ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ “ПАИСИЙ ХИЛЕНДАРСКИ”
ФАКУЛТЕТ ПО “МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА”
КАТЕДРА “КОМПЮТЪРНИ ТЕХНОЛОГИИ”

АНГЕЛ АТАНАСОВ ГОЛЕВ

ГЕНЕРИРАНЕ И ИЗСЛЕДВАНЕ НА ПОЧТИ-ПРЪСТЕНИ НАД КРАЙНИ ЦИКЛИЧНИ ГРУПИ

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертационен труд
за присъждане на образователната и научна степен “доктор”
в област 4. Природни науки, математика и информатика,
професионално направление 4.6 Информатика и компютърни
науки, научна специалност 01.01.12 Информатика

Научен ръководител: проф. д-р Асен Рахнев

Пловдив, 2011 г.

ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ “ПАИСИЙ ХИЛЕНДАРСКИ”
ФАКУЛТЕТ ПО “МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА”
КАТЕДРА “КОМПЮТЪРНИ ТЕХНОЛОГИИ”

АНГЕЛ АТАНАСОВ ГОЛЕВ

ГЕНЕРИРАНЕ И ИЗСЛЕДВАНЕ НА ПОЧТИ-ПРЪСТЕНИ НАД КРАЙНИ ЦИКЛИЧНИ ГРУПИ

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертационен труд
за присъждане на образователната и научна степен “доктор”
в област 4. Природни науки, математика и информатика,
професионално направление 4.6 Информатика и компютърни
науки, научна специалност 01.01.12 Информатика

Научен ръководител: проф. д-р Асен Рахнев

Рецензенти: проф. дмн Стоян Капралов
доц. д-р Антон Илиев

Пловдив, 2011 г.

Дисертационният труд е обсъден и насочен за защита на разширено заседание на катедра “Компютърни технологии” при Факултета по математика и информатика на ПУ “Паисий Хилендарски”

Дисертационният труд **“Генериране и изследване на почти-пръстени над крайни циклични групи”** съдържа 84 страници. Използваната литература включва 50 източника, от които 40 на латиница. Списъкът на авторските публикации се състои от 5 заглавия.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на 07.06.2011 от 13:30 в заседателната зала на новата сграда на ПУ “П. Хилендарски”.

Материалите по защитата са на разположение на интересуващите се в секретариата на ФМИ, нова сграда на ПУ, каб. 330, всеки ден от 8:30 до 17:00 часа.

Съдържание

Обща характеристика на дисертационния труд

Актуалност на темата

Теорията на почти-пръстените е един от новите и не напълно изучени клонове на алгебрата.

Две аксиоми различават почти-пръстените от пръстени: събирането не е непременно абелево и се изисква верността само на единия дистрибутивен закон (левия). Най-естествените примери на почти-пръстени са: множеството $M(G)$ от всички преобразувания на групата G в себе си; множеството от афинните преобразувания на векторно пространство в себе си; множеството от полиномите над комутативен пръстен с единица — всяко заедно с естествените операции събиране и суперпозиция [16].

Исторически първото изследване на почти-пръстени прави Dickson през 1905 г. Той доказва съществуването на "поле със само един дистрибутивен закон" — наречено почти-поле. Още от 1907 г. Veblen, Wedderburn и много други автори използват почти-полета за да координатизират някои важни класове крайни геометрии. С тяхна помощ са получени и първите примери на недезаргови и непаскалеви геометрии. Понастоящем почти-полетата имат много приложения в геометрията. Голямо значение за комбинаториката имат планарните почти-полета, т.е. почти-полета, в които уравнението $a.x = b.x + c$ има единствено решение. Ferrero показва, че планарните почти-пръстени се използват на конструиране на множество примери от нови балансирани непълни блок-дизайни и частично балансирани непълни блок-дизайни, всичките с малки параметри. Някои от тези дизайни се прилагат успешно в селскостопански експерименти. Освен това планарните почти-полета се използват за изучаване и на Мьобиусови равнини. Сега почти-пръстените имат добре изградена теория и множество приложения в теория на групите, геометрията, комбинаториката, при изследване на полиномиални изображения и др. На изучаването им са посветени повече от 1000 статии и няколко монографии [13], [16] и др.

