ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ „ПАИСИЙ ХИЛЕНДАРСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
КАТЕДРА „АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ“

ДИМИТЪР РУМЕНОВ РАЗПОПОВ

ВЪРХУ ГЕОМЕТРИЯТА НА РИМАНОВО МНОГООБРАЗИЕ С ДВЕ ЦИРКУЛАНТНИ СТРУКТУРИ

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертационен труд
за присъждане на
образователната и научна степен *Доктор*

Област на висше образование:
4. Природни науки, математика и информатика

Професионално направление: *4.5. Математика*

Докторска програма: *Геометрия и топология*

Научни ръководители:

проф. дмн Манчо Манев и доц. д-р Добринка Грибачева

Пловдив, 2019 г.

Дисертационният труд е обсъден и насочен за защита от Катедрения съвет в разширен състав на катедра „Алгебра и геометрия“ при ФМИ на ПУ „Паисий Хилендарски“, проведен на 04.10.2018 г.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на открито заседание на Научното жури, което ще се проведе на 24.01.2019 г. от 15:00 ч. в Заседателната зала на Новата сграда на ПУ „Паисий Хилендарски“.

Научно жури:

- чл.-кор. проф. дмн Стефан Петров Иванов (ФМИ на СУ),
- проф. дмн Манчо Христов Манев (ФМИ на ПУ),
- доц. д-р Симеон Петров Замковой (ФМИ на СУ),
- доц. д-р Юлиан Цанков Цанков (ФМИ на СУ),
- доц. д-р Галя Василева Накова (ФМИ на ВТУ).

Дисертационният труд се състои от 95 страници и съдържа увод, три глави, тринадесет параграфа, заключение и библиография от 66 заглавия.

Заглавията и номерациите на главите и параграфите, номерациите на твърденията, както и цитиранията в автореферата съвпадат със съответните заглавия и номерации в дисертационния труд.

Основна част от резултатите от настоящата работа са включени в 6 статии ([11], [12], [17], [18], [34] и [50]), публикувани в рецензирани и индексирани научни списания: *Research and Education in Mathematics, Informatics and their Applications – REMIA, Plovdiv (2010)*; *Plovdiv University Science Works – Mathematics (2011)*; *Mathematics and Education in Mathematics, In: Proc. 40th Jubilee Conference of UBM, (2011)*; *Mathematics and Education in Mathematics, In: Proc. of 44th Spring Conf. of UBM, SOK Kamchia, Bulgaria, (2015)*; *Journal of the Technical Univerity – Sofia, Plovdiv Branch, Fundamental Sciences and Technologies, (2017)*; *Mathematics and Education in Mathematics, In: Proc. 47th Spring Conf. of UBM, (2018).* Част от резултатите са изнесени в 6 доклада на 6 научни форума, от които 2 са на международни конференции.

* * *

Целта на дисертационния труд е да се изследват диференциално геометрични въпроси за тримерни и четиримерни риманови многообразия с две циркулантни структури. По-специално:

• да се изучат геометричните свойства на многообразията свързани с метриката и структурата, както и техни кривинни характеристики;

• да се получат резултати за специални класове от риманови многообразия с циркулантни структури, които да наподобяват класическите резултати за (псевдо)риманови многообразия с почти комплексна структура или със структура на почти произведение, като паралелност на структурата, конформна трансформация, холоморфна кривина, подкласове и т.н.;

• да се конструират експлицитни примери на разглежданите многообразия, както и примери с помощта на алгебри на Ли.

* * *

Увод

В последните години много научни работи са посветени на геометрията на диференцируемите многообразия, снабдени с допълнителни тензорни структури, които са ендоморфизми в допирателното разслоение на многообразието. Като пример ще посочим две доста популярни структури – почти комплексната, чийто квадрат е равен на минус идентитета и структурата на почти произведение, чийто квадрат е равен на идентитета. В литературата има и примери, в които допълнителната структура удовлетворява уравнение от степен по-висока от две, частен случай на полиномна структура, например в [51], [61], [62]. Диференцируемите многообразия могат да се снабдят с още една тензорна структура – риманова метрика, което ги превръща в риманови многообразия. Метриката и ендоморфизмът могат да бъдат съгласувани или антисъгласувани. Нека ковариантната производна например на допълнителната структура по отношение на свързаността на Леви-Чивита, породена от метриката, удовлетворява някакво условие. Тогава се получава подклас от многообразия породен от това условие, а за многообразие от този подклас се получават определени кривинни свойства. Такива резултати в почти ермитовата геометрия са получени от много геометри, например от А. Грей, Л. Хервела, Л. Ванхеке, Т. Сато в работите [21], [23], [24], [53]. В случая на многообразия с почти комплексна структура и норденова метрика такива задачи са решавани и от български математици. Част от тях са Г. Ганчев, А. Борисов, К. Грибачев, Д. Мекеров, Г. Джелепов, С. Иванов, М. Манев, Г. Накова ([7], [13], [20], [25], [26], [39], [48]). Случаят на многообразия със структура на почти произведение и съгласувана с нея риманова метрика е разглеждан от В. Михова, К. Грибачев, Д. Мекеров, М. Стайкова, И. Докузова, Д. Грибачева, например в работите [16], [31], [32], [44], [46], [54] и [56].

В настоящата работа са разгледани n-мерни диференцируеми многообразия M, които са снабдени с риманова метрика g и допълнителна тензорна структура Q от тип $(1,1)$, чиято n-та степен е равна на идентитета. Изследвани са многообразията в случаите $n=2$, $n=3$ и $n=4$. В дадената локална координатна система координатите на g и Q образуват циркулантни матрици. Двете структури са съгласувани. Така дефинираните риманови многообразия са означени с (M,g,Q). Налагането на условия за тензора на кривина, породен от свързаността на Леви-Чивита, позволява да се дефинират подкласове от многообразия (M,g,Q). Условията за циркулатност, съгласуваност на метриката и допълнителната структура и това, че Q на степен n дава идентитета, а и допълнителните ограничения за тензора на кривина са благоприятни за намиране на редица диференциално геометрични свойства на едно такова многообразие.

Локалните координати на разглежданите структури образуват циркулантни матрици в база на допирателно пространство на разглежданите многообразия. Циркулантните матрици са добре изучени (например в [9] и [22]). Те намират приложение във вибрационния анализ, теория на графите, линейното кодиране, геометрията (например в [8], [35], [52], [57], [58]).

Глава I (*Основни сведения*) съдържа §1 (*Риманови многообразия с допълнителни тензорни структури*), §2 (*Риманови многообразия с две циркулантни структури*) и §3 (*Двумерно риманово многообразие* (M,g,Q)). Глава II (*Тримерни риманови многообразия с циркулантни структури*) съдържа §4 (*Допълнителна циркулантна структура* Q *върху тримерно риманово многообразие с циркулантна метрика*), §5 (*Почти конформна трансформация на риманова метрика върху* (M,g,Q)), §6 (*Многообразие* (M,g,Q) *от класа* $\mathcal{L}_0$), §7 (*Секционни кривини на* (M,g,Q)) и §8 (*Примери за тримерни многообразия* (M,g,Q)). Глава III (*Четиримерни риманови многообразия с циркулантни структури*) съдържа §9 (*Допълнителна циркулантна структура* Q *върху четиримерно риманово многообразие с циркулантна метрика*), §10 (*Многообразие* (M,g,Q) *от класа* $\mathcal{L}_0$), §11

(*Секционни кривини на многообразие* (M, g, Q) *от класа* $\mathcal{L}_1$), §12 (*Риманови многообразия със структура на почти произведение, породена от циркулантната структура* Q) и §13 (*Групи на Ли като четиримерни риманови многообразия* (M, g, Q)).

* * *

В **§1** са дадени необходими за изложението сведения от геометрията на риманово многообразие, както и дефинициите на четири класа от псевдориманови многообразия, които са снабдени с допълнителна тензорна структура, чийто квадрат е равен на плюс идентитета или минус идентитета.

Нека M е n -мерно диференцируемо многообразие, което допуска симетрично тензорно поле g от тип $(0, 2)$. Ако g_{ij} са локалните координати в точка $p(x^1, x^2, ..., x^n)$ от M и $\det(g_{ij}(p)) \neq 0$, то M е риманово многообразие с метрика g.

Ако $u,\ w$ са вектори от допирателното пространство T_pM, то скаларното им произведение е

$$g(u, w) = g_{ij}u^i w^j, \quad g(u, u) > 0,$$

за всяко $u \neq o$.

Нека ∇ е свързаност на Леви-Чивита породена от g, а

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{ks}(\partial_i g_{sj} + \partial_j g_{si} - \partial_s g_{ij})$$

са коефициентите на Риман – Кристофел за ∇.

Тензорното поле на кривина R за ∇ се дефинира чрез

$$R(u, v)w = \nabla_u \nabla_v w - \nabla_v \nabla_u w - \nabla_{[u,v]} w.$$

Тензорното поле от тип $(0, 4)$ асоциирано с R се задава с

$$R(x, y, z, u) = g(R(x, y)z, u),$$

което локално се записва като $R_{sijk} = g_{st} R_{ijk}^t$.
Тензорното поле на Ричи ρ има локални координати

$$\rho_{ij} = R_{ijs}^s.$$

Ако $\nabla Q = 0$, то се казва, че тензорното поле Q е паралелно по отношение на ∇.

Функцията $\tau = \rho_{ij} g^{ij}$ се нарича (първа) скаларна кривина на M.

Величината

$$k(u,v) = \frac{R(u,v,u,v)}{g(u,u)g(v,v) - g^2(u,v)}$$

се нарича секционна кривина на площадката $\{u,v\}$ за линейно независимите вектори u и v от T_pM.

