Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“
Факултет по математика и информатика

Катедра „Математически анализ“

Атанас Илчев

Върху някои класове циклични оператори с двойки точки на най-добро приближение

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертационен труд
за присъждане на образователна и научна степен
„ДОКТОР“
област на висше образование:
4. Природни науки, математика и информатика;
професионално направление:
4.5 Математика;
докторска програма: Математически анализ

Научен ръководител:
доц. д-р Боян Георгиев Златанов

Пловдив - 2018

Дисертационния труд „Върху някои класове циклични оператори с двойки точки на най-добро приближение“ е написан на 129 страници. Библиография-та включва 55 заглавия. Списъкът на авторските публикации се състои от 5 заглавия.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на....... от .... часа в .... на нова сграда на Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“ пред научно жури в състав:

1

2

3

4

5

Материалите по защитата са на разположение на интересуващите се в секретарната на ФМИ, нова сграда на Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“, каб. 330 всеки работен ден от 8:30 до 17:00 часа.

Дисертационният труд се състои от предговор, три глави, заключение и използвана литература.

Номерацията на теоремите, лемите, следствията и определенията в автореферата съвпада с тяхната номерация в дисертационния труд.

Съдържание

Актуалност и цел на дисертационния труд **3**

Кратък обзор на дисертационния труд **9**

1. Въведение **9**

2. Оценка на грешката за точки на най-добро приближение **11**
- 2.1 Двойки точки на най-добро приближение и двойки неподвижни точки . . . 11
- 2.2 Приложения на Теорема 2.2 . . . 15
  - 2.2.1 Системи от интегрални уравнения . . . 16
  - 2.2.2 Системи от линейни уравнения . . . 16
  - 2.2.3 Системи от нелинейни уравнения . . . 19
- 2.3 Оценка на грешката за свиващо циклично изображение на Канан 19
- 2.4 Оценка на грешката за свиващо циклично изображение на Риш . 20

3. Точки на най-добро приближение в модуларни функционални пространства **22**
- 3.1 Циклични ρ–свиващи изображения на Канан в модуларни функционални пространства . . . 22
- 3.2 Приложения на Теорема 3.1 . . . 24
  - 3.2.1 Приложение на Теорема 3.1 в $(\mathbb{R}^2_2, \|\cdot\|^2_2)$ . . . 24
  - 3.2.2 Приложение на Теорема 3.1 в $L^2_{(-1,1)}$ . . . 25
- 3.3 Циклични ρ–свиващи двойки изображения в модуларни функционални пространства . . . 27
- 3.4 Приложения на Теорема 3.4 . . . 28
- 3.5 Двойка точки на най-добро приближение за циклична ρ–свиваща двойка изображения на Канан в модуларни функционални пространства . . . 29

4. Заключение **31**
- 4.1 Резюме на получените резултати . . . 31
  - 4.1.1 Списък на публикациите по дисертационния труд . . . 32
  - 4.1.2 Апробация на получените резултати . . . 32
  - 4.1.3 Декларация за оригиналност . . . 33

5. Благодарности **34**

Актуалност и цел на дисертационния труд

Актуалност на дисертационния труд

Фундаментален резултат в теория на неподвижните точки е теоремата за свиващите изображения на Банах [1]. Теорията на неподвижните точки е важен инструмент за решаване на уравнения от вида $Tx = x$ за изображения, които са дефинирани върху подмножества на метрични (X, d) или нормирани пространства $(X, \|\cdot\|)$. Едно от предимствата на теоремата на Банах за неподвижните точки е наличието на оценка на грешката за редицата от последователни приближения и оценка на скоростта на сходимост. Добре известно е, че съществуват уравнения $Tx = x$, за които не може да се намери лесно точно решение или въобще не може да се намери точното решение. Оценката на грешката е особено полезна в тези случаи. Има множество монографии, в които се изследват приближения на неподвижни точки. Бихме искали да споменем [2], където са представени някои от основните резултати в тази област.

Съществуват множество обобщения на теоремата на Банах за неподвижната точка. Едно направления от такива обобщения е понятието циклични изображения [11], т.е. $T(A) \subseteq B$ и $T(B) \subseteq A$. Ако $A \cap B = \emptyset$ то изображението T не притежава неподвижна точка, можем да си зададем въпроса да търсим точки x, такива че в известен смисъл се намират най-близко до елемента Tx. Точките на най-добро приближение са едно удачно обобщение на неподвижните точки в този случай. Казваме, че $x \in A$ е точка на най-добро приближение, ако е изпълнено $d(x, F(x)) = \mathrm{dist}(A, B)$, където $\mathrm{dist}(A, B)$ е разстоянието между множествата A и B спрямо метриката d. Има редица методи за намиране разстоянието между две множества. Елдред и Веермани в [4] предлагат друга техника, която използва циклични оператори и точки на най-добро приближение.

Понятието за точки на най-добро приближение са въведени в [4]. Тази дефиниция е по-обща от дефиницията за циклично изображение, тъй като ако множествата A и B се пресичат, то всяка точка на най-добро приближение е и неподвижна точка за изображението. Достатъчни условия за съществуване и единственост на точката на най-добро приближение в равномерно изпъкнали банахови пространства $(X, \|\cdot\|)$ за свиващи циклични изображения са намерени в [4]. Казваме, че цикличното изображение T е свиващо, ако съществува $\alpha \in [0, 1)$, така че неравенството

$$\|Tx - Ty\| \leq \alpha\|x - y\| + (1 - \alpha)\mathrm{dist}(A, B)$$

е изпълнено за всеки $(x, y) \in A \times B$. След публикацията [4] задачата за съществуване и единственост на точки на най-добро приближение за различни видове циклични изображения в различни видове пространства е широко изследвана, като изследванията в тази област продължават и в момента.

За разлика от резултатите за неподвижни точки, където повечето резултати са допълнени и с оценка на грешката, то за точките на най-добро приближение такива резултати липсват. Първият резултат в това направление е получен в [23], където са намерени грешките „a priori" и „a posteriori" за цикличните свиващи изображения изследвани в [4].

Друго обобщение на теоремата на Банах е да се разглеждат двойки неподвижни точки или двойки точки на най-добро приближение. Понятието за двойка свиващи циклични изображения (F, G), което обобщава понятието свиващи циклични изображения от [4], е дефинирана в [6, 21], където $F : A \times A \to B$, $G : B \times B \to A$ удовлетворяват условието

$$\|F(x, y) - G(u, v)\| \le \alpha\|x - u\| + \beta\|y - v\| + (1 - (\alpha + \beta))\mathrm{dist}(A, B)$$

за някои $\alpha, \beta > 0$ и $\alpha + \beta < 1$ и всички $x, y \in A$, $u, v \in B$. Случаят, когато $\alpha = \beta$ е разгледан в [21], а обобщението за произволни α и β е разгледан в [6]. Казваме, че наредената двойка (x, y) е наредена двойка неподвижни точки за наредената двойка изображения (F, G), ако е изпълнено $F(x, y) = x$ и $F(y, x) = y$. Казваме, че наредената двойка (x, y) е наредена двойка точки на най-добро приближение за наредената двойка изображения (F, G), ако е изпълнено $\|x - F(x, y)\| = \|y - F(y, x)\| = \mathrm{dist}(A, B)$. Достатъчни условия за съществуване и единственост на наредена двойка (x, y) точки да бъде наредена двойка точки на най-добро приближение за наредената двойка изображения (F, G) в равномерно изпъкнали банахови пространства за двойка свиващи циклични изображения (F, G) са намерени в [6, 21].

Освен идеята за дефиниране на норма $\| \cdot \|$ и разглеждане на банахови пространства $(X, \| \cdot \|)$ и различни видове изображения $T : X \to X$ съществува и друго направление за обобщаване на теоремата на Банах за свиващите изображения. Това направление се базира на идеята за разглеждане на абстрактни функционали ρ, които са дефинирани върху линейно пространство, и измерват големината на елементите на пространството. Тези функционали обикновено се наричат модулари и чрез тях се дифинират модуларните пространства (X, ρ). Теорията на модуларните пространства е въведена от Накано [18] във връзка с теорията на наредените пространства. По-късно идеите от [18] са обобщени от

Мушиелак и Орлич в [17]. Понятието модуларни функционални пространства и изследването на геометрията на тези пространства е започнато от Козловски в [12, 13, 14]. Теорията на неподвижните точки в модуларни функционални пространства започва със резултатите в [10]. Развитето на теорията на неподвижните точки в модуларни функционални пространства може да бъде намерено в обзорната статия [15] и монографията [9].

Първото обобщение на резултати за съществуване и единственост на точки на най-добро приближение за циклични оператори, които са дефинирани в модуларни функционални пространства, породени от модулари удовлетворяващи условия за равномерна изпъкналост ($(UC1)$ или $(UC2)$), които обобщават равномерната изпъкналост в банаховите пространства, е получено в [22]
.

Цели на дисертационния труд

В Глава 2 сме намерили оценка на грешките „a priori“ и „a posteriori“ (Теорема 2.2) за наредена двойка точки на най-добро приближение за двойка свиващи циклични изображения (F, G) изследвани в [6, 21]. Илюстрирали сме приложение на Теорема 2.2 с редица примери: системи от интегрални уравнения, системи линейни уравнения, системи нелинейни уравнения. Обогатили сме известните техники на двойки точки (x, y) на най-добро приближение за двойка свиващи циклични оператори (F, G) при решаване на системи линейни уравнения. Представяме процедура за конструиране на такива двойка свиващи циклични изображения (F, G), които дават възможно най-добрата скорост на сходимост на редиците от последователни приближения за класове от линейни системи. Представени са примери с числени пресмятания на „a priori“ и „a posteriori“ оценки на грешките. Намерили сме оценка отгоре за най-добрият ред на сходимост, ако използваме точки (x, y) на най-добро приближение за двойка свиващи циклични изображения (F, G) при решаване на разглежданите класове от системи линейни уравнения.

