

ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ
“ПАИСИЙ ХИЛЕНДАРСКИ”
ФАКУЛТЕТ ПО “МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА”
КАТЕДРА “КОМПЮТЪРНИ ТЕХНОЛОГИИ”

ТОДОР ИЛИЕВ КОСТАДИНОВ

ОСЦИЛАЦИОННИ, АСИМПТОТИЧНИ И УСТОЙЧИВИ
СВОЙСТВА НА ДИСКРЕТНИ И НЕПРЕКЪСНАТИ
ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертационен труд
за получаване на научна степен “доктор”
в област на висше образование

4. Природни науки, математика и информатика,
професионално направление: 4.5 Математика
докторска програма: Диференциални уравнения

Научен ръководител: проф. д.м.н. Снежана Христова

Пловдив, 2021 г.

Дисертационният труд е обсъден и насочен за защита от катедра "Компютърни технологии" при ПУ "П. Хилендарски" Пловдив.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на2021 г. отчаса в на новата сграда на ПУ "Паисий Хилендарски" пред научно жури в състав:

1.
- 2.....
- 3.....
- 4.....
- 5.....

Материалите по защитата са на разположение на интересувалите се в секретариата на ФМИ, нова сграда на ПУ, каб. 330 всеки работен ден от 8.30 до 17.00 часа.

I. Обща характеристика на дисертационния труд

Актуалност на дисертационния труд

Дисертационният труд изследва някои качествени свойства, като асимптотично поведение, осцилация и устойчивост на решенията на следните три основни обекта:

1. *Неутрални диференчни уравнения* -те описват връзка между елементите на неизвестна редица в дадени точки. През последните 20 години има нарастващ интерес към неутралните диференчни уравнения с максимум, които се използват в теорията на автоматичното управление. Много автори са получили резултати за асимптотичните и осцилационните свойства на решенията им. За уравненията от I ред могат да се отбележат изследванията [33], [70] и [69]. За уравненията от II и по-висок ред резултати са получени в [18], [23], [68] и [72].
2. *Неутрални диференциални уравнения*-в дисертационния труд е разгледан един частен случай на неутрално диференциално уравнение с частично постоянен аргумент от обобщен тип. Диференциалните уравнения с частично постоянен аргумент са обект на внимание от 80-те години на миналия век насам и имат сериозно приложение в биологията, медицината, инженерните науки и др. С въвеждането на функцията $\gamma(t)$ от Akhmet [13] през 2005 година усилено започва изучаването на уравнения от обобщен тип, при които аргументът на дясната страна на уравнението изпреварва текущия в някои интервали и закъснява спрямо него в други. Уравнения от смесен тип се използват в икономиката, биологията и физиката (приложения могат да се намерят в [26]) и през последните 15 години са обект на усилено изследване(виж например, [24],[25],[26]). Асимптотичните и осцилационните свойства на решенията на неутрални уравнения от този тип са значително по-слабо изучени, поради някои техни специфични особености, които в редица случаи не позволяват изследването им със стандартни методи. Ще отбележим изследванията [58] и [75] върху осцилирането и устойчивостта на решенията на частен случай на такова уравнение и [87] върху периодичността на решенията му.
3. *Диференциални уравнения с продължително действащи импулси* - импулсните въздействия се моделират по два основни начина: импулси, които имат пренебрежимо кратка продължителност в сравнение с целия процес и продължително действащи импулси, които стартират скокообразно във фиксирани моменти от време и действат в краен интервал, който не може да се игнорира. Тези уравнения намират широко приложение в медицината(виж [16]). Теорията на диференциалните уравнения с мигновени импулси е сравнително добре развита(виж монографиите [20],[48], [74],[77]). Hernandez и O'Regan [43] дават за пръв път

през 2013 г. постановка на задачата за диференциални уравнения с продължително действащи импулси. Един от основните проблеми за изследване е устойчивостта на решенията на тези уравнения. В момента теорията на устойчивостта на решенията на диференциалните уравнения с продължително действащи импулси интензивно се развива. В тази област ще отбележим монографията [10], относно устойчивостта на решенията на нелинейни диференциални уравнения с продължително действащи импулси, работата на същите автори за прилагане на функции на Ляпунов при изследването на устойчивостта [11] и статията [84] за равномерна и равномерно-асимптотична устойчивост. През последните няколко десетилетия се отделя особено внимание на автоматично управляваните системи и техните приложения. Много от проблемите свързани с тях зависят от максималните отклонения на регулираните обекти. Този вид проблеми адекватно се моделира с диференциални уравнения със супремум (виж [17]). От друга страна съществуват феномени, които се характеризират с бързи промени в тяхното състояние. Комбинацията между двата феномена се описва от диференциални уравнения с продължително действащи импулси със супремум.

Цел и задачи на дисертационния труд

Основната цел на дисертационния труд е за описаните по-горе три основни обекта да се изучат някои качествени свойства на решенията, като по-конкретно:

1. *За неутрални диференчни уравнения*-да се изучат асимптотичните свойства и осцилирането на решенията на два вида линейни неутрални диференчни уравнения от първи ред и втори ред с максимум.
2. *За неутрални диференциални уравнения*- да се изучат асимптотичните свойства и осцилирането на решенията на един специален вид неутрално диференциално уравнения с частично постоянен аргумент от обобщен тип.
3. *За диференциални уравнения с продължително действащи импулси*- да се изследват различни видове устойчивост на решенията на някои нелинейни диференциални уравнения с продължително действащи импулси без закъснение, с постоянно закъснение и закъснение тип супремум.

Основните задачи са:

- I. Да се получат достатъчни условия за сходимост към 0 и за осцилиране на решенията на линейни неутрални диференчни уравнения с максимум.
- II. Да се систематизират асимптотичните свойства на решенията на неутралното диференциално уравнения с частично постоянен аргумент от обобщен тип спря-

мо неговите коефициенти и да се получат достатъчни условия за осцилиране на решенията му в някои частни случаи.

- III. Да се намерят достатъчни условия за различни видове устойчивост на решенията на някои нелинейни диференциални уравнения с продължително действащи импулси без закъснение, с постоянно закъснение и закъснение тип супремум.

Структура и обем на дисертационния труд

Дисертационният труд е с обем 130 страници и съдържа увод, четири глави, авторска справка за основните приноси, апробация на резултатите, публикации по темата и цитирания, декларация за оригиналност и достоверност на дисертационния труд и библиография. Библиографията съдържа 88 заглавия. Списъкът от авторските публикации се състои от 11 заглавия.

II. Кратък обзор на дисертационния труд

1. Осцилационни и асимптотични свойства на линейни неутрални диференчни уравнения с максимум.

В Глава 1 са разгледани следните скаларни линейни неутрални диференчни уравнения от първи и втори ред с максимум.

$$\Delta[x_n + p_n x_{n-k}] + q_n \max_{s \in [n-l, n]} x_s = 0, n \geq n_0; \quad (1.1.1)$$

$$\Delta^2[x_n + p_n x_{n-k}] + q_n \max_{s \in [n-l, n]} x_s = 0, n \geq n_0, \quad (1.1.2)$$

където k и l са неотрицателни цели числа, $\{p_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ и $\{q_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ са редици от реални числа, $[n-l, n] = \{n-l, n-l+1, \dots, n-1, n\}$, $n_0 = \max\{k, l\} + 1$, и редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е с предварително зададени начални стойности $x_1, x_2, \dots, x_{n_0-1}$.

A) Асимптотични свойства.

Ще казваме, че са изпълнени условията (H) , ако:

H1. $\{q_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ е неотрицателна ограничена реална редица.

H2. $\sum_{n=n_0}^{\infty} q_n = \infty$.

Следната теорема дава достатъчни условия за сходимост към 0 на положителните решения на уравнение (1.1.1).

Теорема 1. Нека условията (H) са изпълнени, $l \geq k$ и

$$-1 < \tilde{p}_1 \leq p_n \leq \tilde{p}_2, \quad (1.1.3)$$

където $n \geq n_0$ и $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2 \in \mathbb{R}$.

Тогава, ако $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е положително решение на уравнение (1.1.1), то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Твърдението на Теорема 1. е все още валидно и без условието $k \leq l$, ако условието $(H2)$ се замени с:

$$H3. \sum_{n=n_0}^{\infty} \tilde{q}_n = \infty, \tilde{q}_n = \min\{q_n, q_{n+k}\}.$$

Теорема 2. Нека условията $(H1)$, $(H3)$ и неравенствата (1.1.3) са изпълнени.

Тогава, ако $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е положително решение на уравнение (1.1.1), то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Б) Осцилационни свойства.

В следната теорема са получени достатъчни условия за осцилиране на решенията на (1.1.1).

Теорема 3. Нека условията $(H1)$ и $(H2)$ са изпълнени, $k > l$,

$$p \leq p_n < -1, \quad (1.1.4)$$

при $n \geq n_0$ и

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{s=n}^{n+k-l} \frac{q_s}{\max_{\nu \in [s-l, s]} (-p_{\nu+k})} > 1. \quad (1.1.5)$$

Тогава всяко решение на уравнение (1.1.1) осцилира.

Забележка 1. Ще отбележим, че осцилационните свойства на решенията на уравнение (1.1.2) при условие, че $\sum_{n=n_0}^{\infty} q_n = \infty$ са изследвани в статиите [18], [68], [69], [72], и [73].

Ще казваме, че условието (A) е изпълнено, ако:

A. $\{p_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ и $\{q_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ са неотрицателни редици с безкрайно много положителни елементи.

Следната теорема дава достатъчни условия за осцилиране на решенията на уравнение (1.1.2) за $0 \leq p_n < 1$ при по-слабо ограничение от условието $\sum_{n=n_0}^{\infty} q_n = \infty$, което е използвано от Bainov и Luo [18]:

Теорема 4. Нека условието (A) е изпълнено и $0 \leq p_n < 1$,
при $n \geq n_0$ и $\exists \alpha \in (0, 1)$ такава, че

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} q_n (1 - \max_{s \in [n-l, n]} p_s) n^{1-\alpha} = \infty. \quad (1.1.6)$$

Тогава всяко решение на уравнение (1.1.2) е осцилиращо.

Забележка 2. Ще отбележим, че условие (1.1.6) е по-добро от условие $\sum_{n=n_0}^{\infty} q_n = \infty$.

Наистина при $p_n \leq 1 - \frac{1}{n^{1-\alpha}}$ е очевидно неравенството

$$q_n (1 - \max_{s \in [n-l, n]} p_s) n^{1-\alpha} \leq q_n, \text{ т.е. } \sum_{n=n_0}^{\infty} q_n = \infty, \text{ докато обратното не винаги е вярно.}$$

2. Осцилационни и асимптотични свойства на един специален вид неутрално диференциално уравнение с частично постоянен аргумент.