През 1969 г. J. Beidleman въвежда понятието регулярност и в почти-пръстени. Той показва, че всеки нуласиметричен почти-пръстен се влага в регулярен почти-пръстен. Редица свойства на регулярните почти-пръстени се изследват и работите на Ligh, Heatherly, Oswald и др. През 1979 г. Марин аналогично въвежда и понятието строго-регулярност в почти-пръстени. Почти пръстенът R се нарича регулярен (ляво строго-регулярен; дясно строго регулярен), ако за всеки елемент a от R уравнението $a = axa$ (съответно $a = xa^2$; $a = a^2x$) е разрешимо в R. Естествено е да се въведе и π-регулярност в почти-пръстени [1], [2]. Почти-пръстенът R се нарича π-регулярен (ляво π-регулярен; дясно π-регулярен), ако за всеки елемент a от R съществуват естествено число $n = n(a)$ и елемент $f = f(a)$ от R, за които е вярно равенството $a^n = a^n f a^n$ (съответно $a^n = xa^{n+1}$; $a^n = a^{n+1}x$). Почти-пръстенът R се нарича N-регулярен (строго π-регулярен), ако е едновременно ляво и дясно π-регулярен почти-пръстен. В редица съвременни статии [5], [6], [14], [15] се разглеждат и много други обобщено регулярни почти-пръстени.

Изучаването на почти-пръстени, чиито адитивни групи са крайни и циклични започва с работата [7] на Клей от 1964 г. В нея се дават достатъчни условия за построяване на почти-пръстени над произволна крайна циклична група. През 1968 се конструират с помощта на компютър всички почти-пръстени над циклични групи от ред по-малък от 8 [8]. Доста по-късно през 1977 г. са конструирани и почти-пръстените над циклична група от ред 8 [16], от ред < 13 [22] през 1984 г., от ред < 14 [20], [3] през 1985 г. и от ред < 16 [4] през 2008 г.

Интерес представлява изследването на структурата и намирането на броя на почти-пръстените над крайни циклични групи от ред по-голям или равен на 16 и различен от просто число. Предизвикателство е използването на програмни средства за генериране, търсене и анализиране на обекти, като конкретните резултати могат да се използват за изграждането на нови хипотези.

Цели и задачи на дисертационния труд

Настоящият дисертационен труд има следните цели:

(I) Разработване на алгоритми и програмни средства за намирането на почти-пръстени над крайни циклични групи;
(II) Разработване на програмни средства за улесняване на визуалния анализ на генерираните почти-пръстени;
(III) Подобряване на долните граници за броя на почти-пръстените над крайни циклични групи;
(IV) Разработването на програмни средства за изследване на различни свойства на почти-пръстените над крайни циклични групи.

За реализацията на тези цели е необходимо да се решат следните задачи:

(А) Да се разработят алгоритми и съответни програми за генериране на почти-пръстени над $\mathbb{Z}_n$ за малки n;

(Б) Да се разработи програма, която да представи по удобен начин намерените почти-пръстени и да подпомогне за визуалното им изследване;

(В) Да се изучат известните свойства на почти-пръстени над крайни циклични групи намерени досега;

(Г) Да се анализират получените нови почти-пръстени и да се направят хипотези за структурата им;

(Д) Да се формулират и докажат теореми, подобряващи долните граници за броя на почти-пръстените над крайни-циклични групи;

(Е) Да се усъвършенстват и подобрят алгоритмите за генериране, за да могат да се използват и за намиране на почти-пръстени от по-висок ред;

(Ж) Да се разработят алгоритъм и програма за намиране на неизоморфни почти-пръстени;

(З) Да се разработят библиотеки за изследване на различни свойства на намерените почти-пръстени над крайни циклични групи, като дистрибутивност, регулярност (ляво строга-регулярност, дясна строга-регулярност), π-регулярност, N-регулярност и др.;

(И) Да се направи динамичен сайт за публикуване на получените резултати.

Структура и обем на дисертационния труд

Дисертацията се състои от увод, три глави, заключение, перспективи за развитие, публикации по дисертационния труд и използвана литература.

Обемът на основната част е 77 страници, а на използваната литература — 4 страници. Използваната литература включва 50 заглавия — 10 на кирилица и 40 на латиница. Списъкът на авторските публикации се състои от 5 заглавия.

В първа глава се разглеждат основните алгебрични структури, като по-голямо внимание е обърнато на почти-пръстените.