Достатъчни условия за съществуване и единственост на точки на най-добро приближение за циклични изображения на Канан са получени в [19]. Казваме че цикличното изображение T е циклично изображение на Канан, ако съществува $\alpha \in [0, 1/2)$, така че неравенството

$$\|Tx - Ty\| \le \alpha\|Tx - x\| + \alpha\|Ty - y\| + (1 - 2\alpha)\text{dist}(A, B)$$

е изпълнено за всеки $(x, y) \in A \times B$. В Глава 2 сме намерили оценка на грешката, при използване на редици от последователни приближения, за точки на най-добро приближение за циклични изображения на Канан.

Изследвали сме въпросът за съществуване и единственост на точки на най–добро приближение за оператори на Риш в равномерно изпъкнали банахови пространства и сме намерили оценка на грешката, при използване на редици от последователни приближения за тези оператори. Казваме, че цикличното изображение $T : A \to B$ и $T : B \to A$ е циклично изображение на Риш, ако съществуват неотрицателни константи k_i, $i = 1, 2, 3$, удовлетворяващи $k = k_1 + 2k_2 + 2k_3 < 1$, така че за всяко $x \in A$ и $y \in B$ неравенството

$$\begin{aligned} \|Tx - Ty\| &\leq k_1\|x - y\| + k_2(\|x - Tx\| + \|y - Ty\|) \\ &\quad + k_3(\|x - Ty\| + \|y - Tx\|) + (1 - k)\,\mathrm{dist}(A, B). \end{aligned}$$

В Глава 3 сме обобщили понятието за двойки точки на най-добро приближение за двойка циклични изображения (F, G) в модуларни функционални пространства. Казваме, че наредената двойка (x, y) е наредена двойка точки на най-добро приближение за наредената двойка изображения (F, G), ако е изпълнено $\rho(x - F(x, y)) = \rho(y - F(y, x)) = \mathrm{dist}(A, B)$.

Изследвали сме за съществуване и единственост на двойка точки на най-добро приближение за двойка свиващи циклични изображения (F, G) в модуларни функционални пространства. Понятието за двойка свиващи циклични изображения (F, G) в модуларни функцонални пространства обобщава понятието за двойка свиващи циклични изображения (F, G), е дефинирано в [6, 21], където $F : A \times A \to B$, $G : B \times B \to A$, $A, B \subset (X, \rho)$, удовлетворяват условието

$$\rho(F(x, y) - G(u, v)) \leq \alpha\rho(x - u) + \beta\rho(y - v) + (1 - (\alpha + \beta))\mathrm{dist}(A, B)$$

за някои $\alpha, \beta > 0$ и $\alpha + \beta < 1$ и всички $x, y \in A$, $u, v \in B$.

Обобщили сме понятието за циклично свиващо изображение на Канан в модуларни функционални пространства, а също така и за двойки точки на най-добро приближение за двойка циклични изображения на Канан (F, G). Казваме, че цикличното изображение F, дефинирано в модуларното функцонално пространство (X, ρ) , е циклично изображения на Канан, ако удовлетворява условието

$$\rho(F(x) - F(y)) \leq \alpha\rho(F(x) - x) + \alpha\rho(F(y) - y) + (1 - 2\alpha)\mathrm{dist}(A, B)$$

за някои $\alpha \in [0, 1/2)$ и всички $x, \in A$, $y \in B$.

Казваме, че двойката изображения (F, G), $F : A \times A \to B$ и $G : B \times B \to A$, дефинирана в модуларното функционално пространство (X, ρ) , е ρ–циклично изображение на Канан, ако удовлетворяват условието

$$\rho(F(x,y) - F(u,v)) \leq \alpha\rho(F(x,y) - x) + \alpha\rho(G(u,v) - u) + (1 - 2\alpha)\mathrm{dist}(A, B)$$

за някои $\alpha \in [0, 1/2)$ и всички $x, y \in A$, $u, v \in B$.

Илюстрирали сме получените резултати с редица примери.

Кратък обзор на дисертационния труд

Десертационния труд се състои от предговор, три глави, заключение и библиография. Заключението съдържа: резюме на получените резултати, списък на публикациите по дисертационния труд, апробация на получените резултати и декларация за оригиналност.

1. Въведение

В Глава 1 са дадени редица основни дефиниции, теореми и леми, които да въведат читателя в тематиката на дисертационния труд. Тук ще разгледаме само тези от тях, които ще използваме по-нататък в настоящият Автореферат.

Съществено за получаване на резултати за съществуване и единственост на точки на най-добро приближение в банахово пространство е условието то да бъде равномерно изпъкнало.

Определение 1.3. *[3] Нека $(X, \|\cdot\|)$ е банахово пространство. За всяко $\varepsilon \in (0, 2]$ дефинираме модул на изпъкналост $\delta_{\|\cdot\|}$ на $\|\cdot\|$ чрез*

$$\delta_{\|\cdot\|}(\varepsilon) = \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\| : x, y \in B_X, \|x - y\| \geq \varepsilon \right\}.$$

Нормата се нарича равномерно изпъкнала ако $\delta_X(\varepsilon) > 0$ за всяко $\varepsilon \in (0, 2]$. Пространството $(X, \|\cdot\|)$ се нарича равномерно изпъкнало.

Операторите, които разглеждаме в дисертационния труд са циклични оператори.

Определение 1.6. *Нека A и B са непразни подмножества в метричното пространство (X, d). Казваме, че изображението $T : A \cup B \to A \cup B$ е циклично изображение, ако $T(A) \subseteq B$ и $T(B) \subseteq A$.*

В Трета глава са разгледани циклични оператори във функционални модуларни пространства.

Следвайки [9] ще припомним основни дефиниции и свойства на модуларните функционални пространства. Нека Ω е непразно множество и Σ е нетривиална σ–алгебра от подмножества в Ω. Нека $\mathcal{P}$ е δ–пръстен от подмножества в Ω, така че $E \cap A \in \mathcal{P}$ за всяко $E \in \mathcal{P}$ и $A \in \Sigma$. Ще приемем, че съществува нарастваща редица от множества $K_n \in \mathcal{P}$, така че $\Omega = \cup K_n$. С $\mathcal{E}$ ще означаваме линейното пространство от всички прости функции с носител върху $\mathcal{P}$. С $\mathcal{M}_\infty$ ще означаваме пространството от всички разширени измерими функции, т.е. всички функции $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$, такива че съществува редица $\{g_n\} \subset \mathcal{E}$, $|g_n| \leq |f|$ и $g_n(\omega) \to f(\omega)$ за всяко $\omega \in \Omega$. С $\mathbf{1}_A$ ще означаваме характеристичната функция на множеството A. Класа от всички не нулеви правилни изпъкнали модулари, дефинирани в Ω ще означаваме с $\mathcal{R}$.

Определение 1.18. *Нека ρ е изпъкнал модулар.*

(а) Модуларно функционално пространство е векторното пространство

$$L_\rho(\Omega, \Sigma),$$

или за по кратко L_ρ, дефинирано с $L_\rho = \{f \in \mathcal{M} : \rho(\lambda f) \to 0$ при $\lambda \to 0\}$;

(б) Следващата формула дефинира норма в L_ρ (често се нарича норма на Люксембург): $\|f\|_\rho = \inf\left\{\alpha > 0 : \rho\left(\frac{f}{\alpha}\right) \leq 1\right\}$.

Аналогично на изследването на точки на най-добро пприближение в банахови пространства съществена роля влияе функционалното модуларно пространство да бъде (UC1). Друго съществено изискване е Δ_2–свойството.

Определение 1.19. *Нека $L_\rho \in \mathfrak{R}$. Ще казваме, че ρ има Δ_2–свойството, ако $\sup_{n \in \mathbb{N}} \rho(2f_n, D_k) \to 0$, винаги когато $D_k \downarrow \emptyset$ и $\sup_{n \in \mathbb{N}} \rho(f_n, D_k) \to 0$.*

Определение 1.20. *Нека $\rho \in \mathfrak{R}$ и $i \in \{1, 2\}$. Нека $r > 0$, $\varepsilon > 0$. Дефинираме*

$$D_i(r, \varepsilon) = \left\{(f, g) : f, g \in L_\rho, \rho(f) \leq r, \rho(g) \leq r, \rho\left(\frac{f - g}{i}\right) \geq \varepsilon r\right\}.$$

Нека дефинираме

$$\delta_i(r,\varepsilon) = \begin{cases} \inf\left\{1 - \frac{1}{r}\rho\left(\frac{f+g}{2}\right) : (f,g) \in D_i(r,\varepsilon)\right\} > 0, & \text{ако } \ D_i(r,\varepsilon) \neq \emptyset \\ \delta_i(r,\varepsilon) = 1, & \text{ако } \ D_i(r,\varepsilon) = \emptyset. \end{cases}$$

(i) Ще казваме, че ρ удовлетворява (UCi) ако за всеки две $r > 0$ и $\varepsilon > 0$ е изпълнено неравенството $\delta_i(r,s) > 0$.

(ii) Ще казваме, че ρ удовлетворява (UUCi) ако за всеки две $s \geq 0$ и $\varepsilon > 0$ съществува $\eta_i(s,\varepsilon) > 0$, зависещо от s и ε, така че $\delta_i(r,s) > \eta_i(s,\varepsilon) > 0$ за $r > s$.

2. Оценка на грешката за точки на най-добро приближение

Втора глава е разделена на четири параграфа.

Задачата за намирането на разстоянието между две множества може да бъде решена с различни методи. Елдред и Веермани предлагат намирането на това разстояние да бъде направено чрез циклични оператори. Теорията на точките на най-добро приближение, която обобщава идеите на Елдред и Веермани от статията [?], където са получени първите резултати за съществуване и единственост на точки на най-добро прближение, продължава да се развива и в момента. Ние сме се опитали да обобщим идеите на Елдред и Веермани.

Добре известна е теоремата на Банах за неподвижната точка, където е получена оценка на грешката за редиците от последователни приближениея. Има редица обобщения на тази теорема, където също са получени оценки на грешките. Интересно, е че резултати за оценки на грешките за точки на най-добро приближение до скоро липсваха. Първият резултат в това направление е на Златанов в [23]. За получаване на основният резултат в настоящата глава сме използвали техниката на Златанов.