В Глава 2 се изследва асимптотичното и осцилационното поведение на решенията на следната начална задача за нелинейно неутрално диференциално уравнение с частично постоянен аргумент от обобщен тип:

$$\begin{aligned} (y(t) + py(t + \tfrac{1}{2}))' &= qf(y(\gamma(t))), \quad t \in [-\tfrac{1}{2}, \infty), \\ y(t) &= \varphi(t), \quad t \in [-\tfrac{1}{2}, 0] \cup \{-1\}, \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

където p, q са ненулеви реални числа, $\varphi(t) \in C^1([-\frac{1}{2}, 0], \mathbb{R})$, $\varphi(-1) < \infty$, $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\gamma(t)$ е частен случай на функция, въведена от Akhmet в [13] през 2005 година:

$$\gamma(t) = \begin{cases} [t] & t_n \leq t < \gamma_n, \\ 2[\frac{t+1}{2}] & \gamma_n \leq t < t_{n+1}, \end{cases}$$

където $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$ са две реални редици такива, че: $\gamma_0 = \frac{1}{2}$, $\gamma_{n+1} = \gamma_n + 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $t_0 = -\frac{1}{2}$, $\gamma_0 < t_1 < 1$ и $t_{n+1} = t_n + 1$, $n = 1, 2, \dots$.

Ще отбележим, че дясната част на уравнение (2.1.1) е с изпреварващ аргумент спрямо текущия в интервалите $I_n = [\gamma_n, t_{n+1})$ при $n = 2k+1$, $k = 0, 1, 2, \dots$ и със закъсняващ аргумент във всички останали интервали.

По метода на стъпките в дисертационния труд доказваме съществуване и единственост на решението на (2.1.1), ако са изпълнени условията:

A1. $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

A2. $uf(u) > 0$ при $u \neq 0$, $u \in \mathbb{R}$.

A3. За всяко $\delta > 0$, съществува $\bar{\delta} > 0$ такава, че ако $|u| > \delta$, то $|f(u)| > \bar{\delta}$.

А) Асимптотични свойства на решенията на (2.1.1).

Основните свойства на функцията $z(t) = y(t) + py(t + \frac{1}{2})$ са получени в следната лема:

Лема 1. Нека условията (А) са изпълнени и $y(t)$ е неосцилиращо решение на (2.1.1). Тогава следните твърдения са изпълнени:

- (а) Ако съществува крайна граница $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t)$, тогава $\liminf_{t \rightarrow \infty} |y(t)| = 0$.
- (б) Ако $p < 0$, то $\liminf_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$ или $\lim_{t \rightarrow \infty} |z(t)| = \infty$.

Ще отбележим, че Лема1. играе основна роля в доказателството на всички резултати за асимптотичното поведение на решенията на (2.1.1). Постигнатите резултати можем да обобщим в следната таблица, съставена спрямо стойностите на параметрите p и q :

q	p	Резултат
$q < 0$	$p < -1$	Ако $y(t)$ е неосцилиращо, то $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ или $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty$.
$q < 0$	$p \in (-1, 0)$	Ако $y(t)$ е неосцилиращо и ограничено, то $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$.
$q < 0$	$p = -1$	Ако $y(t)$ е неограничено и неосцилиращо, то $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty$.
$q < 0$	$p > 0, p \neq 1$	Ако $y(t)$ е неосцилиращо, то $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$.
$q < 0$	$p = 1$	Ако $y(t)$ е неосцилиращо, то $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$.
$q > 0$	$p < -1$	Ако $y(t)$ е неосцилиращо, то $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$.
$q > 0$	$p \in (-1, 0)$	Ако $y(t)$ е неосцилиращо, то $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty$.
$q > 0$	$p = 1$	Ако $y(t)$ е неосцилиращо, то $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty$.
$q > 0$	$p > 1$	Ако $y(t)$ е неосцилиращо, то $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty$.

Б) Осцилационни свойства на решенията в някои частни случаи.

Ще отбележим, че уравнение (2.1.1) може да се свърже с диференчно уравнение, ако въведем означението $y(n) = c_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Тогава при $p = 1$ получаваме, че е в сила диференчното уравнение:

$$c_{n+1} - c_n = \frac{q}{2} f(c_n), \quad (2.1.2)$$

където $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Диференчно уравнение свързано с (2.1.1) съществува и при $p \neq 1$, но то не може да се използва при получаването на резултати за осцилиране при метода, който използваме и поради тази причина няма да го приведем.

В дисертационния труд са получени следните два резултата за осцилиране:

Теорема 1. Нека условията (A) са изпълнени, $q > 0$ и $p = -1$.

Тогава всяко решение на уравнение (2.1.1) осцилира.

Теорема 2. Нека условията (A1) и (A2) са изпълнени, $p = 1$ и $q < -2$. Нека

$$\liminf_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u} \geq 1. \quad (2.1.3)$$

Тогава всяко решение на (2.1.1) осцилира.

Забележка 1. Ще отбележим, че при получаването на условията за осцилиране на решенията има сериозни затруднения, поради което са разгледани само тези два частни случая. Доказателствата на двете теореми използват различни методи. В доказателството на Теорема 1. е използвана Лема 1., докато в доказателството на Теорема 2. е използвано диференчното уравнение (2.1.2) и линеаризационната теорема на Györi и Ladas (виж [40]).

3. Устойчиви свойства на диференциални уравнения с продължително действащи импулси.

В Глава 3 са изследвани различни видове устойчивост на решенията на диференциални уравнения с продължително действащи импулси.

Нека са дадени две растящи редици $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{s_i\}_{i=0}^{\infty}$ такива, че $0 < s_0 < t_i < s_i < t_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots$, $\lim_{i \rightarrow \infty} s_i = \infty$. Нека $t_0 \in \mathbb{R}_+$ е произволна точка. Без ограничение на общността можем да считаме, че $0 \leq t_0 < s_0$.

Нека $J \subset \mathbb{R}_+$ е даден интервал. Въвеждаме следните множества от функции, които ще използваме:

$$PC^1(J) = \{u : J \rightarrow \mathbb{R} : u \in C^1(J \cap (\cup_{i=0}^{\infty} (t_i, s_i]), \mathbb{R}) : u(s_i) = u(s_i - 0) = \lim_{t \uparrow s_i} u(t) < \infty, u(s_i + 0) = \lim_{t \downarrow s_i} u(t) < \infty, u'(s_i) = \lim_{t \uparrow s_i} u'(t) < \infty, u \in C(J \cap (\cup_{i=0}^{\infty} (s_i, t_{i+1}]), \mathbb{R}), s_i \in J\},$$

$$PC(J) = \{u : J \rightarrow \mathbb{R} : u \in C(J \cap (\cup_{i=0}^{\infty} (t_i, s_i]), \mathbb{R}) : u(s_i) = u(s_i - 0) = \lim_{t \uparrow s_i} u(t) < \infty, u(s_i + 0) = \lim_{t \downarrow s_i} u(t) < \infty, u \in C(J \cap (\cup_{i=0}^{\infty} (s_i, t_{i+1}]), \mathbb{R}), s_i \in J\}.$$

$$K = \{\sigma \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+), \text{ строго растяща и } \sigma(0) = 0\},$$

$$PCK = \{\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \sigma(., u) \in PC(\mathbb{R}_+) \text{ за всяко } u \in \mathbb{R}_+ \text{ и } \sigma(t, .) \in K \text{ при всяко } t \in \mathbb{R}_+\}.$$

Разглеждаме следната начална задача за нелинейната система диференциални урав-

нения с продължително действащи импулси:

$$\begin{aligned} x' &= f(t, x) \text{ при } t \in (t_i, s_i], \quad i = 0, 1, 2, \dots, \\ x(t) &= \phi_i(t, x(s_i - 0)) \quad \text{при } t \in (s_i, t_{i+1}], \quad i = 0, 1, 2, \dots, \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

където $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f : \cup_{i=0}^{\infty} (t_i, s_i] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\phi_i : [s_i, t_{i+1}] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 0, 1, 2, \dots$.

Получаваме достатъчни условия за три вида устойчивост на решенията на (3.1.1):

А.) Интегрална устойчивост по две мерки.

Разглеждаме множеството от мерки

$$\begin{aligned} \Gamma(J) &= \{h : J \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad h(t, x) \in PC(J) \text{ за всяко } x \in \mathbb{R}^n, h(t, x) \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+) \\ &\text{за всяко } t \in J \text{ и } \inf_{(t, x) \in J \times \mathbb{R}^n} h(t, x) = 0\}. \end{aligned}$$

Дефиниция 1. [67] Нека $h, h_0 \in \Gamma(J)$. Казваме, че:

- h_0 е по-фина от h , ако съществуват $\delta > 0$ и функция $\phi \in PCK$ такива, че от $h_0(t, x) < \delta$ следва $h(t, x) \leq \phi(t, h_0(t, x))$, $t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$;
- h_0 е равномерно по-фина от h , ако съществуват $\delta > 0$ и функция $\phi \in K$ такива, че от $h_0(t, x) < \delta$ следва $h(t, x) \leq \phi(h_0(t, x))$, $t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$.

Класът $\Lambda(J, \Delta)$ от функции на Ляпунов ще бъде използван за изследване на устойчивостта на решенията на (3.1.1).

Дефиниция 2. [11] Нека $J \subset \mathbb{R}_+$ е даден интервал и $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ ($0 \in \Delta$) е дадено множество. Ще казваме, че функцията $V(t, x) : J \times \Delta \rightarrow \mathbb{R}_+$, $V(t, 0) \equiv 0$ е от класа $\Lambda(J, \Delta)$, ако:

1. Функцията $V(t, x)$ е непрекъсната върху $J/\{s_i \in J\} \times \Delta$, $i = 0, 1, 2, \dots$ и е локално Липшицова по отношение на втората си променлива;
2. За всяко $s_i \in J$, $i = 0, 1, 2, \dots$ и $x \in \Delta$ съществуват крайните граници $V(s_i - 0, x) = \lim_{t \uparrow s_i} V(t, x)$, $V(s_i + 0, x) = \lim_{t \downarrow s_i} V(t, x)$ и $V(s_i - 0, x) = V(s_i, x)$.

Обобщена производна на Дини за функцията $V(t, x) \in \Lambda([t_0, T], \Delta)$ по траекториите на решенията на система (3.1.1), която ще използваме се задава чрез равенството:

$$(3.1.1) D^+ V(t, x) = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \left\{ V(t, x) - V(t - h, x - hf(t, x)) \right\} \text{ при } t \in [t_0, T) \cap (\cup_{i=0}^{\infty} (t_i, s_i)),$$

където $x \in \Delta$ и за всяко $t \in (t_i, s_i)$ съществува $h_t > 0$ такава, че $t - h \in (t_i, s_i)$ и $x - hf(t, x) \in \Delta$ за всяко $0 < h \leq h_t$.

Дефиниция 3. [67] Нека $V \in \Lambda(J, \mathbb{R}^n)$ и $h_0, h \in \Gamma(J)$. Тогава казваме, че:

- $V(t, x)$ е h -положително дефинирана, ако съществуват $\rho > 0$ и функция $b \in K$ такива, че от $h(t, x) < \rho$ следва $b(h(t, x)) \leq V(t, x)$;
- $V(t, x)$ е слабо h_0 -затихваща, ако съществуват $\delta > 0$ и функция $a \in PCK$ такива, че от $h_0(t, x) < \delta$ следва $V(t, x) < a(t, h_0(t, x))$.

Разглеждаме системата

$$\begin{aligned} x' &= f(t, x) + F(t, x) \text{ при } t \in (t_i, s_i], \quad i = 0, 1, 2, \dots \\ x(t) &= \phi_i(t, x(s_i - 0)) + \psi_i(t, x(s_i - 0)) \text{ при } t \in (s_i, t_{i+1}], \quad i = 0, 1, 2, \dots, \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Разглеждаме съответната начална задача за обикновено диференциално уравнение

$$x' = f(t, x) + F(t, x) \text{ при } t \in [\tau, s_p], \quad x(\tau) = \tilde{x}_0, \quad (3.1.3)$$

където $\tau \in [t_p, s_p)$, $p = 0, 1, 2, \dots$.