Във втора глава са представени резултатите, подобряващи долните граници за почти-пръстени над крайни циклични групи. Твърденията са разделени за нуласиметричните и ненуласиметричните пръстени, като основните резултати са илюстрирани с таблици. Дадени са доказателствата на всички твърдения.

Резултатите в тази глава са получени след изследване на почти-пръстените генерирани от програмните средства за намиране на почти-пръстени над крайни циклични групи.

След изследване на почти-пръстените, генерирани от програмните средства за намиране на почти-пръстени над крайни циклични групи, са направени хипотези, като някои от тях са отхвърлени, а някои са довели до формулирането на твърденията в тази глава.

В трета глава се разглежда генерирането на почти-пръстени над крайни циклични групи от ред ≤ 29. Описани са алгоритми за намиране на почти-пръстени и програмните средства за анализ на намерените почти-пръстени. Дадени са примери на почти-пръстени, отговарящи на условията на предложените теореми във втора глава. Подробно се разглежда и намирането на групи от изоморфни почти-пръстени.

В заключение са представени резултатите от извършената работа и приносите в дисертационния труд. Разглеждат се и възможностите за бъдещо развитие.

Кратко съдържание на дисертационния труд

Глава I. Увод в алгебричните структури

1.1. Основни алгебрични структури

В този параграф са дадени дефинициите на основните алгебрични структури, използвани при изучаването на почти-пръстените над крайни циклични групи и са представени различни примери.

Обръщаме внимание на следващата дефиниция, за да са види разликата между структурите пръстен и почти-пръстен.

Определение 1.1.10. Нека R е множество, в което са дефинирани две алгебрични операции — събиране "$+$" и умножение "$\cdot$". Можеството R се нарича *пръстен*, когато са изпълнени следните аксиоми:

(R_1) R е абелева група спрямо събирането;
(R_2) R е полугрупа спрямо умножението;
(R_3) Събирането и умножението са свързани дистрибутивно:

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{и} \quad (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

за произволни $a, b, c \in R$.

(R_2') R е полугрупа с единица спрямо умножението, т.е. R е моноид.

Ако вместо условието (R_1) е изпълнено (R_2'), то се казва, че пръстенът е с единица.

1.2. Почти-пръстени

Определение 1.2.1. Алгебричната система $(G, +, *)$ се нарича *(ляв) почти-пръстен*, ако $(G, +)$ е група, $(G, *)$ е полугрупа и $a*(b+c) = a*b + a*c$, за произволни $a, b, c \in G$. От левия дистрибутивен закон следва, че $x*0 = 0$ за всяко $x \in G$. Ако за всяко $x \in G$ е вярно, че $0*x = 0$, то почти-пръстенът $(G, +, *)$ се нарича *нуласиметричен*.

Две аксиоми различават почти-пръстените от пръстени: събирането не е непременно абелево и се изисква верността само на единия дистрибутивен закон (левия). Най-естествените примери на почти-пръстени са: множеството $M(G)$ от всички преобразувания на групата G в себе си; множеството от афинните преобразувания на векторно пространство в себе си; множеството от полиномите над комутативен пръстен с единица — всяко заедно с естествените операции събиране и суперпозиция [16].

Тъй като всяка циклична група от ред n е изоморфна на групата от остатъците по модул n, то навсякъде в тази статия ще предполагаме, че $G = \mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$, $2 \leq n < \infty$. Освен това с π ще означаваме функция, изобразяваща $\mathbb{Z}_n$ в себе си, а с $+$ и $\cdot$ ще означаваме събирането и умножението по модул n, т.е. равенството $c = a \cdot b$ е равносилно на сравнението $ab \equiv c \pmod{n}$.

Операцията $+$ върху група G от n елемента е една от всичките n^{n^2} операции, които могат да бъдат дефинирани върху G. Разглеждаме n^{n^2} операции, като точно n^n от тях са ляво дистрибутивни върху $+$. Съществува взаимно-еднозначно съответствие между тези n^n операции и функциите π изобразяващи $\mathbb{Z}_n$ в себе си. Трябва да има необходими и достатъчни условия върху π, така че съответните операции да бъдат асоциативни. И накрая трябва да има необходими и достатъчни условия върху множеството от асоциативни операции върху π, така че те да дефинират изоморфизъм. Това дефинира релация на еквивалентност върху множеството от всички почти-пръстени имащи една и съща адитивна циклична група.

