Р Е Ц Е Н З И Я

от дмн Ангел Борисов Дишлиев – професор в Химикотехнологичен и металургичен университет – София върху

дисертационен труд за присъждане на образователната и научна степен „доктор“;
област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика;
професионално направление: 4.5. Математика;
докторска програма: Диференциални уравнения;
автор на дисертационния труд: Тодор Илиев Костадинов;
тема на дисертационния труд: Осцилационни, асимптотични и устойчиви свойства на дискретни и непрекъснати диференциални уравнения;
научен ръководител: професор дмн Снежана Георгиева Христова – Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“

1. Общо описание на представените материали

Със заповед № Р33-298 от 28.01. 2021 г. на Ректора на Пловдивски университет „Паисий Хилендарски" (ПУ) съм определен за член на научното жури за осигуряване на процедура за защита на посочения по-горе дисертационен труд.

Представеният от г-н Тодор Костадинов комплект материали на електронен носител е в съответствие с чл. 36 (1) от Правилника за развитие на академичния състав на ПУ.

Дисертационният труд е поместен на 130 стандартни страници. Състои се от:

- Увод;
- Четири глави;
- Авторска справка на приносите;
- Апробация на резултатите – в 3 международни конференции и 1 национална конференция;
- Списък на публикациите по дисертационния труд – общо 11 публикации;
- Цитирания на резултатите по дисертационния труд – 2 цитата в списания с импакт ранг;
- Декларация за оригиналност и достоверност;
- Библиография - включваща 88 заглавия.

Освен дисертационния труд докторантът е приложил към документите:

- Автореферат;
- Декларация за оригиналност и достоверност;
- Автобиография (Европейски формат);
- Единадесет броя научни статии, публикувани в пълен текст и които са свързани с темата на дисертационния труд. Може да се каже, че дисертацията се основава на тези публикации;
- Списък на забелязани цитирания;
- Други документи, които са свързани с процедурата по защита на дисертационния труд и са изискуеми от съответните правилници, на които няма да се спирам.

2. Кратки биографични данни за докторанта

През 1989 г. г-н Тодор Костадинов завършва образователно-квалификационната степен магистър в ПУ и придобива квалификация: „Учител по математика и информатика“. Непосредствено след завършване на висшето образование за сравнително кратък период от време е бил гимназиален учител по математика. Повече от 30 години (през периода 1990 г. – 2020 г.) е асистент по математика в Технически университет – София, филиал Пловдив.

3. Актуалност на тематиката и целесъобразност на поставените цели и задачи

Изобщо научните проблеми бих разделил на две основни групи: актуални и не актуални. На втория тип проблеми няма да се спирам. Актуалните проблеми също бих разделил на две основни групи: временни и постоянни. Разглежданите въпроси в дисертацията безусловно бих прикачил към втората група на актуалните проблеми. Какви основания имам за това? Най-важните от тях предлагам на вниманието на читателя:

- Както е добре известно, по същество диференциалните уравнения са създадени с цел да се моделират динамични процеси от практиката. Математическото моделиране има предимството, че резултатите му имат прогнозен характер и следователно са изключително полезни за реалния живот. Този подход за усвояване на природата според мен е постоянен и следователно изучаването на уравненията имат нестихващо значение. Точно на изучаване на някои видове съвременни класове диференчни и диференциални уравнения е посветена рецензираната работа;
- Възникването на все по-сложни механизми и съпътстващите ги процеси провокират въвеждането на нови класове диференчни и диференциални уравнения, които адекватно да описват откритите нови явления. Тъкмо това наблюдаваме в разглеждания дисертационен труд, който е посветен на изследване на три основни типа уравнения:

  -неутрални диференчни уравнения с максимуми (с приложения в теорията на автоматичното управление),

  -неутрални диференциални уравнения с частично постоянни аргументи (с приложения в биологията и икономиката),

  -диференциални уравнения с продължително действащи импулсни смущения без закъснение и със закъснение (с приложения в медицината);
- Изследването на качествата на решенията в много случаи (поради сложността на уравненията) е единственият възможен подход за придобиване на съответните необходими знания за процесите, които моделират. Точно така е направено в разглежданата дисертация. Посочени са конкретни ясни условия, гарантиращи различни качества на решенията на посочените по-горе класове уравнения, като например осцилиране и няколко типа устойчивости;
- Работата на кандидата за придобиване на научна степен „доктор“ на пръв поглед е „чисто теоретична“. Но по-внимателното „вглеждане“ в конкретните типове уравнения и качествата на техните решения, които авторът е успял да установи, показват че резултатите имат пряко отношение към практическото приложение и създаването на математически модели чрез тях. Ако за конкретни уравнения се установят представените условия, може да се твърдят различни динамични състояния на моделните явления. Това според мен дава и приложен уклон на работата на докторанта.

В заключение на тази точка, моето убеждение е, че резултатите в дисертацията са актуални или казано по друг начин „имат право на трайно съществуване“, което времето и интересът, който ще предизвикат, ще потвърди.

4. Познаване на проблема

Считам, че докторантът познава отлично моментното състояние (а в някои случаи и историческото развитие) на разглежданите научни проблеми и съответните обекти на изследване в представения за рецензиране научен труд. До този извод достигам, като имам предвид:

- Направените предварително от автора сериозни, богати на съдържание и основополагащи предговор и въведение в темата на дисертацията. Посочени са основни резултати на водещи чужди автори, на които се базират изследванията на докторанта. Представени са достатъчно приложения на разглежданите типове уравнения, които ни убеждават в целесъобразността на представените изследвания;
- При четенето на научния труд не се налага ползването на допълнителна справочна литература, което от една страна е удобно за професионалния читател без предварителна подготовка по темата на дисертацията, а от друга - потвърждава изказаното по-горе мнение за детайлното познаване на тематиката от докторанта;
- Свободното владеене на терминологията и основните дефиниции по темата и умението да се ползват като отправна точка някои съвременни научни достижения на други изследователи също е основание за изказаното от мен твърдение в началото на тази точка. Като примери ще посоча цитираните и съществено използваните резултати на редица авторитетни учени:

  - Akhmet M., публикувани в Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications през 2005 г.,

  - Agarwal R., Hristova S., O'Regan D. - монография, публикувана в Springer през 2017 г.,

  - Bainov D., Luo J., публикувани в Journal of Computational and Applied Mathematics през 2001 г.,

  - Huang Y., публикувани в Journal of Mathematical Analysis and Applications през 1990 г.,

  - Li C., Liao X., Yang X., публикувани в Applied Mathematics and Computation през 2006 г.,

  - Gyori I., Ladas G., монография, публикувана в Clarendon Press, Oxford, през 1991 г. и много други. Тези съвременни публикации са базови за изследванията на автора в отделните глави на дисертацията;
- Множеството съществени забележки, които осветляват и допълват теоретичните резултати на автора на дисертационния труд. Това подсказва, че теорията е осмислена дълбоко. Намерени са така да се каже „тънките моменти“ в представените научни проблеми. Тъкмо те са допълнително изяснени в направените забележки;
- На няколко места в научния труд се вижда, че докторантът умее творчески да прилага известни резултати на други автори. Може да допълва тези изследвания,

а в някои случаи да преодолява трудности от технически характер, които видимо не са се отдали преди това на други изследователи;

- Тук ще подчертая, че в някои случаи намирането на подходящи примери се оказва сложна и трудна задача. В дисертационния труд този проблем е разрешен напълно.

