

ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ „ПАИСИЙ ХИЛЕНДАРСКИ”

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

КАТЕДРА „ГЕОМЕТРИЯ”

Асен Христов Христов

Геометрия в разслоени пространства

АВТОРЕФЕРАТ

**На дисертация за присъждане на образователна и научна
степен „Доктор”**

В област 4. Природни науки, математика и информатика; професионално
направление 4.5 Математика; научна специалност 01.01.06 „Геометрия и топология”

Научни ръководители

Проф. д-р Евстати Павлов

Доц. д-р Георги Костадинов

Рецензенти:

Проф. дмн Грозьо Станилов
Проф. д-р Георги Златанов

Пловдив, 2011 г.

Дисертационният труд е обсъден и насочен за защита на разширено заседание на катедра „Геометрия” при Факултета по математика и информатика на Пловдивски университет „Паисий Хилендарски”.

Дисертационният труд „Геометрия в разслоени пространства” съдържа 100 страници. Използваната литература включва 54 източника. Списъкът на авторските публикации се състои от 4 заглавия.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на 27.09.2011 от 15:00 в заседателната зала на новата сграда на Пловдивски университет „Паисий Хилендарски”.

Материалите по защитата са на разположение на интересуващите се в секретариата на ФМИ, нова сграда на ПУ, каб. 330, всеки работен ден от 8:30 до 17:00 часа.

Обща характеристика на дисертационния труд

Актуалност на темата

Предмет на настоящата дисертация е изследване геометрията на разслоените многообразия с полудопирателна структура, породена от нилпотентен афинор.

Причините, които провокират математиците да изследват, да класифицират метрични многообразия със зададено тензорно поле от тип $(1,1)$ са твърде много. Като примери за този тип структури могат да бъдат: комплексната структура, почти комплексната структура, структурата на произведение, структурата на почти произведение, тангенциалната структура, почти контактната структура.

Първите публикации, привличащи вниманието на математическата общественост върху интегрируемо, нилпотентно тензорно поле от тип $(1,1)$, със правилен алгебричен строеж, са описани подробно в „Tangent and Cotangent Bundles” от Kentaro Yano и Shigeru Ishihara [46]. Тук обаче задължително трябва да се посочи труда на Patterson E.M. и Walker A.G. – „Riemann extension” [41]. Що се отнася до общия случай – той е посочен в научната публикация на В.В. Вишневский – „О геометрической модели полукасательных структур”, [5]. Нещо повече, в тази публикация е описан геометричния модел на интегрируемо тензорно поле със степен на нилпотентност по-голяма от две.

В работите [6], [7], [8], [12], [18], [37], [38] и [44] са изследвани многообразията с полудопирателна структура от първи и по-висок ред и са намерени някои техни основни свойства. Поради

специфичната структура на нилпотентно тензорно поле, досега не сме срещали научни публикации, касаещи въвеждането на метрика върху многообразието от този вид, освен ако априори не се предполага, че многообразието е риманово.

Конформно холоморфните преобразования на метрики (или CH -преобразования) са били дефинирани от Е.В.Павлов във „Вещественная реализация конформного соответствия римановых пространствах над клиффордовой алгеброй”, [21]. В работите [23], [24], [42] се изучават такива преобразования на метрики в случаите на риманови многообразия с алгебрична структура, многообразия с комплексна структура и структура на произведение. Разгледани са и CH -преобразованията на чисти метрики в тангенциалното разслоение с допирателна структура.

Цели и задачи на дисертационния труд

Основните цели на настоящата работа са две:

1. Въвеждане на класове свързаности и метрики върху многообразието, съгласувани по определен начин с нилпотентната структура и изследване на техните свойства.
2. Изучаване на проективно-холоморфните и конформно-холоморфните преобразования върху многообразия от горния вид.

Във връзка с поставените цели задачите на представения дисертационен труд са следните:

- 1.1. Въвеждане на разширени лифтове на векторни полета, форми и метрики и изучаване на техните свойства.
- 1.2. Построяване на чиста метрика върху метрично многообразие с полудопирателна структура.
- 1.3. Преобразуване на чистата метрика в каноничен вид.
- 1.4. Намиране на еквивалентни условия за чистота на симетрична свързаност.
- 1.5. Намиране на необходимо и достатъчно условие за чистота на свързаността на Леви-Чевита.
- 1.6. Намиране на условия за съществуване на напълно геодезични и автопаралелни подмногообразия.
- 1.7. Въвеждане на чиста свързаност върху многообразие с полудопирателна структура.
- 2.1. Въвеждане и изучаване на холоморфно-равнинни криви в афинни многообразия с полудопирателна структура.
- 2.2. Намиране на всички проективно-холоморфни съответствия на свързаности, т. е. такива, които запазват холоморфно-равнинните криви.
- 2.3. Намиране на всички конформно-холоморфни преобразования на метрики в случай на B -многообразие.
- 2.4. Построяване на пример за CH -смяна на B -метрика.

Структура и обем на дисертационния труд

Дисертацията се състои от въведение, четири параграфа, авторска справка и използвана литература.

Обемът на дисертационния труд е 100 страници. Литературата включва 54 заглавия, в това число 4 авторски публикации.

В §1 се описва специфичният строеж на моделното многообразие $\mathfrak{M}(f)$, снабдено с полудопирателна структура f . Въз основа на понятието проектируемост на обекти се дефинират разширени лифтове и са доказани редица техни свойства.

В §2 са посочени два начина за метризация на $\mathfrak{M}(f)$. Посочен е и способ за преобразуване на метриката в каноничен вид.

В §3 се извеждат и коментират следствията от чистотата на симетрична свързаност. Дефинирани са и са доказани редица основни свойства на B -многообразието с полудопирателна структура. Разгледани са холоморфно-равнинните криви и холоморфните двумерни подмногообразия. Показан е вида на проективно-холоморфните преобразования. В §3 също така се посочва начин за въвеждане на чиста свързаност върху $\mathfrak{M}(f)$.

В §4 се изучават конформно-холоморфните преобразования на чистата метрика g върху $\mathfrak{M}(f, g)$.

Кратко съдържание на дисертационния труд

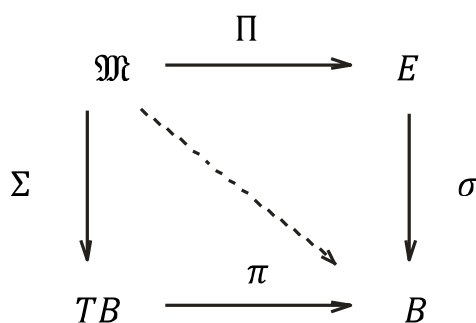
§ 1. Многообразие с полудопирателна структура

1.1. Определение и примери

Нека E е диференцируемо многообразие от клас C^∞ , а B е многообразие от същия клас ($\dim E = n + m$, $\dim B = n$) като $\sigma: E \rightarrow B$ е субмерсия, разслояваща E с типичен слой $F = \sigma^{-1}(q)$, $q \in B$. E е свързано многообразие.