1) Нека (M,g) е псевдориманово почти комплексно многообразие, т.е. допуска допълнителна структура J, като $J^2 = -\mathrm{id}$. Тогава (M,g,J) е:

   а) почти ермитово многообразие, ако е изпълнено

$$g(Ju,Jw) = g(u,w).$$

   б) почти норденово многообразие, ако е изпълнено

$$g(Ju,Jw) = -g(u,w).$$

2) Нека (M,g) е псевдориманово почти продуктно многообразие, т.е. допуска допълнителна структура P, като $P^2 = \mathrm{id}$, $P \neq \pm\mathrm{id}$. Тогава (M,g,P) е:

   а) почти продуктно многообразие със съгласувана метрика, ако е изпълнено

$$g(Pu,Pw) = g(u,w).$$

   б) почти продуктно многообразие с антисъгласувана метрика, ако е изпълнено

$$g(Pu,Pw) = -g(u,w).$$

$* * *$

В **§2** са дефинирани n-мерни риманови многообразия (M,g,Q) с метрика g и допълнителна структура Q, чиято n-та степен е равна на идентитета. Матрицата формирана от координатите на Q е циркулантна. Метриката g и структурата Q са съгласувани така, че пораждат изометрия във всяко допирателно пространство на многообразието. Въведени са класовете $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ от такива многообразия.

Разглеждаме n-мерно реално диференцируемо многообразие M, снабдено с метрика g и допълнително тензорно поле Q от тип $(1,1)$. Структурата Q удовлетворява

$$Q^n = \mathrm{id}, \quad Q \neq \pm\mathrm{id}. \tag{2.1}$$

Метриката g е положително дефинитна, като g и Q са съгласувани с равенството

$$g(Qu, Qv) = g(u, v), \tag{2.2}$$

Такова многообразие ще означаваме с (M, g, Q).

Нека ∇ е свързаността на Леви-Чивита породена от g, а R е тензорът на кривина на ∇.

а) Многообразието (M, g, Q) е от класа $\mathcal{L}_0$, ако Q е паралелна относно ∇ , т.е.

$$\nabla Q = 0. \tag{2.3}$$

б) Многообразието (M, g, Q) е от класа $\mathcal{L}_1$, ако R удовлетворява условието

$$R(u, v, Qw, Qt) = R(u, v, w, t). \tag{2.4}$$

в) Многообразието (M, g, Q) е от класа $\mathcal{L}_2$, ако R удовлетворява условието

$$R(Qu, Qv, Qw, Qt) = R(u, v, w, t). \tag{2.5}$$

Теорема 2.1. *В сила са следните включвания $L_0 \subset L_1 \subset L_2$.*

* * *

В **§3** е разгледано двумерно многообразие (M, g, Q). Това е частен случай на многообразие със структура на почти произведение и с нулева следа на изображението. Намерени са условия за g, така че Q да е паралелна относно ∇. Даваме примери за двумерни (M, g, Q), които са двумерни повърхнини вложени в тримерно евклидово пространство със зададена декартова координатна система $Oxyz$.

Лема 3.1. *Нека Q е произволна реална циркулантна матрица от тип (2×2) и $Q^2 = E$. Тогава Q е една от следните матрици:*

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нека (M, g, Q) е двумерно многообразие. Тогава Q удовлетворява

$$Q^2 = \mathrm{id}, \quad Q \neq \pm \mathrm{id}. \tag{3.1}$$

Компонентите на Q в T_pM, за всяка точка $p \in M$ и някаква база на T_pM, задаваме с матрицата

$$(Q_i^j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Метриката g и структурата Q удовлетворяват (2.2) тогава и само тогава, когато компонентите на g образуват матрицата

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix},$$

където A и B са гладки функции на точка $p \in M$. Нека $A > B > 0$.

Всяко двумерно многообразие (M, g, Q) е от класа $\mathcal{L}_2$.

Теорема 3.2. *Всяко двумерно многообразие* (M, g, Q) *е от класа* $\mathcal{L}_0$*, точно когато е в сила матричното равенство* $\mathrm{grad}A = \mathrm{grad}B.Q$

Примери за двумерно многообразие (M, g, Q)

Задаваме повърхнина относно $Oxyz$ с уравненията

$$x = e^{x^1}\cos x^2, \quad y = e^{x^1}\sin x^2, \quad z = \cos(x^1 + x^2).$$

Метриката g има локални координати

$$g_{11} = g_{22} = A = e^{2x^1} + \sin^2(x^1 + x^2), \quad g_{12} = g_{21} = B = \sin^2(x^1 + x^2).$$

Условието $A > B > 0$ е изпълнено и g е положително дефинитна метрика. Многообразието (M, g, Q) принадлежи на класа $\mathcal{L}_2$, но не и на неговия подклас $\mathcal{L}_0$.

Задаваме повърхнина относно $Oxyz$ с уравненията

$$x = (x^1)^2 + (x^2)^2, \quad y = 2x^1x^2, \quad z = x^1 + x^2,$$

където $x^1 \neq x^2$. Метриката g има локални координати

$$g_{11} = g_{22} = A = 4(x^1)^2 + 4(x^2)^2 + 1, \quad g_{12} = g_{21} = B = 8x^1x^2 + 1.$$

Условието $A > B > 0$ е изпълнено и g е положително дефинитна метрика. Многообразието (M, g, Q) е от класа $\mathcal{L}_0$.

* * *

В **§4** е разгледано тримерно многообразие (M, g, Q). Установено е наличието на ортогонална Q-база във всяко допирателно пространство T_pM, $p \in M$. Получени са коефициентите на Риман-Кристофел на свързаността ∇, и са намерени локалните компоненти на тензора на кривина R от тип $(0, 4)$ за тази свързаност.

Лема 4.1. *Нека Q е произволна реална циркулантна матрица от тип $(3,3)$ и $Q^3 = E$. Тогава Q е една от следните матрици:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нека (M, g, Q) е тримерно многообразие. Тогава структурата Q удовлетворява

$$Q^3 = \mathrm{id}, \quad Q \neq \pm\mathrm{id}.$$

Компонентите на Q в T_pM, за всяка точка $p \in M$ и някаква база на T_pM, задаваме с матрицата

$$(Q_i^j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Теорема 4.2. *Нека (M, g, Q) е тримерно многообразие с допълнителна структура Q, зададена с* (4.1). *Метриката g и структурата Q удовлетворяват равенството* (2.2) *тогава и само тогава, когато компонентите на g образуват циркулантната матрица*

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} A & B & B \\ B & A & B \\ B & B & A \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

където A и B са гладки функции на точка $p = (x^1, x^2, x^3)$ от M.

От A>B>0 следва, че g е положително дефинитна метрика.

Лема 4.3. *За дължините на векторните полета u, Qu и Q^2u са в сила равенствата*

$$\|u\| = \|Qu\| = \|Q^2u\|.$$

Нека

$$\varphi = \angle(u, Qu), \quad \phi = \angle(Qu, Q^2u), \quad \psi = \angle(Q^2u, u).$$

Теорема 4.4. *За произволно ненулево векторно поле u са в сила равенствата $\varphi = \phi = \psi$.*

Теорема 4.5. *За произволно ненулево векторно поле u ъгълът φ удовлетворява условието*

$$0 \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{3}.$$

Следствие 4.6. *Ако* $\varphi = 0$, *то* $u = Qu = Q^2u$. *Ако* $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$, *то векторите* u, Qu *и* Q^2u *са компланарни.*

Определение 4.1. *Ако векторите* $\{u, Qu, Q^2u\}$ *образуват база в* T_pM, *то ще я наричаме* Q*-база. В този случай ще казваме, че вектор* u *поражда* Q*-база в* T_pM.

Теорема 4.7. *Всяко допирателно пространство* T_pM *притежава безброй много* Q*-бази.*

Следствие 4.8. *Всяко допирателно пространство* T_pM *притежава ортогонална* Q*-база.*

Забележка 4.1. *Нека вектор* u *поражда* Q*-база в* T_pM. *Площадката* $\{u, Qu\}$ *има единствена с точност до знак* Q*-база, и това е* $\{u, Qu\}$. *Ако допуснем, че друг вектор* $v = v^1u + v^2Qu$ *поражда* Q*-база в тази площадка, то неговият образ* $Qv = v^1Qu + v^2Q^2u$ *напуска площадката. Следователно не съществува ортогонална* Q*-база в* $\{u, Qu\}$, *освен в случая, когато двойката* $\{u, Qu\}$ *е ортогонална, т.е.* $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Лема 4.9. *Нека* ∇ *е свързаността на Леви-Чивита за метриката* g *на многообразието* (M, g, Q). *Тогава коефициентите на Риман-Кристофел за* ∇ *са*

$$\begin{aligned}
\Gamma^i_{ii} &= \frac{1}{2D}\big[(A+B)A_i - B(4B_i - A_j - A_k)\big],\\
\Gamma^k_{ii} &= \frac{1}{2D}\big[(A+B)(2B_i - A_k) - B(2B_i - A_j + A_i)\big],\\
\Gamma^i_{ij} &= \frac{1}{2D}\big[(A+B)A_j - B(-B_k + B_i + B_j + A_i)\big],\\
\Gamma^k_{ij} &= \frac{1}{2D}\big[(A+B)(-B_k + B_i + B_j) - B(A_i + A_j)\big],
\end{aligned}$$

където $D = (A-B)(A+2B)$ *и* $i \neq j$, $j \neq k$, $i \neq k$.