Ще казваме че условията (H1) и (H2) са изпълнени, ако:

(H1) Функциите $f, F \in C(\cup_{i=0}^{\infty} (t_i, s_i], \mathbb{R}^n)$ са такива, че за всяка начална точка $(\tau, \tilde{x}_0) : t_p \leq \tau < s_p, p = 0, 1, 2, \dots, \tilde{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, началната задача за системата (3.1.3) има решение $x(t; \tau, \tilde{x}_0) \in C^1([\tau, s_p], \mathbb{R}^n), p = 0, 1, 2, \dots$.

(H2) Функциите $\phi_i, \psi_i \in C([s_i, t_{i+1}] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ и $\phi_i(t, 0) = 0, \psi_i(t, 0) = 0, t \in (s_i, t_{i+1}]$.

Нека $\rho, T > 0$ са константи и $h(t, x) \in \Gamma(J)$. Дефинираме множеството:

$$W(t, T, \rho) = \{x \in \mathbb{R}^n : h(s, x) < \rho \text{ при } s \in [t, t + T]\}.$$

Дефиниция 4. Нека $h, h_0 \in \Gamma(J)$. Системата (3.1.1) се нарича (h_0, h) -интегрално устойчива, ако за всяко $\alpha > 0$ и всяко $t_0 \geq 0$, съществува функция $\beta = \beta(\alpha) \in K$ такава, че за всяко решение $x(t; t_0, x_0)$ на системата (3.1.2), ако $x_0 \in \mathbb{R}^n$ удовлетворява $h_0(t_0, x_0) < \alpha$, то е изпълнено неравенството $h(t, x(t; t_0, x_0)) < \beta$ при $t \geq t_0$ и за всяко $T > 0$ смущенията $F(t, x)$ и $\psi_i(t, x)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) в дясната страна на системата (3.1.2) удовлетворяват условието

$$\sum_{k=0}^p \int_{s \in \Omega_k} \sup_{x \in W(t_0, T, \beta)} \|F(s, x)\| ds + \sum_{k=0}^{p-1} \sup_{(t, x) \in (s_k, t_{k+1}] \times \mathbb{R}^n : h(t, x) < \beta} \|\psi_k(t, x)\| < \alpha,$$

където $p : t_0 + T \in (t_p, s_p], \Omega_k = (t_k, s_k]$ и $\Omega_p = (t_p, t_0 + T]$.

Забележка 1. Ще отбележим, че при малки отклонения на началното условие спрямо едната мярка и на смущенията $F(t, x)$ и $\psi_i(t, x(s_i - 0))$ в дясната част на (3.1.2), нулевото решение на (3.1.1) е достатъчно малко спрямо другата мярка. Това позволява гъвкавост при избора на мерките и съответно по-големи възможности за оценка на промяната на решението. Ще отбележим също, че в случая, когато $h_0(t, x) = h(t, x) \equiv ||x||$, (h_0, h) -интегралната устойчивост по две мерки се редуцира до обикновена интегрална устойчивост.

При получаването на достатъчните условия за равномерна интегрална устойчивост на нулевото решение на система (3.1.1) ще използваме за сравнение следните скалярни диференциални уравнения с продължително действащи импулси:

$$\begin{aligned} u' &= g_1(t, u) \text{ при } t \in (t_i, s_i], \quad i = 0, 1, 2, \dots \\ u(t) &= \xi_i(t, u(s_i - 0)) \quad \text{при } t \in (s_i, t_{i+1}], \quad i = 0, 1, 2, \dots \\ u(t_0) &= u_0; \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

и

$$\begin{aligned} w' &= g_2(t, w) \text{ при } t \in (t_i, s_i], \quad i = 0, 1, 2, \dots \\ w(t) &= \eta_i(t, w(s_i)) \quad \text{при } t \in (s_i, t_{i+1}], \quad i = 0, 1, 2, \dots \\ w(t_0) &= w_0, \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

където $u, w \in \mathbb{R}$, $g_k : \cup_{i=0}^{\infty} (t_i, s_i] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(k = 1, 2)$, $\xi_i, \eta_i : [s_i, t_{i+1}] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, \dots$.

Дефиниция 5. Нулевото решение на началната задача с продължително действащи импулси (3.1.4) ще наричаме еквиустойчиво, ако за всяко $\alpha > 0$ съществува $\delta = \delta(t_0, \alpha) > 0$ такова, че от неравенството $|u_0| < \delta$ следва, че $|u(t; t_0, u_0)| < \alpha$ при $t \geq t_0$, където $u(t; t_0, u_0)$ е решението на (3.1.4).

В следната теорема са дадени достатъчни условия за равномерна интегрална устойчивост по две мерки за нулевото решение на (3.1.1).

Теорема 1. Нека

1. Условията (H1) и (H2) са изпълнени.
2. Функциите $g_1, g_2 \in C(\cup_{i=0}^{\infty} (t_i, s_i], \mathbb{R})$ са такива, че $g_1(t, 0) = 0$, $g_2(t, 0) = 0$ при $t \in \cup_{i=0}^{\infty} (t_i, s_i]$.
3. Функциите $\xi_i, \eta_i \in C([s_i, t_{i+1}] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ са такива, че $\xi_i(t, 0) = 0$, $\eta_i(t, 0) = 0$ при $t \in (s_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, \dots$

4. $h_0, h \in \Gamma(\mathbb{R}_+)$, h_0 е равномерно по-фина от h и съществуват ρ_0, ρ ($0 < \rho_0 < \rho$) такива, че от $h(s_i, x) < \rho_0$ следва, че $h(s_i + 0, \phi_i(s_i + 0, x)) < \rho$, $i = 0, 1, 2, \dots$.
5. Съществува h_0 -затихваща функция $V_1 : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, $V_1 \in \Lambda([0, \infty), \Delta)$ и:
- (i) е изпълнено неравенството ${}_{(3.1.1)}D^+V_1(t, \psi(t)) \leq g_1(t, V_1(t, \psi(t)))$, $t \in [0, s_0] \bigcup \bigcup_{i=1}^{\infty} (t_i, s_i]$, при $(t, x) \in S(h, \rho)$.
- (ii) $V_1(t, \phi_i(t, x)) \leq \xi_i(V_1(s_i, x))$, $t \in (s_i, t_{i+1}]$ при $(s_i, x) \in S(h, \rho)$, $i = 0, 1, 2, \dots$.
6. За $\forall \mu > 0$, $\exists V_2^{(\mu)} : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, $V_2^{(\mu)} \in \Lambda([0, \infty), \Delta)$ такава, че:
- (iii) $b(h(t, x)) \leq V_2^{(\mu)}(t, x) \leq a(h_0(t, x))$ при $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, където $a, b \in K$ и $\lim_{u \rightarrow \infty} b(u) = \infty$.
- (iv) ${}_{(3.1.1)}D^+V_1(t, x) + {}_{(3.1.1)}D^+V_2^{(\mu)}(t, x) \leq g_2\left(t, V_1(t, x) + V_2^{(\mu)}(t, x)\right)$, $t \in [0, s_0] \bigcup \bigcup_{i=1}^{\infty} (t_i, s_i]$, $(t, x) \in S(h, \rho)$;
- (v) $V_1(t, \phi_i(t, x)) + V_2^{(\mu)}(t, \phi_i(t, x)) \leq \eta_i\left(V_1(s_i, x) + V_2^{(\mu)}(s_i, x)\right)$, $t \in (s_i, t_{i+1}]$ при $(s_i, x) \in S(h, \rho) \cap S^C(h_0, \mu)$, $i = 1, 2, \dots$.
7. Нулевото решение на уравнение (3.1.4) е еквиустойчиво.
8. Импулсното диференциално уравнение (3.1.5) е равномерно интегрално устойчиво. Тогава нулевото решение на (3.1.1) е равномерно (h_0, h) -интегрално устойчиво.

Б.)Евентуална устойчивост спрямо част от променливите.

Нека m, l са неотрицателни цели числа такива, че $n = m + l$. Нека $x \in \mathbb{R}^n : x = (y, z)$, $y \in \mathbb{R}^m, z \in \mathbb{R}^l$. Тогава (3.1.1) може да бъде записана във вида:

$$\begin{aligned} y' &= F(t, y, z), \quad z' = G(t, y, z) \quad \text{при } t \in (t_i, s_i], \quad i = 0, 1, 2, \dots, \\ y(t) &= \Phi_i(t, y(s_i - 0), z(s_i - 0)), \quad z(t) = \Psi_i(t, y(s_i - 0), z(s_i - 0)) \\ &\quad \text{при } t \in (s_i, t_{i+1}], \quad i = 0, 1, 2, \dots, \\ y(t_0) &= y_0, \quad z(t_0) = z_0, \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

където $F : \bigcup_{i=0}^{\infty} [t_i, s_i] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $G : \bigcup_{i=0}^{\infty} [t_i, s_i] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$, $\Phi_i : [s_i, t_{i+1}] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\Psi_i : [s_i, t_{i+1}] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^l$, ($i = 0, 1, 2, \dots$).

Разглеждаме съответната начална задача за обикновено диференциално уравнение:

$$y' = F(t, y, z) \quad z' = G(t, y, z) \quad \text{при } t \in [\tau, s_p] \quad \text{с } x(\tau) = \tilde{x}_0, \tag{3.1.7}$$

където $\tau \in [t_p, s_p)$, $p = 0, 1, 2, \dots$.

Ще казваме че условието (НЗ) е изпълнено, ако:

(НЗ) Функциите $F \in C([0, s_0] \cup \cup_{i=1}^{\infty} [t_i, s_i] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ и $G \in C([0, s_0] \cup \cup_{i=1}^{\infty} [t_i, s_i] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^l)$ са такива, че за всяка начална точка $(\tau, \tilde{x}_0) : t_p \leq \tau < s_p, \tilde{x}_0 \in \mathbb{R}^n, p = 0, 1, 2, \dots$, началната задача (3.1.7) има решение $x(t; \tau, \tilde{x}_0) \in C^1([\tau, s_p], \mathbb{R}^n)$.

Дефиниция 6. Нулевото решение на началната задача за системата (3.1.1) се нарича:

- евентуално устойчиво спрямо y , ако за всяко $\epsilon > 0$ и всяко $t_0 \in [0, s_0] \cup \cup_{i=1}^{\infty} [t_i, s_i]$ съществуват $\delta = \delta(\epsilon, t_0) > 0$ и $\tau = \tau(\epsilon) > 0$ такива, че за всяко $x_0 \in \mathbb{R}^n$ от неравенството $\|x_0\| < \delta$ следва, че $\|y(t; t_0, x_0)\| < \epsilon$ е изпълнено при $t \geq t_0 \geq \tau$;
- равномерно евентуално устойчиво спрямо y , ако за всяко $\epsilon > 0$ съществуват $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ и $\tau = \tau(\epsilon) > 0$ такива, че за всяко $t_0 \in [0, s_0] \cup \cup_{i=1}^{\infty} [t_i, s_i]$ такова, че $t_0 \geq \tau$ и всяко $x_0 \in \mathbb{R}^n$ от $\|x_0\| < \delta$ следва, че $\|y(t; t_0, x_0)\| < \epsilon$ е изпълнено при $t \geq t_0$;
- евентуално равномерно атрактивно спрямо y , ако съществува $\beta > 0$ такова, че за всяко $\epsilon > 0$ съществуват $T = T(\epsilon) > 0$ и $\tau = \tau(\epsilon) > 0$ такива, че за всяко $t_0 \in [0, s_0] \cup \cup_{i=1}^{\infty} [t_i, s_i]$ такова, че $t_0 \geq \tau$ и всяко $x_0 \in \mathbb{R}^n$ от $\|x_0\| < \beta$ следва, че $\|y(t; t_0, x_0)\| < \epsilon$ е изпълнено при $t \geq t_0 + T$;
- евентуално равномерно асимптотично устойчиво спрямо y , ако е равномерно евентуално устойчиво и евентуално равномерно атрактивно.