Нека TB е допирателното разслоение на B , а $\pi: TB \rightarrow B$ е естествената проекция: за $q \in B$, $\pi(q; \xi_q) = q$.

Разглеждаме $\mathfrak{M} = \{(\xi_{\sigma(p)}, p): \xi_{\sigma(p)} \in TB_{\sigma(p)}, p \in E\}$. Тогава $\mathfrak{M}$ е подмногообразие на $TB \times E$ относно включването. Получаваме $\Sigma: \mathfrak{M} \rightarrow TB$ - разслоение с база TB и типичен слой F , което е индуцирано разслоение от $\sigma: E \rightarrow B$ посредством $\pi: TB \rightarrow B$ [1]. Възниква следната комутативна диаграма:



Диаграма 1.1

*
Ако p е наредената тройка

$$\overset{*}{p} = (\sigma(p), \xi_{\sigma(p)}, p),$$

ТО МНОЖЕСТВОТО

$$\mathfrak{M} = \{(\sigma(p), \xi_{\sigma(p)}, p) \mid p \in E, \xi_{\sigma(p)} \text{ е допирателен вектор към } B \text{ в } \sigma(p)\}$$

се нарича многообразие с полудопирателна (полутангенциална) структура f , където f е допирателната (тангенциална) структура върху разслоението TB .

Поради изискването за локална тривиалност на σ (съгласно даденото определение)

$$\dim(\sigma^{-1}(q)) = m \text{ за всяко } q \in B, \dim \mathfrak{M} = 2n + m.$$

Многообразието B може да разглеждаме като база на $\mathfrak{M}$.

Паралелно с определението на многообразието $\mathfrak{M}$ в [5] и [8] са дефинирани локални координати върху $\mathfrak{M}$: $(u^i; y^i; s^a)$. Оттук нататък за индексите $a, b, c, \dots, i, j, k, \dots$ приемаме, че $a, b, c, \dots = 1, 2, \dots, m$ и $i, j, k, \dots = 1, 2, \dots, n$. С u^i са означени локалните координати на точка от базата B , с y^i -координатите на точка от слоя $\pi^{-1}(q)$, $q \in B$, а с s^a - съответните координати на точка от слоя $\sigma^{-1}(q)$. За $\overset{*}{p}$ и координатите ѝ ще записваме стандартно $\overset{*}{p} = (u^i; y^i; s^a)$. Когато $\overset{*}{p}$ е едновременно в две координатни околности връзката между съответните локални координати е:

$$\bar{u}^i = \varphi^i(u^j),$$

$$(1.1) \quad \bar{y}^i = \sum_k \frac{\partial \varphi^i(u^j)}{\partial u^k} y^k,$$

$$\bar{s}^a = \theta^a(u^k; s^b).$$

Якобианът на смяната е

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \delta & \alpha & 0 \\ \gamma & 0 & \beta \end{pmatrix},$$

$$(1.2)$$

$$\alpha = \left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial u^k} \right), \delta = \left(\frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial u^k \partial u^s} y^k \right), \gamma = \left(\frac{\partial \theta^a}{\partial u^k} \right), \beta = \left(\frac{\partial \theta^a}{\partial s^b} \right).$$

Полудопирателната структура f върху $\mathfrak{M}$ е интегрируема [5], [8]. Това означава, че съществува система от координатни околности върху $\mathfrak{M}$ така, че в коя да е точка от тях компонентите на f са постоянни. В разглеждания от нас случай матрицата, съставена от компонентите на f има вида

$$(1.3) \quad (f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

По отношение на коя да е допустима смяна (1.1) на променливите за якобиана J е в сила

$$Jf = fJ,$$

означаващо инвариантност на f относно групата от преобразования, дефинирани чрез (1.1).

1.2. Проектируеми геометрични обекти

Тук са дадени определения на проектируеми функции, векторни полета и форми, както и определение на частично проектируема форма.

Определение 1.4. Форма ω върху E ще наричаме частично проектируема, ако стойността на $\omega^* = \omega \circ \sigma_*$ върху произволно проектируемо векторно поле е проектируема функция.

1.3. Лифтове и разширени лифтове. Свойства

Предполагаме, че ϕ е проектируема функция върху E . Като отчитаме, че за $p \in E$, $\phi(p) = \phi(\sigma(p))$ за ϕ дефинираме **разширен вертикален лифт (extented lift)** ϕ^{EV} - функция, определена върху множеството $\mathfrak{M}$.

$$\phi^{EV}(\overset{*}{p}) = (\phi^V \circ \Sigma)(\overset{*}{p}) = (\phi \circ \pi \circ \Sigma)(\overset{*}{p})$$

$$\text{за } \overset{*}{p} = (\sigma(p), \xi_{\sigma(p)}, p) .$$

По подобен начин въвеждаме и понятието разширен пълен лифт ϕ^{EC} на проектируема функция

$$\phi^{EC} = \phi^C \circ \Sigma,$$

където ϕ^C е пълният лифт на ϕ в TB .

Предполагаме, че $\{e_i, e_a\}$ е адаптиран репер в точка от E . По отношение на него нека

$$X = X_1 + X_2, \quad X_1 = X^i(u^k)e_i, \quad X_2 = X^a(u^k, s^b)e_a.$$

Определение 1.5. Ако X_1^C е пълният лифт на X_1 от базата B върху TB тогава векторното поле

$$X^{EC} = X_1^C + X_2$$

ще наричаме разширен пълен лифт на X върху $\mathfrak{M}$. Ако X_1^V е вертикалният лифт на X_1 върху TB тогава $X^{EV} = X_1^V$ ще наричаме разширен вертикален лифт на X .

Предполагаме, че

$\omega = \omega^* + \omega_2$, $\omega^* = \omega_i(u^k)du^i$, $\omega_2 = \omega_a(u^i, s^b)ds^a$ е частично-проектируема форма върху E .

Определение 1.6. Ако ω^{*C} е пълният лифт на ω^* от базата B върху TB тогава формата

$$\omega^{EC} = \omega^{*C} + \omega_2$$

ще наричаме разширен пълен лифт на ω върху $\mathfrak{M}$. Ако ω^{*V} е вертикален лифт върху TB тогава

$$\omega^{EV} = \omega^{*V}$$

ще наричаме разширен вертикален лифт на ω върху $\mathfrak{M}$.

където u^k са локалните координати на точките от B .

Теорема 1.1. Ако $X = X_1 + X_2$ и $\omega = \omega^* + \omega_2$ са проектируемо векторно поле и частично-проектируема форма, ϕ —проектируема функция, а f е полудопирателната структура, тогава:

$$fX^{EC} = X^{EV}, \omega^{EC} \circ f = \omega^{EV},$$

1. $X^{EC}\phi^{EC} = (X\phi)^{EC},$
2. $X^{EV}\phi^{EC} = (X\phi)^{EV},$
3. $X^{EV}\phi^{EV} = 0,$
4. $\omega^{EC}(X^{EC}) = (\omega^*(X_1))^{EC} + \omega^2(X_2),$
5. $\omega^{EV}(X^{EC}) = (\omega^*(X_1))^{EV},$
6. $\omega^{EV}(X^{EV}) = 0.$

§ 2. Метрични многообразия с полудопирателна структура

2.1. Чиста метрика. Разширени лифтове на метрика.

