ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ „ПАИСИЙ ХИЛЕНДАРСКИ”
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
КАТЕДРА „МЕТОДИКА НА ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА
И ИНФОРМАТИКА”

ЖАНЕТА ГЕРМАНОВА ГЕРМАНОВА

УСВОЯВАНЕ НА МЕТОДИ ЗА ДОКАЗВАНЕ НА НЕРАВЕНСТВА В ТРИЪГЪЛНИКА (ЗА СРЕДНОТО УЧИЛИЩЕ)

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

НА ДИСЕРТАЦИОНЕН ТРУД

**ЗА ПРИСЪЖДАНЕ НА ОБРАЗОВАТЕЛНАТА И НАУЧНА СТЕПЕН „ДОКТОР “
В ОБЛАСТ 1. ПЕДАГОГИЧЕСКИ НАУКИ; ПРОФЕСИОНАЛНО НАПРАВЛЕНИЕ
1.3. ПЕДАГОГИКА НА ОБУЧЕНИЕТО ПО …; НАУЧНА СПЕЦИАЛНОСТ 05.07.03
МЕТОДИКА НА ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА**

Научни ръководители:
1. проф. д.п.н. Васил Милушев
2. доц. д-р Румяна Маврова

Рецензенти:
1. проф. д-р Здравко Лалчев
2. доц. д-р Димитър Френкев

ПЛОВДИВ
2011 г.

Дисертационният труд е обсъден и насочен за публична защита от разширен катедрен съвет на катедра „Методика на обучението по математика и информатика” при Факултета по математика и информатика на ПУ „Паисий Хилендарски”, гр. Пловдив на 28 юни 2011 година (Протокол № 4).

Дисертационният труд се състои от увод, три глави, заключение, литература и приложения. Библиографската справка е от 178 заглавия (163 на кирилица и 15 на латиница). Основният текст е в обем от 148 стр., литературата – 8 стр. и приложенията – 59 стр. Списъкът на публикациите на автора съдържа 10 заглавия.

Публичната защита на дисертационния труд ще се състои на открито заседание на научно жури по Методика на обучението по математика на 22.12.2011 г. от 11 часа в заседателната зала на новата сграда на ПУ „Паисий Хилендарски” (бул. България 236).

Материалите по защитата са на разположение на интересуващите се в секретариата на ФМИ, нова сграда на ПУ, стая 330, всеки работен ден от 8.30 до 17.00 часа.

СЪДЪРЖАНИЕ

ОБЩА ХАРАКТЕРИСТИКА НА ДИСЕРТАЦИОННИЯ ТРУД

Актуалност на проблема

Динамичните промени в света изискват промени в образователните системи и тяхното модернизиране, а модернизацията на образованието се свързва с идеята за превръщане на ученика от обект в активен субект на обучението. Цел на образованието е формиране на способности за умствена дейност чрез конкретни научни знания с висока степен на обобщеност, абстрактност и гносеологическа стойност. Тази цел може да бъде постигната чрез подбор на съответно учебно съдържание и подходящи технологии на обучение, които дават възможност да се формира личност, способна самостоятелно да се справя със задачите, предизвикани от промените на живота.

Все по-голяма актуалност придобива въпросът за подготовката на учениците от средното училище за професионална реализация в съвременните условия. Елемент от тази подготовка е овладяването и прилагането на методи за решаване на математически задачи и, в частност, методи за доказване на различни видове неравенства между елементите на триъгълника, прилагайки подходяща методика.

Това е проблемът, който решихме да разгледаме и изследваме в настоящия дисертационен труд.

Мотивите за избора на дисертационното изследване са:

1. Въпреки наличието на немалко публикации ([7], [8], [11], [12], [13], [15], [20], [21], [25], [31], [40], [49], [55], [61], [62], [64] и др.), в които се разглеждат отделни задачи или въпроси, свързани с неравенства между елементи в триъгълника, все още отсъства цялостно изследване, посветено на методиката на усвояване на методи за доказване на неравенства между елементите на триъгълника от учениците в 11 и 12 клас;

2. Липсата на методически ръководства и помагала, представящи дидактико-методически варианти за усвояване на методите за доказване на неравенства между елементите на триъгълника;

3. В учебната програма по математика за средното училище и съпровождащите я учебни помагала не се поставя акцент на методите за доказване на неравенства между елементите на триъгълника. Вниманието е насочено към доказване предимно на алгебрични неравенства. Поради това учениците, проявяващи повишен интерес към математиката, не могат да натрупват необходимия опит за

доказване на геометрични неравенства и съответно по-добре да проследят връзката между алгебрата и геометрията;

4. Научен интерес и стремеж да се създадат и експериментират обучаващи варианти за усвояване на методи за доказване на неравенства между елементите на триъгълника от учениците в 11 и 12 клас.

Актуалността на поставения за изследване проблем се предопределя и от потребностите на практиката. Така например, задачи от неравенства между елементи в триъгълник се дават на редица олимпиади по математика (виж [55, с.53-86]). Макар и рядко, такива задачи от неравенства се срещат в примерните теми за кандидат-студенти (виж [32]). Сред задачите по математика за кандидатстване във ВУЗ се срещат епизодично и екстремални задачи по геометрия (виж [41]).

Знанията и уменията на учениците за същността и приложенията на методите за доказване на неравенства между елементите на триъгълника влияят значително върху тяхното интелектуално развитие, а също и върху осъществяването на учебно-познавателния процес по математика.

Разработването на теоретичните и приложни аспекти на методите за доказване на неравенства между елементите на триъгълника, би попълнило реалните потребности на методическата теория и на педагогическата практика на обучението по математика. Това може да послужи за разработване на нови технологични варианти за обучение, които да допринасят за развитие на стила на мисленето на учениците.

Концептуални акценти на изследването

Цел на дисертационното изследване:

Разработване на теоретико-приложни аспекти на определени математически знания и специфични методи за доказване на неравенства; създаване и експериментиране на модел за овладяване на математически знания и методи за решаване на задачи по темата „Усвояване на методи за доказване на неравенства между елементи в триъгълник”.

Задачи на изследването:

1. Да се проучат литературни източници и се извърши теоретичен анализ на постановките в тях, свързани с изследвания проблем.

2. Да се разкрие приложимостта на основните методи за решаване на задачи.

3. Да се систематизират методите за доказване на неравенства между елементите в триъгълника и особеностите на техните приложения.

4. Да се проучи учебното съдържание по математика в училище, имащо отношение към разглежданата тема, и се изгради съответ на система от опорни задачи.

5. Да се състави дидактическа система от задачи за усвояване на определени теоретични знания и методи за доказване на неравенства между елементи в триъгълника.

6. Да се изгради технологичен модел за усвояване на методи за доказване на неравенства в триъгълника и за формиране на обобщени умения за прилагането им; да се разработят варианти на обучение, които да се експериментират с ученици от 11 и 12 клас.

7. Да се определят критерии, показатели и математико-статистически инструментариум за отчитане на резултатите от експеримента, с оглед да се установи ефективността на обучаващия модел.

8. Да се представят и анализират резултатите от изследването.

Обект на изследване са ученици от 11 и 12 клас на средното училище, участници в занятия по избираема подготовка по математика (т.е. ученици, подготвящи се за кандидат-студенти)

Предмет на изследване е целенасоченото формиране на знания и умения у учениците относно усвояване на специфични методи за доказване на неравенства между елементите в триъгълника и обективно измерване на резултатите от обучението.

Въз основа на целта и задачите на изследването определяме следната **работна хипотеза: Изграждането на технологичен модел за изучаване на неравенства между елементи в триъгълника от ученици в 11 и 12 клас, допринася за усвояване на съответни математически знания и специфични методи за доказване на неравенства в триъгълника и формиране на обобщени умения и навици за прилагането им.**

Методи на изследване

1. Анализ на учебната документация.
2. Теоретичен анализ на педагогическа, психологическа и методическа литература по изследвания проблем и проучване на състоянието му в практиката у нас и в чужбина.
3. Анализ на наличното учебно съдържание по темата.
4. Дидактически експеримент – предварителен, констатиращ и формиращ (обучаващ). Организиране на непосредствено наблюдение на съответните учебни занятия и опосредствено наблюдение –

проучване продукта от дейността на учениците (тестове, контролни работи, курсови работи и др.).

5. Методи за обработване на емпиричния материал: статистическа обработка на резултатите от експеримента (мерки за разсейване – дисперсия, стандартно отклонение, коефициенти на асиметрия и ексцес; проверка за принадлежност на малка извадка към нормално разпределена генерална съвкупност; проверка на статистически хипотези) и качествен анализ на получените данни от изследването.

Използван инструментариум

1. Входящ Тест 1 за установяване предварителната подготовка на учениците и за изравняване на групите, участващи в експеримента.

2. Заключителен Тест 2 за установяване крайните резултати от експеримента, т.е. постиженията на учениците в края на обучението.

3. Курсови и самостоятелни работи.

КРАТКО СЪДЪРЖАНИЕ НА ДИСЕРТАЦИОННИЯ ТРУД

Дисертационният труд е структуриран в увод, три глави, заключение, библиография и приложения.

В увода са представени актуалността на темата и концепцията на изследването.

Първа глава "Теоретични основи на проблема" съдържа три параграфа.

В параграф 1.1., въз основа на обзора на научната литература, подробно са изяснени философски, психологически, гносеологически аспекти на такива понятия като метод, метод на познание, методи на обучение, методи за решаване на задачи.

Представени са различни класификации на методите на научното познание (С. Николов, Р. Маврова [38], Л. Портев Н. Николов [48]).