Казваме че условието (Н4) е изпълнено, ако :

(Н4) Функциите $\Phi_i \in C([s_i, t_{i+1}] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l, \mathbb{R}^m)$, $\Psi_i \in C([s_i, t_{i+1}] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l, \mathbb{R}^l)$ и $\Phi_i(t, 0, 0) \equiv 0$, $\Psi_i(t, 0, 0) \equiv 0$ при $t \in [s_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, \dots$.

Забележка 2. Ще отбележим, че обикновената устойчивост е частен случай на евентуална устойчивост спрямо част от променливите, когато $m = n$. Устойчивостта спрямо част от променливите изисква при достатъчно малки отклонения на началното условие, нормата на решението да остане произволно малка от някакъв момент нататък само спрямо някои от променливите, които са от по-голямо значение.

Следната теорема дава достатъчни условия за евентуална устойчивост:

Теорема 2. Нека:

1. Условието (НЗ) и (Н4) са изпълнени и $f(t, 0) \equiv 0$ при $t \in [0, s_0] \cup \cup_{i=1}^{\infty} [t_i, s_i]$.
2. Съществуват функция $V \in \Lambda(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)(V(t, 0) = 0)$ и намаляваща функция $\Theta \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ такива, че :

- (i) за всяко $t \in [0, s_0) \bigcup \bigcup_{i=1}^{\infty} (t_i, s_i)$ и всяко $x \in \mathbb{R}^n (x = (y, z))$, ако $t \geq \Theta(r)$ при $0 < r \leq \|y\|$, то е изпълнено неравенството ${}_{(3.1.1)}D^+V(t, x) \leq 0$;
- (ii) за всяко $x \in \mathbb{R}^n$ и всяко $t \in (s_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, \dots$, ако $t \geq \Theta(r)$ при $0 < r \leq \|y\|$, то е изпълнено неравенството $V(t, \phi_i(t, x)) \leq V(s_i - 0, x)$;
- (iii) за всяко $x \in \mathbb{R}^n (x = (y, z))$, ако $t \geq \Theta(r)$ при $0 < r \leq \|y\|$, то е изпълнено неравенството $b(\|y\|) \leq V(t, x)$, където $y \in \mathbb{R}^m$ и $b \in K$.

Тогава нулевото решение на (3.1.1) е евентуално устойчиво спрямо y .

Забележка 3. Нулевото решение на (3.1.1) е евентуално равномерно устойчиво, ако са изпълнени две допълнителни условия:

1. Областта на изменение на y вместо $\mathbb{R}^m$ е $S(\lambda) = \{y \in \mathbb{R}^m : \|y\| \leq \lambda\}$, $\lambda > 0$.
2. За функцията на Ляпунов $V(t, x)$ се иска и $V(t, x) \leq a(\|x\|)$, $a \in K$.

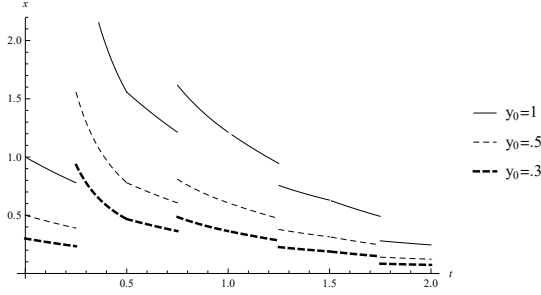
Следващият пример демонстрира резултата в Забележка 3.

Разглеждаме системата

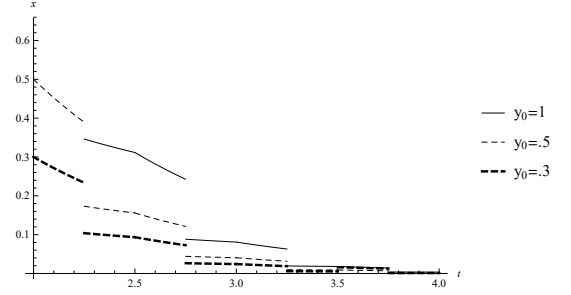
$$\begin{aligned}
 y' &= -y, \quad z' = z(t)y(t) \quad \text{при } t \in (t_i, s_i], \quad i = 0, 1, 2, \dots \\
 y(t) &= \frac{1}{t}y(s_i - 0) \quad z(t) = \Psi_i(t, y(s_i - 0), z(s_i - 0)) \\
 &\quad \text{при } t \in (s_i, t_{i+1}], \quad i = 0, 1, 2, \dots, \\
 y(t_0) &= y_0, \quad z(t_0) = z_0,
 \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

където $\Psi_i : (s_i, t_{i+1}] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, \dots$, като $\Psi_i(t, 0, 0) = 0$ при $t \in (s_i, t_{i+1}]$, $s_0 = 0.25$, $s_{i+1} = s_i + 0.5$, $i = 0, 1, 2, \dots$, $t_0 \in [0, s_0)$, $t_1 = 0.49$, $t_{i+1} = t_i + 0.5$, $i = 1, 2, \dots$.

Нулевото решение на системата (3.1.8) е евентуално равномерно устойчиво спрямо y и на Фигура 1 и Фигура 2 на следващата страница е показана неговата графика при различни y_0 и t_0 .



Фигура 1. Пример 1. Графика на функцията $y(t)$ за различни y_0 и $t_0 = 0$.



Фигура 2. Пример 1. Графика на функцията $y(t)$ за различни y_0 и $t_0 = 2$.

Забележка 4. Ако заменим 2(i) с условието:

$2^*(i) t \in [0, s_0) \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} (t_i, s_i)$ и всяко $x \in \mathbb{R}^n (x = (y, z))$ такива, че ако $t \geq \Theta(r)$ при $0 < r \leq \|y\| \leq \lambda$, е изпълнено неравенството ${}_{(3.1.1)} D^+ V(t, x) \leq -c(\|x\|)$, $c \in K$.

Тогава при условията на забележка 3. и ако е изпълнено условието:

3. Съществува положителна константа $M < \infty$ такава, че $\sum_{i=1}^{\infty} (s_i - t_i) \leq M$,

нулевото решение на (3.1.1) е евентуално равномерно асимптотично устойчиво спрямо y .

Забележка 5. Ще отбележим, че евентуалната равномерна асимптотична устойчивост означава, че решението клони към нулевото решение, при малки колебания на началното условие, за разлика от асимптотичното поведение на решенията да клонят към 0, когато не е задължително 0 да е решение на началната задача.

В.) Обобщена експоненциална устойчивост.

Дефиниция 7. Нулевото решение на система (3.1.1) се нарича обобщено експоненциално устойчиво, ако съществуват положителни константи b, M и μ такива, че за всяко начално условие $t_0 \in [0, s_0) \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} [t_i, s_i)$ е изпълнено

$$\|x(t)\| \leq \begin{cases} \|x_0\|^b \left(\prod_{i=0}^{k-1} e^{-\mu(s_i - t_i)} \right) e^{-\mu(t - t_k)}, & t \in [t_k, s_k], k = 0, 1, \dots, \\ M \|x_0\|^b \prod_{i=0}^k e^{-\mu(s_i - t_i)}, & t \in (s_k, t_{k+1}], k = 0, 1, \dots, \end{cases}$$

където $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ е решение на (3.1.1).

Ще използваме началната задача за обикновено диференциално уравнение

$$x'(t) = f(t, x) \text{ при } t \in [\tau, s_p], \quad x(\tau) = \tilde{x}_0, \quad (3.1.9)$$

където $\tau \in [0, s_0) \bigcup \bigcup_{i=1}^{\infty} [t_i, s_i)$, $p = \min\{i : \tau < s_i\}$, $\tilde{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

Забележка 6. Ако $b = 1$ обобщената експоненциална устойчивост се свежда до експоненциална устойчивост. От експоненциална устойчивост следва асимптотична устойчивост на системата (3.1.1).

Следната теорема дава достатъчни условия за обобщена експоненциална устойчивост на нулевото решение на (3.1.1).

Теорема 3. Нека са изпълнени условията:

1. (H1) при $F(t, x) \equiv 0$ и (H2) при $\psi_i(t, x(s_i - 0)) \equiv 0$.
2. Съществува функция $V(t, x)$, $V \in \Lambda(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$, $V(t, 0) = 0$ при $t \geq 0$ такава, че:
 - (i) $\alpha_1 \|x\|^a \leq V(t, x) \leq \alpha_2 \|x\|^{ab}$ при $t \in (\tau, s_p]$, $x \in \mathbb{R}^n$, за всяко $\tau \in [0, s_0) \bigcup \bigcup_{i=1}^{\infty} [t_i, s_i)$, където $p = \min\{i : \tau < s_i\}$ и α_1, α_2, a, b са положителни числа;
 - (ii) ${}_{(3.1.1)} D^+ V(t, x) \leq -\alpha_3 \|x\|^{ab}$ при $t \in (\tau, s_p]$, за всяко $\tau \in [0, s_0) \bigcup \bigcup_{i=1}^{\infty} [t_i, s_i)$, $x \in \mathbb{R}^n$, където α_3 е положителна константа;
 - (iii) $V(t, \phi_i(t, x)) \leq \alpha_4 \|x\|^a$ при $t \in (s_i, t_{i+1}]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $i = 0, 1, 2, \dots$, където α_4 е положителна константа такава, че $\alpha_4 \leq \alpha_1$.

Тогава нулевото решение на (3.1.1) е обобщено експоненциално устойчиво.

4. Устойчиви свойства на диференциални уравнения с продължително действащи импулси и закъснение.

В Глава 4 се изследва устойчивостта на решенията на диференциални уравнения с продължително действащи импулси и постоянно закъснение по две мерки, както и устойчивостта на решенията на диференциални уравнения с продължително действащи импулси и променливо закъснение от тип супремум.

А.) Устойчивост по две мерки при диференциални уравнения с постоянно закъснение и продължително действащи импулси.

Разглеждаме началната задача за системата диференциални уравнения с продължително действащи импулси и постоянно закъснение.

$$\begin{aligned} x' &= f(t, x(t-r)) \text{ при } t \in (t_i, s_i], \quad i = 0, 1, 2, \dots \\ x(t) &= \Phi_i(t, x(s_i - 0)) \text{ при } t \in (s_i, t_{i+1}], \quad i = 0, 1, 2, \dots, \\ x(t+t_0) &= \phi(t) \text{ при } t \in [-r, 0], \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

където $x \in \mathbb{R}^n$, $f : \bigcup_{i=0}^{\infty} [t_i, s_i] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Phi_i : [s_i, t_{i+1}] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, ($i = 0, 1, 2, \dots$), $r > 0$ е дадено реално число, $\phi : [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Разглеждаме съответната начална задача за закъсняващи диференциални уравнения без импулси.