Лема 4.10. *Ненулевите компоненти* R_{ijks} *на тензора на кривина* R *от тип* $(0,4)$ *за многообразието* (M, g, Q) *са както следва:*

$$
\begin{aligned}
R_{1212} = {} & \frac{1}{2}(2B_{21} - A_{11} - A_{22}) \\
& + \frac{A+B}{4D}\big[A_3(2B_2 - A_3) + (B_1 - B_2 - B_3)(B_1 + B_2 - B_3)\big] \\
& - \frac{2B}{4D}\big[(A_1 - B_2)(B_1 + B_2 - B_3) + A_3(B_2 - A_1)\big], \\
R_{1313} = {} & \frac{1}{2}(2B_{31} - A_{11} - A_{33}) \\
& + \frac{A+B}{4D}\big[A_2(2B_3 - A_2) + (-B_1 + B_2 + B_3)(-B_1 + B_2 - B_3)\big] \\
& - \frac{2B}{4D}\big[2(A_1 - B_3)(B_1 - B_2 + B_3) + A_2(B_3 - A_1)\big], \\
R_{2323} = {} & \frac{1}{2}(2B_{23} - A_{22} - A_{33}) \\
& + \frac{A+B}{4D}\big[A_1(2B_3 - A_1) + (B_1 - B_2 + B_3)(B_1 - B_2 - B_3)\big] \\
& - \frac{2B}{4D}\big[(A_2 - B_3)(B_2 + B_3 - B_1) + A_1(B_3 - A_2)\big], \\
R_{1213} = {} & \frac{1}{2}(B_{21} + B_{31} - B_{11} - A_{23}) \\
& + \frac{A+B}{4D}\big[(A_1 - 2B_3)(B_2 - B_3 + B_1) + A_2A_3\big] \\
& - \frac{B}{4D}\big[A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + 2A_1(A_2 - B_3) - 2A_2B_3 \\
& - 2A_3(B_1 - B_3) + (B_1 - B_2 - B_3)(B_1 + B_2 - B_3)\big], \\
R_{1223} = {} & \frac{1}{2}(B_{22} - B_{12} - B_{23} + A_{13}) \\
& + \frac{A+B}{4D}\big[A_2(B_2 + B_3 - B_1) - (2B_3 - A_1)(2B_2 - A_3)\big] \\
& - \frac{B}{4D}\big[-A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + 2A_1(B_2 + B_3) + 2A_2(B_2 - B_3) \\
& - 4B_2B_3 + 2A_3(B_3 - B_1) + (B_1 + B_2 - B_3)(B_1 - B_2 - B_3)\big], \\
R_{1323} = {} & \frac{1}{2}(B_{23} - B_{33} + B_{13} - A_{12}) \\
& + \frac{A+B}{4D}\big[(2B_2 - A_1)(2B_3 - A_2) - A_3(-B_1 + B_2 + B_3)\big] \\
& - \frac{B}{4D}\big[A_1^2 - A_2^2 - A_3^2 - 2A_1(B_2 + B_3) + 2A_2(B_1 - B_2) \\
& + 4B_2B_3 + 2A_3(B_2 - B_3) - (B_1 - B_2 + B_3)(B_1 - B_2 - B_3)\big].
\end{aligned}
$$

* * *

В **§5** е изследвана трансформация (наречена почти конформна трансформация) на метриката g в друга метрика $\overline{g}$ върху тримерно многообразие (M, g, Q). Намерена е връзка между косинусите на ъглите на векторните полета u и Qu, пресметнати съответно чрез g и $\overline{g}$. Построена е безкрайна редица от почти конформни метрики и е намерена границата на съответната редица от ъглите между u и Qu.

За (M, g, Q) дефинираме симетрично тензорно поле $\widetilde{g}$ чрез условието

$$\widetilde{g}(u, v) = g(u, Qv) + g(Qu, v).$$

Локалните координати на $\widetilde{g}$ образуват матрицата

$$(\widetilde{g}_{ij}) = \begin{pmatrix} 2B & A+B & A+B \\ A+B & 2B & A+B \\ A+B & A+B & 2B \end{pmatrix}.$$

От $A > B > 0$ следва, че $\det(\widetilde{g}_{ij}) = 2(A-B)^2(A+2B) > 0$. Тогава $\widetilde{g}$ е друга метрика върху (M, g, Q). Тя е необходимо индефинитна.
Нека α и β са две гладки функции върху M. Задаваме тензорно поле $\overline{g}$ с

$$\overline{g}(u, v) = \alpha g(u, v) + \beta \widetilde{g}(u, v). \tag{5.1}$$

При $\alpha > 0,\ \beta = 0$ се получава случаят на класическата конформна трансформация в римановата геометрия.

Локалните координати на $\overline{g}$ образуват матрицата

$$(\overline{g}_{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha A + 2\beta B & \beta A + (\alpha+\beta)B & \beta A + (\alpha+\beta)B \\ \beta A + (\alpha+\beta)B & \alpha A + 2\beta B & \beta A + (\alpha+\beta)B \\ \beta A + (\alpha+\beta)B & \beta A + (\alpha+\beta)B & \alpha A + 2\beta B \end{pmatrix}.$$

Ако $\alpha + 2\beta \neq 0,\ \alpha \neq \beta$, то $\det \overline{g} \neq 0$ и $\overline{g}$ е метрика.
Смяната на g с метрика $\overline{g}$, наричаме почти конформна трансформация в (M, g, Q).

Лема 5.1. *Нека са дадени многообразието (M, g, Q) и метриката $\overline{g}$. Ако $\alpha > \beta > 0$, то метриката $\overline{g}$ е положително дефинитна.*

По-нататък в този параграф предполагаме, че $\alpha > \beta > 0$.

Лема 5.2. *Нека u е произволен ненулев вектор в T_pM. За метриката $\overline{g}$ са в сила равенствата*

$$\overline{g}(u, u) = \alpha g(u, u) + 2\beta g(u, Qu), \qquad \overline{g}(u, Qu) = \beta g(u, u) + (\alpha+\beta) g(u, Qu).$$

Теорема 5.3. *Нека u е произволен ненулев вектор в T_pM. Нека φ и $\overline{\varphi}$ са съответно мерките на $\angle(u, Qu)$ по отношение на g и $\overline{g}$. Тогава имаме следната релация*

$$\cos\overline{\varphi} = \frac{\beta + (\alpha + \beta)\cos\varphi}{\alpha + 2\beta\cos\varphi}. \tag{5.2}$$

Следствие 5.4. *За ъгъла $\overline{\varphi}$ между векторите u и Qu относно $\overline{g}$ е в сила $0 \leq \overline{\varphi} \leq \dfrac{2\pi}{3}$.*

Следствие 5.5. *За ъглите φ и $\overline{\varphi}$ между u и Qu съответно по отношение на g и $\overline{g}$ имаме:*

а) $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, *точно когато* $\overline{\varphi} = \arccos\dfrac{\beta}{\alpha}$,

б) $\overline{\varphi} = \dfrac{\pi}{2}$, *точно когато* $\varphi = \arccos(-\dfrac{\beta}{\alpha + \beta})$.

Дефинираме безкрайна редица от метрики върху (M, g, Q), както следва:

$$\{g_0,\ g_1,\ g_2, \dots,\ g_n, \dots\},$$

където

$$g_0 = g, \qquad g_n = \alpha g_{n-1} + \beta\widetilde{g}_{n-1}, \qquad \widetilde{g}_{n-1}(u, v) = g_{n-1}(Qu, v) + g_{n-1}(u, Qv).$$

При $\alpha > \beta > 0$ всяка метрика g_n е положително дефинитна.

Разглеждаме безкрайна числова редица $\{\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2, \dots,\ \varphi_n, \dots\}$, където φ_n е ъгълът между u и Qu относно метриката g_n.

Теорема 5.6. *Редицата $\{\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2, \dots,\ \varphi_n, \dots\}$ е сходяща и клони към нула, ако $0 \leq \varphi_0 < \dfrac{2\pi}{3}$.*

Твърдение 5.7. *Редицата $\{\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2, \dots,\ \varphi_n, \dots\}$ е постоянна, точно когато $\varphi_0 = 0$ или $\varphi_0 = \dfrac{2\pi}{3}$.*

* * *

В **§6** са разгледани тримерни многообразия (M, g, Q) от класа $\mathcal{L}_0$. Намерено е необходимо и достатъчно условие за паралелност на Q по отношение на свързаността ∇ за g. Намерено е необходимо и достатъчно условие за паралелност на Q по отношение на свързаността $\overline{\nabla}$ за метриката $\overline{g}$, получена от g чрез почти конформна трансформация. В частност е получена връзка между тензорите на кривина, съответстващи на g и $\overline{g}$. В случая, когато $\overline{\nabla}$

е локално евклидова свързаност, тензорът на кривина R за метриката g е изразен експлицитно чрез g и Q.

Теорема 6.1. *Многообразието (M, g, Q) е от класа $\mathcal{L}_0$ тогава и само тогава, когато са изпълнени*

$$\mathrm{grad}A = \mathrm{grad}B.S,$$

където

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{6.1}$$

Теорема 6.2. *Нека (M, g, Q) е многообразие от класа $\mathcal{L}_0$. Нека ∇ и $\overline{\nabla}$ са свързаностите на Леви-Чевита съответно за метриките g и $\overline{g}$, които са свързани чрез почти конформна трансформация. Тогава равенството $\overline{\nabla}Q = 0$ е в сила, точно когато е изпълнено условието*

$$\mathrm{grad}\alpha = \mathrm{grad}\beta.S,$$

където S е определена с (6.1).

Ако $\alpha = 0,\ \beta \neq 0$. Получаваме почти конформната трансформация

$$\overline{g}_{ij} = \beta\widetilde{g}_{ij}. \tag{6.2}$$

Съгласно Теорема 6.2 получаваме, че $\overline{\nabla}Q = 0$, точно когато β е константа. По-нататък ще предполагаме, че $\overline{\nabla}Q \neq 0$, т.е. β не е константа.

Теорема 6.3. *Нека $(M, g, Q) \in \mathcal{L}_0$, а ∇ и $\overline{\nabla}$ са съответните свързаности на Леви-Чивита за g и $\overline{g}$, удовлетворяващи* (6.2). *Ако $\overline{\nabla}$ е локално евклидова свързаност, то тензорът на кривина R за ∇ има представянето*

$$\begin{aligned} R(u, v, w, t) =& \frac{\tau}{6}\Big\{2g(u, t)g(v, w) - 2g(u, w)g(v, t) \\ &+ \big[g(Qu, t) + g(u, Qt)\big]\big[g(Qv, w) + g(v, Qw)\big] \\ &- \big[g(Qu, w) + g(u, Qw)\big]\big[g(Qv, t) + g(v, Qt)\big]\Big\}, \end{aligned}$$

където τ е скаларната кривина на (M, g, Q).