В дисертацията се обръща определено внимание на теоретичните постановки, свързани с анализа и синтеза (А. Бънков [9], С. Николов, Р. Маврова [38], Д. Пойа [45], Ю. М. Колягин [28], Я. Вишин [14], Ив. Ганчев [16], Л. Портев, Н. Николов [48] и др.), защото те са в основата на построението на аналитичните, синтетичния и аналитико-синтетичния методи за решаване на задачи.

Според авторите на [45], [28], [16], [48] и др. анализът и синтезът в обучението по математика се интерпретират като методи на мислене (в два аспекта) и като методи на изследване.

Разгледани са понятията "задача" и "математическа задача". Използвайки [36], са представени различни определения за понятието "задача". При дефинирането му, в зависимост от съответната научна област на отделните автори, са използвани родови понятия като: проблемна ситуация ([59], [57], [47], [5], [56], [53]); система ([27], [28], [52]); информационни процеси ([51], [60]); състояние ([46] и др.). Някои автори [33] приемат понятието “задача“ като първично, но има и такива, които се ограничават да го дефинират в конкретна научна област (математика, физика и др.), т.е. в тесен смисъл – Я. Вишин [14], Ив. Ганчев [18], К. Славов [53] и др.

В разглеждания параграф е обърнато внимание на структурата на математическите задачи и интерпретиране на термините “решения на задача“, “решаване на задача“ и “структура на решението на дадена задача“.

Проучването на литературните източници показва, че най-често се разглеждат две структури на задачата – външна (информационна) ([18], [28], [53], [56] и др.) и вътрешна ([19], [29], [57] и др.).

В точка 1.1.3.3 се разглежда същността на дейността решаване на математически задачи (ДРМЗ) и се посочват нейни модели.

В научната литература са посочени редица описания на това понятие – както в широкия смисъл на думата ([56], [27], [28] и др.), така и в тесен смисъл ([14], [19], [35],[59] и др.).

Работното описание, към което се придържам, показва, че тази дейност е твърде сложна. Под ДРМЗ тук се разбира “система от действия, последователното осъществяване на които осигурява намирането на определени способи, методи и средства за откриване на:

– подходяща теоретична база на задачата (определения, аксиоми, теореми, основни задачи, правила, тъждества, формули и т.н.);

– последователност в прилагането на елементите на базата към даденото в задачата и към получени следствия, за да се намери търсеното в нея“ [35, с. 83].

Тъй като ДРМЗ има етапен характер, според редица автори е подходящо разглеждането ѝ като процес. Тази идея намира реализация в модела на Д. Пойа [45], усъвършенстван от В. Милушев [35, с. 84-86], който използвам в настоящото дисертационно изследване.

В литературните източници по методика на обучението по математика (МОМ) няма единство по въпроса за същността на понятието метод за решаване на математическа задача, както и по отношение на критериите за класифициране на отделните методи.

За нуждите на това изследване са полезни изводите, направени в [34, с.77-78], както и представената схематично система от категории, даваща описание на понятието метод за решаване на математически задачи в [34, с. 79].

Представеният от В. Милушев [34, с. 86] модел на една комплексна класификация на най-използваните в училищния курс по математика (УКМ) методи за решаване на задачи ни обогатява и е необходим при разработване на теоретичните постановки относно методите за доказване на неравенства в триъгълника в глава 2, както и в глава 3.

В параграф 1.3 е разработен технологичен модел на обучение. В научната литература се срещат различни становища за понятието технология на обучение ([4], [44] и др). Приемаме становището на П. Митчел [63], който счита, че образователните технологии вече не обхващат само аудиовизуалните средства или дидактическите медии, но се интересуват и от цялостния процес „преподаване – учене”.

Образователните технологии имат свои особености и в нашето изследване се съобразяваме с тях, като даваме приоритет на следните: гъвкавост, динамичност, многовариантност и личностно ориентиране.

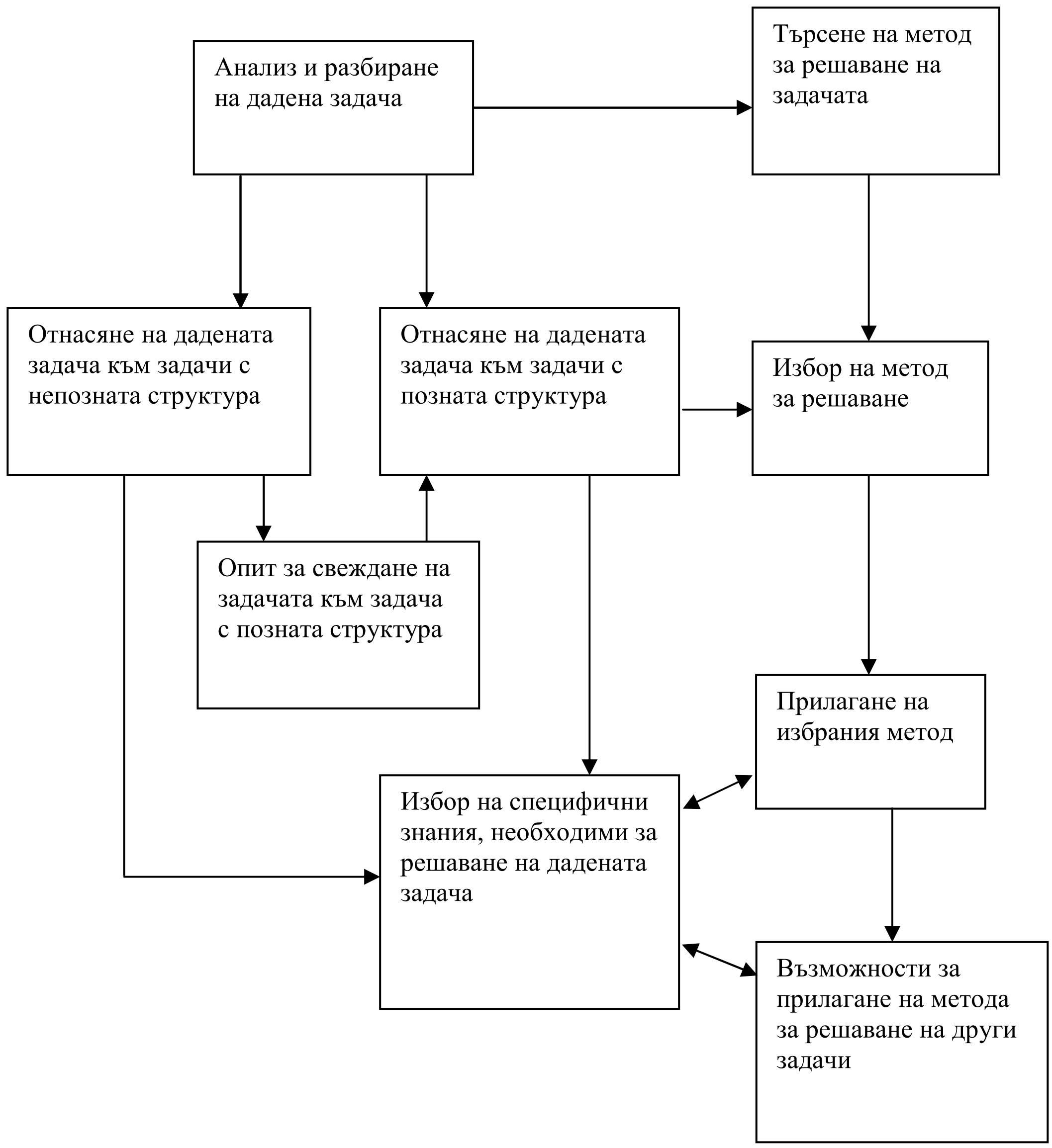
В настоящия дисертационен труд е съществена ролята на технологията за формиране на умения за решаване на задачи (в частност, доказване на неравенства). Според нас тази технология включва изграждането на модел за откриване на пътя за доказване на неравенства между елементи в триъгълника и се състои от определени дидактически дейности (фиг. 1).

Основна цел на обучение в различните форми на обучение по математика по разглежданата тематика е усвояването на методи за доказване на неравенства в триъгълника.

Разработването на технологичния модел е съобразено с:

- теоретичното изследване и анализа на литературата, свързана с методите за доказване на неравенства между елементи на триъгълника;
- анализа на учебното съдържание по математика в средното училище относно възможностите за приложение на методи за доказване на неравенства в триъгълника;
- направените проучвания в педагогическата практика;
- работната хипотеза на дисертационното изследване.

Изграденият модел е предназначен за работа с изявени ученици (подготвящи се за кандидат-студенти) и се реализира при различните форми на обучение по математика.