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t-r)) \quad \text{при } t \in [\tau, s_p]; \\ x(t+\tau) &= \tilde{\phi}(t) \quad \text{при } t \in [-r, 0], \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

където $\tau \in [t_p, s_p]$, $p = 0, 1, 2, \dots$.

Нека са изпълнени условията:

(H5) Функцията $f \in C([0, s_1] \cup \bigcup_{i=0}^{\infty} [t_i, s_i] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $f(t, 0) = 0$ е такава, че за всяко начално условие $(\tau, \tilde{\phi}) : t_p \leq \tau < s_p, \tilde{\phi} \in \mathbb{R}^n$, началната задача (4.1.2) има решение $x(t, \tau, \tilde{\phi}) \in C^1([\tau, s_p], \mathbb{R}^n)$.

(H6) Функциите $\Phi_i \in C([s_i, t_{i+1}] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ и $\Phi_i(t, 0) = 0$, $t \in [s_i, t_{i+1}]$, при $i = 1, 2, \dots$.

Нека $E = \{\phi : [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n, \text{ които са непрекъснати навсякъде с евентуално изключение на краен брой точки } \tau_j \in [-r, 0], \text{ където са непрекъснати отляво}\}$.

Дефиниция 1. Нека $h, h_0 \in \Gamma(\mathbb{R}_+)$. Системата (4.1.1) се нарича:

- (h_0, h) -устойчива, ако за всяко $\epsilon > 0$ и всяко $t_0 \in [0, s_0] \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} [t_i, s_i]$ съществува $\delta = \delta(\epsilon, t_0) > 0$ такава, че за всяка начална функция $\psi \in E$, за която $h_0(t_0 + s, \psi) < \delta$ при $s \in [-r, 0]$, е изпълнено неравенството $h(t, x(t; t_0, \psi)) < \epsilon$ при $t \geq t_0$;
- (h_0, h) -равномерно устойчива, ако за всяко $\epsilon > 0$ съществува $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ такава, че за всяка начална точка $t_0 \in [0, s_0] \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} [t_i, s_i]$ и всяка начална функция $\psi \in E$, за която $h_0(t_0 + s, \psi) < \delta$ при $s \in [-r, 0]$, е изпълнено неравенството $h(t, x(t; t_0, \psi)) < \epsilon$ при $t \geq t_0$.

Теорема 1. Ако V е h -положително дефинирана и слабо h_0 -затихваща, h_0 е по-фина от h и ако са изпълнени условията:

1. (H5) и (H6).
2. Мерките $h, h_0 \in \Gamma(\mathbb{R}_+)$.
3. За всички точки $t \in (s_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, \dots$ и $v \in \mathbb{R}^n$ такива, че $(t, v) \in S(h, \lambda)$, където $\lambda > 0$ е реално число, е изпълнено $(t, \Phi_i(t, v)) \in S(h, \lambda)$.
4. Съществува функция $V \in \Lambda(\mathbb{R}_+, S(h, \lambda))$ такава, че:
 - (i) за всяка функция $\psi \in E$ и всяко $t \in [0, s_0] \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} [t_i, s_i]$ такива, че $(t, \psi(t+s)) \in S(h, \lambda)$ при $s \in [-r, 0]$, и $V(t, \psi(0)) \geq \sup_{s \in [-r, 0]} V(t+s, \psi(s))$ е изпълнено неравенството

$$(4.1.1) D^+V(t, \psi(0)) \leq 0 ;$$

(ii) за всяка точка $v \in \mathbb{R}^n$ и всяко $t \in (s_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, \dots$ такива, че $(t, v) \in S(h, \lambda)$ и $(t, \Phi_i(t, v)) \in S(h, \lambda)$ е изпълнено неравенството $V(t, \Phi_i(t, v)) \leq V(s_i - 0, v)$.

Тогава системата (4.1.1) е (h_0, h) -устойчива.

Забележка 1. Ако h_0 е равномерно по-фина от h , то системата (4.1.1) е (h_0, h) -равномерно устойчива при същите други условия.

Б.) Устойчивост за диференциални уравнения със супремум и продължително действащи импулси.

Разглеждаме началната задача за системата от диференциални уравнения с продължително действащи импулси и супремум.

$$\begin{aligned} x' &= f(t, x(t), \sup_{s \in [\tau(t), \sigma(t)]} x(s)) \text{ при } t \in (t_i, s_{i+1}], \quad i = 0, 1, 2, \dots \\ x(t) &= \Phi_i(t, x(s_i - 0)) \text{ при } t \in (s_i, t_i], \quad i = 1, 2, \dots, \\ x(t + t_0) &= \phi(t) \text{ при } t \in [-r, 0], \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

където $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f : [0, s_1] \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} (t_i, s_{i+1}] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Phi_i : [s_i, t_i] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(i = 1, 2, \dots)$, $r > 0$ е реално число, $\phi : [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\tau, \sigma : \mathbb{R}_+ \rightarrow [-r, \infty)$.

За всяка функция $\phi \in E$ дефинираме $\|\phi\|_0 = \sup_{s \in [-r, 0]} \|\phi(s)\|$.

Нека са изпълнени следните условия:

(A1) Функцията $f \in C([0, s_1] \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} (t_i, s_{i+1}] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $i = 1, 2, \dots$

(A2) За всяко естествено число i функциите $\Phi_i \in C([s_i, t_i] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

(A3) Функциите $\tau, \sigma \in C(\mathbb{R}_+, [-r, \infty))$ са такива, че $t - r \leq \tau(t) \leq \sigma(t) \leq t$ при $t \geq 0$.

(A4) Функциите $\Phi_i(t, x)$ и $f(t, x, y)$ са такива, че $\Phi_i(t, 0) = 0$ при $t \in [s_i, t_i]$, $x \in \mathbb{R}^n$ и $f(t, 0, 0) = 0$ при $t \in [0, s_1] \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} [t_i, s_{i+1}]$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \dots$

Ще използваме следното скалярно диференциално уравнение с продължително действащи импулси.

$$\begin{aligned} u' &= g(t, u) \text{ при } t \in \bigcup_{i=0}^{\infty} (t_i, s_{i+1}], \\ u(t) &= \Xi_i(t, u(s_i - 0)) \text{ при } t \in (s_i, t_i], \quad i = 1, 2, \dots, \\ u(t_0) &= u_0, \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Нека са изпълнени следните условия:

(A5) Функцията $g \in C([0, s_1] \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} [t_i, s_{i+1}] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ е такава, че $g(t, 0) = 0$ при $t \in [0, s_1] \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} [t_i, s_{i+1}]$.

(A6) За всяко естествено число i функциите $\Xi_i \in C([s_i, t_i] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ са такива, че $\Xi_i(t, 0) = 0$ при $t \in [s_i, t_i]$ и $\Xi_i(t, u) \leq \Xi_i(t, v)$ при $u \leq v$, $u, v \in \mathbb{R}$, $t \in [s_i, t_i]$.

Теорема 2. Нека са изпълнени следните условия:

1.(A1)-(A6).

2. Съществува функция $V(t, x) \in \Lambda([-r, \infty), \mathbb{R}^n)$ такава, че:

(i) За всяко $t \in [0, s_1] \bigcup \bigcup_{i=1}^{\infty} (t_i, s_{i+1}]$ и всяка функция $\psi \in E$ такава, че $V(t, \psi(0)) \geq \sup_{s \in [-r, 0]} V(t + s, \psi(s))$ е изпълнено неравенството $D_{(4.1.3)}^+ V(t, \psi(0), \psi) \leq g(t, V(t, \psi(0)))$;

(ii) За всяка точка $\nu \in \mathbb{R}^n$ и всяко $t \in [s_i, t_i]$, $i = 1, 2, \dots$ е изпълнено неравенството $V(t, \Phi_i(t, \nu)) \leq \Xi_i(t, V(s_i - 0, \nu))$;

(iii) изпълнено е неравенството $a(\|x\|) \leq V(t, x) \leq b(\|x\|)$, $t \geq -r$, $x \in \mathbb{R}^n$, където $a, b \in K$.

3. Нулевото решение на скаларното уравнение (4.1.4) е устойчиво.

Тогава нулевото решение на (4.1.3) е устойчиво.

Забележка 2. Нулевото решение на (4.1.3) е равномерно устойчиво при условията на Теорема 2., ако областта на изменение на x в условие 2. се замени с $S(\lambda)$, нулевото решение на (4.1.4) е равномерно устойчиво и:

1. Функцията $\psi \in E$ в 2(i) е такава, че $\|\psi\|_0 \leq \lambda$.

2. За всяко естествено число i , всяко $t \in [s_i, t_i]$ и всяко $\nu \in S(\lambda)$ такава, че $\Phi_i(t, \nu) \in S(\lambda)$ е изпълнено 2(ii).

Забележка 3. Нулевото решение на (4.1.3) е равномерно асимптотично устойчиво, ако са изпълнени условията:

1.(A1),(A2),(A3) и (A4).

2.(A7) Съществува положителна константа $M < \infty$ такава, че $\sum_{i=1}^{\infty} (t_i - s_i) \leq M$.

3. Съществува функция $V(t, x) \in \Lambda([-r, \infty), S(\lambda))$ такава, че

(i) За всяко $t \in [0, s_1] \bigcup \bigcup_{i=1}^{\infty} (t_i, s_{i+1}]$ и всяка функция $\psi \in E$ такава, че $\|\psi\|_0 \leq \lambda$ за която $V(t, \psi(0)) \geq \sup_{s \in [-r, 0]} V(t + s, \psi(s))$ е изпълнено неравенството

$$D_{(4.1.3)}^+ V(t, \psi(0), \psi) \leq -c(\|\psi(0)\|), \quad (4.1.5)$$

където $\lambda > 0, c \in K$;

(ii) за всяко естествено число i , всяко $t \in [s_i, t_i]$ и всяко $\nu \in S(\lambda)$ такава, че $\Phi_i(t, \nu) \in S(\lambda)$ е изпълнено неравенството

$$V(t, \Phi_i(t, \nu)) \leq V(s_i - 0, \nu);$$

(iii) изпълнени са неравенствата $a(\|x\|) \leq V(t, x) \leq b(\|x\|)$, $t \geq -r$, $x \in S(\lambda)$, където $a, b \in K$.

В.) Устойчивост на равновесната точка на един модел за невронни мрежи със супремум и продължително действащи импулси.