По този начин косвено установяваме, че изследванията са важни, съвременни и подлежат на оценката на времето, което ще се отрази чрез тяхното цитиране в бъдеще.

5. Методика на изследването

Ще отбележа, че според мен за някои научни изследвания (и още по-конкретно за някои изследвания по математика и в частност за диференциалните уравнения) поставеният въпрос за методиката на изследване не трябва да се възприема в конкретен смисъл. Такъв е случая и в този дисертационен труд. Тук не се използва някакъв познат „фиксиран“ метод (или няколко такива известни методи или алгоритми) на изследване. Най-общо и същевременно най-точно казано, авторът използва традиционните методи на математическия анализ (реален и функционален) и методите на обикновените диференчни и диференциални уравнения. Чрез този широк и добре разработен и усъвършенстван във времето математически апарат в дисертацията са създадени конкретни доказателства за съществуване на определени асимптотически качества на решенията на различни класове уравнения. На няколко места в дисертацията с помощта на конкретни аналитични примери се отхвърля или потвърждава някоя хипотеза. Като пример ще посоча конструирани от автора математически обекти, които удовлетворяват група от условия. По този начин се установява, че условията, които се използват при доказателствата на твърденията, не са взаимно изключващи се.

6. Характеристика и оценка на дисертационния труд

Уводът на дисертационния труд има встъпителен характер. Там е отговорено на важни въпроси, отнасящи се за научния труд. Ще посоча някои от тях:

- Актуалност на темата;
- Посочени са трите основни обекта на изследване в дисертационния труд:
  - неутрални диференчни уравнения;
  - неутрални диференциални уравнения;
  - диференциални уравнения с продължително действащи импулси.

  За тези видове уравнения е направен сравнително кратък, но полезен исторически преглед. Посочени са някои важни аспекти от съвременното развитие на тяхната качествена теория. Дадени са полезни примери от математическото моделиране на реални динамични обекти, където изследваните типове уравнения намират приложение;
- Ясно са поставени целите и задачите в дисертационния труд, т.е. формулирани са приносите, които авторът счита, че е постигнал.
- Дадена е структурата на дисертационния труд. Накратко е посочено съдържанието на отделните глави и прилежащите им параграфи.

В първата глава на дисертацията се изучават асимптотични и осцилационни свойства на линейни скаларни диференчни уравнения с максимуми от първи и втори ред. В първия параграф се изучава уравнението от първи ред

(A) $$\Delta\left(x_n + p_n x_{n-k}\right) + q_n \max\left\{x_s;\ s \in \left\{n,\, n-1, \dots, n-l\right\}\right\} = 0,\quad n \ge n_0\,,$$

където:

- $n_0,\, k,\, l$ са цели неотрицателни числа и $n_0 = \max\left\{k, l\right\} + 1$;
- $p_n, q_n \in R,\quad n \ge n_0$;
- $x_1,\, x_2, \dots x_{n_0-1}$ са зададени реални числови начални стойности;
- диференчният оператор Δ се дефинира върху елементите на числови редици $\left\{z_n\right\}$ както следва $\Delta z_n = z_{n+1} - z_z,\ n = 1, 2, \dots$.

Разглежданото уравнение (A):

- е обобщение на уравнение, изследвано от W. Kelley и A. Peterson в:
  Kelley W., Peterson A., Difference equations: An introduction with applications, Academic Press Limited, (1991);
- подобни резултати, отнасящи се за асимптотичното поведение на решенията за аналогично уравнение, но при различни ограничения, са получени от J. Luo:
  Luo J., Oscillation of neutral difference equations with maxima, Soochow J. Math., 27, 3, (2007), 267-273.

В дисертационния труд за уравнението (A) са посочени условия, при които се твърди, че ако редицата $\left\{x_n\right\}_{n=1,2,\dots}$ представлява положително $\left(x_1 > 0,\ x_2 > 0, \dots\right)$ решение на това уравнение, то $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Условията (представляващи неравенства с участието на параметрите на уравнението) са лесно проверими:

(A1) $$0 \le q_{n_0} \le Q,\ \ 0 \le q_{n_0+1} \le Q, \dots;\ \ \sum_{n=n_0, n_0+1, \dots} q_n = \infty;$$

(A2) $$p \le p_{n_0} \le P,\ \ p \le p_{n_0+1} \le P, \dots;\ Q, p, P \in R;\ -1 < p;$$

(A3) $$k \le l\,.$$

Демонстриран е любопитен и подходящ пример, който показва, че последното неравенство (A3) е съществено. Авторът упорито изследва уравнение (A) и показва в следваща теорема, че можем да се освободим от ограниченията:

$$k \le l \ \text{ и } \sum_{n=n_0, n_0+1, \dots} q_n = \infty\,,$$

но за сметка на това да изискваме по-ограничителното равенство

$$\sum_{n=n_0, n_0+1, \dots} \min\left\{q_n, q_{n+k}\right\} = \infty\,.$$

Тогава отново всяко положително решение на (A) е асимптотически устойчиво.

Дисертантът е разгледал интересен въпрос в първия параграф на главата: *„При условията на споменатите по-горе теореми, ако редицата $\left\{x_n\right\}_{n=1,2,\dots}$ е отрицателно решение на уравнението (A), то следва ли равенството $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$?“*

Отговорът е отрицателен и е установен с помощта на конкретен числов пример.

Намерени са достатъчни условия за осцилиране на решенията на уравнение (A). Разгледан е случаят, когато

(A4) $$p \le p_{n_0} \le -1,\ \ p \le p_{n_0+1} \le -1, \dots \ \text{ и } k > l\,.$$

Доказано е, че при условията (A1) и (A4) решенията на (A) осцилират, ако

(A5) $$\lim_{n\to\infty}\sup\sum_{s=n}^{n+k-l}\frac{q_s}{\max\left\{-p_{s+k},-p_{s+k-1},\dots,-p_{s+k-l}\right\}}>1.$$

В нарочна забележка г-н Костадинов услужливо е показал, че множеството от редици, които удовлетворяват изискванията на теоремата за осцилиране, не е празното.