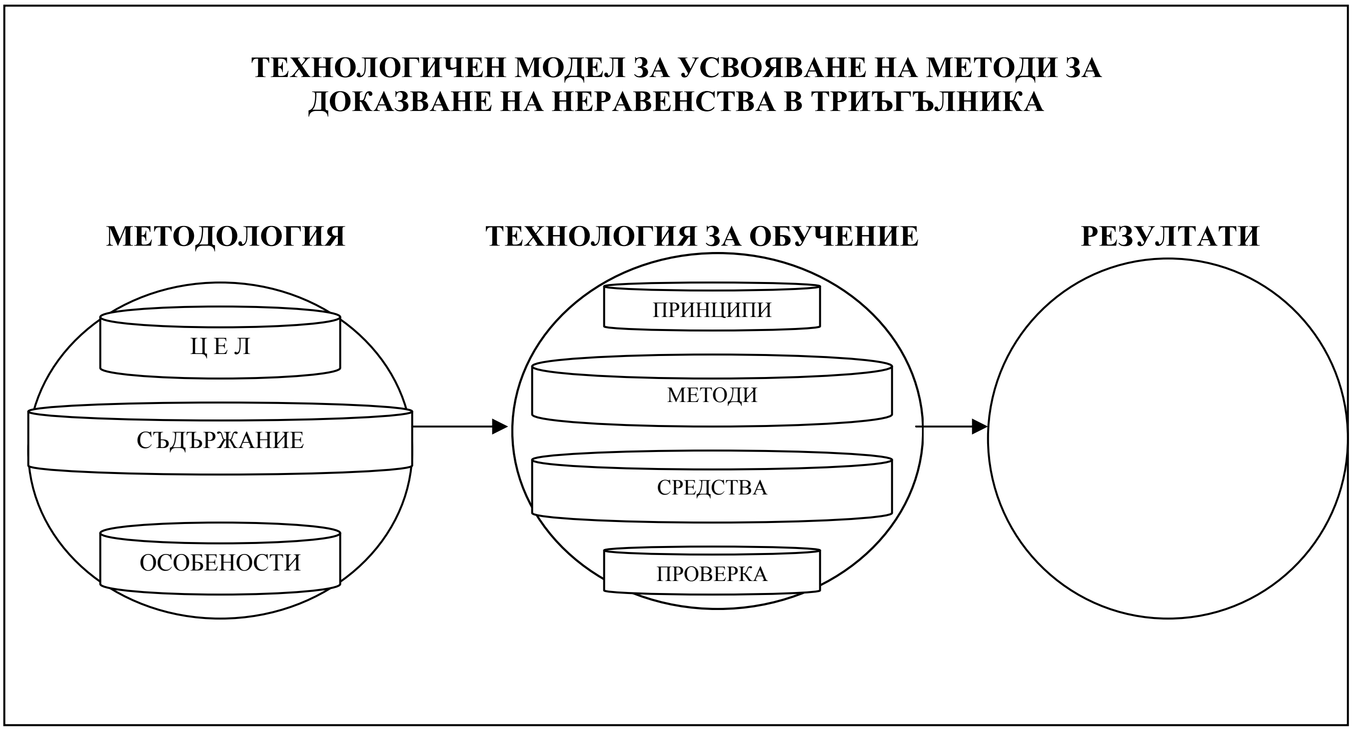
Фиг. 1. МОДЕЛ ЗА ОТКРИВАНЕ НА ПЪТЯ ЗА ДОКАЗВАНЕ НА НЕРАВЕНСТВА МЕЖДУ ЕЛЕМЕНТИ В ТРИЪГЪЛНИК

Структурата на модела е отразена схематично на фиг. 2, където отбелязаните стрелки показват връзките между частите му. При тяхното взаимодействие моделът функционира като единна система.

Методологията на модела се разкрива чрез изясняване на целта, задачите, съдържанието и изискванията за реализирането му.

Целта на обучението чрез модела е да се усвоят знания и умения за същността и приложенията на разглежданите методи за доказване на неравенства в триъгълника от учениците в средното училище.

Въз основа на целта формулираме определени **задачи.**



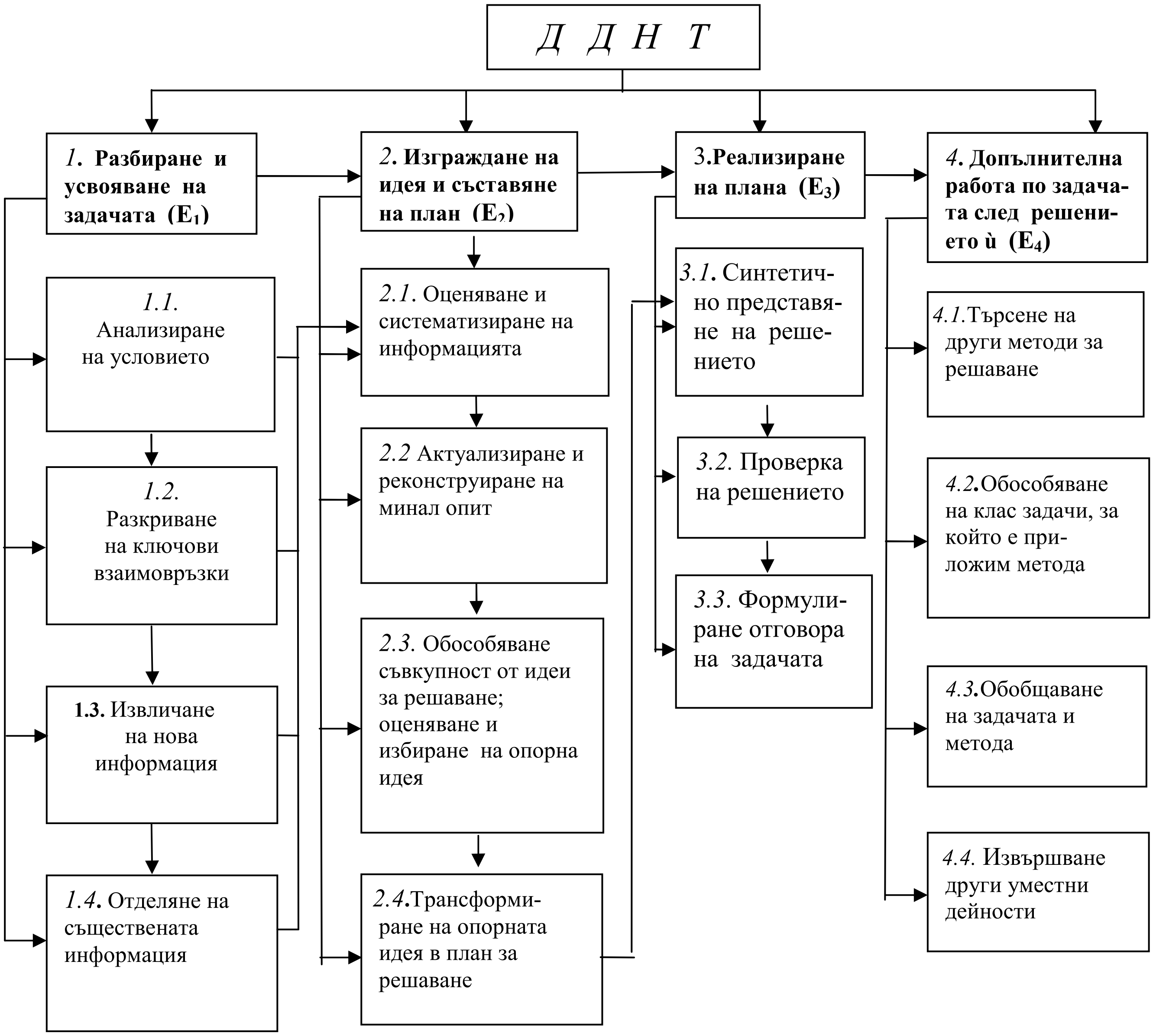
Фиг. 2.

В ***дейностен*** аспект съдържанието на обучението по усвояване на методи за доказване на неравенства в триъгълника свеждаме до:

1. **E_1**: Разбиране и усвояване на условието на задачата.
2. **E_2**: Изграждане на идея и съставяне на план за решаване на задачата.
3. **E_3**: Реализиране на плана (оформяне на решението).
4. **E_4**: Допълнителна работа по задачата след намиране на решението й – “Поглед назад“ (по Д. Пойа)

На базата на общата идея на Д. Пойа относно методиката на решаване на задачи, която е обогатена и актуализирана от В.Милушев в дисертацията [35], и на приспособената от К. Гъров схема относно решаване на задачи в информационните технологии в [22, с.10 (фиг. 1)], създадох следния модел на дейността доказване на неравенства в триъгълника (ДДНТ), представен на фиг. 3.

В точка 1.3.2 се представя структурата и характеристиката на технологичен модел за усвояване на методи за доказване на неравенства между елементи в триъгълник.



Фиг. 3. Модел на съдържанието и структурата на ДДНТ

Между компонентите на съдържанието на дейността по усвояване на методите за доказване на неравенства в триъгълника съществуват връзки между отделните подетапи, както и между самите етапи, които са отразени нагледно чрез стрелки в схемата на фиг. 3.

Етап 1 на ДДНТ се включва в етап 1 на ДРМЗ, като се открояват специфичните действия на ДДНТ.

Етап 2 на ДДНТ кореспондира директно с етап 2 на ДРМЗ без акцентиране на подетапите на етап 2.2.

Етапи 3 в двата модела съвпадат напълно.

При **етап 4** от модела на ДДНТ са описани специфичните особености на дейността доказване на неравенства, свързана с допълнителната работа по задачата след намиране на нейното решение. Целта при този етап на ДДНТ е овладяване на използвани методи за доказване на други неравенства и направа на съответните изводи за приложимостта на конкретния метод.

По такъв начин, направената съпоставка между модела на ДДНТ, разработен в настоящата дисертация и цитирания по-горе модел [35] на ДРМЗ показва, че моделът на ДДНТ се явява своеобразен подмодел на модела на ДРМЗ (отчитащ спецификата на дейността доказване на неравенства).

Разработените от автора на настоящия дисертационен труд приложни аспекти на методите за доказване на неравенства в триъгълника, представени в глави 2 и 3, както и част от експерименталното изследване съдържат детайлизирани дейности за усвояване на методи за доказване на неравенства в триъгълника.