Разглеждаме следната модификация на модела за невронни мрежи на Hopfield([44]):

$$\begin{aligned} x'_i(t) &= -c_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij}(t)g_j\left(\sup_{s \in [\tau(t), \sigma(t)]} x_j(s)\right) + I_i(t) \\ \text{при } t &\in \cup_{k=0}^{\infty} (t_k, s_{k+1}], \quad i = 1, 2, \dots, n \\ x_i(t) &= \Phi_{k,i}(t, x_i(s_k - 0)) \quad \text{при } t \in (s_k, t_k], \quad k = 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots, n, \\ x_i(t_0 + s) &= \phi_i(s) \quad \text{при } s \in [-r, 0], \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

където n е броя на невроните, с $x_i(t)$ е означен усреднения мембранен потенциал на i -ия неврон в момента t , $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$, $\tau, \sigma : \mathbb{R}_+ \rightarrow [-r, \infty)$, $c_i(t) > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ е саморегулиращия се параметър на i -ия неврон, $a_{ij}(t), b_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ изразяват синаптичната връзка между i -ия неврон и j -ия неврон в момента t и за техните максимални стойности в минал интервал $[\tau(t), \sigma(t)]$ от време, с $f_j(x_j(t))$ означаваме активиращите функции на невроните в момента t , $g_j(\sup_{s \in [\tau(t), \sigma(t)]} x_j(s))$ е

активиращата функция на j -ия неврон, в момента на неговата максимална стойност, в интервала $[\tau(t), \sigma(t)]$, $I = (I_1, I_2, \dots, I_n)$ е вектора изразяващ външното въздействие, (s_k, t_k) , $k = 1, 2, \dots$ са интервалите, в които действа импулсното въздействие активиращо се в момента s_k и функциите $\Phi_{k,i}(t, u, \nu)$, $k = 1, 2, \dots$ са импулсните функции, определящи импулсното въздействие на i -ия неврон в интервала (s_k, t_k) .

Разглеждаме устойчивостта на равновесната точка на (4.1.6) в два случая:

1.) Когато активиращите функции са Липшицови.

Нека следните условия са изпълнени:

(A8). Съществуват положителни реални числа L_i , $i = 1, 2, \dots, n$ такива, че

$$|f_i(u) - f_i(v)| \leq L_i |u - v|, i = 1, 2, \dots, n \text{ при } u, v \in \mathbb{R} : |u - x_i^*| \leq \lambda, |v - x_i^*| \leq \lambda, \text{ където } x^* \in \mathbb{R}^n \text{ е равновесната точка на система (4.1.6).}$$

(A9). Съществуват положителни реални числа C_i , $i = 1, 2, \dots, n$ такива, че

$$|g_i(u) - g_i(v)| \leq C_i |u - v|, i = 1, 2, \dots, n \text{ при } u, v \in \mathbb{R} : |u - x_i^*| \leq \lambda, |v - x_i^*| \leq \lambda, \text{ където } x^* \in \mathbb{R}^n \text{ е равновесната точка на система (4.1.6).}$$

(A10). Съществуват положителни реални числа B_i , $i = 1, 2, \dots, n$ такива, че $c_i(t) \geq B_i$, при $t \in [0, s_1] \cup_{k=1}^{\infty} (t_k, s_{k+1}]$.

(A11). Съществува положително реално число K такова, че е изпълнено неравенството

$$-2 \min_{i=1,2,\dots,n} B_i + A(t) + D(t) + P(t) \leq -K, t \in [0, s_1] \cup_{k=1}^{\infty} [t_k, s_{k+1}], \quad (4.1.7)$$

където

$$\begin{aligned} A(t) &= \sum_{j=1}^n \left(\max_{i=1,2,\dots,n} a_{ij}(t) L_j + \max_{i=1,2,\dots,n} b_{ij}(t) C_j \right); \\ D(t) &= \sum_{i=1}^n \max_{j=1,2,\dots,n} b_{ij}(t) C_j; \\ P(t) &= \sum_{i=1}^n \max_{j=1,2,\dots,n} a_{ij}(t) L_j. \end{aligned}$$

(A12). Съществува положително реално число λ такова, че при $k = 1, 2, \dots$ и $x \in \mathbb{R}^n : \|x - x^*\| \leq \lambda$ са изпълнени неравенствата

$$\sum_{i=1}^n (\Phi_{k,i}(t, x_i) - \Phi_{k,i}(t, x_i^*))^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^*)^2, t \in [s_k, t_k],$$

където $x^* \in \mathbb{R}^n$ е равновесната точка на (4.1.6).

Ако условията (A7)-(A12) са изпълнени, тогава равновесната точка x^* на система (4.1.6) е равномерно асимптотично устойчива.

2.) Когато активиращите функции са не-Липшицови.

Нека е изпълнено условието:

(A13). Съществува функция $\xi \in C([0, s_1] \cup_{k=1}^{\infty} [t_k, s_{k+1}], \mathbb{R})$ такова, че за всяка точка $x : x - x^* \in S(\lambda)$ и всяко $t \in [0, s_1] \cup_{k=1}^{\infty} [t_k, s_{k+1}]$ е изпълнено неравенството

$$(x_i - x_i^*) \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(t) (f_j(x_j) - f_j(x_j^*)) \right) \leq \xi(t) (x_i - x_i^*)^2, i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.1.8)$$

където x^* е равновесната точка на (4.1.6).

Ако са изпълнени условията (A5), (A7), (A9), (A10), (A13) и функцията

$\gamma(t) = \min_{i=1,2,\dots,n} B_i - \xi(t) - \frac{1}{2}M(t) - \frac{1}{2}N(t)$ е ограничена отдолу, т.е. $0 < D \leq \gamma(t)$, при $t \in [0, s_1] \cup_{k=1}^{\infty} [t_k, s_{k+1}]$, където

$$M(t) = \sum_{j=1}^n \max_{i=1,2,\dots,n} b_{ij}(t) C_j, N(t) = \sum_{i=1}^n \max_{j=1,2,\dots,n} b_{ij}(t) C_j.$$

Тогава равновесната точка x^* на системата (4.1.6) е равномерно асимптотично устойчива.

III. Основни приноси на дисертационния труд.

Основните приноси на дисертационната работа могат да се оформят в три групи:

А. Асимптотично поведение на решенията на диференчни и диференциални уравнения :

А1. Линейни неутрални диференчни уравнения от I ред с максимум - получени са достатъчни условия за сходимост към 0 на положителните решения. Тези условия зависят съществено от коефициента p_n в уравнението и допълват изследванията на [23] в случая, когато $-1 < p_n < p$.

А2. Частен случай на неутрално диференциално уравнение от I-ви ред с целочислен аргумент от обобщен тип - направено е цялостно изследване на асимптотичните свойства на това неутрално диференциално уравнение в зависимост от стойностите на неговите коефициенти. Уравнението е обобщение на разглежданото в [19],[58],[75] неутрално диференциално уравнение с целочислен аргумент.

Б. Осцилационни свойства на решенията на диференчни и диференциални уравнения:

Б1. Линейни неутрални диференчни уравнения от I и II ред с максимум - за уравнението от I ред са допълнени изследванията на Luo [70] при неразгледания случай, когато $p < p_n < -1$. При уравнението от II ред са получени достатъчни условия за осцилиране при $0 \leq p_n < 1$, които са по-малко ограничителни в сравнение с условието $\sum_{n=n_0}^{\infty} q_n = \infty$, използвано в изследванията на Bainov и Luo [18]. За линейното диференчно уравнение от II ред с максимум са получени и достатъчни условия за неосцилиране на решенията.

Б2. Частен случай на неутрално диференциално уравнение от I ред с целочислен аргумент от обобщен тип - за това уравнение получаваме достатъчни условия за осцилиране на решенията в два частни случая.

В. Устойчивост на решенията на диференциални уравнения с продължително действащи импулси:

В1. Нелинейни диференциални уравнения с продължително действащи импулси - дефинирани са и са изучени неизследвани досега видове устойчивост за тези уравнения:

1. Интегрална устойчивост по две мерки, която е обобщение на устойчивост с една мярка, т.е. отклонението на началните данни е спрямо едната мярка, а на решението спрямо другата.

2. Евентуална устойчивост спрямо част от променливите - при нея се иска решението да остава устойчиво само спрямо някои по-важни променливи.

3. Обобщена експоненциална устойчивост, която е обобщение на обикновенната експоненциална устойчивост.

Наличието на продължително действащи импулси води не само до допълнителни технически затруднения, но и до използване на производна на Дини на частично непрекъснати функции на Ляпунов само за неимпулсните интервали. Получените резултати допълват изследванията на [47] за интегрална устойчивост по две мерки на решенията на диференциални уравнения с моментни импулси, обобщават резултатите на [32] за евентуална устойчивост спрямо част от променливите на решенията на системи обикновени диференциални уравнения и на [55] за обобщена експоненциална устойчивост на решенията на закъсняващи функционално- диференциални уравнения.

В2. Нелинейни диференциални уравнения с постоянно закъснение и продължително действащи импулси - намерени са достатъчни условия за устойчивост и равномерна устойчивост по две мерки, което е обобщение на стандартните методи с една мярка. Получените резултати са обобщение на изследванията на [29],[49] за диференциални уравнения с продължително действащи импулси и постоянно закъснение в случая, когато се използват две мерки.

В3. Диференциални уравнения със супремум и продължително действащи импулси - дефинирано е нелинейно диференциално уравнение с продължително действащи импулси и супремум и са изучени обикновена, равномерна и равномерно-асимптотична устойчивост на неговото нулево решение. Получените резултати обобщават резултати намерени в [17] и [42] за диференциални уравнения със супремум в неизследвания случай, когато системата е с продължително действащи импулси.

В4. Модели на невронни мрежи със супремум -приложени са резултатите от В3 при изследването на равномерно асимптотичната устойчивост на равновесната точка на модел на невронни мрежи с продължително действащи импулси в случая, когато текущото състояние на всеки неврон зависи от неговото максимално състояние в предишен интервал. Докато в повечето изследвания на невронни мрежи активиращата функция между невроните е само една, в дисертационния труд е разгледан модел с различни локално Липшицови активиращи функции между невроните. Приведен е и конкретен пример, при който са изпълнени условията за равномерно асимптотична устойчивост. Разгледан е и случая,когато активиращите функции не са Липшицови. Получените резултати са обобщение на резултатите на [12] за модели невронни мрежи с продължително действащи импулси в случая, когато системата е със супремум.

Връзките между приносите, целите, задачите, мястото на описание в дисертационния труд и направените публикации са следните:

Приноси	Цели	Задачи	Параграфи	Публикации
A1	1.	I	1.1	[8]
A2	2.	II	2.1, 2.2	[1], [7],[11]
B1	1.	I	1.1, 1.2	[8], [9]
B2	2.	II	2.3	[1], [7]
B1	3.	III	3.1,3.2,3.3.	[2],[4],[10]
B2	3.	III	4.1	[3]
B3	3.	III	4.2	[5]
B4	3.	III	4.3	[6]

Апробация на резултатите

Част от получените резултати са докладвани на научните конференции:

1. Национална научна конференция "Образование и наука - за личностно и обществено развитие гр. Смолян, 27–28 октомври, 2017, България.
2. AMEE Technical University of Sofia, Sozopol, June 08–13, 2018, Bulgaria.
3. International Conference on Applied Analysis and Algebra, Istanbul, 3 July – 6 July, 2018, Turkey.
4. AMEE Technical University of Sofia, Sozopol, June 07–13, 2019, Bulgaria.

Някои от резултатите са реализирани при изпълнението на следните проекти:

1. Научен проект МУ-17-ФМИ-007 към НПД на ПУ 'Паисий Хилендарски', 2017-2018г.
2. Научен проект МУ-19-ФМИ-009 към НПД на ПУ 'Паисий Хилендарски', 2019-2020г.
3. Научен проект КП-06-Н32/7 към ФНИ, София.