Оттук нататък с $\mathfrak{M}(g, f)$ ще бележим многообразие $\mathfrak{M}$ с метрика g и полудопирателна структура f .

В общия случай за $\mathfrak{M}(g, f)$ не са посочени чисти или хибридни метрики спрямо полудопирателната структура f . Тази констатация може да се провери в обзора [8] и когато се говори за метрично $\mathfrak{M}(g, f)$ се има предвид, че f е допирателна структура.

Условието за чистота на фундаменталния тензор g на $\mathfrak{M}(g, f)$ по отношение на структурата f има съществена роля за изучаване геометрията на римановото многообразие $\mathfrak{M}(g, f)$.

Теорема 2.1. Ако върху римановото многообразие $\mathfrak{M}(g, f)$ дефинираме тензорното поле $\tilde{g}$,

$$\tilde{g}: \tilde{g}(x, y) = g(fx, y),$$

то условието за чистота на g спрямо f е еквивалентно на симетрия на $\tilde{g}$.

Тензорът $\tilde{g}$ от Теорема 2.1. се нарича присъединен тензор на g .

Определение 2.2. Ще казваме, че метриката $b = (b_{AB})$ върху многообразието $E \subset \mathfrak{M}(g, f)$ е частично проектируема, ако метриката b^* , дефинирана чрез $b^*(X, Y) = b(\sigma_* X, \sigma_* Y)$ е проектируема.

Теорема 2.2. Една метрика е частично проектируема, ако тя е инвариантна относно допустима смяна на локалните координати в многообразието E .

По-нататък следва разширение на базовата метрика върху многообразието $\mathfrak{M}(f)$. По отношение на полудопирателната структура f ще искаме новата метрика да е чиста. Това налага ограничение на групата от преобразования (1.1). Оттук нататък ще предполагаме, че

$$\begin{aligned} \bar{u}^i &= \varphi^i(u^j) \\ \bar{y}^i &= \frac{\partial \varphi^i(u^j)}{\partial u^k} \cdot y^k \\ \bar{s}^a &= \theta^a(s^b). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Очевидно в J от (1.2) имаме $\gamma = 0$.

Допускаме, че $\eta: (\eta_{AB}), A, B = 1, 2, \dots, m + n$ е частично проектируема метрика върху E . Чрез нея определяме $g: (g_{AB})$:

$$g(X, Y) = \eta(\sigma_* X, \sigma_* Y) + \eta((I - \sigma_*)X, (I - \sigma_*)Y).$$

Тук I е тъждественото линейно преобразование.

Определение 2.3. Ако g^{*C} е пълният лифт на g^* върху многообразието TB , то

$$g^{EC}(V, W) = g^{*C}(V, W) + \eta((I - \sigma_*)V, (I - \sigma_*)W)$$

ще наричаме разширен пълен лифт на g . Векторните полета V и W са произволни върху $\mathfrak{M}(f)$.

Матрицата от координатите на g^{EC} има следния вид

$$(2.4) \quad g^{EC}: \left(\begin{array}{cc|c} \partial g_{ik} & g_{ik} & 0 \\ g_{ki} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & g_{ab} \end{array} \right),$$

$$\partial g_{ik} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} \cdot y^j, \quad g_{ab} = \eta_{ab}.$$

Като имаме предвид понятието разширен вертикален лифт на проектируема функция, даваме следното

Определение 2.4. Ако $g = (g_{AB})$, $A, B = 1, 2, \dots, n + m$ е частично проектируема метрика върху многообразието E , g_{ik} са проектируемите компоненти на g , тогава метриката g^{EV} ,

$$g^{EV}: \left(\begin{array}{cc|c} g_{ik} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

ще наричаме разширен вертикален лифт на g върху $\mathfrak{M}(f)$. Нулите означават нулеви метрични блокове от тип (n, n) , (n, m) , (m, n) и (m, m) .

Оттук следва, че ако $\{e_i; e_{n+i}; e_a\}$ е произволен адаптиран базис в коя да е допирателна равнина на $\mathfrak{M}(f)$, за $A, B = 1, 2, \dots, 2n + m$,

$$g_{AB}^{EV} = g^{EV}(e_A, e_B) = g^{EC}(fe_A, e_B).$$

От Теорема 2.1 следва, че g^{EC} е чиста метрика, факт, който се потвърждава и от дефиницията на g^{EC} .

Теорема 2.3. За частично проектируема метрика g и произволни проектируеми векторни полета $X = X_1 + X_2$, $Y = Y_1 + Y_2$, зададени върху многообразието E е в сила

$$g^{EC}(X^{EC}, Y^{EC}) = (g^*(X_1, Y_1))^C + g_2(X_2, Y_2),$$

където

$$g_2(X_2, Y_2) = g(X^a e_a, Y^b e_b), \quad X_2 = X^a e_a, \quad Y_2 = Y^b e_b.$$

2.2. Алгоритъм за построяване на чиста метрика.

Теорема 2.4. Ако $\mathfrak{M}(f)$ е риманово многообразие с метрика h и полудопирателна структура f , то възможно е да се въведе друга метрика g върху многообразието, която да е чиста относно f .

Ако положим

$$\gamma = I - f^T f - f f^T$$

за чистата метрика g върху $\mathfrak{M}$ получаваме:

$$g(x, y) = h(x, y) + h(f^T x, f y) + h(f x, f^T y) - h(f f^T x, f f^T y) - [h(\gamma x, y) + h(x, \gamma y)] + 2h(\gamma x, \gamma y)$$

Матрицата, която съответства на g е

$$(2.5) \quad g: \left(\begin{array}{cc|c} h_{ik} & h_{i,n+k} + h_{n+i,k} & 0 \\ h_{n+i,k} + h_{i,n+k} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & h_{2n+a,2n+b} \end{array} \right).$$

2.3. Преобразуване на чиста метрика в каноничен вид.

Определение 2.5. Ще казваме, че чистата метрика върху $\mathfrak{M}(g, f)$ е в каноничен вид, ако матрицата, съставена от компонентите ѝ има вида

$$\|g\| = \left(\begin{array}{ccc|ccc} g_{11} & & & g_{1,n+1} & & \\ & g_{22} & & & g_{2,n+2} & \\ & & g_{nn} & & & g_{n,2n} \\ \hline g_{1,n+1} & & & & & \\ & g_{2,n+2} & & & & \\ & & g_{n,2n} & & & \\ \hline & & & & & B \end{array} \right),$$

като незапълнените места означават нули, а (m, m) -мерният блок B е в диагонален вид: $B = \|g_{2n+a,2n+a}\|$.