Изискванията към подбора и структурата на съдържанието на обучението при усвояване на методи за доказване на неравенства в триъгълника се отнасят до:

- единство на цели и съдържание на обучението;
- възможност за диференциация на обучението;
- съответствие с постиженията на съвременната наука;
- формиране на личен опит, проява на творчество при реализиране на дейността доказване на неравенства в триъгълника;
- прагматична ориентация и адекватна използваемост на методите за доказване;
- адаптиране, по дидактически целесъобразен начин, на съвременни научни тенденции (интерактивност, формализация математизация, диференциация, сближаване на фундаментални и приложни науки);
- прецизност на езика и средствата на изследване.

Резултатите от обучението на учениците от средното училище чрез модела се определят не само от изградената методология, но и от адекватно разработената технология.

<u>**Технология за обучение**</u>**.** За да обосновем реализираната от нас технология за обучение, изхождаме от същността на дидактическото понятие „технология за обучение“.

Измежду различните трактовки, свързани с изясняване на същностните характеристики на това понятие, приемаме, че технологията на обучение е „единство на принципи, методи и средства за обучение с водещ елемент методите“ [50, с. 252], разглеждайки учебния процес като бинарна дейност – преподаване и учене.

Изграждането на технологичен модел е съобразено с принципите на обучение, заложени от Ив. Ганчев, Л. Портев и др. в [18]: нагледност, съзнателност и активност, трайност на овладяването на знания и умения, принцип за индивидуален и диференциран подход.

Към техниките на преподаване, чрез които се конкретизира принципът за нагледност, спадат: разглеждане на конкретни забележителни неравенства; употреба на базови опорни задачи; експериментиране и др.

Операционализирането на принципа на съзнателност и активност осъществяваме съответно в двете му части: чрез различни техники на преподаване; чрез външно управление на мотивацията, избягване на шаблони, даване на възможност за самостоятелност и творчество, смяна на дейностите, оценка и признание на постиженията, наличие на съпричастие при трудности и др.

За реализирането на принципа за достъпност използваме разнообразни прийоми: осигуряване на подходяща наредба на задачите; осигуряване на необходимата фактологична подготовка на учениците за овладяване на методите; изграждане на система от упражнения за усвояване на методите за доказване на неравенства; конкретизиране на обобщения и др. Съдържанието на системата от упражнения представяме в глава 2 от настоящия дисертационен труд.

Принципът за трайно овладяване на знанията и уменията осъществяваме чрез повторение, чрез практическо използване на методите за доказване на неравенства.

Характеристика на очакваните резултати

Основно средство за усвояване от учениците на знания и умения за същността и приложенията на методите за доказване на неравенства в триъгълника е разработената от нас система от задачи. При нейното изграждане сме се стремили тя да отговаря на общите изисквания към системите от задачи, посочени в [19] и [24], и на специфичните изисквания, свързани с усвояване на математически знания [55].

Изводи от глава 1:

В резултат на проведеното в глава 1 изследване са очертани следните по-важни **изводи**, които дават насока за работа в следващите глави:

1. Направеният теоретичен анализ на литературните източници, имащи отношение към изясняване същността на понятията метод, задача, структура на решението на задача, технология на обучение, даде възможност да бъдат изградени технологичен модел за усвояване на методи за доказване на неравенства в триъгълника и схематичен модел на дейността доказване на неравенства, които намериха приложение при осъществяване на експерименталното обучение (глава 3).

2. Целенасоченото усвояване на методите за доказване се явява продължителен процес и за успешната му реализация е необходима добра методическа подготовка, включваща, в частност, проучване на учебното съдържание и разработване на целесъобразни дидактически системи от задачи (глава 2).

3. За провеждане на ефективен процес на обучение е необходимо да се запознават учениците със същността и особеностите на приложение на различните методи за решаване на математически задачи. Затова в дисертационното изследване поставяме акцент на проблемните, частично-търсещите и изследователски методи на обучение.

Втора глава "Методи за доказване на неравенства между елементите на триъгълника" се състои от пет параграфа.

В точка 2.1. е направена систематизация на някои основни числови неравенства в качеството им на базови теоретични знания (по темата на дисертацията), които непосредствено се използват при прилагане на различните методи за доказване на неравенства между елементите на триъгълника.

В литературните източници [18], [16], [28], [33], [48], [54] са описани някои страни на методите за решаване на задачи по математика. Макар, че в посочените публикации няма единство по разглеждания въпрос, то в следващата точка 2.2. от дисертационния труд сме се опитали да изясним същността на общологическите методи, които най-често се използват при доказване на неравенства между елементите в триъгълника.

Съществените акценти при разработването им са свързани с изясняването на:

- ✓ същността и логическата им структура;
- ✓ възможните приложения в обучението по математика относно доказване на неравенства между елементи на триъгълник.

В параграф 2.5. представяме единадесет системи от задачи, предназначени за усвояване на съответните методи за доказване и забележителните неравенства.

Първите шест системи са свързани предимно с усвояването на забележителните неравенства и методите за доказване на неравенства. Задачите във всяка от системите №№ 2 – 12 са подредени по нарастваща сложност, като сме имали предвид и обвързаността помежду им (вж [23]), т.е. предходна задача да може да се използва и като задача-компонента при доказване на следващи задачи от системите. Освен това при подбора и съставянето на задачите сме включвали и такива, които могат да бъдат решени по различни начини, т.е. чрез използване на различни знания, придобити от учениците в процеса на обучението им. Стремили сме се да има и задачи, при решаването на които да се използват и различни общологически методи.

Подборът на задачите при съставянето на системите се базира върху анализа на учебното съдържание в училище и учебниците, от една страна, на възможностите за приложение на задачите от система № 1 (в качеството на опорни [23]) в следващите системи по темата "Неравенства между елементи в триъгълника" (вж приложение № № 15-24), от друга, както и въз основа на формулираните от К. Гъров в [22, с.16] общи изисквания към системите от задачи в училищната информатика.

Наименованията на системите от задачи съответства на темите на вариантите на обучение.

При подбора на задачите в горните Системи сме се съобразили с трите равнища на сложност на задачи по математика, предложени от Й. Николов в [37], а именно:

а) Задачи от първо равнище на сложност са тези, които сме включили в система № 1, тъй като при тях се изисква просто възпроизвеждане на вече изучени неравенства, тъждества, формули. При тяхното решаване ученикът проявява репродуктивна умствена дейност, с цел припомняне и затвърдяване на тези знания.

б) При следващите Системи задачите са от второ или трето равнще. Към задачите от второ равнище отнасяме тези, които изискват прилагане на формираните вече знания и способи на действия. Те предполагат аналитико-синтетична дейност, сравнение и конкретизация, т.е. прилагане на различни мисловни дейности.

в) Задачите от трето равнище преобладават в системи № 7 - № 11. При тяхното решаване се налага учениците да извършват продуктивна дейност. При задаването им учениците не знаят предварително начина на решаване. Те са по-трудни и създават възможност за издигане и формулиране на хипотези, за провеждане на евристични разсъждения, а решаването им съдържа една-две нестандартни стъпки.

Разработените в Глава 2 приложни аспекти на методите за доказване на неравенства между елементите на триъгълника и Системите задачи №№ 1-11 са компонентите на система от упражнения в занятията, която е основното ни средство за усвояване от учениците на знания и умения за същността и приложението на методи за доказване на неравенства между елементи на триъгълника в средното училище.

Изводи от глава 2:

1. Разкриването на същността и приложимостта на основните методи за решаване на задачи спомага за формиране на ориентировъчна основа при избор на метод съобразно конкретната задача, която предстои да бъде решавана.

2. Систематизирането в теоретичен и в практико-приложен аспект на методите за доказване на неравенства между елементи в триъгълника съдейства за целенасоченото им прилагане.

3. Проучването на учебното съдържание по математика в средното училище, имащо отношение към разглежданата тема, лежи в основата на изграждането на съответна система от опорни задачи. Система № 1 се явява опорна за останалите системи, тъй като се явява база за реализирането на повечето от тях (виж Приложения №№15-17 и най-вече Приложения №№ 20-24).

4. Разработването на дидактически системи от задачи по обособените теми може да допринесе за успешна подготовка на учениците по разглежданата тематика. Известна гаранция за това дава «стиковането» на задачите вътре в дадена система, а също и това между отделните системи. Относно изграждането на дидактическите системи от задачи ще отбележим следното:

а) При подбора на задачите в изградените дидактически системи сме се съобразили с трите равнища на сложност на задачи по математика, предложени от Й. Николов [37], както и с формулираните от К. Гъров изисквания към системите задачи от училищната информатика [22, с. 16]. Най-общо казано, започва се със задачи, които се решават по образец (системи №№ 2-6), следвани от по-сложни неравенства, включващи при доказването си опорни задачи от Система № 1 и забележителни неравенства, както и задачи-компоненти, познати на учениците от предходните системи. Там, където е необходимо, особено при по-сложните неравенства, броят на задачите в системата е по-голям. При изграждането на системи №№ 2-3 сме се стремили подбраните задачи да са подредени на принципа на взаимна връзка, като използваните идеи и методът са залегнали при решаване и на следващите задачи. При изграждане на система № 4, освен взаимовръзката между неравенствата в нея, е заложено и използване на задачи от предходни системи №2-3, т.е. налице са задачи-компоненти.

б) Акцент сме поставили на неравенства между метрични, неметрични и комбинация от метрични и неметрични елементи в триъгълника.