2.1 Двойки точки на най-добро приближение и двойки неподвижни точки

С цел да съкратим някои формули за да бъдат събрани в текстовото поле са направили следните полагания: $\operatorname{dist}(A,B) = D$,

$$P_{n,m}(x,y) = \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\|$$

и

$$W_{n,m}(x,y) = P_{n,m}(x,y) - 2\ \mathrm{dist}(A,B) = \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\| - 2\ \mathrm{dist}(A,B)$$

, където $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ са редиците дефинирани в 2.1.

В този параграф са формулирани и доказани следните определения леми и теореми:

Определение 2.1. *Нека A и B са непразни подмножества в метричното пространство (X,d) и $F : A \times A \to B$, $G : B \times B \to A$. Нека за произволно избрани $x_0, y_0 \in A$ да дефинираме редиците $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ чрез $x_{2n+1} = F(x_{2n}, y_{2n})$, $y_{2n+1} = F(y_{2n}, x_{2n})$, $x_{2n+2} = G(x_{2n+1}, y_{2n+1})$, $y_{2n+2} = G(y_{2n+1}, x_{2n+1})$ за $n = 0, 1, 2, 3\dots$*

Теорема 2.1. *Нека A и B са непразни, затворени, изпъкнали подмножества на равномерно изпъкнало банахово пространство $(X, \|\cdot\|)$. Нека $F : A \times A \to B$, $G : B \times B \to A$ и наредената двойка (F, G) е циклично свиваща. Тогава F има единствена точка на най-добро приближение $(\xi, \eta) \in A \times A$ и G има единствена точка на най-добро приближение $(\zeta, \varsigma) \in B \times B$, т.е.*

$$\|\xi - F(\xi,\eta)\| = \|\eta - F(\eta,\xi)\| = \mathrm{dist}(A,B)$$

и

$$\|\zeta - G(\zeta,\varsigma)\| = \|\varsigma - G(\varsigma,\zeta)\| = \mathrm{dist}(A,B).$$

Още повече, имаме

$$\begin{gathered} G(F(\xi,\eta),F(\eta,\xi)) = \xi,\ \ G(F(\eta,\xi),F(\xi,\eta)) = \eta, \\ F(G(\zeta,\varsigma),G(\varsigma,\zeta)) = \zeta,\ \ F(G(\varsigma,\zeta),G(\zeta,\varsigma)) = \varsigma \end{gathered} \tag{1}$$

и

$$\zeta = F(\xi,\eta),\ \ \varsigma = F(\eta,\xi),\ \ \xi = G(\zeta,\varsigma),\ \ \eta = G(\varsigma,\zeta). \tag{2}$$

За всяка произволна точка (x_0, y_0) са изпълнени равенствата

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \xi,\ \ \lim_{n\to\infty} y_{2n} = \eta,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \zeta,\ \ \lim_{n\to\infty} y_{2n+1} = \varsigma$$

и $\|\xi - \zeta\| + \|\eta - \varsigma\| = 2\ \mathrm{dist}(A,B)$, където $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ са редиците дефинирани в Определение 2.1

Използвайки Лема 2.2 получаваме и основния резултат в Глава 2.

Лема 2.2. *Нека A и B са непразни затворени изпъкнали подмножества на равномерно изпъкнало банахово пространство $(X, \|\cdot\|)$ и $F : A \times A \to B$, $G : B \times B \to A$. Нека (F, G) е наредената двойка циклично свиващи изображения. Тогава е изпълнено неравенството*

$$\delta_{\|\cdot\|}\left(\frac{\max\{\|x_{2n+2} - x_{2n}\|, \|y_{2n+2} - y_{2n}\|\}}{D + (\alpha+\beta)^l W_{2n+1-l,2n-l}(x, y)}\right) \le \frac{(\alpha+\beta)^l W_{2n+1-l,2n-l}(x, y)}{D + (\alpha+\beta)^l W_{2n+1-l,2n-l}(x, y)},$$

където $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ са редиците дефинирани в Определение 2.1.

Теорема 2.2. *Нека A и B са непразни затворени и изпъкнали подмножества на равномерно изпъкнало банахово пространство с модул на изпъкналост от степенен тип с константи $C > 0$ и $q > 1$ и $F : A \times A \to B$, $G : B \times B \to A$. Нека (F, G) е и наредената двойка циклично свиващи изображения. Тогава*

(i) *F има единствена двойка точки на най-добро приближение $(\xi, \eta) \in A \times A$ и G има единствена двойка точки на най-добро приближение $(\zeta, \varsigma) \in B \times B$, т.е.*

$$\|\xi - F(\xi, \eta)\| = \|\eta - F(\eta, \xi)\| = D \quad и \quad \|\zeta - G(\zeta, \varsigma)\| = \|\varsigma - G(\varsigma, \zeta)\| = D.$$

Още повече $\zeta = F(\xi, \eta)$, $\varsigma = F(\eta, \xi)$, $\xi = G(\zeta, \varsigma)$ и $\eta = G(\varsigma, \zeta)$. За всяка произволна точка (x_0, y_0) е изпълнено

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \xi, \quad \lim_{n\to\infty} y_{2n} = \eta, \quad \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \zeta, \quad \lim_{n\to\infty} y_{2n+1} = \varsigma$$

и $\|\xi - \zeta\| + \|\eta - \varsigma\| = 2\ \mathrm{dist}(A, B)$;

(ii) *„a priori“ оценка на грешката*

$$\max\{\|\xi - x_{2m}\|, \|\eta - y_{2m}\|\} \le P_{0,1}(x, y)\sqrt[q]{\frac{W_{0,1}(x, y)}{Cd}} \cdot \frac{\left(\sqrt[q]{(\alpha+\beta)^2}\right)^m}{1 - \sqrt[q]{(\alpha+\beta)^2}}; \tag{3}$$

(iii) *оценка на грешката „a posteriori“*

(4)

$$\max\{\|\xi - x_{2n}\|, \|\eta - y_{2n}\|\} \le P_{2n,2n-1}(x, y)\sqrt[q]{\frac{W_{2n,2n-1}(x, y)}{C\mathrm{dist}(A, B)}} \cdot \frac{\sqrt[q]{\alpha+\beta}}{1 - \sqrt[q]{(\alpha+\beta)^2}},$$

където $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ са редиците дефинирани в Определение 2.1.

В [6, 21] е доказано, че ако $\mathrm{dist}(A,B)=0$, тогава съществува единствена двойка неподвижни точки на F и G. В следващата теорема разширяваме резултатите от [6, 21] чрез отпадане на предположението, че $\mathrm{dist}(A,B)=0$.

Теорема 2.3. *Нека A и B са непразни затворени подмножества на пълното метрично пространство (X,d) и $F : A\times A \to B$ и $G : B\times B\to A$. Нека съществуват $\alpha,\beta>0$, $\alpha+\beta<1$, така че*

$$d(F(x,y),G(u,v)) \le \alpha d(x,u)+\beta d(y,v) \tag{5}$$

за всяко $x,y\in A$ и $u,v\in B$. Тогава

(I) *Съществува единствена двойка (ξ,η) в $A\cap B$, която е двойка неподвижни точки на изображенията F и G. Още повече, итерационните редици $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, дефинирани в Определение 2.1 са сходящи съответно към ξ и η;*

(II) *„a priori“ оценка на грешката удовлетворява*

$$\max\{d(x_n,\xi),d(y_n,\eta)\} \le \frac{(\alpha+\beta)^n}{1-\alpha-\beta}(d(x_1,x_0)+d(y_1,y_0)); \tag{6}$$

(III) *„a posteriori“ оценка на грешката удовлетворява*

$$\max\{d(x_n,\xi),d(y_n,\eta)\} \le \frac{\alpha+\beta}{1-(\alpha+\beta)}(d(x_{n-1},x_n)+d(y_{n-1},y_n)); \tag{7}$$

(IV) *Скоростта на сходимост за редиците от последователни итерации се дава от*

$$d(x_n,\xi)+d(y_n,\eta) \le (\alpha+\beta)\left(d(x_{n-1},\xi)+d(y_{n-1},\eta)\right). \tag{8}$$

Следващите две теореми са следствия от Теорема 2.2 и Теорема 2.3.

Теорема 2.4. *[4, 23] Нека A и B са непразни, затворени и изпъкнали подмножества на равномерно изпъкнало банахово пространство $(X,\|\cdot\|)$, така че $\mathrm{dist}(A,B)>0$, и нека съществува $C>0$ и $q\ge 2$, така че $\delta_{\|\cdot\|}(\varepsilon)\ge C\varepsilon^q$. Нека $T : A\cup B\to A\cup B$ е циклично изображение удовлетворяващо*

$$d(Tx,Tu)=d(F(x,y),G(u,v))=\alpha d(x,u)+(1-\alpha)\mathrm{dist}(A,B) \tag{9}$$

. Тогава

(i′) *съществува единствена точка на най-добро приближение ξ на T в A, $T\xi$ е единствена точка на най-добро приближение на T в B и $\xi = T^2\xi = T^{2n}\xi$. Още повече, за всяко $x_0 \in A$ редицата $\{x_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща към ξ и $\{x_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща към $T\xi$, където $x_{n+1} = Tx_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$;*

(ii′) *„A priori“ оценка на грешката удовлетворява*

$$\left\|\xi - T^{2n}x\right\| \leq \frac{\|x - Tx\|}{1 - \sqrt[q]{k^2}} \sqrt[q]{\frac{\|x - Tx\| - \operatorname{dist}(A, B)}{C\operatorname{dist}(A, B)}} \left(\sqrt[q]{k}\right)^{2n};$$

(iii′) *„A posteriori“ оценка на грешката удовлетворява*

$$\left\|T^{2n}x - \xi\right\| \leq \frac{\|T^{2n-1}x - T^{2n}x\|}{1 - \sqrt[q]{k^2}} \sqrt[q]{\frac{\|T^{2n-1}x - T^{2n}x\| - \operatorname{dist}(A, B)}{C\operatorname{dist}(A, B)}} \sqrt[q]{k}.$$

Теорема 2.5. *[11, 20] Нека A и B са непразни затворени подмножества на пълното метрично пространство (X, d) и $T : A \to B$ и $T : B \to A$. Нека съществува $\alpha \in (0, 1)$, така че $d(Tx, Tu) \leq \alpha d(x, u)$ за всяко $x \in A$ и $u \in B$. Тогава*

(I′) *съществува единствена точка ξ в $A \cap B$, която е неподвижна точка за изображението T. Още повече, итерационната редица $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, дефинирана чрез $x_n = Tx_{n-1}$ е сходяща към ξ;*

(II′) *„a priori“ оценка на грешката удовлетворява $d(x_n, \xi) \leq \alpha^n \frac{1}{1-\alpha} d(x_0, x_1)$;*

(III′) *„a posteriori“ оценка на грешката удовлетворява $d(x_n, \xi) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_n, x_{n+1})$;*

(IV′) *Скоростта на сходимост на Пикард итерация е дадена чрез $d(x_n, \xi) \leq \alpha d(x_{n-1}, \xi)$.*

2.2 Приложения на Теорема 2.2

Този параграф е разделен на три подпараграфа, в които са разгледани редица примери.