Теорема 1.2.1 [7, I]. Нека $*$ е бинарна операция над $\mathbb{Z}_n$. Операцията $*$ е ляво дистрибутивна върху $+$ тогава и само тогава, когато съществува функция π, такава че за всички $p, q \in \mathbb{Z}_n$ е изпълнено $p * q = \pi(p) \cdot q$.

Следствие 1.2.2 [7]. Над $\mathbb{Z}_n$ могат да бъдат дефинирани точно n^n ляво дистрибутивни операции.

Теорема 1.2.3 [7, II]. Необходимото и достатъчно условие функцията π да дефинира асоциативна ляво дистрибутивна операция е

$$\pi(x) \cdot \pi(y) = \pi(x \cdot \pi(y)), \tag{1}$$

за всички $x, y \in \mathbb{Z}_n$.

Така намирането на почти-пръстени над $\mathbb{Z}_n$ се свежда до намиране на функции π, удовлетворяващи равенството (1).

Глава II. Долни граници за почти-пръстени над крайни циклични групи

2.1. Съществуващи долни граници за почти-пръстени

В статията на Клей от 1964 г. е намерена следната долна граница:
Теорема 2.1.1 [7]. За всяко $n > 2$ съществуват поне 2^{n-1} нуласиметрични почти-пръстена над $\mathbb{Z}_n$.

През 1985 г. Рахнев и Даскалов подобряват долната граница за броя на почти-пръстените:

Теорема 2.1.2 [20]. За всяко $n > 2$ съществуват поне:

1) $3^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} - 1$ нуласиметрични почти-пръстена над $\mathbb{Z}_n$, различни от тези описани в Теорема 2.1.1;

2) $\sum\limits_{s} 2^{n-\frac{n}{(n,s)}}$ ненуласиметрични почти-пръстена над $\mathbb{Z}_n$, където s е произволен идемпотент по модул n.

През 1986 г. Рахнев намира формула за точния брой на ненуласиметричните почти-пръстени над $\mathbb{Z}_n$, за n отговарящо на условието на следната

Теорема 2.1.3 [21]. Нека $n = p_1 p_2 \dots p_s$, където $p_1, p_2, \dots, p_s$ са различни прости числа. Тогава ненуласиметричните почти-пръстени над $Z_n(+)$ са точно

$$1 + \sum_{i=1}^{s} \left\{ 1 + \sum_{j/(p_i-1)} \left[(j+1)^{\frac{n-\frac{n}{p_i}}{j}} - 1 \right] \right\} .$$

Получените резултати в следващите два параграфа са постигнати след изследване и анализ на генерираните почти-пръстени над крайни циклични групи.

2.2. Нови долни граници за нуласиметрични почти-пръстени над крайни циклични групи

В този параграф са представени резултатите, които подобряват долните граници за броя на нуласиметрични почти-пръстени над произволна циклична група от ред n.

Теорема 2.2.2. Нека $n = 2t$ и t е нечетно. Ако за функциите π е изпълнено $\pi(0) = 0$, $\pi(t) = t$, $\pi(2k) = 0$, $k{=}1,\dots,t{-}1$ и

$\pi(2k{+}1) \in \{1, t\},\ k{=}0, 1, \ldots, \frac{t-1}{2}{-}1, \frac{t+1}{2}, \ldots, t{-}1$, тогава те дефинират почти-пръстени над $\mathbb{Z}_n$ и броят им е 2^{t-1}.

Теорема 2.2.5. Нека $n = 2t$ и t е нечетно. Ако за функциите π е изпълнено $\pi(0) = 0$, $\pi(t) = t$, $\pi(2k) = 0$, $k{=}1, \ldots, t{-}1$, $\pi(2k{+}1) \in \{1, t, n{-}1\}$, $k{=}0, \ldots, \frac{t-1}{2}{-}1, \frac{t+1}{2}, \ldots, t{-}1$ и $\pi(n{-}x) = n{-}\pi(x)$ за всяко $x \in \mathbb{Z}_n$, тогава условие (1) е изпълнено и броят на дефинираните почти-пръстени над $\mathbb{Z}_n$ е точно $3^{\frac{t-1}{2}}$.