Следствие 6.4. *Нека многообразието (M, g, Q) удовлетворява условията на Теорема 6.3. Секционната кривина на произволна двумерна площадка $\{u, Qu\}$ в T_pM е определена с*

$$k(u, Qu) = -\frac{\tau}{6}\tan^2\frac{\varphi}{2}, \qquad \varphi \in \Big(0, \frac{2\pi}{3}\Big).$$

Следствие 6.5. *Нека многообразието (M, g, Q) удовлетворява условията на Теорема 6.3. Тогава тензорът на Ричи ρ за g е изроден.*

* * *

В **§7** са разгледани тримерни многообразия (M, g, Q) от класа $\mathcal{L}_2$. Получена е зависимост между секционната кривина на двумерна площадка $\{u, Qu\}$ в T_pM и ъгъла φ между векторите u и Qu. В частност, е разгледано тримерно многообразие (M, g, Q) от класа $\mathcal{L}_1$. Намерена е връзка между секционната кривина на произволна двумерна площадка и ортонормирана площадка от вида $\{u, Qu\}$.

Съгласно Забележка 4.1, площадката $\{u, Qu\}$ притежава единствена (с точност до знак) Q-база и това е $\{u, Qu\}$. Ето защо секционната кривина k на тази площадка ще означим с $k(\varphi)$.

Теорема 7.1. *Нека (M, g, Q) е от класа $\mathcal{L}_2$. Ако вектор u поражда Q-база в T_pM, то за секционната кривина k на $\{u, Qu\}$ получаваме*

$$k(\varphi) = \frac{1 - 2\cos\varphi}{1 + \cos\varphi} k\Big(\frac{\pi}{2}\Big) + \frac{3\cos\varphi}{1 + \cos\varphi} k\Big(\frac{\pi}{3}\Big).$$

Следствие 7.2. *Нека (M, g, Q) е от класа $\mathcal{L}_2$, а вектор u поражда Q-база. Тогава $k(u, Qu) = k(Qu, Q^2u) = k(Q^2u, u)$.*

Теорема 7.3. *Нека (M, g, Q) е от класа $\mathcal{L}_1$. Ако вектор v поражда ортонормирана Q-база, а u и w са линейно независими вектори от T_pM, то секционната кривина на площадката $\{u, w\}$ е*

$$k(u, w) =$$
$$= \frac{\big[u^1(w^2 - w^3) + u^2(w^3 - w^1) + u^3(w^1 - w^2)\big]^2 k(v, Qv)}{\big[(w^1)^2 + (w^2)^2 + (w^3)^2\big]\big[(u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2\big] - \big[u^1w^1 + u^2w^2 + u^3w^3\big]^2},$$

където $u = u^1v + u^2Qv + u^3Q^2v$, $w = w^1v + w^2Qv + w^3Q^2v$.

Следствие 7.4. *Нека $(M, g, Q) \in \mathcal{L}_1$ и вектор u поражда Q-база. Тогава $k(\varphi) = \dfrac{1 - \cos\varphi}{1 + \cos\varphi} k(\dfrac{\pi}{2})$.*

* * *

В **§8** са дадени примери за тримерни многообразия (M, g, Q). Получени са експлицитни примери от класовете $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{L}_2$. Конструирани са групи на Ли като примери на разглежданите многообразия от $\mathcal{L}_2$. Поставено е условие съответните им алгебри на Ли да са от специален вид от класификацията на Бианки направена в [5] и са намерени техни кривинни свойства.

Теорема 8.1. *Многообразието* (M, g, Q) *с метрика* g*, зададена чрез*

$$A = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2, \quad B = x^1x^2 + x^1x^3 + x^2x^3,$$

при $x^1 > 0,\ x^2 > 0,\ x^3 > 0,\ x^1 \neq x^2$*, принадлежи на* $\mathcal{L}_0$.

Теорема 8.2. *Тримерното риманово многообразие* (M, g, Q) *е от класа* $\mathcal{L}_2$*, точно когато тензорът на кривина* R *удовлетворява условията*

$$R_{1213} = R_{1323} = -R_{1223}, \qquad R_{1212} = R_{1313} = R_{2323}.$$

Теорема 8.3. *Многообразието* (M, g, Q) *с метрика* g*, зададена чрез*

$$A = 2x^1, \quad B = 2x^1 + x^2 + x^3, \quad 2x^1 + x^2 + x^3 > 0, \quad x^2 + x^3 < 0,$$

принадлежи на класа $\mathcal{L}_2$*, но не и на неговия подклас* $\mathcal{L}_0$*. Многообразието* (M, g, Q) *не е локално плоско.*

По-нататък конструираме многообразието (G, g, Q) по следния начин. Нека G е тримерна реална свързана група на Ли и $\mathfrak{g}$ е съответната алгебра на Ли с база $\{e_1, e_2, e_3\}$ от лявоинвариантни векторни полета. Въвеждаме структура Q и метрика g, както следва

$$Qe_1 = e_2, \quad Qe_2 = e_3, \quad Qe_3 = e_1,$$

$$g(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Многообразието (G, g, Q) е от разглеждания тип (M, g, Q).

В класификацията на неразложимите 3-мерни алгебри на Ли от Бианки се съдържат девет основни класа.

Разглеждаме класа $Bia\ VII_h$. Той съдържа всички алгебри на Ли определени с комутаторите:

$$[e_1, e_2] = 0, \qquad [e_2, e_3] = e_1 - he_2, \qquad [e_3, e_1] = he_1 + e_2, \qquad h \geq 0. \tag{8.1}$$

Намираме компонентите на ∇:

$\nabla_{e_1}e_3 = -he_1, \nabla_{e_1}e_1 = \nabla_{e_2}e_2 = he_3, \nabla_{e_3}e_1 = e_2, \nabla_{e_2}e_3 = -he_2, \nabla_{e_3}e_2 = -e_1.$

Ненулевите компоненти на R и на ρ имат вида:

$$R_{1212} = R_{1313} = R_{2323} = h^2 \qquad \rho_{11} = \rho_{22} = \rho_{33} = -3h^2.$$

Твърдение 8.4. *Нека* (G, g, Q) *е определено със* (8.1)*. Тогава имаме:*

а) (G, g, Q) *принадлежи на класа* $\mathcal{L}_2$.
б) (G, g, Q) *е айнщайново многообразие с отрицателна скаларна кривина* $\tau = -9h^2$*;*
в) (G, g, Q) *има постоянни секционни кривини, като секционните кривини на базисните двумерни площадки са* $k_{ij} = h^2$.

Разглеждаме класа $Bia\ IX$. Той съдържа всички алгебри на Ли определени с комутаторите

$$[e_1, e_2] = e_3, \qquad [e_2, e_3] = e_1, \qquad [e_3, e_1] = e_2. \tag{8.2}$$

Намираме компонентите на ∇:

$$\begin{aligned} &\nabla_{e_1} e_2 = \tfrac{1}{2} e_3, \quad \nabla_{e_1} e_3 = -\tfrac{1}{2} e_2, \quad \nabla_{e_2} e_1 = -\tfrac{1}{2} e_3, \quad \nabla_{e_2} e_3 = \tfrac{1}{2} e_1, \\ &\qquad\qquad\qquad \nabla_{e_3} e_1 = \tfrac{1}{2} e_2, \qquad \nabla_{e_3} e_2 = -\tfrac{1}{2} e_1, \quad \nabla_{e_3} e_2 = -e_1. \end{aligned}$$

Ненулевите компоненти на R и на ρ, имат вида:

$$R_{1212} = R_{1313} = R_{2323} = -\frac{1}{4}, \qquad \rho_{11} = \rho_{22} = \rho_{33} = -\frac{3}{4},$$

Твърдение 8.5. *Нека* (G, g, Q) *е определено със* (8.2). *Тогава са в сила:*

а) (G, g, Q) *принадлежи на класа* $\mathcal{L}_2$*;*
б) (G, g, Q) *е айнщайново многообразие с отрицателна скаларна кривина* $\tau = -\frac{9}{4}$*;*
в) (G, g, Q) *има постоянни секционни кривини, като секционните кривини на основните двумерни площадки са* $k_{ij} = \frac{1}{4}$.

* * *

В **§9** е разгледано четиримерно многообразие (M, g, Q). Намерени са условия за съществуване на Q-база в T_pM. Доказано е съществуването на ортогонална Q-база.

Лема 9.1. *Нека* Q *е произволна реална циркулантна матрица от тип* (4×4) *и* $Q^4 = E$. *Тогава* Q *е една от следните матрици:*

$$\begin{pmatrix} \pm1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \pm1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm1 \\ \pm1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm1 \\ \pm1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \pm1 \\ \pm1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \pm1 & 1 & \mp1 & 1 \\ 1 & \pm1 & 1 & \mp1 \\ \mp1 & 1 & \pm1 & 1 \\ 1 & \mp1 & 1 & \pm1 \end{pmatrix}.$$

Нека (M, g, Q) е четиримерно многообразие. Тогава структурата Q удовлетворява

$$Q^4 = \mathrm{id}, \quad Q \neq \pm\mathrm{id}.$$

Компонентите на Q в T_pM, за всяка точка $p \in M$ и някаква база на T_pM, задаваме с матрицата

$$(Q_i^j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9.1}$$

Теорема 9.2. *Нека (M, g, Q) е четиримерно многообразие с допълнителна тензорна структура Q, зададена чрез* (9.1). *Метриката g и структурата Q удовлетворяват равенство* (2.2), *тогава и само тогава, когато компонентите на g образуват циркулантната матрица*

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} A & B & C & B \\ B & A & B & C \\ C & B & A & B \\ B & C & B & A \end{pmatrix}, \tag{9.2}$$

където A, B и C са гладки функции на точка $p(x^1, x^2, x^3, x^4)$ от M.