Теорема 2.5. В точка от многообразието $\mathfrak{M}(g, f)$ може да се посочи адаптиран базис, по отношение на който матрицата от

Следствие 2. Ако положим

$$g_{ik}^* = g_{i,n+k} + \varepsilon g_{ik}, \quad g_{n+a,n+b}^* = \varepsilon g_{2n+a,2n+b}, \quad \varepsilon^2 = 0$$

тогава фундаменталния тензор $\overset{*}{g}$ на многообразието над алгебрата $\mathbb{R}(\mathcal{E})$ може да се приведе в диагонален вид.

§ 3. Свързаности, запазващи допирателната и полудопирателната структура. Проективни холоморфни съответствия

3.1. Афинно многообразие с полудопирателна структура

Предполагаме, че върху многообразието $\mathfrak{M}(f)$ с полудопирателна структура е зададена свързаност ∇ . Този факт накратко ще отбелязваме със символа $\mathfrak{M}(\nabla, f)$. Тук f е структурата, на която съответства матрицата (1.3).

Теорема 3.1. Следните условия са еквивалентни:

i. Ако свързаността $\nabla = (\gamma_{\beta\sigma}^{\alpha})$ без торзия има чисти коефициенти относно полудопирателната структура f и f е интегрируема, тогава тази структура е ковариантно постоянна.

ii. Ако полудопирателната структура f е интегрируема и ковариантно постоянна относно симетричната свързаност $\nabla = (\gamma_{\beta\sigma}^{\alpha})$, то коефициентите $\gamma_{\beta\sigma}^{\alpha}$ са чисти относно f .

За коефициентите на чистата свързаност получаваме:

$$(3.4) \quad \begin{cases} \gamma_{ik}^s = \gamma_{i,n+k}^{n+s} = \gamma_{n+i,k}^{n+s}, \\ \gamma_{ik}^{n+s}, \gamma_{\alpha\beta}^{2n+a} \text{ и } \gamma_{\beta,2n+a}^{\sigma} - \text{ произволни,} \end{cases}$$

за всички стойности на α и β .

Теорема 3.2. Ако f е полудопирателна структура върху $\mathfrak{M}(\nabla, f)$ и е ковариантно постоянна по отношение на свързаността ∇ с тензор на кривината $R = (R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\sigma})$ тогава $R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\sigma}$ са чисти спрямо двойката индекси (σ, γ) .

3.2. B – многообразие с полудопирателна структура.

Теорема 3.3. Ако $\mathfrak{M}(g, f)$ е риманово многообразие с чист фундаментален тензор g , тогава тензора на кривината от тип $(4,0)$ с компоненти

$$R_{\alpha\beta\sigma\gamma} = R_{\alpha\beta\sigma}{}^{\lambda} g_{\lambda\gamma}$$

е чист по (α, β) и по (σ, γ) .

Определение 3.1. Многообразието $\mathfrak{M}(g, f)$ ще наричаме B -многообразие ако фундаменталният тензор и производните на неговите компоненти са чисти относно полудопирателната структура f .

Видът на фундаменталния тензор за B -многообразието с полудопирателна структура f се определя от следната

Теорема 3.4. В адаптиран базис на $\mathfrak{M}(g, f)$ B -пространството с полудопирателна структура f и група от преобразувания, задаваща се чрез (1.1) фундаменталният тензор $g = (g_{AB})$, $A, B = 1, \dots, 2n + m$ има вида

$$g = \begin{pmatrix} \partial g_{ik} & g_{ik} & 0 \\ g_{ik} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{ab} \end{pmatrix},$$

като $g_{ik} = g_{ik}(u^1, \dots, u^n)$; $g_{ik} = g_{ki}$; $g_{ab} = g_{ab}(u^1, \dots, u^n; s^1, \dots, s^m)$.

Относно подгрупата от преобразувания, за които $\bar{s}^a = \theta^a(s^b)$ видът на g е следния:

$$g = \begin{pmatrix} \partial g_{ik} & g_{ik} & b_{ia} \\ g_{ik} & 0 & 0 \\ b_{ai} & 0 & g_{ab} \end{pmatrix}$$

като $b_{ia} = b_{ia}(u^1, \dots, u^n; s^1, \dots, s^m)$; $b_{ia} = b_{ai}$; $g_{ab} = g_{ab}(s^1, \dots, s^m)$.

Теорема 3.5. Нека $\mathfrak{M}(f, g)$ е риманово многообразие с чист фундаментален тензор $g = (g_{\alpha\sigma})$ относно интегрируемата полудопирателна структура f . Тогава:

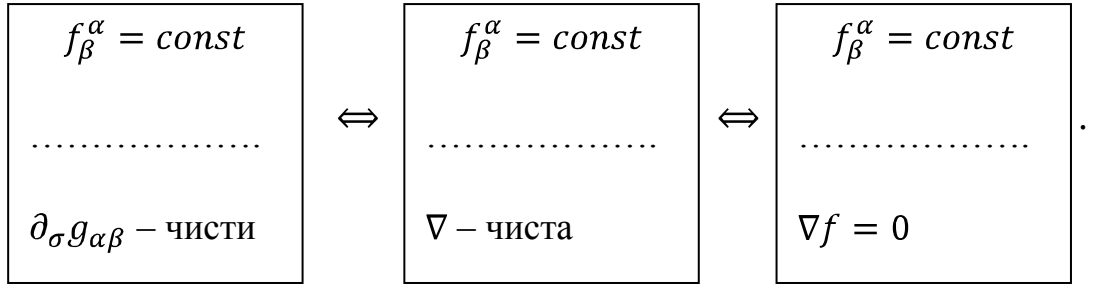
а) Тензорното поле $\hat{g} = (g^{\alpha\lambda})$, за което $g^{\alpha\lambda} g_{\beta\lambda} = \delta_{\beta}^{\alpha}$, е чисто относно f . Вярно е и обратното;

б) Частните производни $\partial_{\sigma} g_{\alpha\beta}$ са чисти спрямо f тогава и само тогава, когато $\partial_{\sigma} g^{\alpha\beta}$ са чисти.

$$z^{\sigma} = (u^i; y^i, s^a), \quad \frac{\partial}{\partial z^{\sigma}} g_{\alpha\beta} = \partial_{\sigma} g_{\alpha\beta}, \quad \frac{\partial}{\partial z^{\sigma}} g^{\alpha\beta} = \partial_{\sigma} g^{\alpha\beta}.$$

в) Коефициентите $\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}$ на свързаността на Леви-Чевита, породена от g са чисти, тогава и само тогава, когато $\partial_{\sigma} g_{\alpha\beta}$ са чисти.

Следствие 1. За B -многообразие $\mathfrak{M}(f, g)$ с полудопирателна структура f и чиста риманова свързаност ∇ без торзия, породена от метричния тензор g , следните условия са еквивалентни



Следствие 2. Римановият тензор на кривина $R = (R_{\alpha\beta\sigma\gamma})$ на B -многообразие $\mathfrak{M}(f, g)$ е чист по всички индекси (или R е чист!).

Тензорът на Ричи, съответен на R също е чист.