2.2.1 Системи от интегрални уравнения

Следващият пример е система от интегрални уравнения. Чрез подходящ избор на изображениеята

$$F(x,y) = -\left(\frac{3t}{2}\int_0^1 s\frac{x(s)+y(s)}{2}ds + \frac{t}{2}\right) \text{ за всяко } (x,y) \in A \times A$$

и

$$G(u,v) = \frac{3t}{2}\int_0^1 s\frac{|u(s)|+|v(s)|}{2}ds + \frac{t}{2} \text{ за всяко } (u,v) \in B \times B,$$

свеждаме решаването на системата (10) към прилагане на Теорема 2.2.

Пример 2.1. *Нека разгледаме пространството $L_2[0,1]$ от всички измерими функции с интегрируем квадрат, снабдено с каноничната норма $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f^2(t)dt}$. Нека*

$$A = \{f \in L_2[0,1] : f(t) \geq t \text{ за всяко } t \in [0,1]\}.$$

Търсим решенията на системата

$$(10) \qquad \left| \begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^1 \left(x(t) + \frac{3t}{2}\int_0^1 s\frac{x(s)+y(s)}{2}ds + \frac{t}{2}\right)^2 dt & = & \displaystyle\frac{4}{3} \\ \displaystyle\int_0^1 \left(y(t) + \frac{3t}{2}\int_0^1 s\frac{x(s)+y(s)}{2}ds + \frac{t}{2}\right)^2 dt & = & \displaystyle\frac{4}{3}, \end{array} \right.$$

които принадлежат към множеството A.

2.2.2 Системи от линейни уравнения

Нека посочим, че модулът на изпъкналост $\delta_{\|\cdot\|}$ се разглежда, ако банаховото пространство $(X, \|\cdot\|)$ е най-малко двуизмерно. Що се отнася до $\mathbb{R}$, снабдено с неговата канонична норма, то е подпространство не $\mathbb{R}_2^2$ и получаваме, че $\delta_{(\mathbb{R},|\cdot|)}(\varepsilon) \geq \delta_{(\mathbb{R}_2^2,\|\cdot\|_2)}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{8}$. Лесно се забелязва, че в $\mathbb{R}$ е изпълнено равенството $\delta_{(\mathbb{R},|\cdot|)}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$.

Инфимумът се достига, когато $x = 1$ и $y = 1 - \varepsilon$. Следователно

$$\delta_{(\mathbb{R},|\cdot|)}(\varepsilon) = \left|1 - \frac{1+(1-\varepsilon)}{2}\right| = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Така получаваме следствие на Теорема 2.2 в $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Следствие 2.1. *Нека A и B са непразни затворени подмножества в $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Нека $F : A \times A \to B$, $G : B \times B \to A$ е наредена двойка (F, G) е наредената двойка циклично свиващи изображения. Тогава*

(i) *Изображението F има единствена двойка точки $(\xi, \eta) \in A \times A$ на най-добро приближение и G има единствена двойка точки $(\zeta, \varsigma) \in B \times B$ на най-добро приближение, т.е.*

$$|\xi - F(\xi, \eta)| = |\eta - F(\eta, \xi)| = \operatorname{dist}(A, B)$$

и

$$|\zeta - G(\zeta, \varsigma)| = \|\varsigma - G(\varsigma, \zeta)| = \operatorname{dist}(A, B).$$

Още повече е в сила $\zeta = F(\xi, \eta)$, $\varsigma = F(\eta, \xi)$, $\xi = G(\zeta, \varsigma)$ и $\eta = G(\varsigma, \zeta)$. За всяка произволно избрана наредена двойка точки (x_0, y_0) е изпълнено $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \xi$, $\lim_{n\to\infty} y_{2n} = \eta$, $\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \zeta$, $\lim_{n\to\infty} y_{2n+1} = \varsigma$ и $|\xi - \zeta| + |\eta - \varsigma| = 2\operatorname{dist}(A, B)$;

(ii) *в сила е „a priori“ оценка на грешката*

$$\max\{|\xi - x_{2m}|, |\eta - y_{2m}|\} \le 2P_{0,1}(x, y)\frac{W_{0,1}(x, y)}{Cd} \cdot \frac{(\alpha+\beta)^{2m}}{1-(\alpha+\beta)^2}; \tag{11}$$

(iii) *в сила е „a posteriori“ оценка на грешката*

$$\max\{\|\xi - x_{2n}\|, \|\eta - y_{2n}\|\} \le 2P_{2n,2n-1}(x, y)\frac{W_{2n,2n-1}(x, y)}{Cd} \cdot \frac{\alpha+\beta}{1-(\alpha+\beta)^2}, \tag{12}$$

където $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ са редиците дефинирани в Определение 2.1.

Разгледани са следните примери:

Пример 2.2. *[21] Нека разгледаме пространството $\mathbb{R}$, снабдено с канонична норма $|\cdot|$ и $A = [1, 2]$. Търсим решенията на системата*

$$\left| \begin{array}{rcl} 5x + y & = & 6 \\ 5y + x & = & 6, \end{array} \right. \tag{13}$$

които принадлежат на множеството A.

След подходящ избор на изображенията $F(x,y) = \frac{-x-y-2}{4}$ и $G(x,y) = \frac{-x-y+2}{4}$ свеждаме задачата до прилагане на Следствие 2.1.

Пример 2.3. *[6] Нека разгледаме пространството $\mathbb{R}$ снабдено с каноничната норма $|\cdot|$, $A = [1,2]$. Търсим решенията на системата*

$$\left| \begin{array}{rcl} 8x + 3y & = & 11 \\ 8y + 3x & = & 11, \end{array} \right. \tag{14}$$

които принадлежат на множествата A.

Отново след подходящ избор на изображенията $F(x,y) = \frac{-2x-3y-1}{6}$ и $G(x,y) = \frac{-2x-3y+1}{6}$ задачата се свежда до прилагане не Следствие 2.1.

В следващият пример сме разгледали клас от симетрични системи, като за нея сме представили процедура за конструирането на двойка свиващи циклични изображения (F,G), които дават възможно най-добрата скорост на сходимост за редиците от последователни приближения. Нека дефинираме:

$$F(x,y) = -\mu x + \left(1 + \mu - \frac{(1+m)(p+q)}{p}\right) y + \frac{a(1+m)(p+q)}{p} - 2a$$

и

$$G(x,y) = -\mu x + \left(1 + \mu - \frac{(1+m)(p+q)}{p}\right) y - \left(\frac{a(1+m)(p+q)}{p} - 2a\right).$$

Скоростта на сходимост се определя от константата $\frac{p+q}{p}(1+\mu) - 1$, която зависи от параметъра $\mu \in (0,1)$. Колкото параметъра е по близо до 0 толкова скоростта на сходимост е по-добра, тъй като μ не може да бъде 0, то най-добрият ред на сходимост не може да бъде достигнат с така направената конструкция. Системата (15) се решава с помощта на по-горе дефинираните изображения F и G зависещи от параметъра μ.

Пример 2.4. *Нека разгледаме пространството $\mathbb{R}$ снабдено с каноничната норма $|\cdot|$, $A = [1,2]$. Нека $p,q,r > 0$. Търсим решенията на системата линейни уравнения*

$$\left| \begin{array}{rcl} px + qy & = & r \\ py + qx & = & r. \end{array} \right. \tag{15}$$

които принадлежат на множествата A.

2.2.3 Системи от нелинейни уравнения

Подпараграф 2.2.3 Системи от нелинейни уравнения е разгледан следният пример:

Пример 2.5. *Нека да разгледаме нелинейната система*

$$\left| \begin{array}{rcl} x^5y + x^2y^2 + y^5x + 141x & = & 144 \\ y^5x + x^2y^2 + x^5y + 141y & = & 144 \end{array} \right. \tag{16}$$

за $x, y \in [1, 2]$.

Избирайки подходящи изображения

$$F(x, y) = -\frac{x^5y + x^2y^2 + y^5x + 138}{141}$$

и

$$G(x, y) = \frac{|x|^5|y| + x^2y^2 + |y|^5|x| + 138}{141},$$

свеждаме задачата до прилагане на Следствие 2.1.

2.3 Оценка на грешката за свиващо циклично изображение на Канан

В настоящият параграф са получени достатъчни условия за съществуване и единственост на точки на най-добро приближение за циклично изображение на Канан, както и оценка на грешките „a priori“ и „a posteriori“.

