Junghenn. *Principles of Real Analysis: Measure, Integration, Functional Analysis, and Applications.* Chapman and Hall/CRC, Berlin, Boston, 2018. ISBN: 978-1-4987-7328-7.

[7] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, volume 204. Elsevier, 2006. ISBN: 978-0-444-51832-3.

[8] V. S. Kiryakova. *Generalized Fractional Calculus and Applications.* CRC Press, 1993. ISBN: 0-582-21977-9.

[9] H. Kiskinov and A. Zahariev. Asymptotic stability of delayed fractional system with nonlinear perturbation. In *AIP Conference Proceedings*, volume 2048, page 050014. AIP Publishing LLC, 2018. DOI: 10.1063/1.5082113, ISBN: 978-0-7354-1774-8.

[10] H. Kiskinov, E. Madamlieva, M. Veselinova, and A. Zahariev. Existence of absolutely continuous fundamental matrix of linear fractional system with distributed delays. *Mathematics*, 9(2), 2021. DOI: 10.3390/math9020150, ISSN: 2227-7390.

[11] V. Kolmanovskii and A. Myshkis. Applied theory of functional differential equations. 1992. DOI: 10.1007/978-94-015-8084-7 ,ISBN: 978-90-481-4215-6.

[12] V. Kolmanovskii and A. Myshkis. *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*, volume 463. Springer Science & Business Media, 2013. ISBN: 978-90-481-5148-6.

[13] M. Konstantinov, E. Madamlieva, M. Petkova, and S. Cholakov. Asymptotic stability of nonlinear perturbed neutral linear fractional system with distributed delay. In *AIP Conference Proceedings*, volume 2333, page 060005. AIP Publishing LLC, 2021. DOI: 10.1063/5.0041726, ISBN: 978-0-7354-4077-7.

[14] J. T. Machado, V. Kiryakova, and F. Mainardi. Recent history of fractional calculus. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 16(3):1140–1153, 2011. DOI: 10.1016/j.cnsns.2010.05.027, ISSN: 1007-5704.

[15] E. Madamlieva, M. Konstantinov, M. Milev, and M. Petkova. Integral representation for the solutions of autonomous linear neutral fractional systems with distributed delay. *Mathematics*, 8(3):364, 2020. DOI: 10.3390/math8030364, ISSN: 2227-7390.

[16] M. Milev and S. Zlatev. A note about stability of fractional retarded linear systems with distributed delays. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 115(4):873–881, 2017. DOI: 10.12732/ijpam.v115i4.21, ISSN: 1314-3395.

[17] I. Podlubny. *Fractional Differential Equation.* Academic Press: San Diego, 1999. ISBN: 978-0-1255-8840-9.

[18] I. Stamova and G. Stamov. *Functional and Impulsive Differential Equations of Fractional Order: Qualitative Analysis and Applications.* CRC Press, 2017. DOI: 10.1201/9781315367453, ISBN: 978-1315367453.

[19] M. Veselinova, H. Kiskinov, and A. Zahariev. Explicit conditions for stability of neutral linear fractional system with distributed delays. In *AIP Conference Proceedings*, volume 1789, page 040005. AIP Publishing LLC, 2016. DOI: 10.1063/1.4968458, ISBN: 978-0-7354-1453-2.

[20] H. Ye, J. Gao, and Y. Ding. A generalized Gronwall inequality and its application to a fractional differential equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 328(2): 1075–1081, 2007. DOI: 10.1016/j.jmaa.2006.05.061, ISSN: 0022-247X.

[21] A. Zahariev and H. Kiskinov. Existence of fundamental matrix for neutral linear fractional system with distributed delays. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 119(1):31–51, 2018. DOI: 10.12732/ijpam.v119i1.3, ISSN: 1314-3395.

[22] A. Zahariev and H. Kiskinov. Asymptotic stability of the solutions of neutral linear fractional system with nonlinear perturbation. *Mathematics*, 8(3):390, 2020. DOI: 10.3390/math8030390, ISSN: 2227-7390.

[23] A. Zahariev, H. Kiskinov, and E. Angelova. Smoothness of the fundamental matrix of linear fractional system with variable delays. *Neural, Parallel, and Scientific Computations*, 27(2): 71–83, 2019. DOI: 10.12732/npsc.v27i2.2, ISSN: 1061-5369.