Във втория параграф на първа глава се разглежда уравнение (подобно на (А)) с тази разлика, че диференчният оператор е от втори ред:

(Б) $$\Delta^2\left(x_n+p_nx_{n-k}\right)+q_n\max\left\{x_s;\ s\in\left\{n,\ n-1,\dots,n-l\right\}\right\}=0,\quad n\geq n_0.$$

Тук диференчният оператор Δ^2 се дефинира отново върху елементите на числови редици $\left\{z_n\right\}$ както следва: $\Delta^2z_n=\Delta\left(\Delta z_n\right)=z_{n+2}-2z_{n+1}+z_z,\ n=1,2,\dots$.

Основните резултати в параграфа са установяване на достатъчни условия за осцилиране на решенията на уравнение (Б). Това означава, че решенията не са отрицателни или положителни. На този елементарен факт се основава схемата на доказателство. Отхвърлят се възможностите за съществуване на положителни или отрицателни решения. Достатъчните условия са лесно проверими и се заключват в няколко неравенства за параметрите на уравнение (Б):

(Б1) $$0\leq q_{n_0},\ 0\leq q_{n_0+1},\dots;\ \ 0\leq p_{n_0}<1,\ 0\leq p_{n_0+1}<1,\dots;$$

(Б2) $$\left(\exists\alpha=const,\ 0<\alpha<1\right):\ \sum_{n=n_0}^{\infty}q_n\left(1-\max\left\{p_n,p_{n-1},\dots p_{n-i}\right\}\right)n^{1-\alpha}=\infty.$$

Втората глава на дисертацията е посветена на изучаване на начална задача за един клас скаларни неутрални уравнения с частично постоянен аргумент:

(В) $$\begin{aligned}&\left(y(t)+py\left(t+\tfrac{1}{2}\right)\right)'=qf\left(y\left(\gamma(t)\right)\right),\quad -\tfrac{1}{2}\leq t<\infty;\\&y(t)=\varphi(t),\quad -\tfrac{1}{2}\leq t\leq 0,\end{aligned}$$

където $p,q\in R,\ \ \varphi\in C^1\left[-\tfrac{1}{2},0\right],\ \ \exists\varphi(-1),\ \ f\in C(-\infty,\infty)$. Функцията γ е стъпаловидна функция, която е дефинирана за всяко $t\geq-\tfrac{1}{2}$. Ще отбележим някои особености на уравнението (В), които сериозно затрудняват неговото изследване:

- В част от дефиниционната област на функцията γ е изпълнено $\gamma(t)>t$, а в другата част имаме $\gamma(t)\leq t$. С други думи, в дясната страна на (В) аргументът е или изпреварващ или закъсняващ, т.е. уравнението е от смесен тип. Това обстоятелство е нетрадиционно, качествата на решенията се различават от тези на уравненията само със закъснение и следователно се налага използването на специфични методи на изследване;
- Както следва от качествата на функцията γ (по-точно от нейните стъпаловидни стойности), заключаваме, че разглежданото уравнение е с частично постоянен аргумент, т.е. може да считаме че (В) е уравнение от хибриден тип (между диференчно и диференциално уравнение);
- Уравнението е неутрално, т.е. аргументът на старшата производна (в случая производната от първи ред) на търсената функция е отместен спрямо текущото време;

- Ясно е, че производната на неизвестната функция не е дефинирана за всяка стойност на аргумента, тъй като както казахме γ е прекъсната функция.

Уравнение (В) обобщава и видоизменя някои предходни резултати, от които тук ще цитирам:

- изучаваното от автора (съвместно с проф. Д. Байнов и доц. В. Петров) уравнение, публикувано в престижното списание J. Math. Anal. Appl.:
  Bainov D., Kostadinov T., Petrov V., Oscillatory and asymptotic properties of nonlinear first order neutral differential equations with piecewise constant argument, J. Math. Anal. Appl., 194, (1995), 612-639;
- въведеното от J. Hale в неговата класическа монография подобно уравнение:
  Hale J., Theory of functional differential equations, Springer- Verlag, New York, (1971).
  Основната разлика се проявява във факта, че функцията γ е частично непрекъсната, докато в посочените работи закъсняващият аргумент е непрекъснат;
- типът (неговия формален вид) на закъсняващия аргумент е частично повлиян от работата на M. Akhmet:
  Akhmet M., Integral manifolds of differential equations with piecewise constant argument of generalized type, Nonlinear Anal.: Theory, Methods and Appl., 66, (2005), 367-383.
- Освен това изследванията във втора глава използват някои съществени резултати на I. Gyori и G. Ladas:
  Gyori I., Ladas G., Oscillation theory of delay differential equations, Clarendon Press, Oxford, (1991).

Основните ограничения на разглежданията, свързани със задачата (В), са традиционни:

(В1) Функцията f е непрекъсната в R и $u.f(u)>0$ за всяко $u\neq 0$;

(В2) $(\forall\delta>0)\left(\exists\overline{\delta}>0\right):\left(\forall|u|>\delta\right)\Rightarrow\left(\left|f(u)\right|>\overline{\delta}\right)$.

В първия параграф на втората глава чрез тривиални разсъждения, използвайки свойството периодичност, е установено съществуване и единственост на решението на задачата (В) в интервала $-\frac{1}{2}\leq t<\infty$.

Основните резултати в главата са поместени във втория и третия параграф. При условията (В1) и (В2) и ако $y(t)$ е решение на (В), то са валидни твърденията:

- Ако $(q<0, p<-1)$ ($y(t)$ е неосцилиращо решение) $\Rightarrow \lim_{t\to\infty} y(t)=0$ или $\lim_{t\to\infty}|y(t)|=\infty$;
- Ако $(q<0,-1<p<0)$ ($y(t)$ е ограничено и неосцилиращо решение) $\Rightarrow \lim_{t\to\infty} y(t)=0$;
- Ако $(q<0, p=-1)$ ($y(t)$ е ограничено и неосцилиращо решение) $\Rightarrow \lim_{t\to\infty}|y(t)|=\infty$;
- Ако $(q<0, p>0, p\neq 1)$ ($y(t)$ е неосцилиращо решение) $\Rightarrow \lim_{t\to\infty} y(t)=0$;
- Ако $(q<0, p=1)$ ($y(t)$ е неосцилиращо решение) $\Rightarrow$ $y(t)$ е ограничено;
- Ако $(q>0, p<-1)$ ($y(t)$ е неосцилиращо решение) $\Rightarrow \lim_{t\to\infty} y(t)=0$;
- Ако $(q>0,-1<p<0)$ ($y(t)$ е неосцилиращо решение) $\Rightarrow \lim_{t\to\infty}|y(t)|=\infty$;

- Ако $(q>0, p\geq 1)$ ($y(t)$ е неосцилиращо решение) $\Rightarrow \lim_{t\to\infty}|y(t)|=\infty$;