Определение 1.13. *Нека* (X, d) *е метрично пространство и* A, B *са непразни подмножества на* X. *Казваме, че изображението* $T : A \cup B \to A \cup B$ *е свиващо циклично изображения на Канан, ако* T *е циклично изображение и съществува* $\alpha \in [0, 1/2)$, *така че за всеки* $x, y \in X$ *е в сила неравенството*

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(Tx, x) + \alpha d(Ty, y) + (1 - 2\alpha)\mathrm{dist}(A, B).$$

Теорема 2.6. *Нека* A *и* B *са непразни, затворени и изпъкнали подмножества на равномерно изпъкнало банахово пространство*$(X, \|\cdot\|)$, *така че* $\mathrm{dist}(A, B) > 0$, *и нека съществуват* $C > 0$ *и* $q \geq 2$, *така че* $\delta_{\|\cdot\|}(\varepsilon) \geq C\varepsilon^q$. *Нека* $T : A \cup B \to A \cup B$ *е свиващо циклично изображения на Канан. Тогава* *(i)* *съществува единствена точка на най-добро приближение ξ на T в A, $T\xi$ е единствена точка на най-добро приближение на T в B и $\xi = T^2\xi = T^{2n}\xi$;*

(ii) *за всяко $x_0 \in A$ редицата $\{x_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща към ξ и $\{x_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща към $T\xi$, където $x_{n+1} = Tx_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$;*

(iii) *„a priori“ оценка на грешката удовлетворява*

$$(17) \qquad \left\|\xi - T^{2n}x\right\| \le \frac{\|x - Tx\|}{1 - \sqrt[q]{k^2}} \sqrt[q]{\frac{\|x - Tx\| - \operatorname{dist}(A,B)}{C\operatorname{dist}(A,B)}} \left(\sqrt[q]{k}\right)^{2n};$$

(iv) *„a posteriori“ оценка на грешката удовлетворява*

$$(18) \qquad \left\|T^{2n}x - \xi\right\| \le \frac{\|T^{2n-1}x - T^{2n}x\|}{1 - \sqrt[q]{k^2}} \sqrt[q]{\frac{\|T^{2n-1}x - T^{2n}x\| - \operatorname{dist}(A,B)}{C\operatorname{dist}(A,B)}} \sqrt[q]{k}.$$

2.4 Оценка на грешката за свиващо циклично изображение на Риш

Резултатите от от този параграф, обобщават резултатите от Параграф 2.3.

Определение 2.2. *Нека A и B са непразни множества в метричното пространство (X, d). Казваме, че изображението $T : X \to X$ е циклично свиващо изображение на Риш, ако T е циклично и съществуват не отрицателни числа k_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, които удовлетворяват $\sum_{i=1}^{5} k_i < 1$, така че за всеки $x, y \in X$ е в сила неравенството*

$$(19) \qquad d(Tx, Ty) \le M_1(x, y) + M_2(x, y) + M_3(x, y) + (1 - k)\operatorname{dist}(A, B),$$

където $k = \sum_{i=1}^{5} k_i$, $M_1(x, y) = k_1 d(x, y)$, $M_2(x, y) = k_2 d(Tx, x) + k_3 d(Ty, y)$, $M_3(x, y) = k_4 d(Tx, y) + k_5 d(Ty, x)$.

Както е отбелязано в [5] от симетричността на функцията $d : X \times X \to [0, +\infty)$ следва, че $k_2 = k_3$ и $k_4 = k_5$.

Така получаваме следното еквивалентно определение:

Определение 2.3. *Нека (X, d) е метрично пространство. Казваме, че изображението $T : X \to X$ е свиващо изображение на Риш, ако съществуват* *неотрицателни числа a_i, $i = 1, 2, 3$, които удовлетворяват $a_1 + 2a_2 + 2a_3 < 1$ така, че за всеки $x, y \in X$ е в сила неравенството*

$$d(Tx,Ty) \leq a_1 d(x,y) + a_2(d(Tx,x) + d(Ty,y)) + a_3(d(Tx,y) + d(Ty,x))(1-k)D,$$

където $a = a_1 + 2a_2 + a_3$ и $D = \operatorname{dist}(A,B)$.

Имаме неравенството

$$\begin{array}{rcl} d(Tx,Ty) & \leq & a_1 d(x,y) + a_2\left(d(x,Tx) + d(y,Ty)\right) \\ & & +a_3\left(d(x,Ty) + d(y,Tx)\right) \\ & & +\left(1 - a_1 - 2a_2 - 4a_3\right)\right) \operatorname{dist}(A,B) \end{array} \tag{20}$$

за всяко $x \in A$ и $y \in B$.

Ако $a_2 = a_3 = 0$ получаваме резултата от [23], ако $a_1 = a_3 = 0$ получаваме резултата за свиващо циклично изображение на Канан.

Теорема 2.7. *Нека A и B са непразни, затворени и изпъкнали подмножества на равномерно изпъкналото банахово пространство $(X, \|\cdot\|)$, така че $\operatorname{dist}(A,B) > 0$ и нека съществуват $C > 0$ и $q \geq 2$, така че $\delta_{\|\cdot\|}(\varepsilon) \geq C\varepsilon^q$. Нека $T : A \cup B \to A \cup B$ е циклично свиващо изображение на Риш, удовлетворяващо (20). Тогава*

(i) съществува единствена точка на най-добро приближение ξ за T в A, $T\xi$ е единствена точка на най-добро приближение за T в B и $\xi = T^2\xi = T^{2n}\xi$;

(ii) за всяко $x_0 \in A$ редицата $\{x_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща към ξ и $\{x_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща към $T\xi$, където $x_{n+1} = Tx_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$;

(iii) в сила е „a priori“ оценка на грешката

$$\left\|\xi - T^{2n}x\right\| \leq \frac{\|x - Tx\|}{1 - \sqrt[q]{\alpha^2}} \sqrt[q]{\frac{\|x - Tx\| - \operatorname{dist}(A,B)}{C\operatorname{dist}(A,B)}} \left(\sqrt[q]{\alpha}\right)^{2n}; \tag{21}$$

(iv) в сила е „a posteriori“ оценка на грешката

$$\left\|T^{2n}x - \xi\right\| \leq \frac{\|T^{2n-1}x - T^{2n}x\|}{1 - \sqrt[q]{\alpha^2}} \sqrt[q]{\frac{\|T^{2n-1}x - T^{2n}x\| - \operatorname{dist}(A,B)}{C\operatorname{dist}(A,B)}} \sqrt[q]{\alpha}. \tag{22}$$

3. Точки на най-добро приближение в модуларни функционални пространства

Освен идеята за дефиниране на норма и разглеждане на банахови пространства, и различни видове изображения, съществува и друго направление за обобщаване на теоремата на Банах за свиващите изображения. Това направление се базира на идеята за разглеждане на абстрактни функционали ρ, дефинирани върху линейно пространство и измерващи „големината“ на елементите на пространството. Тези функционали обикновено се наричат модулари и чрез тях се дефинират модуларните пространства (X, ρ).

Трета глава е разделена на пет параграфа.

3.1 Циклични ρ–свиващи изображения на Канан в модуларни функционални пространства

С цел да съкратим записа на някои формули в текстовото поле, в настоящата глава е направено следното полагане $D = d_\rho(A, B)$

В този параграф са формулирани и доказани: теорема за съществуване и единственост на неподвижна точка за ρ–свиващо изображение на Канан, както и достатъчни условия съществуване и единственост на точка на най-добро приближение. Също така са доказани и редица следствия.

Определение 3.1. *Нека $\rho \in \Re$, $A, B \subseteq L_\rho$ са подмножества. Изображението $T : A \cup B \to A \cup B$ се нарича циклично ρ–свиващо изображение на Канан, ако то е циклично изображение и съществуват константи $k \in (0, 1/2)$ и $D \geq 0$, така че неравенството*

$$\rho(Tx - Ty) \leq k \left(\rho(Tx - x) + \rho(Ty - y)\right) + (1 - 2k)D \tag{23}$$

е изпълнено за всяко $x \in A$, $y \in B$.

За доказване Теорема 3.1 съществено използваме резултата на Златанов от [22], както и следващите две леми.

Лема 3.3. *Нека $\rho \in \Re$ и ρ има Δ_2–свойството. Ако редиците $\{y_n\}_{n=1}^\infty \subset B \subseteq L_\rho$ и $\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{z_n\}_{n=1}^\infty \subset A \subseteq L_\rho$ са такива че:*

(i) $\lim_{n\to\infty} \rho(z_n - y_n) = 0$;

(ii) $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n - y_n) = 0$,

тогава $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n - z_n) = 0$.

Лема 3.4. *Нека* $\rho \in \mathfrak{R}$ *и* ρ *има* Δ_2*–свойството. Ако редиците* $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq B \subset L_\rho$ *и* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A \subset L_\rho$ *са такива че:*

(i) $\lim_{n\to\infty} \rho(z_n - x_n) = 0$;

(ii) за всяко $\varepsilon > 0$ *съществува* $N_0 \in \mathbb{N}$, *такова че за всеки* $m, n \geq N_0$ *е изпълнено неравенството* $\rho(z_m - y_n) \leq \varepsilon$.

Тогава за всеки $\varepsilon > 0$ *съществува* $N_1 \in \mathbb{N}$, *такова че за всеки* $m, n \geq N_1$ *е изпълнено неравенството* $\rho(x_m - y_n) < \varepsilon$.

Теорема 3.1. *Нека* $\rho \in \mathfrak{R}$. *Нека* ρ *е (UC1), има* Δ_2*–свойството и е равномерно непрекъсната. Нека* $A, B \subseteq L_\rho$ *са* ρ*–затворени и изпъкнали подмножества,* $A \cup B$ *е* ρ*–ограничено и* $T : A \cup B \to A \cup B$ *е циклично* ρ*–свиващо изображение на Канан.*

(i) Ако $D = 0$ *тогава* $A \cap B \neq \emptyset$ *и съществува единствено* $x \in A \cap B$, *така че* x *е неподвижна точка на* T *и за всяко* $x_0 \in A \cup B$ *точката* x *е* ρ*–границата на редицата* $\{T^n x_0\}_{n=1}^{\infty}$;

(ii) Ако $D = d_\rho(A, B)$, *тогава съществува единствена* $x \in A$ *такава, че* x *е* ρ*–точка на най-добро приближение за* T *в* A, Tx *е* ρ*–точка на най-добро приближение за* T *в* B, $T^2 x = x$ *и за всяко* $x_0 \in A$ *точката* x *е* ρ*–границата на редицата* $\{T^{2n} x_0\}_{n=1}^{\infty}$ *и* Tx *е* ρ*–границата на редицата* $\{T^{2n+1} x_0\}_{n=1}^{\infty}$.