Съществува равнопоставеност по отношение на тази систематизация на задачите и прилаганите методи за доказване на неравенства в триъгълника. При подбора на задачите в системите сме се съобразявали и със следното: най-близки до съзнанието на учениците (най-лесни за тях) са неравенствата между линейни елементи в триъгълника, които сме включили в системите №№ 2-4. Доказателствата им се реализират чрез синтетичния метод и прилагане на някои от следните забележителни неравенства: неравенство на Коши, неравенства между средните величини, както и

$$\frac{a_1{}^k + a_2{}^k + \ \dots + a_n{}^k}{n} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + \ \dots + a_n}{n}\right)^k .$$

Задачите, изразяващи зависимости между неметрични елементи се явяват по-сложни в сравнение с предходните. Най-сложни и предизвикващи вниманието на най-любознателните се явяват комбинираните неравенства. За доказването им е необходимо да се прилага комбинация (съчетание) от общологически метод, забележително неравенство, опорни задачи и задачи-компоненти.

5. При изясняване на теоретичните аспекти на методите за доказване на неравенства в триъгълника и при някои от дидактическите системи от задачи са включени алгебрични неравенства, чиито решения не се улесняват от допълнителните условия, че компонентите на неравенството са елементи в триъгълник. Разгледани са в общ вид и важат за всички положителни числа (в някои случаи и за всички реални числа). Те са ценни, защото при прилагането им за страните на триъгълника, служат и като опорни задачи (виж дидактически целесъобразната система от неравенства в т. 2.1, неравенство на Коши-Буняковски и др.)

6. Целта на опорните задачи е да подпомагат откриването на решение. При системи №№ 2-6 лесно се реализира синтетичният метод, тъй като отправното звено се явява опорна задача: неравенство на Коши, неравенства между средните величини и др.

7. Целта на изградената от нас дидактическа система от задачи е учениците да придобият определен необходим запас от знания във вид на опорни задачи (от УКМ и някои забележителни неравенства) и да усвоят конкретни методи (общи и частни) за доказване на неравенства в триъгълник, за да съумеят успешно да атакуват предлаганите неравенства.

8. Приложението на неравенството на Йенсен за настоящото изследване изпълнява спомагателна роля при доказване на някои тригонометрични неравенства, които по-нататък в следващите системи се използват за решаване на по-интересни задачи. Усвояването му от учениците от 11 и 12 клас ги обогатява относно начини за доказване на неравенства от такъв тип.

9. При изграждането на системи №№ 7-11 стремежът на автора е да подготви обучаемите за формиране на обобщени умения относно откриване на различни начини за доказване на неравенства в триъгълника чрез прилагане на различни новоизучени неравенства.

10. При подбора на неравенствата в системите сме имали предвид, че ”алгебрата помага на геометрията” чрез приложение на забележителните неравенства: на Коши, на Коши-Буняковски, неравенства между средните величини, както и на опорните задачи от училищния курс по алгебра.

Глава 3 е озаглавена “Варианти на обучение в доказване на неравенства между елементи в триъгълника. Резултати от експерименталното изследване“. Състои се от три параграфа.

В параграф 3.1 е описан **Технологичен вариант А** за обучение на ученици по усвояване на методи за доказване на неравенства в триъгълник.

С термина технологичен вариант **А** условно обозначаваме вариант на обучение, предназначен за ученици с проявени наклонности към математиката, по усвояване на общологически методи за доказване на неравенства между елементи в триъгълника. Този технологичен вариант на обучение включва в съдържанието си определена теория по разглежданите теми и поставя акцент на методи за доказване на неравенства между елементи на триъгълника. Във връзка с провеждането на експерименталното изследване бяха определени темите и тяхното учебно съдържание за обучение на учениците.

<u>Тема А1</u>. Синтетичен метод за доказване на неравенства в триъгълника

Тема А2. Аналитични методи за доказване на неравенства в триъгълника (несъвършен анализ и възходящ анализ). Неравенство на Коши

Тема А3. Неравенства между средни величини. Приложение

Тема А4. Неравенството

$$\frac{a_1{}^k + a_2{}^k + \ \dots + a_n{}^k}{n} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + \ \dots + a_n}{n}\right)^k, k, n \in N$$ (

$a_i i > 0, \quad i = {}^{-}(1, k))$

Тема А5. Неравенство на Йенсен.

Тема А6. Неравенство на Коши-Буняковски

Тема А7. Комбинирано прилагане на общологически методи и забележителни неравенства за доказване на неравенства в триъгълника

Посочените теми са разгледани в 11 занятия. Всяка от темите (А1-_А6) се реализира в едно занятие, а тема А7 – в 4 на брой занятия.

На част от задачите са представени тъй нар. “обучаващи” решения. Тук използваме този термин в смисъла, който му придава Й. Кучинов [30]. Това означава, че първо трябва да се проведат аналитични разсъждения по откриване на решението, а след това синтетично да се оформи самото решение.

Някои от предвидените за доказване в занятията (занятия 10 и 11) неравенства (задачи: 7.22, 7.23, 7.24, 7.25, 7.26, 7.29, 7.32, 7.33) имат свои особености и, за да бъдат по-добре осмислени, разработихме с обучаваните “обучаващи” решения. Това ще илюстрираме чрез

Задача А.7.22. Да се докаже неравенството

$$h_a . \sqrt{l_a . m_a} + h_b . \sqrt{l_b . m_b} + h_c . \sqrt{l_c . m_c} \leq \frac{27}{4} . R^2$$

(вж глава 2, система № 8, задача 5)

Откриване на решение:

Тъй като лявата страна на неравенството съдържа сума от произведения, в които се варират множителите, то видът ѝ ни подсеща, че бихме могли да приложим неравенството на Коши-Буняковски. Така получаваме

$$h_a . \sqrt{l_a m_a} + h_b . \sqrt{l_b m_b} + h_c . \sqrt{l_c m_c} \leq$$
$$\leq \sqrt{h_a{}^2 + h_b{}^2 + h_c{}^2} . \sqrt{\left(\sqrt{l_a m_a}\right)^2 + \left(\sqrt{l_b m_b}\right)^2 + \left(\sqrt{l_c m_c}\right)^2} \quad (1')$$

За сумата $h_a{}^2 + h_b{}^2 + h_c{}^2$ под първия радикал знаем, че съществува горна оценка, а именно $h_a{}^2 + \ h_b{}^2 + \ h_c{}^2 \leq p^2$ (задача 3в) от система № 2, глава 2), а във втория радикал могат да се извършат тъждествени преобразувания. Резултатът от тяхното прилагане ($l_a m_a + l_b m_b + l_c m_c$)

отново ни насочва към използване на неравенството на Коши-Буняковски, в резултат на което дясната страна на (1) се усилва и се получава

$$p.\sqrt{\sqrt{l_a^2+l_b^2+l_c^2}.\sqrt{m_a^2+m_b^2+m_c^2}} \qquad (2')$$

Сумата $l_a^2+l_b^2+l_c^2$ също има горна оценка p^2 (задача 3б) от система № 2, глава 2), а $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$. Освен това, според задача 8 от система №7, глава 2, е в сила неравенството $a^2+b^2+c^2\leq 9R^2$, а $p\leq\frac{3\sqrt{3}.}{2}.R$ (задача 9 от система № 7, глава 2). Като се вземе предвид всичко това, се получава търсеният резултат.

Синтетичното оформление на решението изглежда така:

Решение

$$h_a.\sqrt{l_am_a}+h_b.\sqrt{l_bm_b}+h_c.\sqrt{l_cm_c}\leq$$

$$\leq\sqrt{h_a^2+h_b^2+h_c^2}.\sqrt{\left(\sqrt{l_am_a}\right)^2+\left(\sqrt{l_bm_b}\right)^2+\left(\sqrt{l_cm_c}\right)^2}\leq$$

$$\leq\sqrt{p^2}.\sqrt{l_am_a+l_bm_b+l_cm_c}\leq$$

$$\leq p.\sqrt{\sqrt{l_a^2+l_b^2+l_c^2}.\sqrt{m_a^2+m_b^2+m_c^2}}\leq$$

$$\leq p.\sqrt[4]{(l_a^2+l_b^2+l_c^2)(m_a^2+m_b^2+m_c^2)}\leq$$

$$\leq p.\sqrt[4]{\frac{p^{2.3}}{4}.(a^2+b^2+c^2)}\leq$$

$$\leq p.\sqrt[4]{\frac{p^{2.3}}{4.9R^2}}=p\sqrt[4]{\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}pR\right)^2}=$$

Следователно чрез метода на непосредствената проверка, използвайки и усилване на неравенства, е доказано неравенството

$$h_a.\sqrt{l_a.m_a}+h_b.\sqrt{l_b.m_b}+h_c.\sqrt{l_c.m_c}\leq\frac{27}{4}.R^2$$

.

Изводи от проведените разсъждения по задача A7.22.

1. Един “поглед назад” върху структурата на неравенството от задача A7.22 показва, че в лявата му страна се съдържа сума от произведения от нееднoименни елементи, т.е. видът й ни подсеща, че бихме могли да приложим неравенството на Коши-Буняковски.

2. При доказване на неравенството от задача A7.22 използваме метода на непосредствената проверка, тъй като преобразуваме едната му страна (лявата), докато получим резултата.

3. В съчетание със забележителното неравенство използваме и други задачи (опорни задачи от система №1 и задачи-компоненти, познати от другите занятия). Така учениците актуализират знанията си, упражняват се в доказване на по-сложни неравенства, развиват мисленето си. (Например, разсъждаваме така: "За сумите ... кои са горните им оценки?").

В точка 3.2 е описан **Технологичен вариант Б** за обучение на учениците относно усвояване на методи за доказване на неравенства в триъгълника.

С термина технологичен вариант **Б**, условно, означаваме вариант на обучение по темата "Неравенства между елементи в триъгълника", предназначен за ученици, проявяващи определен интерес по математиката. В неговото съдържание е заложено информативно запознаване на учениците от група Б (контролна) с някои специфични неравенства (наречени още "забележителни неравенства") и приложението им при доказване на неравенства между елементи в триъгълника.