Теорема 3.6. Ако $\mathfrak{M}(f, g)$ е B -многообразие, $\tilde{g} = (\tilde{g}_{\alpha\beta})$ и $\det(g_{\alpha\beta} + \tilde{g}_{\alpha\beta}) \neq 0$, тогава метриките g и $g + \tilde{g}$ пораждат една и съща свързаност без торзия.

Отбелязваме, че смяната на метриката върху $\mathfrak{M}(g, f)$

$$g \rightarrow g + \tilde{g}$$

е най-елементарната CH -смяна. При условие, че $f^2 = I$ (I е тъждественото преобразование) CH -смяната е изучена детайлно в [22] и [23]. На въпроса, трябва ли да се изследва конформната смяна на метриката на B -многообразие с полудопирателна структура или CH -смяна на метриката, получаваме отговор чрез

Теорема 3.7. Ако $h(z^1, z^2, \dots, z^{2n+m})$ е диференцируема функция, $\mathfrak{M}(g, f)$ е B -многообразие, то $\mathfrak{M}(hg, f)$ е B -многообразие

тогава и само тогава, когато $h(z^1, z^2, \dots, z^{2n+m})$ е постоянна върху $\mathfrak{M}(g, f)$.

3.3. Геодезични, РН-криви и напълно геодезични подмногообразия.

За дефиницията на разширен лифт на метрика в §2 разгледахме групата от преобразования на координатите (u^i, s^a) , посочена в (2.3). Поради локалната тривиалност на разслоенията (E, σ, B) и (TB, π, B) в $\mathfrak{M}(f)$ локално можем да разглеждаме $\mathfrak{M}(f)$ като декартовото произведение $U_Z \times U_S$ на координатните околности U_Z и U_S съдържащи точките съответно с координати $z^\alpha = (u^i, y^i)$ и s^a . В тази част на този параграф за удобство ще ползваме означенията

$$z^A = (u^i, y^i, s^a); \quad A, B, \dots = 1, 2, \dots, 2n + m;$$

$$a, \beta, \dots = 1, 2, \dots, 2n; \quad a, b, \dots = 1, 2, \dots, m.$$

В този случай коефициентите

$$(3.7) \quad \Gamma_{\beta\gamma}^a, \quad \Gamma_{\beta c}^a, \quad \Gamma_{bc}^a, \quad \Gamma_{\beta c}^a,$$

се изменят по тензорен закон.

Теорема 3.8. Произволно векторно поле допирателно към подмногообразието $s^a = \text{const}$ (нека го означим с M_p) се пренася паралелно по M_p относно произволна крива и е отново допирателно към M_p , тогава и само тогава, когато $\Gamma_{\alpha\beta}^a = 0$.

От доказаната теорема следва, че M_p е напълно геодезично подмногообразие на $\mathfrak{M}(f)$.

Теорема 3.9. Произволно векторно поле, допирателно към M_p се пренася паралелно по $M_q = (z^\alpha = \text{const})$ остава допирателно към M_p , тогава и само тогава, когато $\Gamma_{b\beta}^a = 0$.

Теорема 3.10. Произволно векторно поле, допирателно към M_p , пренасящо се във всяко направление остава допирателно към M_p , тогава и само тогава, когато $\Gamma_{\alpha\beta}^a = 0$ и $\Gamma_{b\beta}^a = 0$.

В този случай подмногообразието M_p е автопаралелно в $\mathfrak{M}(f)$.

Определение 3.3. Ако $C: [a, b] \rightarrow \mathfrak{M}(f)$ е гладка крива със скорост $\dot{C}$ казваме, че тя е холоморфно-равнинна крива (или РН-крива) по отношение на зададена симетрична свързаност ∇ и по отношение на полудопирателната структура, ако допирателният ѝ вектор $\dot{C}$, пренасящ се по C във всяка нейна точка остава в холоморфната равнина $\{\dot{C}, f\dot{C}\}$, т.е.

$$\delta\dot{C} = a(t).\dot{C} + b(t).f\dot{C},$$

където $a(t)$ и $b(t)$ са едноформи.

От горното равенство се вижда, че $\delta(f\dot{C}) = a(t).f\dot{C}$, което показва, че цялата холоморфна равнина $\{\dot{C}, f\dot{C}\}$ се пренася успоредно по РН-кривата.

Теорема 3.11. Ако $C(t)$, $t \in [a, b]$ е неособена геодезична за $\mathfrak{M}(f, \nabla)$, $f\dot{C}(t) \neq 0$ и свързаността ∇ е чиста, тогава всяко векторно поле от вида $V = \ell(t) \cdot \dot{C} + h(t) \cdot f\dot{C}$ се пренася паралелно по $C(t)$.

Теорема 3.12. Ако $C(t)$ е РН-крива върху $\mathfrak{M}(f, \nabla)$ като $f\dot{C} = 0$, то тази крива е геодезична за $\mathfrak{M}(f, \nabla)$.

3.4. Холоморфни двумерни подмногообразия

Определение 3.4. За двойката функции $p(u, y)$ и $q(u, y)$ ще казваме, че определят холоморфна двойка, ако

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \text{ и } \frac{\partial p}{\partial u} = \frac{\partial q}{\partial y}.$$

Според определението, с точност до адитивна функция на променливото u , следва

$$p = p(u) \text{ и } q = y \cdot \dot{p}(u) + r(u).$$

Въз основа на даденото определение 3.4. двумерното подмногообразие S^H от $\mathfrak{M}(f)$ с уравнения

$$z^i = z^i(u), \quad z^{n+i} = y \frac{dz^i}{du}, \quad z^{2n+a} = \text{const.}$$

се нарича холоморфно, тъй като всяка двойка координати (z^i, z^{n+i}) е холоморфна двойка.

Теорема 3.13. Ако $\bar{u} = h(u)$, $\bar{y} = t(u, y)$ са холоморфна двойка по отношение на (u, y) и $S^H = \{z^A(\bar{u}, \bar{y}), A = 1, 2, \dots, n + m.\}$ е холоморфна двумерна повърхнина в $\mathfrak{M}(f)$, при смяната на

координатите $\bar{u} = h(u)$ и $\bar{y} = t(u, y)$ в $z^A(\bar{u}, \bar{y})$, холоморфността на S^H се запазва.

Определение 3.5. Векторното поле $V = (V^i, V^{n+i}, V^{2n+a})$ ще наричаме холоморфно, ако за всички i двойките $(V^i(u^k, y^k), V^{n+i}(u^k, y^k))$ са холоморфни спрямо $(u^1, y^1), (u^2, y^2), \dots, (u^n, y^n)$.

Въз основа на това определение следва, че векторните полета X и fX върху S^H са холоморфни.

Теорема 3.14. За всяка холоморфна двойка функции $a = a(u)$, $b = \dot{a}(u)$. у векторните полета

$$Y = aX + b.fX \text{ и } fY = a.fX$$

са холоморфни.

Теорема 3.15. Ако $a = a(u)$ и $b = y\dot{a}(u)$ са холоморфна двойка функции върху S^H , тогава интегралните криви на $aX + b.fX$ и $a.fX$ може да бъдат избрани за координатни върху S^H .