- Ако $(q>0, p=-1)$ $\Rightarrow$ $y(t)$ е осцилиращо решение;

- Ако $(q<-2, p=-1)$(условие (В2) е заменено с неравенството $\lim_{t\to\infty}\inf\frac{y(t)}{t}\geq 1$) $\Rightarrow$ $y(t)$ е осцилиращо решение;

Посочените по-горе твърдения са оформени като отделни теореми. Няколко числови конструктивни примера допълват съществено съдържанието на резултатите в тази глава. Ще отбележа, че конструирането на тези конкретни варианти на задача (В) е нетривиален етап в научната дейност на докторанта. Според мен, тези конструкции представляват по-сложна изследователска работа, отколкото формулировката и доказателството на посочените теореми. Ще спра вниманието на два от тези примери. Първият от тях отговаря отрицателно на въпроса:

От $(q<0, -1<p<0)$ *и ако решението е неограничено, следва ли* $\lim_{t\to\infty}|y(t)|=\infty$?

С други думи при горните ограничения е показано, че съществуват решения на (В), за които е изпълнено

$$\lim_{t\to\infty}\inf y(t)=0 \text{ и } \lim_{t\to\infty}\sup y(t)=\infty.$$

Този пример демонстрира, че асимптотичното поведение на решенията на неутрални уравнения с частично постоянен аргумент е по сложно от поведението на решенията на аналогични уравнения, но с непрекъснат аргумент. Вторият пример отговаря отрицателно на въпроса:

От $(q<0,\ p=1)$ *и ако решението е неосцилиращо, следва ли* $\lim_{t\to\infty}|y(t)|=0$?

В трета глава на дисертационния труд основен обект на изследване е така нареченото обикновено диференциално уравнение с импулсни въздействия, които определят решението в безбройно много фиксирани непресичащи се времеви интервали, т.е импулсите са с продължително въздействие (а не мигновени). Изучаваната начална задача има вида:

$$\text{(Г)}\qquad \begin{aligned} &x'(t)=f(t,x(t)), \quad t_i<t\leq s_i, \quad i=0,1,...;\\ &x(t)=\phi_i(t,x(s_i-0)), \quad s_i<t\leq t_{i+1}, \quad i=0,1,...;\\ &x(t_0)=x_0, \end{aligned}$$

където:

- валидни са неравенствата $0\leq t_0<s_0<t_1<s_1<t_2<s_2<...$ (В дисертацията, преди формулировката на задача (3.0.1), е записано $s_i\leq t_{i+1}$, т.е. допустимо е $s_i=t_{i+1}$. Нека имаме $s_i=t_{i+1}$. Тогава интервалът $(s_i,t_{i+1}]$ е празното множество. Това означава, че импулсните въздействия в i -тия интервал $(s_i,t_{i+1}]$ не се осъществяват. Ясно е, че в такъв случай точките s_i и t_{i+1} можем да премахнем от разглежданите редици $\{t_i\}$ и $\{s_i\}$ (и изобщо от разглежданията), да преномерираме елементите на тези редици и да достигнем до предложените в този пасаж на рецензията строги неравенства. Това разбира се е критична бележка, но считам, че е уместно да я предложа тук, а не в специалната точка на рецензията);

- $x_0 \in R^n$;
- $f : \left(\cup_{i=0}^{\infty} \left(t_i, s_i\right]\right) \times R^n \to R^n$;
- $\phi_i : \left[s_i, t_{i+1}\right] \times R^n \to R^n,\ \ i = 0,1,\dots$.

Решението на (Г) е частично непрекъсната функция с евентуални точки на прекъсване $\{s_i\}$, в които е непрекъсната от ляво. Ще отбележим също така, че в точките $\{t_i\}$ решението евентуално не е диференцируемо.

Получени са няколко колекции от достатъчни условия, които гарантират съществуването на съответни типове устойчивост на нулевото решение на задачата (Г). Изследваните устойчивости са както следва:

- Равномерна интегрална устойчивост по две мерки;
- Евентуална устойчивост по част от променливите;
- Евентуална равномерна устойчивост по част от променливите;
- Обобщено експоненциално устойчиво.

Споменатите колекции съдържат комплицирани многобройни условия, поради което е трудно (по скоро неудобно за читателя) да бъдат преформулирани в рамките на една рецензия. Ще коментирам някои съществени особености на тези условия:

- Част от разглежданите устойчивости са формулирани с помощта на две взаимно зависими и йерархично подредени мерки. Тези мерки са допълнително пригодени за специфичните изследвания в дисертацията – представляват частично непрекъснати функции, като точките на прекъсване са съобразени с точките на прекъсване на решенията на разглежданата задача. Ще отбележим, че ако тези две мерки съвпадат, то дефинициите с помощта на две мерки се израждат в съответните класически дефиниции. Този тип устойчивости (с помощта на две мерки) е въведен от V. Lakshmikantham и ученици:

  Lakshmikantham V., Liu X., Stability analysis in terms of two measures, World Scientific, (1993)

  Редно е да отбележим, че научният ръководител на докторанта е признат експерт с популярни резултати за този тип устойчивости;
- При двете мерки се използват две функции на Ляпунов, които са частично непрекъснати (съобразно решенията на задачата (Г));
- При формулировката на условията и при доказателствата се използват производни на Дини за функциите на Ляпунов (там където съществуват диференцируемите части на решението на изходната задача) по траекторията на тези решения;
- В някои случаи се използват помощни скаларни уравнения с продължително действащи импулси и с дефиниционни множества на импулсите (импулсните функции) и на диференцируемата част, сходни с тези на оригиналната задача;
- Използват се сравнителни резултати, отнасящи се за решенията на изходната задача и помощните задачи;
- В Забележка 3.1.2, авторът твърди, че зададените ограничения H1 и H2 гарантират съществуване на нулево решение на подложената на постоянни

външни смущения задача (Г). По същество смутената задача е модификация на задача (Г), като модификацията се състои в добавяне на постоянни смущения (функции) към дясната страна на диференциалното уравнение и импулсните въздействия. Струва ми се, че условие Н1 не е пълно и трябва да се добавят равенствата $f(t,0)=F(t,0)=0$, като се посочи къде се изменя t. Дори посочените равенства да следва от други (по-късно добавени условия), то до текста на споменатата забележка тези равенства не са валидни и следователно няма гаранция за съществуване на нулево решение;

- При изследване на устойчивостите по част от променливите е направено разделяне на променливите на два класа, например „устойчиви“ и „произволни“. Съответните дефиниции и целият апарат на втория метод на Ляпунов се прилага основно върху устойчивите променливи.