Нека с m означим броя на нилпотентите от втора степен над $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$, а с d_i $i = 1, \ldots, m$ означим самите нилпотенти. За всяко n съществува поне един нилпотент $d_1 = 0$.

Теорема 2.2.6. Разглеждаме всички $\mathbb{Z}_n$, за които $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ имат ненулеви нилпотенти от втора степен. Ако за функциите π е изпълнено $\pi(d_i){=}0,\ i = 1, \ldots, m$ и $\pi(x) \in \{d_1, \ldots, d_m\},\ x \neq d_1, \ldots, d_m$, тогава те дефинират почти-пръстени над $\mathbb{Z}_n$ и броят им е точно m^{n-m}.

Теорема 2.2.7. Нека $n = 2t$, $t \geq 3$ е нечетно число и $\pi(0) = \pi(t) = 0$. Ако двойките елементи i и $i{+}t$, $i = 1, \ldots, t{-}1$ имат следните стойности за функцията π: $(0, 0)$; $(t{+}1, t{+}1)$; $(1, t{+}1)$ за нечетно i или $(t{+}1, 1)$ за четно i, тогава условие (1) е изпълнено и броят на дефинираните почти-пръстени над $\mathbb{Z}_n$ е точно 3^{t-1}. Броят на различните от предходните теореми почти-пръстени е $3^{t-1} - 1$.

Теорема 2.2.8. Нека $n = 2t$, $t \geq 3$ е нечетно число и $\pi(0) = \pi(t) = 0$. Ако четворката от елементи $i, t{-}i, t{+}i$ и $n{-}i$, $i = 1, \ldots, (t{-}1)/2$ има следните стойности за функцията π: $(0, 0, 0, 0)$; $(t{+}1, t{-}1, t{+}1, t{-}1)$; $(t{-}1, t{+}1, t{-}1, t{+}1)$; $(1, t{-}1, t{+}1, t{-}1)$ за нечетно i или $(t{+}1, t{-}1, 1, t{-}1)$ за четно i; $(t{-}1, t{+}1, t{-}1, 1)$ за нечетно i or $(t{-}1, 1, t{-}1, t{+}1)$ за четно i, тогава условие (1) е изпълнено и над $\mathbb{Z}_n$ има точно $5^{(t-1)/2} - 1$ почти-пръстена различни от тези описани в предходните теореми.

Теорема 2.2.9. Нека $n = 4t$, $t \geq 3$ е нечетно число и $\pi(tk) = 0, k = 0, 1, 2, 3$. Ако двойката от елементи i и j, където $i{+}j = 2t \pmod{n}$ за нечетно i и $i{+}j = n$ за четно i, $i \neq j$ и $i \neq tk,\ k = 0, 1, 2, 3$, има следните стойности за функцията π: $(0, 0)$, $(1, 2t{-}1)$ или $(2t{-}1, 1)$, тогава условие (1) е изпълнено и има точно $3^{2t-2} - 1$ почти-пръстени над $\mathbb{Z}_n$ различни от описаните в предходните теореми.

Теорема 2.2.10. Нека $n = 4t$, $t \geq 2$ е четно число и $\pi(0) = \pi(2t) = 0$. Ако двойката елементи i и j, където $i{+}j = 2t \pmod{n}$ за нечетно i или $i{+}j = n$ за четно i имат следните стойности за функцията

π: $(0,0)$, $(1,2t{-}1)$ или $(2t{-}1,1)$, тогава условие (1) е изпълнено и има точно $3^{2t-1}-1$ почти-пръстени над $\mathbb{Z}_n$ различни от описаните в предходните теореми.

Теорема 2.2.11. Нека $n=2t$, $t{\geq}4$ е четно число и $\pi(2k){=}0, k{=}0,1,\ldots,t{-}1$. Ако двойката от елементи i и $i{+}t$, където i е нечетно, има следните стойности за функцията π: $(0,0)$, $(1,t{+}1)$ или $(t{+}1,1)$, тогава условие (1) е изпълнено и има точно $3^{\frac{t}{2}}-1$ почти-пръстена над $\mathbb{Z}_n$ различни от описаните в предходните теореми.