Цел на технологичен вариант Б е чрез използване на традиционното обучение да се обогатят знанията на учениците за неравенства в триъгълника. При този технологичен вариант на обучение не се акцентува на методите за доказване на такива неравенства.

Във връзка с провеждането на това изследване бяха определени темите и тяхното учебно съдържание за обучение на учениците от контролната група. В учебното съдържание на вариант Б се включват онези задачи от разглежданите теми от вариант А, които са достъпни за обучаваните от група Б.

В резултат от експерименталната работа по вариант А към всяко от занятия №№2-6 са направени изводи в методически аспект.

В точка 3.3.1 е описана организацията на експерименталната работа.

Разработената учебна програма и системата от задачи, представяща учебното съдържание по темата на дисертационния труд, е предвидено да са усвои от учениците в извънкласни форми на работа в 11 и 12 клас. В този контекст, чрез дидактически експеримент, изследваме ефективността на учебната дейност на учениците в зависимост от различни условия и фактори, за да се установи „онази комбинация между тях, при която се постигат възможно най-добри резултати" [6, с.74].

Педагогическото изследване е осъществено в четиригодишен период (2006-2010) и включва следните етапи:

I етап (2006/2007 учебна година) – свързан е с организацията, планирането и подготовката на изследването.

II етап (2007/2008 учебна година) – извършена е подготовка за осъществяване на дидактически експеримент: разработени са два варианта от технологичния модел за обучение на учениците; съставени са тестови задачи за установяване на наличните знания и умения на учениците преди провеждане на обучаващия експеримент; определени са училищата, в които да се проведе експериментът

III етап (2008 – 2010г.) – в началото на учебната 2008/9 година се проведе Тест № 1 за установяване равнището на подготовката на учениците преди провеждане на педагогическия експеримент (входен тест). Сформираха се две групи от по 20 ученика.

Статистическият анализ на Тест 1 показа, че резултатите на учениците от двете групи са равностойни, т.е. имат приблизително равни възможности по математика. Това ни даде основание да проведем експеримента с тези групи, като обучението в Група 1, наречена експериментална (ЕГ), се проведе по технологичен вариант А, а обучението в Група 2, контролна (КГ) – по технологичен вариант Б. Обучението бе реализирано през периода 2008/2009 (в 11 клас) и 2009/2010 (в 12 клас).

Обучението по вариант А (ЕГ) се характеризира с това, че при него се изучава определена теория по темата "Неравенства в триъгълника" и се поставя акцент на методи за доказване на неравенства между елементи в триъгълника. При обучението по този вариант се използва евристичната беседа, обяснението и значителна по обем самостоятелна работа.

Обучението по вариант Б (КГ) се осъществява по традиционния за училищния курс по математика начин, т.е. не се дават теоретични доказателства на разглежданите основни неравенства, а последните се приемат наготово и не се изяснява специално същността и структурата на използваните общологически методи. В организацията на обучението по Вариант Б преобладават беседата, обяснението, илюстрацията и частична самостоятелната работа, т.е. тук е налице работа по образец и реконструктивно-вариативна дейност.

В точка 3.3.2 се представят и анализират резултатите от експерименталната работа. Както предварителният (входящ) тест № 1, така и заключителният тест № 2 се проведоха с учениците, обучавани и по двата варианта.

Резултатите, получени от тестовете (№1 и № 2) при проведеното обучение, се обработват по точкова система с максимален брой точки

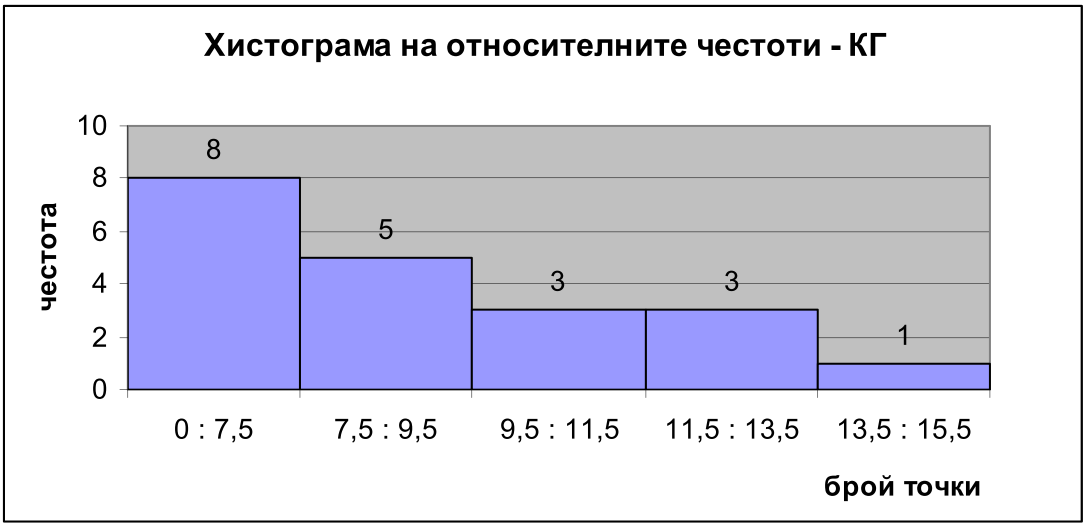
20. Оценяването се извършва по едни и същи показатели. Резултатите са обработени чрез използване на елементи от математическата статистика (виж [26], [39], [1], [3]). Графично са представени чрез хистограми на относителните честоти (виж фиг. 1, 2, 4 и 5 в [2]).

Анализ на резултатите от Тест 2

При обработване на резултатите се използват още: проверка за нормално разпределение на съвкупностите, проверка за еднаквост или различие на дисперсиите на двете групи, проверка на математическите очаквания.

Докато на хистограмите за тест 1 (фиг.1 и 2 в [2]) ясно се вижда, че резултатите са почти еднакви в двете групи, то след провеждане на обучението, резултатите от тест 2 показват съществено различие.

Фиг. 4



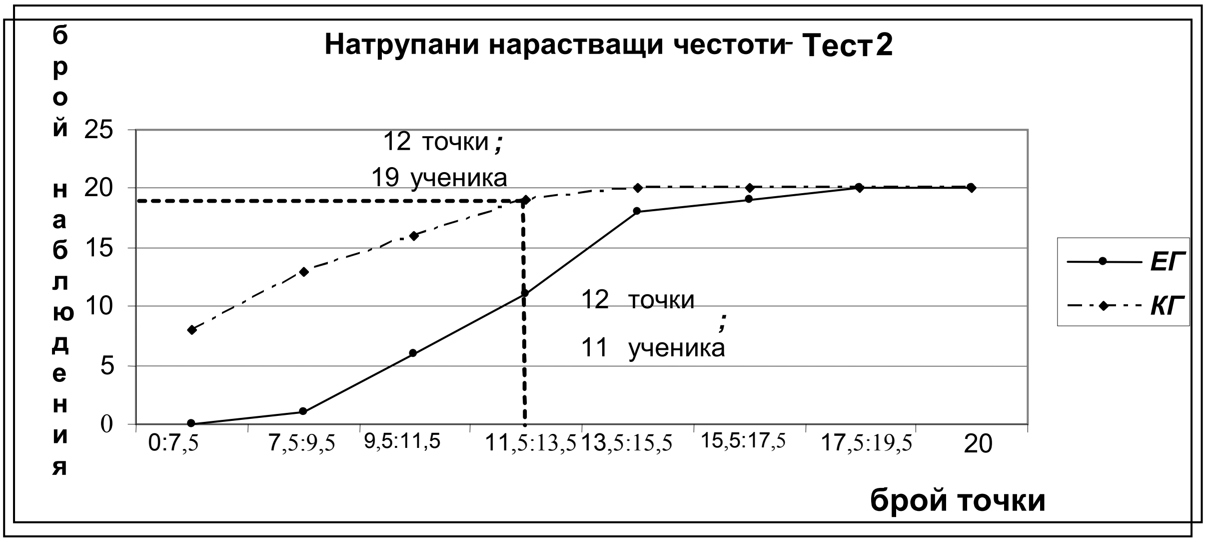
Фиг. 5

От построените хистограми (Фиг. 4 и Фиг. 5) на базата на таблицата на честотите ясно се открояват различията в резултатите: при ЕГ след проведеното обучение по вариант А (под 10 точки има само един резултат в ЕГ, докато в КГ повече от половината резултати са в граници до 10 точки).

Натрупаните нарастващи честоти за резултатите от Тест 2 за двете групи (Таблица 1) и представените графично резултати с линейна диаграма (Фиг. 6) ни дават основание да направим следното заключение: 12 точки имат не повече от 11 ученика от ЕГ (останалите ученици имат над 12 точки), докато при КГ 19 ученика имат до 12 точки, а само 1 ученик над – 12 точки от Тест 2 след проведеното обучение съответно по двата варианта**.**

Таблица 1

Натрупани нарастващи честоти – Тест 2							
интервали	0 : 7,5	7,5 :9,5	9,5: 11,5	11,5:13,5	13,5:15,5	15,5:17,5	17,5:19,5
ЕГ	0	1	6	11	18	19	20
КГ	8	13	16	19	20	20	20



Фиг. 6

Направеният статистически анализ потвърждава твърдението на контра-хипотезата, т.е. средният успех на двете групи (ЕГ и КГ) се различава; по-висок е средният успех на ЕГ.