Важно достойнство на изследванията в тази глава са представените конкретни примери, които илюстрират доказаните теореми. Отново ще подчертая, че съставянето на тези примери (поради твърде голямото многообразие от елементи на изследваните обекти и сложността на използваните модификации на функциите на Ляпунов) е трудна задача, изискваща детайлно познаване и усещане на технологията на доказване на твърденията. Задача, с която докторантът се е справил успешно.

Обект на изследване в първия параграф на **Последната глава** е начална задача за обикновени диференциални уравнения с постоянно закъснение и продължително действащи импулсни въздействия:

$$\text{(Д)}\qquad \begin{aligned} &x'(t)=f\left(t,x(t-r)\right), \quad t_i<t\le s_i, \quad i=0,1,...;\\ &x(t)=\phi_i\left(t,x(s_i-0)\right), \quad s_i<t\le t_{i+1}, \quad i=0,1,...;\\ &x(t+t_0)=\phi(t), \quad -r\le t\le 0, \end{aligned}$$

където $r=const>0$ и $\phi:[-r,0]\to R^n$. Разглежданата тук задача е обобщение на задача (Г) от предходната глава, която се получава от (Д) при $r=0$. Предполага се, че началната функция $\phi(t)$ е по части непрекъсната функция, т.е. функция от същия клас, на който принадлежи решението. Резултатите в този параграф накратко се свеждат до намиране на условия за:

- устойчивост на нулевото решение на задача (Г) по две мерки;
- равномерна устойчивост на нулевото решение на задача (Г) по две мерки.

Ще отбележа, че тук обектът е по-сложен отколкото в глава 3, но това частично се компенсира чрез по-достъпни за изследване варианти на устойчивост.

Във втория параграф на главата се разглежда начална задача за обикновени диференциални уравнения със супремуми и продължително действащи импулсни въздействия:

$$\text{(E)}\qquad \begin{aligned} &x'(t)=f\left(t,\, x(t),\, \sup\left\{x(s);\ \tau(t)\le s\le\sigma(t)\right\}\right), \quad t_i<t\le s_i, \quad i=0,1,...;\\ &x(t)=\phi_i\left(t,x(s_i-0)\right), \quad s_i<t\le t_{i+1}, \quad i=0,1,...;\\ &x(t+t_0)=\phi(t), \quad -r\le t\le 0, \end{aligned}$$

където функциите $\tau,\sigma:\left(\cup_{i=0}^{\infty}(t_i,s_i]\right)\to[-r,\infty)$. В постановката на задача (E) в рецензията за разлика от оригинала в дисертацията са сменени част от номерацията на краищата на дефиниционните интервали и е прецизирано дефиниционното множество на функциите τ и σ. Установени са условия за:

- устойчивост;
- равномерна устойчивост;
- равномерна асимптотическа устойчивост

на нулевото решение на задача (E).

7. Приноси и значимост на разработката за науката и практиката

Приносите в дисертационния труд можем да причислим към теоретичното обогатяване на теорията на диференчните и диференциалните уравнения и в частност асимптотичното поведение на съответните им решения. Разширени и обобщени са познанията, а от там и възможностите за приложения на няколко специфични класове уравнения. По същество типа на изследваните уравнения е продиктуван от конкретни и адекватни математически модели на сложни динамични процеси от биологията, медицината, фармацията, икономиката, техниката и др. Според мен изследванията са достатъчно дълбоки и важни, поради което те ще заемат достойно и трайно място в науката.

8. Преценка на публикациите по дисертационния труд

Дисертационният труд се основава на 11 научни публикации с участието на докторанта.

Според броя на авторите публикациите можем да разпределим в следните групи:

- 2 са публикувани самостоятелно;
- 5 са публикувани съвместно с още един съавтор;
- 4 са публикувани съвместно с още двама съавтори.

Списанията, в които са публикувани статиите, на които се базира дисертацията, можем да поставим в четири групи:

- Публикации с импакт ранг – общо 6 броя. Две от тези публикации са в списанието *International Journal of Pure and Applied Mathematics* и четири са публикувани в *AIP Conference Proceeding* (ежегодната конференция на ТУ-София в Созопол);
- Публикации, реферирани в MathSciNet и ZbMath – 1 брой (това е електронната версия на цитираното по-горе списание);
- Публикации в научни списания – общо 3 броя. Две от тези публикации са в *J. Tech. Univ. Plovdiv Fundam. Sci. Appl.*;
- Една публикация в сборник от доклади на научна конференция в България.

Част от резултатите в дисертационния труд са използвани в отчетите на три проекта. Два от споменатите проекти са на университетско ниво, а единият е към ФНИ.

Някои от рецензираните резултати са докладвани (в общо 4 доклада) на национални и международни конференции. От тези конференции бих отличил:

- лятната конференция в Созопол (*International Conference Applications of Mathematics in Engineering and Economics*);
- *International Conference on Applied Analysis and Algebra, Istanbul.*

Както споменах по-горе, авторът е посочил 2 цитирания на своите публикации в списания с импакт ранг. Считам, че е твърде рано да се очаква по-голям брой позовавания на тези научни достижения, поради малкото време, което ни дели от тяхното публикуване. Само две от посочените 11 публикации са излезли от печат преди 2016 година.

Както казах, повечето от публикациите, на които се базира дисертацията, са в съавторство с още един или двама други учени. Нямам допълнителна информация, която да противоречи на твърдението, че участието на докторанта в изследователската работа по тези публикации е еквивалентно на работата на неговите съавтори.

Изрично ще подчертая, че публикационната активност на докторанта, свързана с дисертационния труд, е повече от задоволителна. Публикациите са достатъчно на брой и (което е по-важното) те са публикувани в реномирани научни списания, които щателно се отразяват от различни вторични бази данни и следователно лесно се следят от интересуващата се научната общественост.

Накрая на тази точка от рецензията ще спомена, че количеството на публикуваните резултати в качествени научни списания създават в съзнанието на непредубедения читател положително отношение към работата на докторанта.

9. Лично участие на докторанта

Без съмнение резултатите в дисертационния труд са постигнати и оформени с прякото участие на докторанта. Вероятно по-голямата част от задачите, разрешени в дисертацията, са поставени от научния ръководител на докторанта или на някой от съавторите в съпътстващите публикации, а също така и част от подходите и методите за тяхното решаване. Това приемам за естествено. Заслугите на докторанта са в осмислянето и реализацията на поставените задачи. Някои технически трудности, които е преодолял в изследователската работа, ми дават основание категорично да заявя, че дисертацията е дело на докторанта. Многобройните публикации по темата на дисертацията (11 публикации, а според мен тези публикации са малко повече на брой) предполагат задълбочено познаване на тематиката и конкретните задачи, разрешени в труда. Многообразието от типове уравнения (в някои случаи методите на техните изследванията са коренно различни) подсказват сериозната лична научна и професионална подготовка на докторанта и неговия ентусиазъм за работа. Ще изкажа едно мое мнение без да желая да се натрапвам: Защитата е закъсняла във времето. С много по-малко и по-слаби резултати други наши колеги придобиват съответната научна степен. Според мен това се дължи на високите критерии (а защо да не кажа на прекалено високите критерии), които е поставил научния ръководител.