Ако $A > C > B > 0$, то g е положително дефинитна метрика.

Лема 9.3. *За дължините на векторните полета u, Qu, Q^2u и Q^3u са в сила равенствата*

$$\|u\| = \|Qu\| = \|Q^2u\| = \|Q^3u\|.$$

Теорема 9.4. *За ъглите, определени от ненулевото векторно поле u, са в сила равенствата:*

$$\begin{aligned} &\angle(u, Qu) = \angle(Qu, Q^2u) = \angle(Q^2u, Q^3u) = \angle(Q^3u, u), \\ &\angle(u, Q^2u) = \angle(Qu, Q^3u). \end{aligned}$$

Нека означим тези ъгли с $\varphi = \angle(u, Qu)$ и $\phi = \angle(u, Q^2u)$.

Определение 9.2. *Ако четворката вектори $\{u, Qu, Q^2u, Q^3u\}$ е база на T_pM, то ще я наричаме Q-база. В този случай ще казваме, че вектор u поражда Q-база на T_pM.*

Теорема 9.5. *Всяко допирателно пространство T_pM притежава безброй много Q-бази.*

Теорема 9.6. *Всяко допирателно пространство T_pM притежава ортогонална Q-база.*

* * *

В **§10** пресмятаме коефициентите на Риман-Кристофел за метриката на (M, g, Q). Използваме ги, за да намерим условия за паралелност на структурата Q.

Лема 10.1. *Нека ∇ е свързаността на Леви-Чивита за метриката g на (M, g, Q). Тогава коефициентите на Риман-Кристофел за ∇ са следните:*

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ii}^{i} = \frac{1}{2D}\big[&B(C-A)(4B_i - A_j - A_s) + 2B^2(2C_i - A_i - A_k)\\
&+ A(A+C)A_i - C(A+C)(2C_i - A_k)\big],\\
\Gamma_{ii}^{j} = \frac{1}{2D}\big[&B(C-A)(A_i + 2C_i - A_k) + 2B^2(A_j - A_s)\\
&+ A(A+C)(2B_i - A_j) - C(A+C)(2B_i - A_s)\big],\\
\Gamma_{ii}^{k} = \frac{1}{2D}\big[&B(C-A)(4B_i - A_j - A_s) + 2B^2(A_i + A_k - 2C_i)\\
&+ A(A+C)(2C_i - A_k) - C(A+C)A_i\big],\\
\Gamma_{ij}^{i} = \frac{1}{2D}\big[&B(C-A)(A_i + C_i + B_j - B_s) + 2B^2(B_i + C_j - B_k - A_j)\\
&+ A(A+C)A_j - C(A+C)(B_i + C_j - B_k)\big],\\
\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2D}\big[&B(C-A)(A_i + C_i + B_j - B_s) + 2B^2(B_k - C_j - B_i + A_j)\\
&+ A(A+C)(B_i + C_j - B_k) - C(A+C)A_j\big],\\
\Gamma_{ik}^{j} = \frac{1}{2D}\big[&B(C-A)(A_i + A_k) + 2B^2(C_j - C_s)\\
&+ A(A+C)(B_i + B_k - C_j) - C(A+C)(B_i + B_k - C_s)\big],\\
\Gamma_{ik}^{i} = \frac{1}{2D}\big[&B(C-A)(2B_i + 2B_k - C_j - C_s) + 2B^2(A_i - A_k)\\
&+ A(A+C)A_k - C(A+C)A_i)\big]
\end{aligned}$$

където $i \neq j \neq k \neq s$ и числата в (i, k) (съответно (j, s)) са едновременно четни или нечетни.

Теорема 10.2. *Многообразието (M, g, Q) е от класа $\mathcal{L}_0$, тогава и само тогава, когато са изпълнени следните матрични равенства*

$$\mathrm{grad}A = \mathrm{grad}C.Q^2, \quad 2\mathrm{grad}B = \mathrm{grad}C.(Q + Q^3).$$

Пример за многообразие от класа $\mathcal{L}_0$.

Нека компонентите на метриката (M, g, Q) са зададени чрез:

$$\begin{aligned} A &= (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2, \\ B &= x^1x^2 + x^2x^3 + x^1x^4 + x^3x^4, \\ C &= 2x^1x^3 + 2x^2x^4, \end{aligned} \tag{10.1}$$

като са изпълнени условията

$$x^1 > x^2 > 0, \quad x^1 > x^4 > 0, \quad x^3 > x^2, \quad x^3 > x^4. \tag{10.2}$$

Теорема 10.3. *Многообразието* (M, g, Q) *снабдено с метрика* g*, дефинирана чрез* (10.1) *и* (10.2)*, принадлежи на класа* $\mathcal{L}_0$*.*

* * *

В **§11** е изследван случаят на многообразие (M, g, Q) от класа $\mathcal{L}_1$ и са получени твърдения за секционните кривини на някои специални двумерни площадки в T_pM.

Нека вектор u поражда Q-база в T_pM. Площадката $\{u, Qu\}$ притежава единствена (с точност до знак) Q-база. Секционната кривина k на тази площадка ще означим с $k(\varphi)$, където $\varphi = \angle(u, Qu)$. Площадките от вида $\{u, Q^2u\}$ притежават и друга база от вида $\{w, Q^2w\}$, където w е вектор от $\{u, Q^2u\}$ и $\phi = \angle(u, Q^2u)$.

Теорема 11.1. *Нека* (M, g, Q) *е от* $\mathcal{L}_1$ *и вектор* u *поражда* Q*-база в* T_pM*. Тогава за площадките* $\{u, Qu\}$, $\{Qu, Q^2u\}$, $\{Q^2u, Q^3u\}$, $\{Q^3u, u\}$, $\{u, Q^2u\}$ *и* $\{Qu, Q^3u\}$ *са в сила равенствата*

$$\begin{aligned} &k(u, Qu) = k(Qu, Q^2u) = k(Q^2u, Q^3u) = k(Q^3u, u), \\ &k(u, Q^2u) = k(Qu, Q^3u) = 0. \end{aligned}$$

Теорема 11.2. *Нека многообразието* (M, g, Q) *принадлежи на класа* $\mathcal{L}_1$ *и вектор* u *поражда* Q*-база в* T_pM*. Тогава секционната кривина на двумерната площадка* $\{u, Qu\}$ *е*

$$k(\varphi) = \frac{(1 - \cos\phi)^2}{1 - \cos^2\varphi} k\Big(\frac{\pi}{2}\Big).$$

* * *

В **§12** е разгледано четиримерно многообразие (M,g,Q) и свързаното с него риманово многообразие (M,g,P) със структура на почти произведение $P=Q^2$. За римановите многообразия със структура на почти произведение и $\mathrm{tr}P=0$ е в сила класификацията на Стайкова-Грибачев [55]. Тя е направена относно фундаменталния тензор F от тип $(0,3)$ за (M,g,P) и свързаната с F 1-форма θ, дефинирани както следва:

$$F(u,v,w)=g((\nabla_u P)v,w),\quad \theta(u)=g^{ij}F(e_i,e_j,u).$$

Основните класове са $\mathcal{W}_1,\mathcal{W}_2$ и $\mathcal{W}_3$. Тяхното сечение е класът на римановите P-многообразия $\mathcal{W}_0$. Многообразието (M,g,P) принадлежи на всеки един от тези класове, ако удовлетворява съответно условията:

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_0:\quad & F(u,v,w)=0,\\
\mathcal{W}_1:\quad & F(u,v,w)=\frac{1}{4}\big[(g(u,v)\theta(w)+g(u,w)\theta(v)-g(u,Pv)\theta(Pw)\\
& -g(u,Pw)\theta(Pv)\big],\\
\mathcal{W}_2:\quad & F(u,v,Pw)+F(v,w,Pu)+F(w,u,Pv)=0,\quad \theta(w)=0,\\
\mathcal{W}_3:\quad & F(u,v,w)+F(v,w,u)+F(w,u,v)=0.
\end{aligned}$$

Теорема 12.1. *Ако структурата Q на многообразието (M,g,Q) удовлетворява условието $\nabla Q=0$, т.е. $(M,g,Q)\in\mathcal{L}_0$, то (M,g,P) принадлежи на класа $\mathcal{W}_0$.*

Теорема 12.2. *Ако структурата Q на многообразието (M,g,Q) удовлетворява условието $\nabla Q=0$, т.е. $(M,g,Q)\in\mathcal{L}_0$, то за тензора на кривина R е в сила тъждеството*

$$R(u,v,w,t)=R(u,v,Pw,Pt).$$

За (M,g,Q) въвеждаме фундаменталния тензор $\overline{F}$ от тип $(0,3)$ и свързаната с него 1-форма $\overline{\theta}$, както следва

$$\overline{F}(u,v,w)=g((\nabla_u Q)v,w),\quad \overline{\theta}(u)=g^{ij}\overline{F}(e_i,e_j,u).$$

Теорема 12.3. *За тензора F на (M,g,P) и тензора $\overline{F}$ на (M,g,Q) са изпълнени равенствата:*

$$\begin{aligned}
\overline{F}(u,v,w)+\overline{F}(u,Qv,Qw)&=F(u,v,Qw),\\
\overline{F}(u,v,Q^3w)+\overline{F}(u,Qv,w)&=F(u,v,w).
\end{aligned}$$