Публикации по дисертационния труд

публикации с импакт ранг

- [1] (**SJR: 0.304**) KOSTADINOV T., PROYTCHIEVA V., Oscillatory and asymptotic properties of nonlinear first order neutral differential equations with piecewise constant argument of generalized type, *IJPAM*, **110**, 3, (2016), 547–562, ISSN:1314-3395.
- [2] (**SJR: 0.165**) HRISTOVA S., IVANOVA K., KOSTADINOV T., Generalized exponential stability of differential equations with non-instantaneous impulses, *AIP Conference Proceeding*, **1910**, (2017), ISSN: 1551-7616.

- [3] **(SJR: 0.165)** HRISTOVA S., IVANOVA K., KOSTADINOV T., Stability with two measures of delay differential equations with non-instantaneous impulses, *AIP Conference Proceeding*, **2048**, (2018), ISSN: 1551-7616.
- [4] **(SJR: 0.244)** IVANOVA K., KOSTADINOV T., Eventual stability with two measures for nonlinear differential equations with non-instantaneous impulses, *IJPAM*, **116**, 3, (2017), 751–765, ISSN: 1314–3395.
- [5] **(SJR: 0.19)** HRISTOVA S., IVANOVA K., KOSTADINOV T., Stability of non-instantaneous impulsive differential equations with supremum, *AIP Conference Proceeding*, **2172**, (2019), ISSN: 1551-7616.
- [6] **(SJR: 0.19)** HRISTOVA S., IVANOVA K., KOSTADINOV T., Stability of neural networks with non-instantaneous impulses and supremum, *AIP Conference Proceeding*, **2172**, (2019), ISSN: 1551-7616.

публикации реферирани в MathSciNet или ZbMath

- [7] KOSTADINOV T., PROYTCHIEVA V., Oscillatory and asymptotic properties of nonlinear first order neutral differential equations with piecewise constant argument of generalized type with positive coefficients, *IeJPAM*, **12**, 1, (2018), 151–166, ISSN: 1314–0744.

публикации в списания с рецензенти

- [8] KOSTADINOV T., Oscillation and nonoscillation of first order neutral difference equations with Maxima, *J. Tech. Univ. Plovdiv Fundam. Sci. Appl.*, **7**, (1999), 53–63, ISSN:1310-8271.
- [9] KOSTADINOV T., PROYTCHIEVA V., A note on the oscillation of second order difference neutral equations with Maxima, *J. Tech. Univ. Plovdiv Fundam. Sci. Appl.*, **8**, (1999), 79–84, ISSN:1310-8271.
- [10] HRISTOVA S., KOSTADINOV T., Eventual stability with respect to part of variables for nonlinear differential equations with non-instantaneous impulses, *J.Math.Ext.*, **14**, 1, (2020), 171-187, ISSN: 1735– 8299.

публикации в сборници на национални конференции

- [11] КОСТАДИНОВ Т., Практическо приложение на една теорема за асимптотическото поведение на решенията на неутрално диференциално уравнение с целочислен аргумент и постоянни коефициенти, *Образование и наука- за личностно и обществено развитие, национална научна конференция*, гр. Смолян , 27-28 октомври, (2017), 123–128, ISBN:978-954-8767-65-1.

Списък на забелязаните цитирания на публикуваните резултати от дисертацията

- Статия [2] е цитирана в:

[1] (SJR: 0.139) TERZIEVA R., Some phenomena for non-instantaneous impulsive differential equations, *IJPAM*, **119**, 3, (2018), 483-490.

- Статия [4] е цитирана в:

[1] (SJR: 0.136) DOGRA R., MAHAJAN P., SRIVASTAVA S., Uniform eventual practical stability of impulsive differential system in terms of two measures, *Malaya Journal of Mathematik*, **7**, 2, (2019), 245-250.

IV. Annotation of the Ph. D. Thesis

OSCILLATORY, ASYMPTOTIC AND STABILITY PROPERTIES OF DISCRETE AND CONTINUOUS DIFFERENTIAL EQUATIONS

Author: Todor Iliev Kostadinov

This PhD thesis is devoted to the study of the oscillatory, asymptotic and stability properties of several types discrete and continuous differential equations.

In Chapter 1 we consider linear neutral difference equations of first and second order with "maxima" and we study the oscillatory and asymptotic properties of their solutions. For the equation of first order we find sufficient conditions about tending to zero of the positive solutions when the coefficient $p_n > -1$ and $l \geq k$. We extend this conditions when $k > l$. We find also sufficient conditions for oscillation of the solutions of the first order difference equation when $k > l$, and $p \leq p_n < -1$. For the equation of second order we find sufficient conditions for oscillation when $0 \leq p_n < 1$. We will mention that our conditions for the oscillation in this case are better than the conditions of the other authors for the same problem.

In Chapter 2 we consider a neutral differential equation of first order with piecewise constant argument of generalized type. We give a definition for the solution and prove its existence and uniqueness. We also prove a basic Lema which we use for proving all the theorems about asymptotic behavior of the solutions. We classify this properties depending on the equations coefficients p and q . We find relation between this equation and a difference equation when $p = 1$ and use this relation to find sufficient conditions for the oscillation of the solutions when $p = 1$. We also find sufficient conditions for the oscillation of the solutions when $p = -1$.

In Chapter 3 we consider an initial value problem for the system of non-instantaneous impulsive differential equations. We introduce three different types of stability of its solutions: integral stability with two measures, eventual stability with respect to a part of variables and generalized exponential stability. We find sufficient conditions for uniform integral stability with two different measures. We find also sufficient conditions for eventual, uniformly eventual and eventual uniformly asymptotical stability with respect to a part of variables and for generalized exponential stability for the zero solution of the initial value problem. We are using Lyapunov functions and theirs Dini's derivates to get this conditions.

In Chapter 4 we consider three systems of differential equations with delay of the argument and non-instantaneous impulses and take attention to the stability of their zero solution. We find sufficient conditions for stability and uniform stability with two measures of the zero solution for a system of delay differential equations with non-instantaneous impulses. We find also conditions for stability, uniform stability and uniform asymptotically stability for the zero solution of a system of non-instantaneous impulsive differential equations with supremum. In the third paragraph of the Chapter 4 we consider a model of neural networks with non-instantaneous impulses and supremum and we investigate the uniform asymptotically stability of its equilibrium point in two cases: when the activation functions are Lipschitz and when they aren't Lipschitz.

Литература

- [1] ВОРОТНИКОВ В., РУМЯНЦЕВ В., *Основы теории частичной устойчивости и управления*, НТИ(филиал) УрФУ, (2014).
- [2] ЕЛЬСГОЛЦ Л., НОРКИН С., *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом*, Издательство Наука Москва, (1971).
- [3] КОСТАДИНОВ Т., Практическо приложение на една теорема за асимптотическото поведение на решенията на неутрално диференциално уравнение с целочислен аргумент и постоянни коефициенти, *Образование и наука- за личностно и обществено развитие, национална научна конференция*, гр. Смолян , 27-28 октомври, (2017), 123–128, ISBN:978-954-8767-65-1.
- [4] МЫШКИС А., О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, *Успехи Математических Наук*, **32**, (1977), 173-202.
- [5] ШЕВЕЛО В., *Осцилляція решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом*, Наукова думка, Киев, (1978).
- [6] ABDALLA M., SOLIMAN A., Integral stability criteria of nonlinear differential systems, *Math. Comput. Model.*, **48**, 1-2, (2008), 258-267.
- [7] AFTABIZADEH A., WIENER J., Oscillatory and periodic solutions of an equation alternately of retarded and advanced type, *Appl. Anal.*, **23**, (1986), 219-231.
- [8] AFTABIZADEH A., WIENER J., XU J., Oscillatory and periodic solutions of delay differential equations with piecewise constant argument, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **99**, 4, (1987), 673-679.
- [9] AFTABIZADEH A., WIENER J., Differential equations alternately of retarded and advanced type, *J. Math. Anal. Appl.*, **129**, 1, (1988), 243-255.

- [10] AGARWAL R., HRISTOVA S., O'REGAN D., *Non-instantaneous impulses in differential equations*, Springer, (2017).
- [11] AGARWAL R., HRISTOVA S., O'REGAN D., Stability by Lyapunov like functions of nonlinear differential equations with non-instantaneous impulses, *J. Appl. Math. Comput.*, **53**, (1-2), (2015), 147-168.
- [12] AGARWAL R., HRISTOVA S., O'REGAN D., TERZIEVA R., Stability properties of neural networks with non-instantaneous impulses, *Math. Biosci. Eng.*, **16**, 3, (2019), 1210-1227, . doi: 10.3934/mbe.2019058.
- [13] AKHMET M., Integral manifolds of differential equations with piecewise constant argument of generalized type, *Nonlinear Anal.: Theory, Methods and Appl.*, **66**, 2, (2005), 367-383.
- [14] ALONSO A., HONG J., O'BAYA R., Almost periodic type solutions of differential equations with piecewise constant argument via almost periodic type sequences, *Appl. Math. Lett.*, **13**, 2, (2000), 131-137.
- [15] ATICI F., CABADA A., FERREIRO J., First order difference equations with maxima and nonlinear functional boundary value conditions, *J. Difference Equ. Appl.*, **12**, (2006), 565-576.
- [16] BAI L., NIETO J.,UZAL J., On a delayed epidemic model with non-instantaneous impulses, *Commun. Pure Appl. Anal.*, **19**, 4, (2020), 1915-1930, DOI:10.3934/cpaa.2020084.
- [17] BAINOV D., HRISTOVA S., *Differential equations with maxima*, Taylor and Francis, CRC Press, 2011.
- [18] BAINOV D., LUO J., Oscillatory and asymptotic behavior of second order neutral difference equations with maxima, *J. Comput. Appl. Math.*, **131**, 1-2, (2001), 333-341.
- [19] BAINOV D., KOSTADINOV T., PETROV V., Oscillatory and asymptotic prorties of nonlinear first order neutral differential equations with piecewise constant argument, *J. Math. Anal. Appl.*, **194**, (1995), 612-639.
- [20] BAINOV D., LAKSHMIKANTHAM V., SIMEONOV P., *Theory of impulsive differential equations*, Series in Modern Applied Mathematics, **6**, (1989).
- [21] BAINOV D., SIMEONOV P., *Systems with impulse effect: Stability theory and applications*, Ellis Horwood, Chichester, (1989).
- [22] BUSENBERG.S., COOKE K.L., Models of vertically transmitted diseases with sequential-continuous dynamics, *Nonlinear Phenomena in Mathematical Sciences*, (1982), 179-187.