Теорема 3.16. Координатите V^i, V^{n+i} на векторното поле $V = (V^i, V^{n+i}, V^{2n+a})$ са холоморфни двойки по отношение на променливите $(u^1, y^1), (u^2, y^2), \dots, (u^n, y^n)$, тогава и само тогава, когато величините $\frac{\partial}{\partial z^A} V^B$ са чисти относно f . Тук $(Z^A) = (u^i, y^i, s^{2n+a})$.

3.5. Проективно холоморфни съответствия

Нека $\mathfrak{M}(\nabla, f)$ е афинно многообразие с полудопирателна структура и $q = (q_i), i = 1, \dots, 2n + m$ е холоморфна 1-форма върху $\mathfrak{M}$. Тогава съществува семейство свързаности, чисти относно f , като тензорът на афинната деформация T , чрез който се получават тези свързаности е

$$T_{ik}^l = \delta_i^l \tilde{q}_k + f_i^l q_k + \delta_k^l \tilde{q}_i + f_k^l q_i.$$

В горното равенство $\tilde{q}_i := q_s f_i^s$.

Теорема 3.17. Свързаността $\bar{\nabla}$ с коефициенти $\bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$ притежава следните свойства:

- (1) тя е симетрична и с чисти относно f коефициенти.
- (2) $\bar{\nabla}f = 0$
- (3) $\bar{\nabla}$ и ∇ имат едни и същи RH -криви.

Преобразованието на свързаности $\nabla \rightarrow \bar{\nabla}$ с тензор на афинната деформация T , при което RH -кривите относно ∇ и $\bar{\nabla}$ съвпадат се нарича проективно – холоморфно преобразование.

3.6. Построяване на чиста свързаност върху $\mathfrak{M}(f)$

Тук се построява чиста свързаност върху многообразието $\mathfrak{M}(f)$ с чиста свързаност. Тя е въведена като разширен лифт на проектируема свързаност върху многообразието E .

Следва таблица за връзката между коефициентите на свързаност за различните свързаности.

$\mathfrak{M}$ Чиста симетрична свързаност $\nabla = (\gamma_{BC}^A)$ върху $\mathfrak{M}(f)$	
$\mathfrak{M} \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \left(\frac{\partial}{\partial u^k} \right) = L_{ik}^h \cdot \frac{\partial}{\partial u^h}$	$\gamma_{ik}^h = \Gamma_{ik}^h = L_{ik}^h$
$\mathfrak{M} \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \left(\frac{\partial}{\partial s^a} \right) = L_{i,n+a}^h \cdot \frac{\partial}{\partial u^h} + L_{i,n+a}^{n+b} \cdot \frac{\partial}{\partial s^b}$	$\gamma_{i,2n+a}^h = L_{i,n+a}^h$ $\gamma_{i,2n+a}^{n+h} = 0$ $\gamma_{i,2n+a}^{2n+b} = L_{i,n+a}^{b+n}$
$\mathfrak{M} \nabla_{\frac{\partial}{\partial s^a}} \left(\frac{\partial}{\partial s^c} \right) = L_{n+a,n+c}^h \cdot \frac{\partial}{\partial u^h} + L_{n+a,n+c}^{n+b} \cdot \frac{\partial}{\partial s^b}$	$\gamma_{2n+a,2n+c}^h = L_{n+a,n+c}^h$ $\gamma_{2n+a,2n+c}^{n+h} = 0$ $\gamma_{2n+a,2n+c}^{2n+b} = L_{n+a,n+c}^{b+n}$
$\mathfrak{M} \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \left(\frac{\partial}{\partial y^k} \right) = \overset{c}{\nabla}_{\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)^c} \left(\frac{\partial}{\partial u^k} \right)^v = \Gamma_{i,n+k}^{c^{n+h}} \frac{\partial}{\partial y^h} = \Gamma_{ik}^h \frac{\partial}{\partial y^h}$	$\gamma_{i,n+k}^h = 0$ $\gamma_{i,n+k}^{n+h} = \Gamma_{ik}^h = L_{ik}^h$ $\gamma_{i,n+k}^{2n+b} = 0$
$\mathfrak{M} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}} \left(\frac{\partial}{\partial y^k} \right) = \overset{c}{\nabla}_{\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)^c} \left(\frac{\partial}{\partial y^k} \right) = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right)^v = \frac{\partial}{\partial y^i}$	$\gamma_{n+i,n+k}^{n+h} = 0$ $\gamma_{n+i,n+k}^{2n+b} = 0$
$\mathfrak{M} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}} \left(\frac{\partial}{\partial s^a} \right) = 0$	$\gamma_{n+i,2n+a}^h = 0$ $\gamma_{n+i,2n+a}^{n+h} = 0$ $\gamma_{n+i,2n+a}^{2n+b} = 0$

4. Конформно-холоморфни преобразования на чисти метрики

4.1. Определения и свойства

Ако $h(z^1, z^2, \dots, z^{2n+m})$ ($h \neq \text{const}$) е произволна функция върху B -многообразието $\mathfrak{M}(f, g)$, смянатата на метриката $g \rightarrow hg$ не води до чиста, собствена свързаност, т.е. $\mathfrak{M}(f, hg)$ не е B -многообразие. Въпреки това чрез g можем да въведем метрика G върху $\mathfrak{M}(f)$, така че $\mathfrak{M}(f, G)$ да бъде B -многообразие. Смяната $g \rightarrow G$ е свързана с понятието стационарни ъгли между холоморфните равнини.

Определение 4.1. Смяната на метриката $g \rightarrow \alpha \cdot g + \beta \tilde{g}$ в $\mathfrak{M}(f, g)$, чрез произволни функции α и β , такива че $\alpha g + \beta \tilde{g}$ да бъде метрика върху $\mathfrak{M}(f)$, ще наричаме конформно-холоморфна смяна (CH -смяна) на g .

Теорема 4.1. Ако метриките $G = (G_{AB})$ и $g = (g_{AB})$ върху $\mathfrak{M}(f)$ са чисти относно f , то стационарните ъгли между пълните холоморфни равнини са равни, по отношение на G и g , тогава и само тогава, когато $G = \alpha \cdot g + \beta \tilde{a}$ за произволни $\alpha \neq 0$ и тензор $\tilde{a}$ от тип $(2,0)$ такъв, че $\tilde{a}(fX, Y) = \tilde{a}(X, fY) = 0$ и $\det \|G_{AB}\| \neq 0$.

Теорема 4.2. Нека $g = (g_{AB})$ е чиста метрика върху $\mathfrak{M}(g, f)$ и (u^i, y^i, s^a) са локални координати върху $\mathfrak{M}(g, f)$.

1. Ако $\mathfrak{M}(g, f)$ е B -многообразие и (α, β) е холоморфна двойка относно всички елементи на редицата $(u^1, y^1), (u^2, y^2), \dots, (u^n, y^n)$, тогава $\mathfrak{M}(\alpha g + \beta \tilde{g}, f)$ също е B -многообразие.