Теорема 12.4. *Многообразието (M, g, P) принадлежи на класа $\mathcal{W}_0$, тогава и само тогава, когато Q удовлетворява равенството*

$$(\nabla_u Q)Qv = -Q(\nabla_u Q)v.$$

Теорема 12.5. *За тензора $\overline{F}$ на (M, g, Q) са в сила равенствата:*

$$\begin{aligned}
&\overline{F}(u, v, Q^3w) + \overline{F}(u, Qv, w) = \overline{F}(u, w, Q^3v) + \overline{F}(u, Qw, v),\\
&\overline{F}(u, v, w) + \overline{F}(u, Qv, Qw) + \overline{F}(u, Q^2v, Q^2w) + \overline{F}(u, Q^3v, Q^3w) = 0,\\
&\overline{F}(u, v, Qw) = -\overline{F}(u, w, Qv), \qquad \overline{F}(u, v, Q^3w) = -\overline{F}(u, Q^2w, Qv).
\end{aligned}$$

Теорема 12.6. *Многообразието (M, g, P) принадлежи на класа $\mathcal{W}_1$, тогава и само тогава, когато тензорът $\overline{F}$ на (M, g, Q) удовлетворява следните условия:*

$$\begin{aligned}
\overline{F}(u, v, Q^3w) + \overline{F}(u, Qv, w) = \frac{1}{4}\big[&g(u, v)\theta(w) + g(u, w)\theta(v)\\
&+ g(u, Q^2v)\theta(Q^2w) + g(u, Q^2w)\theta(Q^2v)\big],
\end{aligned}$$

$$\overline{\theta}(Q^3w) + g^{ij}\overline{F}(e_i, Qe_j, w) = \theta(w).$$

Теорема 12.7. *Многообразието (M, g, P) принадлежи на класа $\mathcal{W}_2$, тогава и само тогава, когато тензорът $\overline{F}$ на (M, g, Q) удовлетворява условието:*

$$\begin{aligned}
&\overline{F}(u, v, Qw) + \overline{F}(u, Qv, Q^2w) + \overline{F}(v, w, Qu)\\
&\qquad + \overline{F}(v, Qw, Q^2u) + \overline{F}(w, u, Qv) + \overline{F}(w, Qu, Q^2v) = 0.
\end{aligned}$$

Теорема 12.8. *Многообразието (M, g, P) принадлежи на класа $\mathcal{W}_3$, тогава и само тогава, когато тензорът $\overline{F}$ на (M, g, Q) удовлетворява условието*

$$\begin{aligned}
&\overline{F}(u, v, Q^3w) + \overline{F}(u, Qv, w) + \overline{F}(v, w, Q^3u)\\
&\qquad + \overline{F}(v, Qw, u) + \overline{F}(w, u, Q^3v) + \overline{F}(w, Qu, Qv) = 0.
\end{aligned}$$

* * *

В **§13** са разгледани четиримерни многообразия (M, g, Q) и (M, g, P), $P = Q^2$. Изучени са групи на Ли като примери на изследваните многообразия (M, g, Q) от класа $\mathcal{L}_2$, и като примери на многообразия (M, g, P) от класа $\mathcal{W}_1$ и класа $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$. Поставено е условие съответните им алгебри на Ли да са от специален вид от класификацията на Г. Мубаракзянов, направена в [47], и са получени кривинни свойства на породените многообразия.

Нека G е четиримерна реална свързана група на Ли и $\mathfrak{g}$ е съответната алгебра на Ли с база $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ от ляво инвариантни векторни полета. Въвеждаме Q и g, както следва

$$Qe_1 = e_4, \quad Qe_2 = e_1, \quad Qe_3 = e_2, \quad Qe_4 = e_3; \tag{13.1}$$

$$g(e_i, e_j) = \delta_{ij}. \tag{13.2}$$

Многообразието (G, g, Q) е от разглеждания тип (M, g, Q). Многообразието (G, g, P), където $P = Q^2$, е от типа (M, g, P).

Алгебра на Ли от $\{\mathfrak{g}_{4,5}\}$

Нека алгебрата на Ли $\mathfrak{g}$ за групата на Ли G принадлежи на класа $\{\mathfrak{g}_{4,5}\}$. По дефиниция за този клас имаме

$$[e_1, e_4] = e_1, \quad [e_2, e_4] = ae_2, \quad [e_3, e_4] = be_3, \qquad -1 \leq b \leq a \leq 1, \ ab \neq 0.$$

Компонентите на ∇ и R са:

$$\begin{array}{lll} \nabla_{e_1} e_1 = -e_4, & \nabla_{e_1} e_4 = e_1, & \nabla_{e_2} e_2 = -ae_4, \\ \nabla_{e_2} e_4 = ae_2, & \nabla_{e_3} e_4 = be_3, & \nabla_{e_3} e_3 = -be_4. \end{array}$$

$$R_{1212} = a, \quad R_{1414} = 1, \quad R_{2323} = ab, R_{3434} = b^2, \quad R_{1313} = b, \quad R_{2424} = a^2.$$

Тъждеството за R в класа $\mathcal{L}_2$ е еквивалентно на равенствата

$$\begin{array}{ll} R_{1212} = R_{3434} = R_{2323} = R_{1414}, & R_{1313} = R_{2424}, \\ R_{1213} = R_{2324} = R_{1424} = R_{3134}, & R_{1214} = R_{1434} = R_{2123} = R_{3234}, \\ R_{1224} = R_{3123} = R_{3114} = R_{4234}, & R_{1324} = 0. \end{array}$$

Теорема 13.1. *Ако алгебрата $\mathfrak{g}$ принадлежи на класа $\{\mathfrak{g}_{4,5}\}$, то многообразието (G, g, Q) е от класа $\mathcal{L}_2$ тогава и само тогава, когато е изпълнено условието $a = b = 1$.*

Намираме компонентите на F и θ

$$\begin{array}{ll} F_{112} = F_{121} = -F_{134} = -F_{143} = 1, & F_{222} = -F_{244} = 2a, \\ F_{323} = F_{332} = -F_{341} = -F_{314} = b, & \theta_2 = 2a + b + 1. \end{array}$$

Теорема 13.2. *Ако алгебрата $\mathfrak{g}$ принадлежи на класа $\{\mathfrak{g}_{4,5}\}$, то многообразието (G, g, P) е от класа $\mathcal{W}_1$ тогава и само тогава, когато е изпълнено условието $a = b = 1$.*

При условията на горната теорема компонентите на F и θ са

$$\begin{array}{ll} F_{112} = F_{121} = -F_{134} = -F_{143} = 1, & F_{222} = -F_{244} = 2, \\ F_{323} = F_{332} = -F_{341} = -F_{314} = 1, & \theta_2 = 4. \end{array}$$

Теорема 13.3. *Ако алгебрата $\mathfrak{g}$ е от $\{\mathfrak{g}_{4,5}\}$, то многообразието (G, g, Q) принадлежи на класа $\mathcal{L}_2$ тогава и само тогава, когато многообразието (G, g, P) е от класа $\mathcal{W}_1$.*

Теорема 13.4. *Нека за многообразието (G, g, Q) е изпълнено, че собствената алгебра на Ли $\mathfrak{g}$ е от класа $\{\mathfrak{g}_{4,5}\}$ с условието $a = b = 1$. Тогава е в сила:*

а) *(G, g, Q) е айнщайново многообразие с отрицателна скаларна кривина $\tau = -8$;*

б) *(G, g, Q) има постоянни секционни кривини, като секционните кривини на основните двумерни площадки са $k_{ij} = 1$.*

Алгебра на Ли от $\{\mathfrak{g}_{4,6}\}$

Нека алгебрата на Ли $\mathfrak{g}$ за групата на Ли G принадлежи на класа $\{\mathfrak{g}_{4,6}\}$. По дефиниция за $\{\mathfrak{g}_{4,6}\}$ имаме

$$[e_1, e_4] = ae_1, \quad [e_2, e_4] = be_2 - e_3, \quad [e_3, e_4] = e_2 + be_3, \qquad a \neq 0,\ b \geq 0.$$

Компонентите на ∇ и R имат следния вид

$$\begin{array}{llll} \nabla_{e_1} e_1 = -ae_4, & \nabla_{e_1} e_4 = ae_1, & \nabla_{e_2} e_2 = -be_4, & \nabla_{e_3} e_4 = be_3 \\ \nabla_{e_2} e_4 = be_2, & \nabla_{e_3} e_3 = -be_4, & \nabla_{e_4} e_2 = e_3, & \nabla_{e_4} e_3 = -e_2; \end{array}$$

$$R_{1212} = R_{1313} = ab, \quad R_{1414} = a^2, \quad R_{2323} = R_{3434} = R_{2424} = b^2.$$

Теорема 13.5. *Ако алгебрата $\mathfrak{g}$ принадлежи на $\{\mathfrak{g}_{4,6}\}$, то многообразието (G, g, Q) е от класа $\mathcal{L}_2$ тогава и само тогава, когато е изпълнено условието $a = b$.*

В този случай $R_{1212} = R_{1414} = R_{2323} = R_{3434} = R_{1313} = R_{2424} = a^2$.