Следствие 3.3. *Нека* $\rho \in \mathfrak{R}$. *Нека* ρ *е (UC1), има* Δ_2*–свойството и е равномерно непрекъсната. Нека* $A \subseteq L_\rho$ *е* ρ*–затворено и изпъкнало подмножество,* A *е* ρ*–ограничено и* $T : A \to A$ *е изображение, което удовлетворява неравенството* $\rho(Tx - Ty) \leq k\,(\rho(Tx - x) + \rho(Ty - y))$ *за всеки* $x, y \in A$. *Тогава съществува единствено* $\xi \in A$, *такова че* $T\xi = \xi$ *и за всяко* $x_0 \in A$ *точката* ξ *е* ρ*–граница на редицата* $\{T^n x_0\}_{n=1}^{\infty}$.

Следствие 3.4. *Нека* $\rho \in \mathfrak{R}$ *е (UC1) и е равномерно непрекъсната. Нека съществува* $C > 0$, *така че* $\rho(2f) \leq C\rho(f)$ *за всяко* $f \in L_\rho$. *Нека* $A, B \subseteq L_\rho$ *е* ρ*–затворени и изпъкнало подмножество,* $A \cup B$ *е* ρ*–ограничено и изображението* $T : A \cup B \to A \cup B$ *е циклично* ρ*–свиващо изображение на Канан.*

(i′) *Ако $D = 0$ тогава $A \cap B \neq \emptyset$, съществува единствено $x \in A \cap B$, така че x е неподвижна точка на T и за всяко $x_0 \in A \cup B$ точката x е ρ–граница на редицата $\{T^n x_0\}_{n=1}^{\infty}$;*

(ii′) *Ако $D = d_\rho$, тогава съществува единствено $x \in A$, такова че x е ρ–точка на най-добро приближение на T в A, $T^2 x = x$ и за всяко $x_0 \in A$ точката x е ρ–граница на редицата $\{T^{2n} x_0\}_{n=1}^{\infty}$.*

Ще припомним, че M се нарича функция на Орлич, ако M е изпъкнала, четна, непрекъсната и ненамаляваща функция в $[0, \infty)$ и $M(0) = 0$, $M(t) > 0$ за всяко $t \neq 0$. Нека M е функция на Орлич и нека (Ω, Σ, μ) е измеримо пространство. Нека разгледаме пространството $L^0(\Omega)$ състоящо се от всички измерими реални функции в Ω и дефинирани за всяко $f \in L^0(\Omega)$ модулара, породен от функцията на Орлич M, чрез $\widetilde{M}(f) = \int_\Omega M(f(t))d\mu(t)$.

Следствие 3.5. *Нека M е функция на Орлич, която удовлетворява Δ_2–условието и е много изпъкнала. Нека $L_{\widetilde{M}}$ е модуларното функционално пространство генерирано от M. Нека A и B са две затворени и изпъкнали множества в $L_{\widetilde{M}}$ и $A \cup B$ са $\widetilde{M}$–ограничени. Нека изображението $T : A \cup B \to A \cup B$ е циклично $\widetilde{M}$–свиващо изображение на Канан.*

(i″) *Ако $D = 0$, тогава $A \cap B \neq \emptyset$, съществува единствена $x \in A \cap B$, така че x е неподвижна точка на T и за всяко $x_0 \in A \cup B$ точката x е $\widetilde{M}$–граница на редицата $\{T^n x_0\}_{n=1}^{\infty}$;*

(ii″) *Ако $D = d_{\widetilde{M}}$, тогава съществува единствено $x \in A$, такова че x е $\widetilde{M}$–точка на най-добро приближение за T в A, $T^2 x = x$ и за всяко $x_0 \in A$ точката x е $\widetilde{M}$–граница на редицата $\{T^{2n} x_0\}_{n=1}^{\infty}$.*

3.2 Приложения на Теорема 3.1

В този параграф сме разгледали два примера, които илюстрират Теорема 3.1.

3.2.1 Приложение на Теорема 3.1 в $(\mathbb{R}_2^2, \|\cdot\|_2^2)$

Пример 3.1. *Нека разгледаме пространството $\mathbb{R}^2 = \{x = (x_1, x_2) : x_i \in \mathbb{R}\}$, снабдено с модулара $\rho(x) = \|x\|_2^2 = x_1^2 + x_2^2$. Модуларът ρ удовлетворява* *условията от Следствие 3.5. Нека обозначим множествата* $A = \{(1,u) : u \in \mathbb{R}\}$ *и* $B = \{(-1,v) : v \in \mathbb{R}\}$. *Тогава*

$$d_\rho(A,B) = \inf\{\rho((1,u)-(-1,v)) : u,v \in \mathbb{R}\} = \inf\{4+(u-v)^2 : u,v \in \mathbb{R}\} = 4.$$

Дефинираме цикличното изображение $T : A \cup B \to A \cup B$ *чрез*

$$Tx = \begin{cases} (-1,-1), & u > 2 \\ \left(-1, \frac{-u}{4}\right), & u \in [-2,2] \\ (-1,1), & u < -2 \end{cases} \quad \text{и} \quad Ty = \begin{cases} (1,-1), & v > 2 \\ \left(1, \frac{-v}{4}\right), & v \in [-2,2] \\ (1,1), & v < -2, \end{cases}$$

където $x = (1,u) \in A$ *и* $y = (-1,v) \in B$.

Изображението T е циклично ρ–свиващо изображение на Канан в модуларното функционално пространство $(\mathbb{R}^2_2, \|\cdot\|^2_2)$, което удовлетворява есловията на Теорема 3.1 и следователно има точка на най-добро приближение.

3.2.2 Приложение на Теорема 3.1 в $L^2_{(-1,1)}$

Пример 3.2. *Нека* $K \in L^2_{[-1,1]\times[-1,1]}$ *удовлетворява за всяко* $(x,t) \in [0,1]\times[0,1]$ *условията*

$$K(x,t) \geq 0, \quad K(x,-t) = -K(x,t), \quad |K(-x,t)| = |K(x,t)|.$$

и $f_0 \in L^2_{[-1,1]}$ *удовлетворява за всяко* $x \in [-1,1]$ *условията*

$$f_0(x) \geq 0, \quad f_0(-x) = f_0(x).$$

Нека означим

$$\alpha = \int_0^1 f_0(x) \sqrt{\int_0^1 K^2(x,t)dt}dx,$$

$$\beta = \int_0^1 \int_0^1 K^2(x,t)dtdx,$$

$$\gamma = \int_0^1 f_0^2(x)dx,$$

$$\text{sign}(f(x)) = \begin{cases} -1, & f(x) < 0, \\ 0, & f(x) = 0, \\ 1, & f(x) > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \delta_f = \text{sign}(\text{f}(0)).$$

Разглеждаме интегралният оператор $T_1 : L^2_{(-1,1)} \to L^2_{(-1,1)}$ дефиниран с

$$(T_1 f)(x) = -\delta_f. \left(f_0(-\delta_f.x).\mathrm{sign}(f(x)) + \int_{-1}^{1} K(-\delta_f.x, t).f(t)dt \right).$$

Нека означим множеството

$$X = \left\{ f \in L^2_{(-1,1)} : f(x) = 0 \text{ за } x \in [-1,0),\ f(x) > 0 \text{ for } x \in [0,1] \right\}.$$

Нека съществува $\varphi(x) \in X$, така че $(Tf)(x) \le -\varphi(-x)$ за всяко $f \ge \varphi$.
Нека означим множествата

$$A = \left\{ f \in L_{(-1,1)} : f(t) \ge \varphi(t) \right\} \text{ и } B = \left\{ g \in L_{(-1,1)} : g(t) \le -\varphi(-t) \right\}.$$

Нека разгледаме цикличното изображението $T : A \cup B \to A \cup B$, дефинирано с $(Tf)(x) = (T_1 f)$, където $\rho(f) \ge D$ и $f \in A$, $(Tf)(x) = -\varphi(-x)$, където $\rho(f) < D$ и $f \in A$, $(Tg)(x) = \varphi(x)$, където $\rho(f) < D$ и $g \in B$.

В рамките на този подпараграф е формулирана и доказана следната теорема:

Теорема 3.2. *Нека $T : A \cup B \to A \cup B$ е изображението дефинирано по-горе. Нека $\alpha, \beta \in (0,1)$, $\gamma \in (0,1]$ са, такива че са изпълнени неравенствата*

$$\gamma + \alpha\sqrt{D} + \beta D - D \le 0 \tag{24}$$

и

$$\alpha \le (1-\beta)\sqrt{D}. \tag{25}$$

Тогава съществува единствено $x \in A$ такова, че x е ρ–точка на най-добро приближение за T в A, $T^2x = x$ и за всяко $x_0 \in A$ точката x е ρ–граница на редицата $\{T^{2n}x_0\}_{n=1}^{\infty}$.

Теорема 3.2 е илюстрирана със следващите няколко конкретни примери.
Нека $f_0(t) = 1$ за $t \in [-1,1]$ в следващият пример. Тогава $\gamma = 1$.

Пример 3.3. *Нека $K(x,t) = \frac{\sin(\pi t)}{2}$ и $\varphi(t) = \frac{\pi}{\pi - 1}$.*

Пример 3.4. *Нека $K(x,t) = \frac{\sin(\pi x)\sin(\pi t)}{2}$ и $\varphi(t) = 1 + \frac{4}{3\pi}\sin(\pi t)$.*

Пример 3.5. *Нека $K(x,t) = \sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}$ и $\varphi(t) = 1 + \frac{\sqrt{t(1-t)}}{8-\pi}$.*

3.3 Циклични ρ–свиващи двойки изображения в модуларни функционални пространства

В Параграф 3.3 сме обобщили резултатите за наредена циклични ρ–свиващи изображения в модуларни функционални пространства. Получена е теорема за съществуване и единственост двойка неподвижни точки, както и за съществуване и единственост двойки точки на най-добро приближение за наредена двойка циклично свиващи изображения.