Теорема 2.2.12. Нека $n=2t$, $t\geq 3$ е нечетно число и $\pi(0)=0,\ \pi(t)=t$. Ако двойката от елементи i и $i+t$, $i=1,t{-}1$ има стойности за функцията π: $(1,t{+}1)$, $(t,0)$ за нечетно i или $(t{+}1,1)$, $(0,t)$ за четно i, тогава условие (1) е изпълнено и броят на дефинираните почти-пръстени над $\mathbb{Z}_n$ е точно 2^{t-1}.

Теорема 2.2.13. Нека $n=2t$, $t\geq 2$ е четно число и $\pi(0)=0,\ \pi(t)=t$. Ако за функциите π е изпълнено $\pi(2k{-}1)=1,\ k{=}1,\ldots,t$ и $\pi(2k)\in\{0,t\},\ k{=}1,\ldots,\frac{t}{2}{-}1,\frac{t}{2}{+}1,\ldots,t{-}1$, тогава условие (1) е изпълнено и броят на дефинираните почти-пръстени над $\mathbb{Z}_n$ е точно 2^{t-2}.

За $n=2t$, където t е нечетно число, новата долна граница за нуласиметричните почти-пръстени над $\mathbb{Z}_n$ е:

$$2^{n-1}+3^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}+2.2^{t-1}-1+3^{\frac{t-1}{2}}-2+3^{t-1}-1+5^{\frac{t-1}{2}}-1.$$

За $n=4t$, където t е нечетно число, новата долна граница е:

$$2^{n-1}+2^{2t-2}+3^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}+3^{2t-2}-1+3^{\frac{t-1}{2}}-1.$$

За $n=4t$, където t е четно число, новата долна граница е:

$$2^{n-1}+2^{2t-2}+3^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}+3^{2t-1}-1+3^{\frac{t}{2}}-1.$$

От Теорема 2.2.6 получаваме следното

Следствие 2.2.14. Разглеждаме всички $\mathbb{Z}_n$, където $(\mathbb{Z}_n,\cdot)$ има ненулеви нилпотенти от втора степен и нека броят m на тези нилпотенти е просто число. Нека d_k е ненулев нилпотент от втора степен и $\pi(0)=0,\pi(d_2)=0,\ldots,\pi(d_k)=0,\ k=2,\ldots,m,\ \pi(i)\in\{d_1,\ldots,d_m\}$, $0<i<d_k,\ i\neq d_2,\ldots d_k$ и $\pi(i)$ има поне една ненулева стойност.

За да бъде изпълнено условие (1) за всички стойности на функцията π, трябва $\pi(d_i)=0$ за $i=k{+}1,\ldots,m$ и $\pi(j)\in\{d_1,\ldots,d_m\},\ d_k{<}j{<}n$,

$j \neq d_i$, т.е. с тези стойности на функцията π получаваме почти-пръстени отговарящи на конструкцията в Теорема 2.2.6.

Това следствие е доказателство на една от намерените зависимости, които се използват при генерирането на почти-пръстените.

	Съществуваща долна граница	Нови конструкции	Нова долна граница
$\mathbb{Z}_3$	6		-
$\mathbb{Z}_4$	10	4	14
$\mathbb{Z}_5$	24		-
$\mathbb{Z}_6$	40	21	61
$\mathbb{Z}_7$	90		-
$\mathbb{Z}_8$	154	101	255
$\mathbb{Z}_9$	336	728	1 064
$\mathbb{Z}_{10}$	592	143	735
$\mathbb{Z}_{11}$	1 266		-
$\mathbb{Z}_{12}$	2 290	1 145	3 435
$\mathbb{Z}_{13}$	4 824		-
$\mathbb{Z}_{14}$	8 920	1 005	9 925
$\mathbb{Z}_{15}$	18 570		-
$\mathbb{Z}_{16}$	34 954	16 779 545	16 814 499
$\mathbb{Z}_{17}$	72 096		-
$\mathbb{Z}_{18}$	137 632	14 356 681	14 494 313
$\mathbb{Z}_{19}$	281 826		-
$\mathbb{Z}_{20}$	543 970	269 201	813 171
$\mathbb{Z}_{21}$	1 107 624		-
$\mathbb{Z}_{22}$	2 156 200	64 461	2 220 661
$\mathbb{Z}_{23}$	4 371 450		-
$\mathbb{Z}_{24}$	8 565 754	4 373 301	12 938 955
$\mathbb{Z}_{25}$	17 308 656	95 367 431 640 624	95 367 448 949 280
$\mathbb{Z}_{26}$	34 085 872	555 983	34 641 855
$\mathbb{Z}_{27}$	68 703 186	282 429 536 480	282 498 239 666
$\mathbb{Z}_{28}$	135 812 051	67 646 585	203 458 636
$\mathbb{Z}_{29}$	273 218 424		-
$\sum$			