2. Ако $\mathfrak{M}(g, f)$ и $\mathfrak{M}(\alpha g + \beta \tilde{g}, f)$ са B -многообразия следва (α, β) е холоморфна двойка относно всички (u^i, y^i) .

Конформно-холоморфната смяна на метрики в случай на B -многообразие може да се разглежда като реална интерпретация на конформно преобразование на съответния метричен тензор на многообразието над алгебрата на дуалните числа. В общият случай това не е така, т.е. съществуват CH -преобразования на метрики, които не са реални интерпретации на конформни преобразования в съответните метрични многообразия над тази алгебра.

4.2. CH -инвариантност на тензора на кривината при специална CH -смяна.

Тук е описан подробно пример за специална CH -смяна на метриката върху тангенциалното разслоение на риманово многообразие.

Теорема 4.3. Ако (M, g) е риманово многообразие, (TM, g^c) е неговото тангенциално разслоение, при смяната $g^c \rightarrow g^c + \beta g^v$ с произволна функция $\beta(u^i)$ от (M, g) кривинния тензор $R_{\sigma\alpha\beta}^c{}^\gamma$ е инвариантен (CH -инвариантен) при тази смяна.

Следствие. Условието $\tilde{R}_{\sigma\alpha\beta}^c{}^\gamma = 0$ е необходимо и достатъчно условие $(TM, g^c + \beta g^V)$ да е CH -еквивалентно на евклидово многообразие.

Насоки на развитие

Могат да бъдат потърсени съдържателни геометрични примери за метрични многообразия с полудопирателна структура и да се изучат техните свойства.

Друга възможност за развитие е да продължат изследванията върху конформно-холоморфните преобразования на метрики. В тази област има още много да се прави особено при избора на функциите, чрез които се извършва CH -преобразованието.

Да се потърсят обобщения на резултатите за полудопирателни структури от по-висок ред.

Да се получат различни условия за частична или пълна интегрируемост на полудопирателни структури.

Да се изследват хомогенни пространства, допускащи полудопирателни структури.

Авторска справка

за приносите в дисертационния труд

Поставените във въведението цели са постигнати. Ще акцентираме върху основните резултати, получени в дисертацията:

1. Въведени са класове свързаности и метрики върху многообразието с полудопирателна структура, съгласувани по определен начин с тази структура и са изследване техните свойства.

- 1.1. Въведени са разширени лифтове (вертикални и пълни) на проектируеми векторни полета, частично проектируеми форми и метрики и са изучени техни основни свойства (§ 1-1.3 и § 2-2.1) .
- 1.2. Посочен е алгоритъм, чрез който на база на произволна метрика върху метрично многообразие с полудопирателна структура се построява чиста метрика (§ 2-2.2. Т. 2.4.).
- 1.3. Показан е начин за привеждане на чиста метрика в каноничен вид (§ 2-2.3. Т. 2.5.).
- 1.4. Доказано е, че условието за чистота на симетрична свързаност е еквивалентно на ковариантно постоянство на полудопирателната структура (§ 3-3.1. Т. 3.1.).
- 1.5. Намерено е необходимо и достатъчно условие за чистота на свързаността на Леви-Чевита, породена от B -метрика (§ 3-3.2. Т. 3.5.).

- 1.6. Намирани са условия за съществуване на напълно геодезични и автопаралелни подмногообразия на афинно многообразие с полудопирателна структура (§ 3-3.3. Т. 3.8., Т. 3.10.).
- 1.7. Посочен е начин за въвеждане на чиста свързаност върху многообразие с полудопирателна структура (§ 3-3.6).

2. Изучени са някои проективно-холоморфни и конформно-холоморфните преобразования върху многообразия с полудопирателна структура.

- 2.1. Въвеждат се холоморфно-равнинни криви, двумерни холоморфни подмногообразия и са изучени техни основни свойства (§ 3-3.4).
- 2.2. Намерени са всички проективно-холоморфни съответствия на свързаности, т. е. такива, които запазват холоморфно-равнинните криви (§ 3-3.5).
- 2.3. Намерени са всички конформно-холоморфни преобразования на метрики в случай на B -многообразие (§ 4-4.1. Т. 4.2.).
- 2.4. Построен е пример за CH -смяна на B -метрика. Доказана е CH -инвариантността на тензора на кривината при тази смяна на метрики (§ 4-4.2).

Във връзка с провеждането на процедура за придобиване на образователната и научна степен ‘доктор’ в Пловдивски университет „Паисий Хилендарски” и защитата на представения от мен дисертационен труд, декларирам:

Резултатите и приносите на проведеното от мен дисертационно изследване, представено в дисертационния труд на тема „Геометрия в разслоени пространства” са оригинални и не са заимствани от изследвания и публикации, в които нямам участие.

Благодарности

Изязвам моята голяма благодарност на проф. д-р Евстати Павлов за ценните съвети и препоръки, получавани през целия период на моите изследвания, както и на доц. д-р Георги Костадинов за неограничената му помощ при окончателното завършване и оформяне на този труд. Благодаря също и на катедрите „Геометрия” и „Комплексен анализ и ДУ” за подкрепата.

Публикации по дисертационния труд

1. Hristov A.H., Metrics on a manifold with a semi-tangential structure, Plovdiv Univ. Sci., Works-Math, vol. 35, №3, 2007, 57-64.
2. Hristov A., A Connection on Manifolds with a Nilpotent Structure, J. of Tech. Un. at Plovdiv, Fund. Sciences and Applications, Vol. 11, 2005-2006, pp 7-20.
3. Hristov A., Semi-tangent structure and pure connections, J. of Tech. Un. at Plovdiv, Fund. Sciences and Applications, Vol.12, 2007, pp 21-26.
4. Hristov A., CH-transformations on the tangent bundle of a Riemannian manifolds, Int. electr. J. of Geometry, (2011) (to appear).

Част от тях са докладвани на:

1. IX International conference on Geometry and Applications, Varna, 2009.
2. Семинар на кат. „Геометрия” и „Комплексен анализ и ДУ”, 2011.

Литература

1. Бишоп Р. Л., Криттенден Р. Дж., Геометрия многообразий, Изд. Мир, Москва, 1967.
2. Беклемишев Д. В., Дифференциальная геометрия пространств с почти комплексной структурой, Итоги науки, Геометрия 1963, М, 1965, 165-212.
3. Вишневский В. В., О параболическом аналоге А-пространств, известия ВУЗ, математика, 1969, №1, 29-38.
4. Вишневский В. В., Некоторые свойства дифференциально-геометрических структур, определяемых алгебрами, научни трудове на ПУ, т.10, кн.1, 1972-математика, 23-29.
5. Вишневский В. В., О геометрической модели полукасательных структур, известия ВУЗ, математика, 1983, №3, 73-75.
6. Вишневский В. В., А. П. Широков, В. В. Шурыгин, Пространства над алгебрами, издательство Казанского университета, 1985.