10. Автореферат

Авторефератът напълно отговаря на изискванията на Правилника за развитие на академичния състав на ПУ. В него са посочени:

- актуалност на дисертационния труд;
- основни цели и задачи на дисертационния труд;
- използвани изследвания на други учени и основните техни твърдения, подпомагащи изследванията на автора на дисертацията;
- основни дефиниции и нови понятия, използвани в дисертацията;
- основни твърдения, получени от докторанта;
- основни алгоритми и методи, използвани в работата;
- основни приложения на теоретичните резултати;

- основни изводи и заключения, произтичащи от дисертационния труд, т.е. приносите на докторанта;
- авторски публикации по темата на дисертацията;
- апробация на получените резултати;
- цитирания на публикациите, въз основа на които е реализиран дисертационния труд;
- декларация за оригиналност;
- библиография.

Ще отбележа, че изводите отразяват коректно постигнатото от дисертанта в предложения за рецензиране дисертационен труд.

Формално, авторефератът е изготвен съгласно изискванията на Правилника за развитие на академичния състав на ПУ. Материалът е изложен така, че читателят може да придобие пълна и адекватна представа за резултатите в дисертацията. Според мен номерацията (на теореми, леми, забележки, дефиниции и пр.) в автореферата трябва напълно да съвпадат с номерацията на техните оригинали от дисертационния труд. Това не е спазено в дискутирания автореферат.

11. Критични забележки и препоръки

Нямам съществени критични бележки и коментари, които биха могли да променят моето положително мнение за дисертационния труд на г-н Т. Костадинов. Проследяването на доказателствата не е затруднено по причина на тяхната писмена реализация (което означава, че те са пълни и подробни – без да се използват нищо не означаващи изрази от типа „очевидно е, че …“). От друга страна твърденията и съответните им доказателства изискват добра подготовка и сериозно внимание от страна на читателя (вижте например цялата трета глава). Някои детайли от доказателствата са оформени умело като самостоятелни твърдения под формата на леми. Допълнително осмисляне на условията може да се постигне чрез внимателно проследяване на приложените примери. Неизбежните синтактични и правописни грешки, забелязани в текста на дисертацията се преодоляват без усилие. В тях освен всичко друго има нещо полезно, тъй като поддържат читателя в бодро настроение при запознаване с дисертацията. Считам, че този тип бележки не трябва да бъдат предмет на дискусия и още по-малко на рецензия. Езикът на изложение е сравнително ясен, без излишни подробности. Бих предпочел да бъде малко по-подреден, в смисъл малко „по-широко“ написан, а не така „сбит“, но както знаете това са „вкусови предпочитания“, на които не винаги може да се отговори. Ще посоча една типична черта при изложението на автора на дисертационния труд: Неговият сравнително „беден език“. В математиката това е достойнство - когато с малко изразни средства авторът умее да предаде голямо и разнообразно количество информация. Има разбира се и някои неясни (според мен) изрази. Като примери ще посоча:

- Забележка 1.2.1, където авторът е използвал израза: „… условието (1.2.4) е по-добро от условието…“. Не е ясно какво значи по-добро условие? Може би по-ясно ще е, ако изразът „по-добро“ се замени с израза „по-слабо ограничително“ или пък „множеството от обекти, които удовлетворяват условие (1.2.4) е по „широко“ от…“ и т.н.;

- Друг подобен пример е (цитирам началото на параграф 2.1): „най-близкото цяло число отляво на t“;
- Не се разбира неравенството $\varphi(-1)<\infty$ (което може да се види на следващия ред след формулировката на задача (2.1.1) на стр 32, както и в условията на Теорема 2.1.1). Функционалната стойност $\varphi(-1)$ е някакво число, за което винаги е изпълнено посоченото неравенство и следователно не е нужно да се изисква;
- Не е ясна ролята на константата $1/2$ във формулировката на задача (2.1.1), Защо точно тази константа е избрана? Може ли да бъде избрана друга константа и при какви ограничения?;
- Ще припомня, че второто уравнение на (3.0.1) има вида $x(t)=\phi_i\left(t,x(t),x(s_i-0)\right)$. Възможно е посоченото уравнение да не притежава решение за някои стойности на t или изобщо в дефиниционния интервал $s_i<t\le t_{i+1}$. Възможно е също така да не съществува решение при определени стойности на параметъра $x(s_i-0)$. Не е указано какво се „прави“ в тези случаи. Вероятно решението „загива“ и следователно не е разумно да се изследват асимптотични качества на това решение. Ако се отхвърля тази възможност, т.е. ако се предполага, че посоченото уравнение винаги притежава решение, тогава е по-уместно да заместим второто уравнение на (3.0.1) с равенство от вида $x(t)=\varphi_i\left(t,x(s_i-0)\right)$ = „решението на посоченото уравнение“. С други думи второто уравнение на (3.0.1) е по-добре да се редуцира до равенство;
- При дефиницията на множествата $PC(J)$ и $PC^1(J)$ на стр. 54 се наблюдава излишно повторение на едни и същи факти. По-конкретно, ако функцията $u\in C(a,b]$, това означава, че $u(b)=u(b-0)=\lim_{t\to b-0}u(t)$. Освен това $u(b)<\infty$. Следователно е излишно тези неравенства да се изискват допълнително. По подобен начин можем да разсъждаваме и за случая $u\in C^1(a,b]$;
- В първият ред на §4.2 (стр. 93), предложеното от автора неравенство „не е в ред“. Този недостатък спокойно можем да прикачим към неминуемите технически грешки. Тук по-неприятното е смяната на неравенствата между двете редици $\{t_i\}$ и $\{s_i\}$. Това обърква читателя и се налага промяна в схемите и номерацията в сравнение с предходните задачи за уравнения с продължителни импулси.

Накрая на тази точка да разгледаме по-подробно следната начална задача за обикновени диференциални уравнения с променлива структура и (мигновени) импулси във фиксирани моменти:

$$
\text{(Ж)}\qquad
\begin{aligned}
&x'=f_i(t,x),\ t_{i-1}<t\le t_i,\\
&x(t_i+0)=x(t_i)+I_i\left(x(t_i)\right),\ i=1,2,...\\
&x(t_0)=x_0,
\end{aligned}
$$

където:

- превключващите моменти $\{t_i\}$ удовлетворяват следните ограничения $0 \le t_0 < t_1 < ...$, $\lim_{i\to\infty} t_i = \infty$;
- функциите $f_i : (t_i, t_{i+1}] \times R^n \to R^n$;
- функциите $I_i : R^n \to R^n$;
- началната точка $(t_0, x_0) \in R^+ \times R^n$.