Таблица 1. Долни граници за нуласиметрични почти-пръстени (част 1)

	Точен брой	Не описани
$\mathbb{Z}_3$	6	0
$\mathbb{Z}_4$	16	2
$\mathbb{Z}_5$	28	4
$\mathbb{Z}_6$	65	4
$\mathbb{Z}_7$	111	21
$\mathbb{Z}_8$	349	94
$\mathbb{Z}_9$	1 169	105
$\mathbb{Z}_{10}$	807	72
$\mathbb{Z}_{11}$	1 311	45
$\mathbb{Z}_{12}$	4 467	1 032
$\mathbb{Z}_{13}$	5 263	439
$\mathbb{Z}_{14}$	10 505	580
$\mathbb{Z}_{15}$	21 783	3 213
$\mathbb{Z}_{16}$	16 834 653	20 154
$\mathbb{Z}_{17}$	72 816	720
$\mathbb{Z}_{18}$	15 032 215	537 902
$\mathbb{Z}_{19}$	286 380	4 554
$\mathbb{Z}_{20}$	876 919	63 748
$\mathbb{Z}_{21}$	1 164 023	56 399
$\mathbb{Z}_{22}$	2 225 545	4 884
$\mathbb{Z}_{23}$	4 371 615	165
$\mathbb{Z}_{24}$	15 821 973	2 883 018
$\mathbb{Z}_{25}$	95 367 449 527 555	578 275
$\mathbb{Z}_{26}$	34 749 177	107 322
$\mathbb{Z}_{27}$	286 174 087 734	3 675 848 068
$\mathbb{Z}_{28}$	207 919 830	4 461 194
$\mathbb{Z}_{29}$	273 300 895	82 471
$\sum$	95 654 196 317 210	3 684 665 400

Таблица 1. Долни граници за нуласиметрични почти-пръстени (част 2)

Съществуващите долни граници в Таблица 1 са получени от Теореми 2.1.1 и 2.1.2.

Новите конструкции получаваме от Теореми 2.2.2, 2.2.5–2.2.13.

2.3. Нови долни граници за ненуласиметрични почти-пръстени над крайни циклични групи

В този параграф са представени резултатите, които подобряват долните граници за броя на ненуласиметрични почти-пръстени над произволна циклична група от ред n.

Теорема 2.3.3. Нека $n = 2p^2$ и $p>2$ е просто число. Ако за функциите π е изпълнено $\pi(0) = p^2$, $\pi(k) \in \{1, p^2, n-1\}$ и $\pi(n-k) = n-\pi(k)$, $k=1, 2, \ldots, p^2-1, p^2+1, \ldots, n-1$, тогава те дефинират почти-пръстени над $\mathbb{Z}_n$ и броят им е точно 3^{p^2-1}.

Теорема 2.3.4. Нека $n = 2p^2$ и $p>2$ е просто число. Ако за функциите π е изпълнено $\pi(kp) = p^2$, $k=0, 1, \ldots, 2p-1$ и $\pi(x) \in \{p, p^2, n-p\}$, $x \neq kp$, тогава те дефинират почти-пръстени над $\mathbb{Z}_n$ и броят им е точно $3^{2p(p-1)}$.

Теорема 2.3.6. Нека $n = 4p$, $p>2$ е просто число и $e>1$ е четният идемпотент. Ако за функциите π е изпълнено $\pi(2k) = e$, $\pi(2k+1) \in \{e, n-e+2\}$, $k=0, 1, ..., 2p-1$, тогава те дефинират почти-пръстени над $\mathbb{Z}_n$ и броят им е точно 2^{2p}.

Като следствие от Теорема 2.3.6, за $n=12$ се получава Твърдение 6 от [20].