7. Вишневский В. В., Многообразия над плюральными числами и полукасательные структуры, Итоги науки и техники, Пробл. Геом., ВИНТИ, 1988, т.20, 35-72.
8. Вишневский В. В., Интегрируемые аффинорные структуры и их плюральные интерпретации, итоги науки и техники, современная математика и её приложения. Тематичные обзоры, т.73, Москва, 2002, 5-64.
9. Громол Д., Клингенберг В., Майер В., Риманова геометрия в целом, Изд. Мир, Москва, 1971.
10. Дубровин Б., Новиков С., Фоменко А., Современная геометрия, Изд. Наука, Москва, 1979.
11. Зуланке Р., Винтген П., Дифференциальная геометрия и расслоения, Изд. Мир, Москва, 1975.
12. Кирсанова Т. В. Полукасательные структуры 1-го порядка, Тр. Геом. Семинара, в.46, Изд. Казанского ун-та, 1984, 41-47.
13. Кручкович Г. И., А. С. Солодовников, Постоянные симметрические тензоры в римановых пространствах, известия ВУЗ, математика, №3 (10), 1959, 147-158.
14. Кручкович Г. И., Н-эрмитови пространства, известия ВУЗ, математика, 1971, №4, 47-52.
15. Кручкович Г. И., Гиперкомплексные геодезические и их вещественные реализации, Труды МИРЭА, выпуск 67, математика, 1973, 3-11.
16. Марков Г. Г., А. П. Норден, О голоморфно-проективных преобразованиях, известия ВУЗ, математика, №6 (157), 1975, 82-87.
17. Марков Г., Джелепов Г., Холморфно-проективни трансформации на В-пространства в симетрични В-пространства,

Математика и мат. Образование, Доклады на VI пр. конф. На СМБ, Варна, 1975.

18. Михальцев М. А., Об одном классе многообразии над алгеброй дуальных чисел, Тр. Геом. Семинара, Изд. Казанского ун-та, в.21, 1991, 70-79.

19. Норден А. П., Пространства аффинной связности, Изд. Наука, Москва, 1976.

20. Павлов Е. В., Един клас пространства с дуална структура, Научни тр. На ПУ, т.11, кн.3, 1973-Математика, 17-22.

21. Павлов Е. В., Вещественная реализация конформного соответствия римановых пространствах на Клиффордовой алгеброй, известия ВУЗ, Математика, №7, 1978, 64-67.

22. Павлов Е. В., М. К. Василева, Конформно-голоморфно соответствие между В-многообразиями, Известия ВУЗ, математика, №10, 1981, 52-57.

23. Павлов Е. В., Многообразия с алгебрична структура и СН-изображения – хабилитационен труд, Пловдив, 2003.

24. Постников М. М., Линейная алгебра и дифференциальная геометрия, Москва, 1979.

25. Рашевский П., Риманова геометрия и тензорны анализ, Изд. Наука, Москва, 1964.

26. Розенфельд Б. А., Многомерные пространства, изд. Наука, Москва, 1966.

27. Станилов Г., Диференциална геометрия, София, 1997.

28. Талапин В. С., U-планарное преобразование связности в вещественных реализациях многообразий над алгебрами, Изв. ВУЗ, Мат. 1980, 72-76.

29. Талантова Н. В., Биаксиальное пространство параболического типа, Изв. ВУЗ, Мат., 1959, кн.3, 214-228.
30. Талантова Н. В., Широков А. П., Замечание об одной метрики в касательном расслоении, Изв. ВУЗ, Мат., 1975, кн.6, 143-146.
31. Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, Изд. Мир, Москва, 1964.
32. Шапуков Б. Н., Связности на дифференцируемых расслоениях, Итоги науки и техники, Серия Проблемы геометрии, Т.15, Москва, 1983, 61-91.
33. Широков П.А., Постоянные поля векторов и тензоров второго порядка в римановых пространствах, известия Казанского физ-мат. Общества, 1925, сер.2, т.25, 48-55.
34. Широков П.А., Тензорное исчисление, издательство Казанского университета, 1961.
35. Широков П.А., Избранные работы по геометрии, Казань, 1966.
36. Эйзенхарт Л.П., Риманова геометрия, иностранная литература, Москва, 1948.
37. Carfagna D'Andrea A., Di Febo Marinelli R., Su una generalizzazione delle strutture quasi tangenti, Rend. Mat. E appl. 1982-2 №2, 257-267.
38. Duc T. V., Structure Presque-transverse, J. Different. Geom. 1979, v.14, №2, 215-219.
39. Gribachev K., Mekerov D., Djelepov G., Generalized B-manifolds, C. R. Acad. Bulgare Sci. 38/1985, 299-302.
40. Mekerov D., On some classes of almost B-manifolds, C. R. Acad. Bulgare Sci. 38/1985, 559-561.

41. Patterson E. M., Walker A. G., Riemann extensions, Quart. J. of Math., Oxford, (2), v.3, 1952, pp 19-28,

42. Pavlov E.V., H. Hopteriev, A sufficient condition for CH-mapping, Доклады на БАН, т.34, 1984, №4, 473-475.

32

43. Sekizava M., On complete lifts of reductive homogeneous spaces and generalized symmetric spaces, Cz. Math. J., 36(111), Praha, 1986, pp 516-534.

44. Vanžura J., Simultaneous integrability of an almost tangent structure and a distribution, Demonstr. Math., 1986-19, №2, 359-370.

45. Yano K., Differential Geometry on Complex and Almost Complex Spaces, New York, 1965.

46. Yano K., Ishihara Sh., Tangent and Cotangent Bundles, New York, 1973.

47. Manev M., Gribacev K., Conformally invariant tensors on almost contact manifolds with B-metric, Serdica Math. J., 1994-20, 133-147.

48. Teofilova M., Almost complex connections on almost complex manifolds with Norden metric, In: Differential Geometry, Comp. Analysis and Math. Physics, Proc. Of The 9-th Int. Workshop on Comp. Structures, Integrability&Vector Fields, 2009, 231-240.

49. Dokuzova I., An ABJ-connection on almost complex manifolds with Norden metric, Plovdiv Univ. Sci., Works-Math, vol. 35, №3, 2007, 47-55.

50. Shtarbeva D., On some Riemannian product manifolds, Plovdiv Univ. Sci., Works-Math, vol. 35, №3, 2007, 131-138.

51. Hristov A.H., Metrics on a manifold with a semi-tangential structure, Plovdiv Univ. Sci., Works-Math, vol. 35, №3, 2007, 57-64.

52. Hristov A., A Connection on Manifolds with a Nilpotent Structure, J. of Tech. Un. at Plovdiv, Fund. Sciences and Applications, Vol. 11, 2005-2006, pp 7-20.

33

53. Hristov A., Semi-tangent structure and pure connections, J. of Tech. Un. at Plovdiv, Fund. Sciences and Applications, Vol.12, 2007, pp 21-26.

54. Hristov A., CH-transformations on the tangent bundle of a Riemannian manifolds, Int. electr. J. of Geometry, (2011) (to appear).