Ненулевите компоненти на F и θ се определят от равенствата:

$$F_{112} = -F_{134} = a, \quad F_{222} = -F_{244} = 2b, \quad F_{323} = -F_{341} = b, \quad \theta_2 = a + 3b.$$

Теорема 13.6. *Ако алгебрата $\mathfrak{g}$ принадлежи на класа $\{\mathfrak{g}_{4,6}\}$, то многообразието (G, g, P) е от класа $\mathcal{W}_1$ тогава и само тогава, когато е изпълнено равенството $a = b$.*

При условията на горната теорема

$$F_{112} = -F_{134} = F_{323} = -F_{341} = a, \quad F_{222} = -F_{244} = 2a, \quad \theta_2 = 4a.$$

Теорема 13.7. *Ако алгебрата* $\mathfrak{g}$ *принадлежи на класа* $\{\mathfrak{g}_{4,6}\}$*, то многообразието* (G, g, Q) *е от класа* $\mathcal{L}_2$ *тогава и само тогава, когато многообразието* (G, g, P) *е от класа* $\mathcal{W}_1$*.*

Теорема 13.8. *Нека за многообразието* (G, g, Q) *е изпълнено, че собствената алгебра на Ли* $\mathfrak{g}$ *е от класа* $\{\mathfrak{g}_{4,6}\}$ *с условието* $a = b$*. Тогава са в сила свойствата:*

а) (G, g, Q) *е айнщайново многообразие с отрицателна скаларна кривина* $\tau = -8a^2$*;*

б) (G, g, Q) *има постоянни секционни кривини, като секционните кривини на основните двумерни площадки са* $k_{ij} = a^2$*.*

Следващите два примера са за многообразия от класа $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$ от класификацията на Стайкова-Грибачев. Той се дефинира, както следва:

$$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 : \quad F(x, y, Pz) + F(y, z, Px) + F(z, x, Py) = 0.$$

Алгебра на Ли от $\{\mathfrak{g}_{4,9}\}$

Нека алгебрата на Ли $\mathfrak{g}$ за групата на Ли G принадлежи на класа $\{\mathfrak{g}_{4,9}\}$. По дефиниция за $\{\mathfrak{g}_{4,9}\}$ имаме

$$[e_2, e_3] = e_1, \qquad [e_1, e_4] = (a + 1)e_1, \qquad [e_2, e_4] = e_2, \qquad [e_3, e_4] = ae_3,$$

където $-1 < a \leq 1$.

Компонентите на ∇ имат следния вид

$$\begin{array}{llll}
\nabla_{e_1} e_1 = -(a+1)e_4, & \nabla_{e_1} e_2 = -\frac{1}{2}e_3, & \nabla_{e_1} e_3 = \frac{1}{2}e_2, & \nabla_{e_1} e_4 = (a+1)e_1, \\
\nabla_{e_2} e_1 = -\frac{1}{2}e_3, & \nabla_{e_2} e_2 = -e_4, & \nabla_{e_2} e_3 = \frac{1}{2}e_1, & \nabla_{e_2} e_4 = e_2, \\
\nabla_{e_3} e_1 = \frac{1}{2}e_2, & \nabla_{e_3} e_2 = -\frac{1}{2}e_1, & \nabla_{e_3} e_3 = -ae_4, & \nabla_{e_3} e_4 = ae_3.
\end{array}$$

Ненулевите компоненти на F и θ са

$$F_{112} = a + \frac{3}{2},\ F_{134} = -(a + \frac{3}{2}),\ F_{211} = 1,\ F_{222} = 2,$$

$$F_{233} = -1,\ F_{244} = -2,\ F_{323} = a + \frac{1}{2},\ F_{314} = -(a + \frac{1}{2}),\ \theta_2 = 2a + 4.$$

Ако алгебрата $\mathfrak{g}$ ***принадлежи на класа*** $\{\mathfrak{g}_{4,9}\}$***, то многообразието*** (G, g, P) ***е от класа*** $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$***.***

В този случай са в сила:

а) (G, g, Q) е с отрицателна скаларна кривина $\tau = -6a^2 - 10a - \frac{13}{2}$;

б) (G, g, Q) няма постоянни секционни кривини на базисните площадки;

в) (G, g, Q) не принадлежи на класа $\mathcal{L}_2$.

Алгебра на Ли от $\{\mathfrak{g}_{4,8}\}$

Нека алгебрата на Ли $\mathfrak{g}$ за групата на Ли G принадлежи на класа $\{\mathfrak{g}_{4,8}\}$. По дефиниция за $\{\mathfrak{g}_{4,8}\}$ имаме

$$[e_2, e_3] = e_1, \qquad [e_2, e_4] = e_2, \qquad [e_3, e_4] = -e_3.$$

Компонентите на ∇ имат следния вид

$$\begin{array}{llll} \nabla_{e_3} e_3 = e_4, & \nabla_{e_2} e_2 = -e_4, & \nabla_{e_2} e_3 = \frac{1}{2} e_1, & \nabla_{e_1} e_2 = \nabla_{e_2} e_1 = -\frac{1}{2} e_3, \\ \nabla_{e_3} e_4 = -e_3, & \nabla_{e_3} e_2 = -\frac{1}{2} e_1, & \nabla_{e_2} e_4 = e_2, & \nabla_{e_3} e_1 = \nabla_{e_1} e_3 = \frac{1}{2} e_2. \end{array}$$

Ненулевите компоненти на F и θ са:

$$\begin{aligned} &F_{112} = -F_{134} = F_{314} = -F_{323} = \frac{1}{2}, \quad F_{211} = -F_{233} = -1, \\ &F_{222} = -F_{244} = 2, \quad \theta_2 = 2. \end{aligned}$$

Ако алгебрата $\mathfrak{g}$ принадлежи на класа $\{\mathfrak{g}_{4,8}\}$, то многообразието (G, g, P) е от класа $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$.

В класификацията на Мубаракзянов на неразложимите алгебри на Ли се съдържат дванадесет класа. За останалите осем класа е в сила следващото твърдение.

Ако алгебрата $\mathfrak{g}$ принадлежи на $\{\mathfrak{g}_{4,k}\}$, то многообразието (G, g, P) е от класа $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$, при $k \in \{1, 2, 3, 4, 7, 10, 11, 12\}$.

* * *

Научни приноси на дисертационния труд

- Дефиниране на n-мерни ($n = 2, 3, 4$) многообразия (M, g, Q) с метрика g и тензорна структура Q от тип $(1, 1)$, имащи циркулантни матрици. Намиране на диференциални условия за g, така че Q да бъде паралелна относно свързаността на Леви-Чивита ∇ за g.
- Доказване съществуването на адаптирана база относно Q, както и на ортонормирана база от този тип в допирателното пространство на M.
- Пресмятане на локалните координати на свързаността ∇ и на кривините за тримерно и четиримерно многообразие (M, g, Q). Дефиниране на класове на изучаваните многообразия, притежаващи специални кривинни свойства и намиране на експлицитни примери за тях.
- Разглеждане на трансформация на римановата метрика върху едно тримерно (M, g, Q), която обобщава класическата конформна трансформация в римановата геометрия.
- Разглеждане на многообразие със структура на почти произведение, породено от четиримерното (M, g, Q). Дефиниране на фундаментален тензор за (M, g, Q) и намиране на връзки между него и фундаменталния тензор в случая на структура на почти произведение.
- Намиране на тримерни и четиримерни групи на Ли, които пораждат нетривиални примери за многообразия (M, g, Q) с определени геометрични свойства. Получаване на зависимости между класове от многообразия (M, g, Q) с определени кривинни свойства и основни класове от класификацията на многообразия със структура на почти произведение.

* * *

Литература

[1] А. П. Норден, *Об одном классе четырехмерных A–пространств*, Изв. ВУЗ — Матем. ном. 4, (1960), 145–157.

[2] Е. В. Павлов, М. Василева, *Конформно–голоморфное соответствие между B–многообразиями*, Изв. ВУЗ — Матем., ном. 10, (1981), 52–57.

[3] Н. С. Синюков, *Геодезические отображения римановых пространств*. Москва, Наука, (1979).

[4] М. Стайкова, *Върху диференциалната геометрия на римановите многообразия със структура на почти произведение*, Докторска дисертация, София (1991).

[5] L. Bianchi, *On the three-dimensional spaces which admit a continuous group of motions*, Gen. Rel. Grav. vol. 33 (2001), 2171–2253.

[6] R. Biggs, C. C. Remsing, *On the Classification of Real Four-Dimensional Lie Groups*, J. Lie Theory vol. 26 (2016), 1001–1035.

[7] A. Borisov, G. Ganchev, *Curvature properties of Kählerian manifolds with B-metric*, In: Math. Educ. Math., Proc of 14^{th} Spring Conf. of UBM, Sunny Beach, (1985), 220–226.

[8] S. I. R. Costa, J. E. Strapasson, M. M. S. Alves, T. B. Carlos: *Circulant graphs and tessellations on flat tori*, Linear Algebra Appl. vol. 432 (2010), no. 1, 369–382.

[9] P. R. Davis, *Circulant matrices*, John Wiley, New York (1979).

[10] G. Dzhelepov, *Shur's theorems in some generalized B-manifolds*, Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci. vol. 42 (1989), no. 12, 37–40.

[11] G. Dzhelepov, D. Razpopov, I. Dokuzova, *Almost conformal transformation in a class of Riemannian manifolds*, In: Research and Education in Mathematics, Informatics and their Applications - REMIA 2010, Proc. Anniv. Intern. Conf., Plovdiv, Bulgaria, 125–128.

[12] G. Dzhelepov, I. Dokuzova, D. Razpopov, *On a three-dimensional Riemannian manifold with an additional structure*, Plovdiv. Univ. Paisii Khilendarski Nauchn. Trud. Mat., vol. 38 (2011) no. 3, 17–27.

[13] G. Djelepov, K. Gribachev, *Generalized B-manifolds of constant holomorphic sectional curvature*, Plovdiv. Univ. Paisii Khilendarski Nauchn. Trud. Mat., vol. 23 (1985), no. 1, 125–131.

[14] I. Dokuzova, *Curvature properties of* 4*-dimensional Riemannian manifolds with a circulant structure*, J. Geom., vol. 108 (2017), no. 2, 517–527.

[15] I. Dokuzova, *On a class of Riemannian manifolds with a locally product structure*, J. Tech. Univ. Plovdiv Fundam. Sci. Appl. Ser. A Pure Appl. Math., vol. 9, (2000–2001), 93–96.

[16] I. Dokuzova, *A note on Schur's theorem in Riemannian manifolds with an almost product structure*. J. Tech. Univ. Plovdiv Fundam. Sci. Appl. Ser. A Pure Appl. Math., vol. 10, (2002–2003), 65–71.

[17] I. Dokuzova, D. Razpopov, *On affine connections in a Riemannian manifold with a circulant metric and two circulant affinor structures*, In: Math. and Educ. Math., Proc. 40th Jubilee Conference of UBM, (2011), 176–181.