Формулираната задача (Ж) е обект на изследване от други автори. Да разгледаме задачата (Г) от дисертацията, формулирана в предходна точка на рецензията. Да допуснем, че функциите ϕ_i са диференцируеми по времето. Да диференцираме второто равенство на (Г). Получаваме задачата:

$$\begin{aligned}
&x'(t) = f(t, x(t)), \quad t_i < t \le s_i, \quad i = 0,1,...;\\
&x'(t) = \phi_i'(t, x(s_i - 0)), \quad s_i < t \le t_{i+1}, \quad i = 0,1,...;\\
&x(t_0) = x_0.
\end{aligned}$$

Последната задача лесно можем да сведем до задача (Ж). За целта нека извършим означенията:

- $t_0' = t_0,\ t_1' = s_0,\ t_2' = t_1,\ t_3' = s_1,\ t_4' = t_2,\ t_5' = s_2,\ ...$;
- $f_1(t,x) = f_3(t,x) = f_5(t,x) = ... = f(t,x)$;
- $f_2(t,x) = \phi_0(t, x(s_0 - 0)),\ f_4(t,x) = \phi_1(t, x(s_1 - 0)), ...$;
- $I_2(x(t_2')) = I_4(x(t_4')) = I_6(x(t_6')) = ... = 0$;
- $I_1(x(t_1')) = \phi_0(t_1', x(t_1' - 0)) - x(t_1'),\ I_3(x(t_3')) = \phi_1(t_3', x(t_3' - 0)) - x(t_3'), ...$.

Така от предходната задача получаваме:

$$\begin{aligned}
&x' = f_i(t,x),\ t_{i-1}' < t \le t_i',\\
&x(t_i' + 0) = x(t_i') + I_i(x(t_i')),\ i = 1,2,... \qquad (З)\\
&x(t_0') = x_0,
\end{aligned}$$

която по същество е задача (Ж). По този начин достигаме до извода, че разглежданата в дисертацията задача (Г), която (при направено допълнително предположение за диференцируемост на функциите ϕ_i) напълно съвпада със задача (З). Следователно задача (Г) е частен случай на (Ж). Казвам „частен случай“ защото в няколко отношения задачата (Ж) е по-обща. Например:

- Дясната част на диференциалното уравнение в (Ж) се променя във всеки интервал, докато в (Г) диференциалното уравнение не се променя, Променят се импулсите с продължително въздействие, което означава, че в (З) само десните страни, които са с четен номер се променят;
- Във всяка точка от редицата $\{t_i\}$ в задачата (Ж) се извършва импулсно въздействие. В преобразуваната система (З) импулсите са ненулеви „през един“ - при прехода от диференцируема част към непрекъсната част.
- Възниква въпросът: Ако обаче функциите ϕ_i не са диференцируеми, то тогава горните преобразувания не са валидни и направеното по-горе заключение не е вярно. Това е така, но аз считам, че:

- в природата и процесите, които описваме, поведението на моделните функции имат едни и същи качества в отделните интервали. Така, че след като в интервалите, когато действа диференциалното уравнение, решението е диференцируема функция, то решението трябва да бъде функция със същата степен на гладкост (т.е. диференцируемо) и в интервалите на продължително действие на импулсите, т.е. функциите ϕ_i трябва да са диференцируеми;

- ако импулсните функции не са диференцируеми в краен брой, дискретни моменти, то тези моменти могат да се включат допълнително в редицата $\{t_i'\}$ на задача (3);

- ако импулсните функции не са диференцируеми в безбройно много точки, то моето възражение е следното: Диференциалните уравнения с импулси са възникнали и имат значение само за решаване на конкретни задачи от практиката, т.е. те имат моделен характер. Не ми е известно да са създадени математически модели, които използват например непрекъснати функции, които не са диференцируеми навсякъде, или други подобни екзактни (от техническа гледна точка на тяхното описание) функции. Ето защо отхвърлям варианта на уравнения с непрекъснати, но недиференцируеми продължително действащи импулсни функции.

След тази дълга увертюра, моят въпрос е:

Считате ли, че трябва да бъде направен сравнителен анализ на тези два типа уравнения: с променлива структура и (мигновени) импулси от една страна и с продължителни импулсни въздействия от друга? Ако едните са частен случай на другите, то защо е необходимо да се изучават и двата варианта? Изобщо оправдано ли е изучаването (и ако да - защо?) на уравненията с продължително действащи импулси?

В интерес на истината, ще кажа, че не са ми известни резултати за уравнения с променлива структура и импулси (задачи от типа на (Ж)), в които се изследват предложените от дисертанта типове устойчивост. Това означава, че аз напълно приемам резултатите в последните две глави на дисертацията.

12. Лични впечатления

Познавам г-н Тодор Костадинов повече от четвърт век. С него заедно участвахме в организацията и провеждането на Международните колоквиуми по диференциални уравнения и числени методи, реализирани в продължение на няколко години в Технически университет – филиал Пловдив. Още от тогава знам и помня (по думите на проф. Д. Байнов, председател на организационните комитети на тези колоквиуми), че г-н Костадинов има сериозни професионални интереси и резултати в качествената теория на диференчните и диференциалните уравнения с отклоняващ се аргумент. Тогава тази тематика беше модерна и активно развиваща се в световен мащаб (особено след фундаменталните резултати и обобщаващия трактат на J. Hale, който цитирах по-горе в рецензията). Моите спомени оттогава говорят за един млад трудолюбив и просперираш математик.

13. Препоръки за бъдещо използване на резултатите

Ще предложа да се изследват (разбира се при необходимите мотивация и желание) следните проблеми, които се отнасят за уравнения с продължителни импулсни въздействия.

Проблем 1. Да разгледаме съвместно задачите:

(G) $\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t)=f\left(t,x(t)\right), & t_i<t\le s_i; \\ x(t)=\phi_i\left(t,x(s_i-0)\right), & s_i<t\le t_{i+1}; \\ x(t_0)=x_0 \end{cases}$ и (G') $\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t)=f\left(t,x(t)\right), & t_i'<t\le s_i'; \\ x(t)=\phi_i\left(t,x(s_i'-0)\right), & s_i'<t\le t_{i+1}'; \\ x(t_0')=x_0. \end{cases}$

Задачите са аналогични на (Г) и по между си се различават по моментите на превключване.