Определение 3.4. *Нека A и B са непразни подмножества в модуларното функционално пространство L_ρ и $F : A \times A \to B$ е функция на две променливи. Наредената двойка $(x, y) \in A \times A$ наричаме двойка неподвижни точки за F, ако са в сила равенствата*

$$x = F(x, y) \quad \text{и} \quad y = F(y, x).$$

Определение 3.5. *Нека A е непразно подмножество в модуларното функционално пространство L_ρ и $F : A \times A \to A$. Изображения F наричаме ρ–свиващо изображение, ако съществуват $\alpha, \beta \in [0, 1)$, $\alpha + \beta < 1$, така че за всеки $(x, y) \in A \times A$, $(u, v) \in B \times B$ е в сила неравенството*

$$\rho(F(x, y) - (u, v)) \leq \alpha\rho(x, u) + \beta\rho(y, v).$$

Теорема 3.3. *Нека $\rho \in \Re$. Нека $A \subset L_\rho$ е непразно, ρ–затворено и ρ–ограничено. Нека $F : A \times A \to A$ е ρ–свиващо. Тогава F има единствена двойка неподвижни точки $(x, y) \in A$. Още повече, за всяко $(x_0, y_0) \in A$ редиците $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ дефинирани чрез равенствата:*

$$x_1 = F(x_0, y_0), y_1 = F(y_0, x_0), x_{n+1} = F(x_n, y_n), y_{n+1} = F(y_n, x_n) \tag{26}$$

са сходящи към единствената двойка неподвижни точки $(x, y) \in A$ (т.е. $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n - x) = 0$ и $\lim_{n\to\infty} \rho(y_n - y) = 0$).

Определение 3.6. *Нека A и B са непразни подмножества в модуларното функционално пространство L_ρ и $F : A \times A \to B$ са функции на две променливи. Наредената двойка $(x, y) \in A \times A$ наричаме двойка точки на най-добро приближение за F ако са в сила равенствата*

$$\rho(x - F(x, y)) = \rho(y - F(y, x)) = \mathrm{dist}(A, B) = D.$$

Определение 3.7. *Нека A и B са непразни подмножества в модуларното функционално пространство L_ρ и $F : A \times A \to B$, $G : B \times B \to A$. Наредената двойка от изображения (F, G) наричаме циклична ρ–свиваща двойка изображения, ако съществуват $\alpha, \beta \in [0, 1)$, $\alpha + \beta < 1$, така че за всеки $(x, y) \in A \times A$, $(u, v) \in B \times B$ е в сила неравенството*

$$\rho(F(x, y) - G(u, v)) \leq \alpha\rho(x, u) + \beta\rho(y, v) + (1 - (\alpha + \beta))D.$$

Теорема 3.4. *Нека $\rho \in \Re$ и модуларът ρ удовлетворява (UC1), има Δ_2–свойството и е равномерно непрекъсната. Нека $A, B \subseteq L_\rho$ са ρ–затворени, ρ–ограничени, изпъкнали подмножества и $F : A \times A \to B$ и $G : B \times B \to A$ е циклична ρ–свиваща двойка изображения. Тогава съществува единствена наредена двойка $(x, y) \in A \times A$, такава че (x, y) е двойка точки на най-добро приближение за F в A (т.е. $\rho(x - F(x, y)) + \rho(y - F(y, x)) = 2D$). Изпълнено е, че $x = G(F(x, y), F(y, x))$, $y = G(F(y, x), F(x, y))$, наредената двойка $(F(y, x), F(x, y))$ е двойка точки на най-добро приближение за G в B. Още повече, за всяко първоначално избрано $(x_0, y_0) \in A \times A$ итеративните редици $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ удовлетворяват $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_{2n} - x) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(y_{2n} - y) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_{2n+1} - F(x, y)) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(y_{2n+1} - F(y, x)) = 0$.*

3.4 Приложения на Теорема 3.4

Нека $p \in [1, +\infty)$, $a > 0$, $\alpha, \beta \in (0, 1)$ са, такива че $\alpha + \beta < 1$ и $(1 - \alpha - \beta)a = \gamma$. Нека разгледаме системата от уравнения

$$\left| \begin{array}{l} |(1 + \alpha)x + \beta y + \gamma|^p = (2a)^p \\ |\alpha x + (1 + \beta)y + \gamma|^p = (2a)^p \\ x \geq 0,\ y \geq 0. \end{array} \right. \tag{27}$$

Лесно се проверява използвайки някоя компютърна алгебрична система, например *Maple*, че наредената двойка (a, a) е решение на (27) ако $p \in \mathbb{N}$. Ако се опитаме да решим тази система за $p \notin \mathbb{N}$ тогава компютърната алгебрична система няма да ни даде отговор.

Нека разгледаме пространството $(\mathbb{R}, \rho_p)$ с модулара $\rho_p(\cdot) = |\cdot|^p$. За $p = 1$ получаваме, че пространството $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, което е нормирано пространство и от [7] следва, че е равномерно изпъкнало. Следователно ако разгледаме модуларното функционално пространство $(\mathbb{R}, \rho_1)$ получаваме, че модуларът ρ_1 удовлетворява (UC1), има Δ_2–свойството и е равномерно непрекъснат.

Нека означим

$$\delta_1(r,\varepsilon)=\inf\left\{1-\frac{1}{r}\left|\frac{x+y}{2}\right|^p : x,y\in\mathbb{R}_{|\cdot|^p}, |x|^p\le r, |y|^p\le r, |x-y|^p\ge \varepsilon r\right\}.$$

Забелязваме, че инфимумът се достига за $x=r^{1/p}$ и $y=r^{1/p}-(\varepsilon r)^{1/p}$ и получаваме

$$1-\frac{1}{r}\left|r^{1/p}-\frac{(\varepsilon r)^{1/p}}{2}\right|^p=1-\left(1-\frac{\varepsilon^{1/p}}{2}\right)^p>0,$$

т.е. $\delta_1(r,\varepsilon)>0$ и следователно ρ_p удовлетворява (UC1). Лесно се проверява, че ρ_p има Δ_2–свойството и е равномерно непрекъсната и следователно можем да приложим Теорема 3.4 в $(\mathbb{R},\rho_p)$.

Разгледаме функциите $F(x,y)=-\alpha x-\beta y-\gamma$ и $G(x,y)=-\alpha x-\beta y+\gamma$. От условията за α, β и γ следва, че $F:A\times A\to B$ и $G:B\times B\to A$, защото $G(x,y)\in A$ за $x,y\in B$ и $F(x,y)\in B$ за $x,y\in A$.

Използвайки изпъкналостта на функцията $|\cdot|^p$ получаваме, че (F,G) е циклична ρ–свиваща двойка изображения и от Теорема 3.4 следва, че съществува единствена наредена двойка $(x,y)\in A\times A$ така, че (x,y) е двойка точка на най-добро приближение за F в A (т.е. $\rho_p(x-F(x,y))=(2a)^p$ и $\rho_p(y-F(y,x))=(2a)^p$, което е просто (27)).

Решението може да бъде приближено използвайки редица от последователни итерации $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, започвайки от произволни начални условия x_0 и y_0.

Ако положим $\alpha=\beta=\frac{1}{4}$, $\gamma=\frac{1}{2}$, $a=1$, $b=2$ и $p=1$ получаваме Пример 2 от [7] и Пример 3.12 от [21]. Ако положим $\alpha=\frac{1}{4}$, $\beta=\frac{1}{4}$, $\gamma=1$, $a=2$, $b=4$ и $p=1$ получаваме Пример 3.5 [21]. Ако положим $\alpha=\frac{1}{3}$, $\beta=\frac{1}{2}$, $\gamma=\frac{1}{6}$, $a=1$, $b=2$ и $p=1$ получаваме Пример 2 от [7] Пример 17 от [6].

3.5 Двойка точки на най-добро приближение за циклична ρ–свиваща двойка изображения на Канан в модуларни функционални пространства

В Параграф 3.5 Двойка точки на най-добро приближение за циклична ρ–свиваща двойка изображения на Канан в модуларни функционални пространства са обобщени резултатите от Параграф 3.1. Получени са теорема за съществуване и единственост на наредена двойка неподвижни точки, както и теорема за съществуване и единственост за наредена двойка точки на най-добро приближение за циклична ρ–свиваща двойка изображения на Канан.

Определение 3.8. *Нека A е непразно подмножество на модуларното функционално пространство L_ρ, $F : A \times A \to A$ ще наричаме ρ–свиващо изображение на Канан, ако съществува α, така че $0 < \alpha < 1/2$ и е изпълнено неравенството*

$$\rho(F(x, y) - F(u, v)) \leq \alpha\, (\rho(x - F(x, y)) + \rho(u - F(u, v)))$$

за всяко $x, y, u, v \in A$.

Теорема 3.5. *Нека $\rho \in \mathfrak{R}$. Нека $A \subset L_\rho$ е непразно, ρ–затворено и ρ–ограничено и $F : A \times A \to A$ е ρ–свиващо изображения на Канан. Тогава F притежава единствена двойка неподвижни точки $(x, y) \in A$. Още повече, за всяко $(x_0, y_0) \in A$ редиците $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ са сходящи към единствената двойка неподвижни точки $(x, y) \in A$.*

Определение 3.9. *Нека A и B са непразни подмножества на модураното функционално пространство L_ρ, $F : A \times A \to B$ и $G : B \times B \to A$. Ще казваме, че наредената двойка (F, G) е циклична ρ–свиваща двойка изображения на Канан, ако съществува α, така че $0 < \alpha < 1/2$ и е изпълнено неравенството*

$$\rho(F(x, y) - G(u, v)) \leq \alpha\, (\rho(x - F(x, y)) + \rho(u - F(u, v))) + (1 - 2\alpha)D$$

за всяко $(x, y) \in A \times A$ и $(u, v) \in B \times B$.