[18] I. Dokuzova, D. Razpopov, M. Manev, *Two Types of Lie groups as 4-dimensional Riemannian manifolds with circulant structures*, In: Math. and Educ. in Math., Proc. 47th Spring Conf. of UBM, (2018), 115–120.

[19] G. Ganchev, A. Borisov, *Note on the almost complex manifolds with Norden metric*, Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci., vol. 39 (1986), no. 5, 31–34.

[20] G. Ganchev, S. Ivanov, *Characteristic curvatures on complex Riemannian manifolds*, Riv. Mat. Univ. Parma (5), (1992), no. 1, 155–162.

[21] A. Gray, *Curvature identities for Hermitian and Almost Hermitian Manifolds*, Tohoku Math. J.(2), vol. 28 (1976), no. 4, 601–612.

[22] R. M. Gray, *Toeplitz and circulant matrices: A review*, Found. Trends Commun. Inf. Theory, vol. 2 (2006), no 3, 155–239.

[23] A. Gray, L. Hervella, *The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants*, Ann. Mat. Pura Appl.(4), vol. 123 (1980), 35–58.

[24] A. Gray, L. Vanhecke, *Almost Hermitian manifolds with constant holomorphic sectional curvature.* Applications of Mathematics, vol. 104 (1979), no. 2, 170–179 (in Czech)

[25] K. Gribachev, G. Djelepov, *On the geometry of the normal generalized B-manifolds*, Plovdiv. Univ. Paisii Khilendarski Nauchn. Trud. Mat., vol. 23 (1985), no. 3, 157–168

[26] K. Gribachev, G. Djelepov, D. Mekerov, *On Some Subclasses of Generalized B-manifold*, Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci. vol. 38 (1985), no. 4, 437–440.

[27] K. Gribachev, M. Manev, *Almost hypercomplex pseudo-Hermitian manifolds and a 4-dimensional Lie group with such structure*, J. Geom., vol. 88 (2008), no. 1-2, 41–52.

[28] K. Gribachev, M. Manev, D. Mekerov, *A Lie group as a four-dimensional quasi-Kähler manifold with Norden metric*, JP J. Geom. Topol., vol. 6 (2006), no. 1, 55–68.

[29] K. Gribachev, D. Mekerov, G. Djelepov, *Generalized B-manifolds*, Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci., vol. 38 (1985), no. 3, 299–302.

[30] D. Gribacheva, *A natural connection on a basic class of Riemannian Product Manifolds*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., vol. 9 (2012), no. 7.

[31] D. Gribacheva, *Curvature properties of two Naveira classes of Riemannian product manifolds*, Plovdiv. Univ. Paisii Khilendarski Nauchn. Trud. Mat., vol. 39 (2012), no. 3, 31–42.

[32] D. Gribacheva, D. Mekerov, *Natural connections on conformal Riemannian P-manifolds*, Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci., vol. 65 (2012), no. 5, 581–590.

[33] D. Gribacheva, D. Mekerov, *Conformal Riemannian P-manifolds with connections whose curvature tensors are Riemannan P-tensors*, J. Geom., vol. 105 (2014), no. 2, 273–286.

[34] D. Gribacheva, D. Razpopov, *Riemannian almost product manifolds generated by a circulant structure*, J. Tech. Univ. Plovdiv Fundam. Sci. Appl. Ser. A Pure Appl. Math., vol. 23 (2017), 171–174.

[35] A. Kaveh, H. Rahami, *Block circulant matrices and application in free vibration analysis of cyclically repetitive structures*, Acta Mech., vol. 217 (2011), 51–62.

[36] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Intersc. Publ., New York, vol. 2 (1969).

[37] P. Libermann *Sur le probleme d'equivalence de certaines structures infinitésimales*, Ann. Math., vol. 36 (1954), 27–120.

[38] M. Manev, *Hypercomplex structures with Hermitian-Norden metrics on four-dimensional Lie algebras*, J. Geom., vol. 105 (2014), 21–31.

[39] M. Manev, G. Nakova, *Curvature properties on some three-dimensional almost contact B-metric manifolds*, Plovdiv. Univ. Paisii Khilendarski Nauchn. Trud. Mat., vol. 34 (2004), no. 3, 51–60.

[40] M. Manev, K. Gribachev, D. Mekerov, *On three-parametric Lie groups as quasi-Kähler manifolds with Killing Norden metric*, In: Topics in Contemporary Differential

Geometry, Complex Analysis and Mathematical Physics, Eds. S. Dimiev and K. Sekigawa, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, (2007), 205–214.
[41] M. Manev, D. Mekerov, *On Lie groups as quasi-Kähler manifolds with Killing Norden metric*, Adv. Geom., vol. 8 (2008), 343–352.
[42] H. Manev, *Almost contact B-metric structures and the Bianchi classification of the three-dimensional Lie algebras*, Annuaire. Univ. Sofia Fac. Math. Inform., vol. 102 (2015), 133–144.
[43] G. Markov, G. Djelepov. *Invariant tensors under conformal transformations on Weyl spaces and the spaces which are the real interpretation of the complex Weyl spaces*, Diff. Geom. Budapest (Hungary), (1979), 413–422.
[44] D. Mekerov, *On Riemannian almost product manifolds with nonintegrable structures*, J. Geom., vol. 89 (2008), no. 1, 119–129.
[45] D. Mekerov, M. Manev, *On 4n-dimensional Lie groups as quasi-Kähler manifolds with Killing Norden metric*, Novi Sad J. Math., vol. 38 (2008), no. 2, 105–113.
[46] V. Mihova, *Canonical connections and the canonical conformal group on a Riemannian almost product manifold.* Serdica Math. J., vol. 15 (1989), 351–358.
[47] G. M. Mubarakzyanov, *On solvable Lie algebras*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., vol. 1 (1963), 114–123. (in Russian)
[48] G. Nakova, M. Manev, *Curvature properties on some three-dimensional almost contact manifolds with B-metric II*, in: Proc. 5th Int. Conf. Geometry, Integrability and Quantization V Eds. I. M. Mladenov, A. C. Hirshfeld, SOFTEX, Sofia, (2004), 169–177.
[49] A. M. Naveira, *A classification of Riemannian almost product manifolds*, Rend. Math. Appl. (7), (1983), no. 3, 577–592.
[50] D. Razpopov, *Four-dimensional Riemannian manifolds with two circulant structures*, Math. and Educ. Math. In: Proc. of 44th Spring Conf. of UBM, Varna (SOK – Kamchia), Bulgaria, (2015), 179–185
[51] E. Reyes, A. Montesinos, P. M. Gadea, *Connections making parallel a metric* $(J^4 = 1)$*-structure.* An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi. Mat. (N.S.), vol. 28 (1982), 49–54.
[52] R. M. Roth, A. Lempel, *Application of circulant matrices to the construction and decoding of linear codes*, IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 36 (1990), no. 5, 1157–1163.
[53] T. Sato, *Examples of Hermitian manifolds with pointwise constant holomorphic sectional curvature*, Mediterr. J. Math., vol. 10 (2013), no. 3, 1539–1549.
[54] M. Staikova, *Curvature properties of Riemannian P-manifolds*, Plovdiv. Univ. Paisii Khilendarski Nauchn. Trud. Mat., vol. 32 (1987), no. 3, 241–251.
[55] M. Staikova, K. Gribachev, *Canonical conections and their conformal invariants on Riemannian P-manifolds,* Serdica Math. J., vol. 18 (1992), 150–161.
[56] M. Staikova, K. Gribachev, D. Mekerov, *Riemannian P-manifolds of constant sectional curvatures*, Serdica Math. J., vol. 17 (1991), no. 4, 212–219.
[57] D. Stevanović, I. Stanković, *Remarks on hyperenergetic circulant graphs*, Linear Algebra Appl., vol. 400 (2005), 345–348.
[58] G. Stanilov, *Even dimensional circulate geometry*, Results Math., vol. 59 (2011), no. (3-4), 319–326.
[59] R. M. Tanner, D. Sridhara, A. Sridharan, T. Fuja, D. J. Costello, *LDPC Block and convolutional codes based on circulant matrices*, IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 50 (2004), no. 12, 2966–2984.

[60] K. Yano. *Differential geometry on complex and almost complex spaces*, Pure and Applied Math. vol. 49, New York, Pergamont Press, (1965).
[61] K. Yano, *On a structure defined by a tensor field of type* $(1;1)$ *satisfying* $f^3+f=0$, Tensor (N.S.), (1963), 99–109.
[62] K. Yano, S. Ishihara, *Structure defined by f satisfying* $f^3+f=0$, Proc. US-Japan Seminar in Differential Geometry., Kyoto, (1965), 153–166.
[63] K. Yano, I. Mogi, *Sur les variétés pseudokählеriennes a courbure holomorphique constante*, C. R. Acad. Sci Paris., vol. 237 (1953), 962–964.

* * *

Благодарности

Изказвам благодарност на проф. дмн Манчо Манев и доц. д-р Добринка Грибачева за това, че като мои научни ръководители ме въведоха в проблематиката на съвременната диференциална геометрия, както и за подкрепата, ценните съвети и напътствията при разработването и оформянето на настоящата дисертация.

Благодаря на доц. д-р Георги Джелепов и гл. ас. д-р Ива Докузова за идеите, подкрепата, препоръките при предварителното обсъждане на дисертационния труд и допринесли за неговото подобрение.

Признателен съм на всички колеги от катедра „Алгебра и геометрия“ на Факултета по математика и информатика при Пловдивския университет „Паисий Хилендарски“ и от катедра „Математика, информатика и физика“ на Факултета по икономика на Аграрен университет – Пловдив за тяхната подкрепа.

Благодаря на Аграрен университет – Пловдив за финансовата подкрепа по време на работата ми по дисертацията.

* * *