Някои от учениците разработиха и курсови работи, които са дадени в приложения на дисертацията.В заключение можем да кажем, че така организираното обучение на учениците от ЕГ способства за формиране у тях на умения относно целенасочено прилагане на общологическите методи и съответните нови теоретични знания за решаване на задачи от доказване на неравенства между елементи в триъгълник.

Въз основа на извършения количествен и качествен анализ на резултатите от изследването може да се твърди, че в контекста на разработената система от занятия и обучаващия модел за овладяване на знанията, хипотезата на изследването е потвърдена, а неговите цели са изпълнени.

Изводи от глава 3:

1. Разработените варианти на обучение, по които се проведоха експериментите с учениците от 11 и 12 клас, позволиха да бъдат реално откроени техните предимства и недостатъци.
2. Обучението по вариант А допринася за реализирането му върху обобщена ориентировъчна основа за действие. Чрез придобитите знания, действията на обучаваните са по-осъзнати относно избора на метод за доказване на неравенства в триъгълника, избора на подходящи забележителни неравенства и опорни задачи, както и относно определянето на идея за решаване на задачите.
3. Учениците, обучавани по вариант А, в резултат от по-задълбочено усвояване на знанията, проявяват творческа активност, разработват курсови работи, след като са направили предварителна подготовка чрез проучване на литературни източници относно съответния проблем.
4. Обучението по вариант А обогатява опита на учениците за решаване на задачи.
5. При обучението по вариант Б (характерно за традиционното обучение) се ръководим предимно от схемата: "опит-грешка".

Препоръки и предложения за бъдеща работа:

1. Обогатяване на системата от задачи, подпомагащи доказването на неравенства в триъгълника

2. Съставяне на допълнителни дидактически целесъобразни системи от неравенства, изразяващи нови връзки между елементите на триъгълника.

2. Изследване на възможности за прилагане и на други методи за доказване на неравенства между елементите на триъгълника.

3. Работа по формиране на обобщени умения у учениците за работа със задачи.

Апробация

Основните резултати от дисертационното изследване са апробирани в проведеното експериментално обучение, а също и чрез докладване на редица международни конференции:

1) Международная научно-практическая конференция „Математическое образование в Украине: прошлое, настоящее, будущее”, Киев, 2007 г.;

2) Международная научная конференция „Проблемы математического образования”, гр. Черкассы, Украина, 2009 г.

Авторска справка за приносите в дисертационното изследване

Според автора основните **приноси** се свеждат до следното:

1. Направен е теоретичен анализ на проблема за комплексно и целенасочено използване на общологическите методи за решаване на задачи и формиране, и развитие на обобщени знания и познавателна дейност на учениците при изучаване на изследваната тема.
2. Формулирани и систематизирани са основни теми за обучение по математика в СИП 11 и 12 клас и е разработен проект за съответно учебно съдържание.
3. Създаден е технологичен модел за организация и самоорганизация на знанията и уменията на учещите при решаване на задачи.
4. Проучено е учебното съдържание по математика в средното училище, в резултат на което са систематизирани т.нар. „опорни” задачи, които спомагат за успешно решаване на задачите от темата „Доказване на неравенства между елементи в триъгълник”.
5. Разработени са системи от задачи по обособените теми за успешна подготовка на учениците по разглежданата тематика.
6. Изграден е схематичен модел на дейността доказване на неравенства между елементи на триъгълника.
7. В резултат на изследването се достига до извода, че използването на общологически методи допринася за:

- развитие на рефлексивни и обобщени умения на учещите;
- по-осмислено отразяване на резултатите от собствената им познавателна дейност;
- формиране и развитие на обобщени умения за съставяне на евристични предписания и на задачи.

БЛАГОДАРНОСТИ

Изказвам най-сърдечна благодарност на научните си ръководители проф. дпн Васил Милушев и доц. д-р Румяна Маврова, на членовете на катедра МОМИ и доц. д-р Евгения Ангелова от ФМИ на ПУ "Паисий Хилендарски“ за съветите, препоръките и съдействието.

СПИСЪК НА ПУБЛИКАЦИИТЕ НА АВТОРА ПО ТЕМАТА НА ДИСЕРТАЦИЯТА

1. Германов, Г., Ж. Германова, В. Милушев. Тъждества и неравенства между елементи на триъгълника (книга), Пловдив, Изд. “Бойкинг“, 2005, 184 с.
2. Германова, Ж. Некоторые применения неравенства Коши-Буняковского для доказательства неравенств между элементами треугольника. – Международный сборник научных работ: „Дидактика математики – проблемы и исследования”, Донецьк: “ДонНУ”, 2007, с. 202-206.
3. Германова, Ж. Усвоение общелогических и частных математических методов доказательства неравенств в треугольнике. – ВІСНИК ЧЕРКАСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ, Серія ПЕДАГОГІЧНІ НАУКИ, Випуск 162, Черкаси, 2009, с. 33-46.
4. Германова, Ж., В. Милушев. Екстремални задачи от тригонометрични функции на ъгли в триъгълник. Научни трудове на ПУ “Паисий Хилендарски”, т. 47, кн. 2, 2010, с. 25-37.
5. Ангелова, Е., Ж. Германова. Едно експериментално изследване върху изучаване на методи за доказване на неравенства между елементи в триъгълник чрез прилагане на информационните технологии, Научни трудове на ПУ “Паисий Хилендарски“, т. 48, кн. 2, 2011, с. 19-33.
6. Германова, Ж. Няколко неравенства между елементи на триъгълника. - Математически форум, т. VII, бр. 2, 2005, с. 50-54.
7. Германова, Ж. Обобщение на знанията за зависимостите между линейни елементи на триъгълника чрез задачи от доказване на неравенства в занятията по СИП – 8 клас. – Математически форум, т. VIII, бр. 2, 2006, с.58-64.
8. Германова, Ж. Някои приложения на неравенството на Йенсен за доказване на неравенства между елементи на триъгълника, сп. “Математически форум“, том XI, бр. 4, С. : ИФ “Тонко Тонков“, 2009, стр. 114-123.
9. Германова, Ж. Нови оригинални задачи. –Математически форум, т. VII, бр.4, с. 98, 2005 (задача 87); т. X, бр. 1, с. 2, 2008 (Задача 128; Задача 129; Задача 130; Задача 131); т. X, бр. 2, с. 34, 2008 (Задача 135); т. X, бр. 3, с. 66, 2008 (Задача 137); т. X, бр. 5, с. 130, 2008 (Задача 140; Задача 141; Задача 142).
10. Германова, Ж. Решение на задачи. – Математически форум, т. VII, бр.1, с. 7-8, 2005 (задача 62); т. VII, бр. 2, с. 38-39, 2005 (задача 64); т. VIII, бр.4, с.101-102, 2006 (задача 86); т. VIII, бр.4, с. 119-120, 2006 (задача 91); т. IX, бр. 6, с.164 – 165, с.167-168, 2007 (задачи 100 и 101); т. X, бр. 4, с. 102, 2008 (задача 108); т. X, бр. 5, с. 130, 2008 (задача 82); том XI, бр. 5, стр. 131, 2009 (задача 116); том XI, бр. 5, стр. 139-140, 2009 (задача 122); том XI, бр. 6, стр. 165, 2009 (задача 125).

Библиография

1. Ангелова, Е. Провеждане на експериментално изследване и апостериорен и статистически анализ на резултатите. Сб. доклади на Юбилейна международна конференция "Синергетика и рефлексия в обучението по математика", Бачиново, 10-12 септември, 2010, с. 364-373.
2. Ангелова, Е., Ж. Германова. Едно експериментално изследване върху изучаване на методи за доказване на неравенства между елементи в триъгълник чрез прилагане на информационните технологии. Научни трудове на ПУ "Паисий Хилендарски", т. 48, кн. 2, 2011, с. 19-33.
3. Ангелова, Е., Р. Радев. Апостериорен анализ на дидактически тест чрез специализиран софтуер. Сб. "Образованието в информационното общество", Пловдив, 27-28 май 2010, с. 291-297.
4. Андреев, М. Процесът на обучение. Дидактика. С.: "Св. Климент. Охридски", 1996, 424с.
5. Балл, Г. А. Теория учебных задач: Психолого-педагогический аспект. М.: "Педагогика", 1990, 184 с.
6. Бижков, Г., В. Краевски. Методология и методи на педагогическите изследвания. С.: Ун.изд."Св. Климент Охридски", 2007, 524 с.
7. Билчев, Св., Е. Великова. Някои асиметрични неравенства за триъгълника. – Математика, № 4, София, 1986, с. 13-17.
8. Билчев, Св., Е.Великова. Приложение на някои преобразувания за получаване на нови геометрични неравенства. "Научни трудове" на ВТУ "Ангел Кънчев" - Русе, Том XXVIII, Сер. 11, Математическо моделиране. Механика и управление на процесите, 1986, с. 21-26.
9. Бънков, А. Логика. С.: "Наука и изкуство", 1975, 500 с.
10. Василевский, А.Б. Обучение решению задач по математике. Минск: "Вышэйшая школа", 1988, 255 с.
11. Великова, Е. Алгоритми за доказване на неравенства в триъгълника: Методическо пособие – Русе: Русенски унив. А. Кънчев, 2006,120 с.
12. Великова, Е. А. Върху някои неравенства, свързващи медианите и други елементи на произволен триъгълник, "Научни трудове" на ВТУ "Ангел Кънчев"- Русе, Том XXVIII, Сер. 11, Математическо моделиране. Механика и управление на процесите, 1986, с. 69-74.
13. Великова, Е.А. О неравенствах, связывающих некоторых междуцентровых расстояний в треугольнике, "Научни трудове" на ВТУ "А. Кънчев" - Русе, Том XXXII, Сер. 14, Природоматематически науки, 1987, с. 33-37.
14. Вишин, Я. Методика за решаване на математически задачи. С.: "Народна просвета", 1975, 125 с.
15. Вълканова, Е., В. Милушев. Някои неравенства за вътрешните ъглополовящи на триъгълника. Математика и математическо образование, 1994, с. 431.