Лема 3.11. *Нека $\rho \in \mathfrak{R}$ и модуларът ρ удовлетворява (UC1), има Δ_2–свойството и е равномерно непрекъсната. Нека $A, B \subset L_\rho$ са непразни, ρ–затворени и ρ–ограничени, изпъкнали подмножества и $F : A \times A \to B$ и $G : B \times B \to A$ е циклична ρ–свиваща двойка изображения на Канан. Тогава $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_{2n} - x_{2n+1}) = d(A, B)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(y_{2n} - y_{2n+1}) = d(A, B)$.*

Теорема 3.6. *Нека $\rho \in \mathfrak{R}$ и модуларът ρ удовлетворява (UC1), има Δ_2–свойството и е равномерно непрекъсната. Нека $A, B \subseteq L_\rho$ са ρ–затворени, ρ–ограничени, изпъкнали подмножества и $F : A \times A \to B$ и $G : B \times B \to A$ е циклична ρ–свиваща двойка изображения на Канан. Тогава съществува единствена наредена двойка $(x, y) \in A \times A$, такава че (x, y) е двойка точки на* *най-добро приближение за F в A (т.е. $\rho(x - F(x,y)) + \rho(y - F(y,x)) = 2D$). Изпълнено е $x = G(F(x,y), F(y,x))$, $y = G(F(y,x), F(x,y))$, наредената двойка $(F(y,x), F(x,y))$ е двойка точки на най-добро приближение за G в B. Още повече, за всяко начално условие $(x_0, y_0) \in A \times A$ итерационните редици $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ удовлетворяват*

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_{2n} - x) = 0, \ \lim_{n\to\infty} \rho(y_{2n} - y) = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_{2n+1} - F(x,y)) = 0, \ \lim_{n\to\infty} \rho(y_{2n+1} - F(y,x)) = 0.$$

4. Заключение

4.1 Резюме на получените резултати

Основни приноси, според автора, в настоящия дисертационен труд са:

I. Оценка на грешката за точки на най-добро приближение в равномерно изпъкнало банахово пространство за наредена двойка циклично свиващи изображениея; циклично свиващи изображениея на Канан; циклично свиващи изображения на Риш.

II. Приближено решаване на системи от линейни уравнения, системи от нелинейни уравнения, системи интегрални уравнения с използване на техниката за точки на най-добро приближение. Намерена е оценка отгоре за най-добрия ред на сходимост при използване на точки на най-добро приближение за цял клас системи линейни уравнения.

III. Съществуване и единственост на неподвижни точки и точки на най-добро приближение за циклично ρ–свиващо изображение на Канан в модуларни функционални пространства.

IV. Съществуване и единственост на двойка неподвижни точки и двойка точки на най-добро приближение в модуларни функционални пространства за наредена двойка изображения (F, G), която е циклична ρ–свиваща или циклична ρ–свиваща на Канан.

4.1.1 Списък на публикациите по дисертационния труд

1 A. Ilchev, B. Zlatanov, Error Estimates for Approximation of Coupled Best Proximity Points for Cyclic Contractive Maps, *Applied Mathematics and Computation*, **290** (2016), 412–425.

2 A. Ilchev, B. Zlatanov, Fixed and Best Proximity Points for Kannan Cyclic Contractions in Modular Function Spaces, *Journal of Fixed Point Theory Applications*, **19**(4) (2017), 2873–2893.

3 Ilchev, A., Zlatanov, B. Coupled Fixed Points and Coupled best Proximity Points in Modular Function Spaces. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, **118** (4) (2018), 957–977.

4 A. Ilchev, B. Zlatanov, Coupled fixed points and coupled best proximity points for Kannan type contractions in modular function spaces, *MATTEX 2018, Сборник научни трудове*, Том 1, стр. 75-88, (2018).

5 A. Ilchev, B. Zlatanov, Error Estimates of Best Proximity Points for Reich Maps in Uniformly Convex Banach Spaces, *Годишник на ШУ „Епископ К. Преславски“* (2018), под печат.

Връзката между приносите, задачите, мястото на описание в дисертационния труд и направените публикации, са следните:

Принос	Параграф	Статия	Доклад	Проект
I	2.1,2.3,2.4	1,5	б,в	i,ii
II	2.2	1	г	i,ii
III	2.4		б	ii
IV	3.1,3.3,3.5	2,3,4	а	ii
V.	2.1,3.3,3.5	1,3	а	i,ii

4.1.2 Апробация на получените резултати

Резултати, получени в изследването, са използвани в следните университетски проекти:

i. Проект МУ17-ФМИ-007 Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“.

ii. ФП15-ФМИ-004 Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“.

Част от предоставените резултати в дисертацията са докладвани на следните национални и международни конференции:

а A. Ilchev, B. Zlatanov, Coupled fixed points and coupled best proximity points for Kannan type contractions in modular function spaces *Научна конференция с международно участие "MATTEX 2018 25 - 27 ОКТОМВРИ 2018 г. Шумен*, (2018).

б A. Ilchev, B. Zlatanov, Error Estimates of Best Proximity Points for Reich Maps in Uniformly Convex Banach Spaces *Научна конференция с международно участие "MATTEX 2018 25 - 27 ОКТОМВРИ 2018 г. Шумен*, (2018).

в A. Ilchev. Error Estimates for Approximating Best Proximity Points for Kannan Cyclic Contractive Maps *44th International Conference Applications of Mathematics in Engineering and Economics Sozopol, June 8-13, 2018* (2018).

г A. Ilchev. On an Application of Coupled Best Proximity Points Theorems for Solving Systems of Linear Equations *44th International Conference Applications of Mathematics in Engineering and Economics Sozopol, June 8-13, 2018* (2018).

4.1.3 Декларация за оригиналност

от Атанас Василев Илчев,
редовен докторант към катедра „Математически анализ“
при Факултет по математика и информатика
на Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“

Във връзка с провеждането на процедура за придобиване на образователната и научна степен доктор в Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“и защита на представения от мен дисертационен труд, декларирам:

Резултатите и приносите на проведеното дисертационно изследване, представени в дисертационния ми труд на тема „Върху някои класове циклични оператори с двойки точки на най-добро приближение“ са оригинални и не са заимствани от изследвания и публикации, в които нямам участие.

Представената от мен информация във вид на копия на документи и публикации, лично съставени справки и др. съответства на обективната истина.

Дата: .... ДЕКЛАРАТОР........................

гр. Пловдив /Атанас Василев Илчев/

5. Благодарности

Изказвам своята дълбока благодарност и признателност към научният си ръководител доц. д-р Боян Златанов, за получените от него знания и умения, които не се ограничиха само до тематиката на проблема, а и много извън него, за проявеното търпение и разбиране през цялото време на разработването и оформянето на дисертационния труд.

Също така искам да благодаря и на всички колеги, които по един или друг начин са спомогнали за моето израстване, както като математик, така и като личност.

Изказвам благодарност и към своето семейство, което винаги ме е подкрепяло и насърчавало.

Литература

[1] S. Banach, Sur les operations dan les ensembles abstraits et leurs applications aux integrales, *Fund. Math.* 3 (1922), 133–181

[2] V. Berinde Iterative Approximation of Fixed Points, *Springer*, Berlin, 2007.

[3] J. Clarkson, Uniformly convex spaces, *Trans Amer Math Soc*, **40**, (1936) 394–414.

[4] A. Eldred, P. Veeramani, Existence and Convergence of Best Proximity Points, *J. Math. Anal. Appl.*, **323**(2) (2006), 1001–1006.

[5] G. Hardy, T. Rodgers, A generalization of a Fixed Point theorem of Reich, *Canad. Math. Bull.*, **16** (1973), 201–206.

[6] A. Gupta, S. Rajput, P. Kaurav, Coupled Best Proximity Point Theorem in Metric Spaces, *Int. J. Anal. Appl.*, **4**(2) (2014), 201–215.

[7] A. Ilchev, B. Zlatanov, Error Estimates for Approximation of Coupled Best Proximity Points for Cyclic Contractive Maps, *Applied Mathematics and Computation*, **290** (2016), 412—425.

[8] A. Kaminska: On Uniform convexity of Orlicz Spaces, *Indag. Math.*,**85**(1), 27–36 (1982).

[9] M. Khamsi, W. Kozlowski, Fixed Point Theory in Modular Function Spaces, *Birhäuser*, Heidelberg New York Dordrecht London (2015).

[10] M. Khamsi, W. Kozlowski, S. Reich, Fixed Point Theory in Modular Function Spaces, *Nonlinear Anal.*, **14**(11) (1990), 935–953.

[11] W. Kirk, P. Srinivasan, P. Veeramani, Fixed Points for Mappings Satisfying Cyclical Contractive Conditions, *Fixed Point Theory*, **4**(1) (2003), 79–89.

[12] W. Kozlowski, Notes on modular function spaces I, *Comment. Math.*, **28**(1) (1988), 87–100.

[13] W. Kozlowski, Notes on modular function spaces II, *Comment. Math.*, **28**(1) (1988), 101–116.

[14] W. Kozlowski, Modular Function Spaces, *Marcel Dekker, Inc.*, New York and Basel (1988).

[15] W. Kozlowski, Advancements in Fixed Point Theory in Modular Function Spaces, *Arabian Journal of Mathematics*, **1**(4) (2012), 477–494.

[16] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, Classical Banach Spaces I. Sequence Spaces, *Springer—Verlag*, Berlin Heidelberg New York, (1977).

[17] J. Musielak, W. Orlicz, On Modular Spaces, *Stud. Math.*, **18**(1) (1959), 49–65.

[18] H. Nakano, *Modular Semi–Ordered Spaces*, Maruzen, Tokyo (1950).

[19] M. Petric, Best Proximity Point Theorems for Weak Cyclic Kannan Contractions, *FILOMAT* **25**(1), 145–154 (2011).

[20] M. Petric, B. Zlatanov, Fixed point theorems of Kannan type for cyclical contractive condition, *Plovdiv University, Faculty of Mathematics and Informatics, REMIA, December (2010)*, Plovdiv University, Plovdiv, Bulgaria, 2010, pp. 187–194.

[21] W. Sintunavarat, P. Kumam, Coupled Best Proximity Point Theorem in Metric Spaces, *Fixed Point Theory Appl.*, **2012/1/93** (2012).

[22] B. Zlatanov, Best Proximity Points in Modular Function Spaces, *Arabian Journal of Mathematics*, **4**(3) (2015), 215–227.

[23] B. Zlatanov, Error Estimates for Approximating of Best Proximity Points for Cyclic Contractive Maps, *Carpathian J. Math.*, **32**(2) (2016), 265–270.