Ще казваме, че решението на задачата (G) е устойчиво относно превключващите моменти $\{t_i\}\cup\{s_i\}$, ако

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0):\left(\forall\{t_i'\}\cup\{s_i'\}:\ \rho_1\left(\{t_i'\}\cup\{s_i'\},\{t_i\}\cup\{s_i\}\right)<\delta\right)$$

$$\Rightarrow\left(\rho_2\left(x_{(G')}(t),x_{(G)}(t),\right),\ t\in R^+\setminus\left(\bigcup_{i=0,1,\dots}\langle t_i',t_i\rangle\cup\bigcup_{i=0,1,\dots}\langle s_i',s_i\rangle\right)\right),$$

където:

- $\langle a,b\rangle$ е затворен интервал с краища a и b;
- ρ_1 и ρ_2 са подходящо избрани мерки – например:
  - $\rho_1\left(\{a_i\},\{b_i\}\right)=\sup\left\{|a_i-b_i|;\ i=0,1,2,\dots\right\}$. В конкретния случай на разглежданите задачи тази мярка можем да запишем така:
  $$\rho_1\left(\{t_i'\}\cup\{s_i'\},\{t_i\}\cup\{s_i\}\right)=\sup\left\{\max\left(|t_i'-t_i|,\ |s_i'-s_i|\right);\ i=0,1,2,\dots\right\};$$
  - $\rho_1\left(\{a_i\},\{b_i\}\right)=\sum_{i=0,1,\dots}|a_i-b_i|$. Конкретно за разглежданите в проблем 1 задачи имаме
  $$\rho_1\left(\{t_i'\}\cup\{s_i'\},\{t_i\}\cup\{s_i\}\right)=\sum_{i=0,1,\dots}\left(|t_i'-t_i|+|s_i'-s_i|\right);$$
  - $\rho_2\left(x_{(G')}(t),x_{(G)}(t)\right)=\sup\left\{\left|x_{(G')}(t)-x_{(G)}(t)\right|;\ t\in R^+\setminus\left(\bigcup_{i=0,1,\dots}\langle t_i',t_i\rangle\cup\bigcup_{i=0,1,\dots}\langle s_i',s_i\rangle\right)\right\};$
  - $\rho_2\left(x_{(G')}(t),x_{(G)}(t)\right)=\left\{\rho_{Hausdorff}\left(x_{(G')}(t),x_{(G)}(t)\right);\ t\in R^+\setminus\left(\bigcup_{i=0,1,\dots}\langle t_i',t_i\rangle\cup\bigcup_{i=0,1,\dots}\langle s_i',s_i\rangle\right)\right\}.$

Посочената тук устойчивост е типична за уравненията с продължително действащи импулси. Могат да се разгледат специфични примери от хидродинамиката и механиката (аз съм запознат с такива конкретни примери), които: първо се описват с такъв тип уравнения и второ въведената по-горе устойчивост е важна за специфично прогнозиране на асимптотичното поведение на динамични процеси от практиката, които се моделират чрез уравненията с постоянно действащи импулсни въздействия. Разглеждането и на други по-сложни начални задачи (например за уравнения със закъснение и продължително действащи импулси) е следваща стъпка. Формулиране и доказване на такива устойчивости, отнасящи се за решенията на по-сложните системи е също важна задача.

Проблем 2. Уравненията с продължителни импулси във **фиксирани интервали** (тези, които се разглеждат в дисертацията) имат по-скромно приложение в сравнение с уравненията с продължителни импулси във **променливи интервали.** Ще се опитам да формулирам една начална задача за уравнения от този тип:

$$\text{(И)}\qquad \begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t)=f\left(t,x(t)\right),\ \tau_i(t)<t\le\sigma_i(t),\ i=0,1,...;\\ &x(t)=\phi_i\left(t,x(s_i-0)\right),\ \sigma_i(t)<t\le\tau_{i+1}(t);\\ &x(t_0)=x_0,\end{aligned}$$

където:

- функциите $\tau_0,\sigma_0,\tau_1,\sigma_1,...:R^n\to R^+$ се наричат превключващи и са непрекъснати в дефиниционната област;
- $0\le\tau_0(x)<\sigma_0(x)<\tau_1(x)<\sigma_1(x)<...$ при $x\in R^n$; $\lim_{i\to\infty}\tau_i(x)=\infty,\ x\in R^n$;
- $t_0=\tau_0(x_0)$.

За формулираната по-горе начална задача (И) може да се поставят произволни въпроси от фундаменталната и качествената теория на диференциалните уравнения, но задължително трябва да се стартира с осигуряване на условия за съществуване и продължимост на решенията. Този въпрос не е тривиален, поради спецификата на превключващите функции. Възможно е да се окаже, че те не са преодолими, т.е. решенията „загиват“ без да преодолеят някоя от повърхнините, описвани с помощта на превключващите функции. Тази възможност трябва да се отхвърли.

Още един тип начални задачи с условно превключване към продължително действащите импулсни въздействия (формулировката, която привеждам е в опростен вариант), които можем да запишем така:

$$\text{(К)}\qquad \begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t)=f\left(t,x(t)\right),\ \|x(t)\|\ge\text{const};\\ &x(t)=\phi_i(t),\ \|x(t)\|<\text{const};\\ &x(t_0)=x_0.\end{aligned}$$

В горната задача $\|.\|$ е „някаква“ норма – например Евклидова. Такива начални задачи не ми е известно да са разглеждани. Ако това действително е така, то всеки поставен въпрос е нов и трябва да се търси неговият отговор. И тук, както и в предходния пример, трябва да се стартира с фундаменталната теория на дефинираните уравнения. Задачите от типа (К) могат успешно да се използват като моделиращ апарат във фармакокинетиката. Например, нека:

- x е концентрацията на лекарствено средство в организма на пациент, подложен на лечебна терапия;
- дясната страна на диференциалното уравнение f управлява „разпада на лекарственото средство“ във времето;
- $const$ е границата между лечимата и безобидната част на концентрацията на медикамента;
- функциите ϕ_I управляват количеството и интензитета на вливането на лекарствени средства в организма на пациента.

Заключение

Дисертационният труд съдържа научни и научно-приложни резултати, които представляват оригинален принос в науката. Представените документи и изследвания отговарят на всички изисквания на Закона за развитие на академичния състав в Република България (ЗРАСРБ), Правилника за прилагане на ЗРАСРБ и съответния Правилник на ПУ „Паисий Хилендарски“. Освен това материалите и декларираните постижения на автора напълно съответстват на специфичните изисквания на Факултета по математика и информатика, приети във връзка с Правилника на ПУ за приложение на ЗРАСРБ.

На основание на казаното по-горе убедено давам своята **положителна оценка** за проведеното изследване, представено в рецензираните по-горе дисертационен труд, автореферат и научни публикации. Предлагам на почитаемото научно жури да присъди образователната и научна степен „доктор“ на Тодор Илиев Костадинов в област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика; професионално направление: 4.5. Математика; докторска програма: Диференциални уравнения.

01.03. 2021 г.

Рецензент: ....

(проф. дмн Ангел Дишлиев)