- [23] CHENG S.S., ZHANG G., Asymptotic dichotomy for nonoscillatory solutions of a nonlinear difference equation, *Appl. Mathematicae*, **25**, 4, (1999), 393-399.
- [24] CHIU K., JENG J., *Stability of oscillatory solutions of differential equations with a general piecewise constant argument of mixed type*, Mathematishe Nachrichten, (2015).
- [25] CHIU K., PINTO M., Oscillatory and periodic solutions in alternately advanced and delayed differential equations, *Carpathian J. Math.*, **29**, 2, (2013), 149-158.
- [26] CHIU K., PINTO M., Periodic solutions of differential equations with a general piecewise constant argument and applications, *EJQTDE*, **46**, (2010), 1-19.
- [27] COOKE K., WIENER J., Retarded differential equations with piecewise constant delay, *J.Math.Anal.Appl.*, **99**, (1984), 265-297.
- [28] COOKE K., WIENER J., An equation alternately of retarded and advanced type, *Proc.Am. Math. Soc.*, **99**, 4, (1987), 726-732.
- [29] FECKAN M., HRISTOVA S., IVANOVA K., Practical Stability of Differential Equations with State Dependent Delay and Non-instantaneous Impulses, *Commun. Math. Anal.*, **22**, 2, (2019), 1-17.
- [30] FECKAN M., WANG J., A general class of impulsive evolution equations, *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, **46**, 2, (2015), 915-934.
- [31] FECKAN M., WANG J., ZHOU Y., Periodic solutions for nonlinear evolution equations with non-instantaneous impulses, *Nonauton. Dyn. Syst.*, **1**, (2014), 93-101.
- [32] FILIMONOV M.J., Asymptotic stability with respect to part of the variables for solutions of systems of ordinary differential equations, *Differ. Equ.*, **56**, (2020), 710-720, <https://doi.org/10.1134/S001226612006004X>.
- [33] GAO Y., ZHANG G., Oscillation of nonlinear first order neutral difference equations, *Appl. Math. E-Notes*, **1**, (2001), 5-10.
- [34] GLEIK J., *Chaos: Making a new science*, Penguin Books, New York, (1987).
- [35] GOPALSAMY K., Stability of artificial neural networks with impulses, *Appl. Math. Comput.*, **154**, (2004), 783-813.
- [36] GRAMMATIKOPOULOS M., GROVE E., LADAS G., Oscillation and asymptotic behavior of neutral differential equations with deviating arguments, *Appl. Anal.*, **22**, (1986), 1-19.

- [37] GUO C., ZENG R., WANG Q., Analytical approximation solution for differential equations with piecewise constant arguments of alternately advanced and retarded type, *Commun.Comput.Inf. Sci.*, **392**, (2013), 242-251.
- [38] GYORI I., LADAS G., Linearized oscillations for equations with piecewise constant arguments, *Differ. Integral Equ.*, **2**, 2, (1989), 123-131.
- [39] GYORI I., LADAS G., PAKULA L., Conditions for oscillation of difference equations with applications to equations with piecewise constant arguments, *SIAM J.Math.Anal.*, **22**, 3, (1991), 269-773.
- [40] GYORI I., LADAS G., *Oscillation theory of delay differential equations*, Clarendon Press, Oxford, (1991).
- [41] HALE J.K., *Theory of functional differential equations*, Springer- Verlag, New York, (1971).
- [42] HENDERSON J., HRISTOVA S., Eventual practical stability and cone valued Lyapunov functions for differential equations with maxima, *Commun. Appl. Anal.*, **14**, 4, (2010), 515-526.
- [43] HERNANDEZ E., O'REGAN D., On a new class of abstract impulsive differential equations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **141**, 5, (2013), 1641-1649.
- [44] HOPFIELD J.J., *Neutral networks and phisical systems with emergent collective computational abilities*, Proc. Nat. Acad. Sci., USA, **79**, (1982), 2554-25558.
- [45] HRISTOVA S., Razumikhin method and cone valued Lyapunov functions for impulsive differential equations with supremum, *Inter. J. Dynam. Syst. Diff. Eq.*, **2**, 3, (2009), DOI:10.1504/IJDSDE.2009.031103.
- [46] HRISTOVA S., Lipschitz stability for impulsive differential equations with supremum, *Int. Elect. J. Pure Appl. Math*, **1**, 4, (2010), 345-358.
- [47] HRISTOVA S., Integral stability in terms of two measures for impulsive functional differential equations, *Math. Comput. Model.*, **51**, (2010), 100-108.
- [48] HRISTOVA S., *Qualitative investigations and approximate methods for impulsive equations*, Nova Sci. Publ. Inc., New York, (2009).
- [49] HRISTOVA S., IVANOVA K., Lipschitz stability of delay differential equations with non-instantaneous impulses, *Dyn. Syst. Appl.*, **28**, 1, (2019), 167-181.
- [50] HRISTOVA S., IVANOVA K., KOSTADINOV T., Stability with two measures of delay differential equations with non-instantaneous impulses, *AIP Conference Proceeding*, **2048**, (2018).

- [51] HRISTOVA S., IVANOVA K., KOSTADINOV T., Generalized exponential stability of differential equations with non-instantaneous impulses, *AIP Conference Proceeding*, **1910**, (2017), Article number 04000543.
- [52] HRISTOVA S., IVANOVA K., KOSTADINOV T., Stability of non-instantaneous impulsive differential equations with supremum, *AIP Conference Proceeding*, **2172**, (2019), ISSN: 1551-7616.
- [53] HRISTOVA S., IVANOVA K., KOSTADINOV T., Stability of neural networks with non-instantaneous impulses and supremum, *AIP Conference Proceeding*, **2172**, (2019), ISSN: 1551-7616.
- [54] HRISTOVA S., KOSTADINOV T., Eventual stability with respect to part of variables for nonlinear differential equations with non-instantaneous impulses, *J.Math.Ext.*, **14**, 1, (2020), 171-187.
- [55] HRISTOVA S., PROJCHEVA V., Weighted exponential stability for generalized delay functional differential equations with bounded delays, *Adv. Diff. Eq.*, (2014), 180-185.
- [56] HRISTOVA S., TERZIEVA R., Lipschitz stability of differential equations with non-instantaneous impulses, *Adv. Diff. Eq.*, **1**, (2016), 322-335.
- [57] HRISTOVA S., TERZIEVA R., Stability with respect to part of variables of nonlinear differential equations with non-instantaneous impulses, *AIP Conference Proceedings*, (2018), DOI:10.1063/1.5082080 .
- [58] HUANG Y., Oscillations and asymptotic stability of solutions of first order neutral differential equations with piecewise constant argument, *J.Math.Anal.Appl.*, **149**, 1, (1990), 70-85.
- [59] IVANOVA K., KOSTADINOV T., Eventual stability with two measures for nonlinear differential equations with non-instantaneous impulses, *IJPAM*, **116**, 3, (2017), 751-765.
- [60] KELLEY W., PETERSON A., *Difference equations: An introduction with applications*, Academic Press Limited, (1991).
- [61] KOSTADINOV T., Oscillation and nonoscillation of first order neutral difference equations with maxima, *J.Tech. Univ. Plovdiv Fundam. Sci. Appl.*, **7**, (1999), 53-63.
- [62] KOSTADINOV T., PROYTCHIEVA V., A note on the oscillation of second order difference neutral equations with maxima, *J. Tech. Univ. Plovdiv Fundam. Sci. Appl.*, **8**, (1999), 79-84.

- [63] KOSTADINOV T., PROYCHEVA V., Oscillatory and asymptotic properties of nonlinear first order neutral differential equations with piecewise constant argument of generalized type, *IJPAM*, **110**, 3, (2016), 547-562.
- [64] KOSTADINOV T., PROYCHEVA V., Oscillatory and asymptotic properties of nonlinear first order neutral differential equations with piecewise constant argument of generalized type with positive coefficients, *IeJPAM*, **12**, 1, (2018), 151–166.
- [65] LADAS G., SFICAS Y., Oscillations of neutral delay differential equations, *Canadian Math. Soc.*, ser. B, **27**, (1986), 502-511.
- [66] LADDE G., LAKSHMIKANTHAM V., ZHANG B., *Oscillation theory of differential equations with deviating arguments*, Pure Appl. Math., Marcel Dekker, New York, (1987).
- [67] LAKSHMIKANTHAM V., LIU X., *Stability analysis in terms of two measures*, World Scientific, (1993).
- [68] LI X., Oscillation and nonoscillation of higher order neutral difference equations with maxima, *Int. Journal of Math. Analysis*, **1**, 16, (2007), 791-804.
- [69] LI C., LIAO X., YANG X., On a difference equation with maximum, *Appl. Math. Comput.*, **181**, (2006), 1-5.
- [70] LUO J., Oscillation of neutral difference equations with maxima, *Soochow J. Math.*, **27**, 3, (2007), 267-273.
- [71] LUO J., YU Y., Asymptotic behavior of solutions os secong order neutral difference equations with maxima ,*Demonstr. Math.*, **XXXIV**, 1, (2001), 83-89.
- [72] MALATHI K., RAJAN S., Oscillatoin theorems for second order neutral difference equations with maxima, *Malaya Journal of Matematik*, **6**, 2, (2018), 417-419.
- [73] MIGDA M., ZHANG G., On unstable neutral difference equations with maxima, *Math Slovaca*, **56**, 4, (2006), 451-463.
- [74] MILMAN V., MYSHKIS A., On the stability of motion in the presence of impulses, *Siberian Math. J.*, **1**, 2, (1960), 233-237.
- [75] PARTHENIADIS E., Stability and oscillation of neutral delay differential equations with piecewise constant argument, *Differ. Integral Equ.*, **1**, 4, (1988), 459-472.
- [76] PEIYONG D., QIANG X., XIAODI L., XUEYAN Y., Review of stability and stabilization for impulsive delayed systems, *Mathematical Biosciences and Engineering*, **15**, 6, (2018), 1495-1515.

- [77] PERESTYUK M., PLOTNIKOV V., SAMOILENKO A., SKRIPNIK V., *Differential equations with impulsive effects*, De Gruyter Studies in Mathematics, 40, (2011).
- [78] PETROV V., A note of the oscillation of second order neutral equations with Maxima, *J. Tech. Univ. Plovdiv Fundam. Sci. Appl.*, **2**, (1996), 45-52.
- [79] PIERRI M., O'REGAN D., ROLNIK V., Existence of solutions for semi-linear abstract differential equations with non-instantaneous impulses, *Appl. Math. Comput.*, **219**, 12, (2013), 6743-6749.
- [80] POPOV E., *Automatic regulation and control*, Nauka, Moscow, (1966)(in Russian).
- [81] SAKER S., *Oscillation theory of delay differential and difference equations*, VDM Verby Dr Muller, (2010).
- [82] SHAH S., WIENER J., Advanced differential equations with piecewise constant argument deviations, *Internat.J.Math.Sci.*, **6**, 4, (1983), 671-703.
- [83] SHEN J., STAVROULAKIS I., Oscillatory and nonoscillatory delay equations with piecewise constant argument, *J. Math. Anal. Appl.*, **248**, 2, (2000), 385-401.
- [84] SOOD A., SRIVASTAVA S., On stability of differential systems with non-instantaneous impulses, *Math. Probl. Eng.*, (2015), Article ID 691687.
- [85] STAMOVA I., Razumikhin-type theorems on stability in terms of two measures for impulsive functional differential systems, *Note Mat.*, **26**, 2, (2006), 69-80.
- [86] WANG G., Existence theorem of periodic solutions for a delay nonlinear differential equation with piecewise constant arguments, *J. Math. Anal. Appl.*, **298**, 1, (2004), 298-307.
- [87] WANG G., Periodic solutions of a neutral differential equations with piecewise constant arguments, *J. Math. Anal. Appl.*, **326**, 1, (2007), 736-747.
- [88] WIENER J., Differential equations with piecewise constant delays, *V.Lakshmikantham(Ed.)in: Trends in the Theory and Practice of Nonlinear Differential Equations*, Marcel Dekker, New York, (1983), 547-580.