16. Ганчев, Ив. Анализът и синтезът в обучението по математика. – В: Методи за решаване на задачи, Под научната ред. на доц. В. Милушев, Пловдив: „Макрос-2001”, 2001, с. 5-31.

17. Ганчев, Ив. Аналитико-синтетичният метод на мислене в училищния курс по математика. – Обучението по математика, 1986, № 2, с.19-25.

18. Ганчев, Ив., Ю. Колягин, Й. Кучинов, Л. Портев, Ю. Сидоров. Методика на обучението по математика от VIII-XI кл. С.: ИФ “Модул”, част I, 1996, 210 с.; част II, 1996, 288 с.

19. Ганчев, Ив. Основни учебни дейности в урока по математика (Синтез на резултатите от различни изследвания), С.:ИФ“Модул-96”, 1999, 198 с.

20. Георгиева, А. Някои приложения на класическите неравенства в геометрията – В: Математика и информатика, 2004, кн. 3, с. 47-57.

21. Германова, Ж. Няколко неравенства между елементи на триъгълника. – Математически форум, т. VII, бр. 2, 2005, с. 50-54,

22. Гъров, К. А. Теория и практика на подготовката на изявени и талантливи ученици за участие в олимпиади и състезания по информатика и информационни технологии, Автореферат, С.,2008, 28 с.

23. Гроздев, С., К. Гъров. За системите от опорни задачи при подготовката за участие в олимпиади по информатика. Комбинаторни обекти и алгоритми, Сборник научни трудове, Тридесет и седма пролетна конференция на Съюза на математиците в България, с. 304-311, С., 2008.

24. Иванов, И. С. Базисные задачи как средство нахождения клетки оператора математических задач. – В: Сб. докл. Международной научно-практической конференции „Математическое образование в Украине: прошлое, настоящее, будущее”, 16-18 октября 2007, Киев, НПУ им. М. П. Драгоманова, с. 180-181.

25. Сп. Квант: кн. 4, 1985, с. 56; кн. 7, 1985, с. 47; кн.8, 1985, с. 44; кн. 10, 1985, с.15, с. 52; кн. 2, 1986; кн. 9, 1986; кн. 10,1986; кн. 1, 198; кн. 2, 1987; кн. 1, 1988; кн. 3, 1988; кн. 5, 1988; кн. 6, 1988; кн. 7, 1988; кн. 10, 1988; кн. 11, 1988; кн. 12, 1988; кн. 3, 1989; кн.6, 1989; кн. 8, 1989; кн. 11, 1989; кн. 6, 1990; кн. 8, 1990; кн. 3, 1994; кн. 2, 1995; кн. 5, 1995.

26. Колев,Н., Приложна статистика 1, С.:Унив.изд. „Стопанство”, 1993.

27. Колягин, Ю. М. Задачи в обучении математике. Част I; Част II, М.: „Просвещение”, 1977, 283 с.

28. Колягин, Ю. М. и др. Методика на преподаването в средното училище, С.: “Народна просвета”, 1978, 480с.

29. Крупич, В. Теоретические основы обучения решению школьных математических задач, М.: “Прометей”, 1995, 212 с.

30. Кучинов, Й. Конкурсни задачи по математика за постъпване във ВУЗ през 2001 г. Свитък 8. С. : “Модул“, 2002, 189 с.

31. Лалчев,.Здр. В. Един начин за получаване и доказване на някои тригонометрични неравенства. – Математика и математическо образование, 1988, С., БАН, с. 551-554

32. Математика плюс: 2004, бр. 1, с. 49-50 (примерна тема 3 за УАСГ, примерна тема 5); 2004, бр. 2, с. 9; 2004, бр. 4, с. 9; 2005, бр.1, с. 9, с.25-27 (примерна тема 3 за УАСГ, зад.2); 2005, бр. 2, с. 23-26 ("Неравенства в триъгълника"); 2005, бр. 3, с. 48; 2005,бр. 4, с. 6.

33. Метельский, Н. В. Дидактика математики, Минск. БГУ, 1982, 256 с.

34. Милушев, В. Относно класифициране на методите за решаване на математически задачи. Научни трудове.на ПУ "Паисий Хилендарски", т. 46, кн. 2, 2009 г., с.77-90.

35. Милушев, В. Б. Триадата дейности решаване, съставяне и преобразуване на математически задачи в контекста на рефлексивно-синергетичния подход. Дисертация за присъждане на научната степен „Доктор на педагогическите науки", С., 2008, 414 с.

36. Милушева-Бойкина, Д. Върху понятието "задача" в научната литература – Научни трудове на ПУ "Паисий Хилендарски", т. 34, Методика на обучението, 1997, № 2, с. 51-62..

37. Николов, Й. Моделиране на процесите обучение $\rightarrow$ развитие и развитие $\rightarrow$ обучение. Шумен: УИ "Епископ Константин Преславски", 2001 г., 64 с.

38. Николов, Ст., Р. Маврова. Методи на научното познание. Пособие за студенти по физика, математика, химия, биология., Пловдив: "Макрос 2000", 1993, 108 с.

39. Нончева, В., М. Дилчева, В. Кинова. Ръководство по теория на вероятностите и статистика. Пловдив: ПУИ „Паисий Хилендарски",2003, 198 с.

40. Паскалев, Г. Работата в кръжока по математика. С.: "Народна просвета", част I, 1984, 207 с.; част II, 1985, 239 с.

41. Паскалев, Г. Конкурсни задачи по математика за постъпване във ВУЗ (1945-1986г.). Второ изд. С.: „Наука и изкуство", 1987, 382 с.

42. Петров, П. Дидактически аспекти при прогнозирането при търсене на решения на математически задачи, Автореферат, С. 1996.

43. Петров, П. Формиране на умения за решаване на задачи от училищния курс по математика – Теоретико-приложни аспекти, Ст. Загора: "КОТА", 2003, 120 с

44. Петров, П., М. Атанасова. Образователни технологии и стратегии за учене. С.: "Веда Словена – ЖГ", 2001, 300 с.

45. Пойа, Д. Как да се решава задача. С.:"Народна просвета",1972,151с.

46. Пономарьов, Я.А. Психология творческого мышления, М.: "Просвещение", 1970, 289 с.

47. Портев, Л., В. Милушев, Н. Николов, Р. Маврова. Проблемност при обучението по математика. С.:"Народна просвета", 1983, 124 с.

48. Портев, Л., Н. Николов. Методика на обучението по математика. част I, Обща методика, Пловдив, 1987, 340 с.

49. Прасолов, В. В. Задачи по планиметрии. Часть II, библиотека Математического кружка, выпуск 16, изд. Москва “Наука”, Главная редакция Физико-математической литературы, 1986, 287 с.

50. Радев, Пл. Дидактика и история на училищното обучение, Пловдив: Пловдивско университетско издание, 1996, 319 с.

51. Рейтман, У. Р. Познание и мышление. Моделирование на уровне информационных процесов, М.: “Мир”, 1988, 400 с.

52. Скафа, Е. И. Эвристическое обучение математике: теория, методика, технология. Монография – Донецк: Изд. Дон НУ, 2004, 439 с.

53. Славов, К. и др. Върху структурата на математическите задачи и породената от нея типология. Годишник на ФМИ в ШУ, т. 1, 1992 (с. 7-17).

54. Славов, К. Някои методи за решаване на задачи по алгебра, С.: “Народна просвета”, 1967, 132 с.

55. Стоилов, Т. П., Л. К. Чилингирова. Неравенства. II преработено и допълнено издание. С.: изд. “Булвест – 2000 ООД”, 1995, 110 с.

56. Трашлиев, Р. Задачата (психолого-педагогически проблеми), С., 1989, 168 с.

57. Френкев, Д. Някои аспекти на преобразуването на математически задачи и прилагането им в обучението по планиметрия в 9 клас. Автореферат, С., 2001, 64 с

58. Френкев, Д., В. Милушев, Д. Бойкина. Комплексен модел на процеса решаване на математически задачи от определен вид. – Математика и математическо образование. С. ,Изд. на БАН, 2007, с. 429-435.

59. Фридман, Л. М. Теоретические основы методики обучения математике, М.: “Флинта”, 1998, 220 с.

60. Эсаулов, А. Ф. Психология решения задач. М.: Высшая школа, 1972, 216 с.

61. Bilchev, S.J. & E.A.Velikova, Transformations for a Triangle and Some Applications, Mathematics and Education in Mathematics, Proceedings of the Seventeenth Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicions, Sunny Beach, April 6-9, 1988, Sofia, Bulgarian Academy of Sciences, 1988, pp. 9-19, Plenary Report.

62. Bilchev, S.J. & E.A.Velikova A Group of Transformations for a Triangle And Some of Its Applications, Tehnical Report No 167, Mathematics, September 1989, Department of Mathematics, University of Ioannina, Ioannina, Greece, 1989. p. 15.

63. Mitchel, P. Educational Technology, L., 1978

64. Velikova, E. The Beauty of the Geometric Inequalities, Proceedings of the International Research Workshop of Israel Science Foundation “Multiple Solution Connecting Tasks”, 20-22 February, 2008, Haifa, Israel,CET – The Center for Educational Technology, Tel Aviv, 2008, p. 61-74.