Теорема 2.3.7. Нека $n = 4p$, $p>2$ е просто число и $e>1$ е четният идемпотент. Ако за функциите π е изпълнено $\pi(2k) = e$, $\pi(2k+1) \in \{1, e, 2p+1\}$, $k=0, 1, ..., 2p-1$ и $\pi(2j+1)+2p = \pi(2j+1+2p)$ за $\pi(2j+1) \in \{1, 2p+1\}$, $j=0, 1, ..., 2p-1$, тогава те дефинират почти-пръстени над $\mathbb{Z}_n$ и броят им е точно 3^p.

Теорема 2.3.8. Нека $n = 4p$, $p>2$ е просто число и $e>1$ е нечетният идемпотент. Ако за функциите π е изпълнено $\pi(pk) = e$, $k=0, 1, 2, 3$, $\pi(x) \in \{1, e, 2p-1\}$ и $\pi((2p-1)x) = 2p-\pi(x)$, $x \not\equiv p \pmod{n}$, тогава те дефинират почти-пръстени над $\mathbb{Z}_n$ и броят им е точно 3^{2p-2}.

Теорема 2.3.9. Нека $n = 4p$, $p>2$ е просто число и $\pi(4k)=e$, $k=0, 1, ..., p-1$, където e е четен идемпотент. Ако тройката от елементи $4i+2$, $4i+p+2$ и $4i+3p+2$, $i = 0, 1, ..., p-1$ има следните стойности за функцията π: $(n-e+2, 1, 2p+1)$, $(n-e+2, 2p+1, 1)$, (e, e, e) или $(e, n-e+2, n-e+2)$ тогава условие (1) е изпълнено и има точно 4^p-2^p почти-пръстена над $\mathbb{Z}_n$ различни от описаните в предходните теореми.

Теорема 2.3.10. Ако $n = 4p$, $p>2$ е просто число и $\pi(4k)=e$, $k=0, 1, ..., p-1$, където e е четен идемпотент. Ако тройката от елементи $4i+2$,

$4i{+}p{+}2$ и $4i{+}3p{+}2$, $i = 0, 1, ..., p{-}1$ има следните стойности за функцията π: $(n{-}e{+}2, 1, 1)$, $(e, \{e|n{-}e{+}2\}, \{e|n{-}e{+}2\})$, тогава условие (1) е изпълнено и има точно $5^p{-}4^p$ почти-пръстена над $\mathbb{Z}_n$ различни от описаните в предходните теореми.

Теорема 2.3.11. Нека $n = 2p^2$, $p{>}2$ е просто число и $\pi(0) = \pi(p^2) = p^2$. Ако четворката от елементи ip, i, $i{+}2p$ и $i{+}4p$, $i = 1, ..., p{-}1, p{+}1, ..., 2p{-}1$ има следните стойности за функцията π: $(p, 1, 1, 1)$ или $(p^2, \{p^2|p\}, \{p^2|p\}, \{p^2|p\})$, тогава условие (1) е изпълнено и има точно $9^{(p^2-1)/2}{-}8^{(p^2-1)/2}$ почти-пръстена над $\mathbb{Z}_n$ различни от описаните в предходните теореми.

Теорема 2.3.12. Нека $n = 2p^2$, $p{>}2$ е просто число и $\pi(0) = \pi(p^2) = p^2$. Ако четворката от елементи $n - ip$, i, $i{+}2p$ и $i{+}4p$, $i = 1, ..., p-1, p+1, ..., 2p-1$ има следните стойности за функцията π: $(n{-}p, 1, 1, 1)$ или $(p^2, \{p^2|n{-}p\}, \{p^2|n{-}p\}, \{p^2|n{-}p\})$, тогава условие (1) е изпълнено и има точно $9^{(p^2-1)/2}{-}8^{(p^2-1)/2}$ почти-пръстена над $\mathbb{Z}_n$ различни от описаните в предходните теореми.

За $n = 2p^2$, където $p > 2$ е просто число, новата долна граница за ненуласиметричните почти-пръстени над $\mathbb{Z}_n$ е:

$$\sum_s 2^{n-\frac{n}{(n,s)}} + 3^{p^2-1} + 3^{2p(p-1)} - 1 + 2(9^{(2p-1)/2} - 8^{(2p-1)/2}),$$

където s е произволен идемпотент по модул n.

За $n = 4p$, където $p > 2$ е просто число, новата долна граница за ненуласиметричните почти-пръстени над $\mathbb{Z}_n$ е:

$$\sum_s 2^{n-\frac{n}{(n,s)}} + 2^{2p} + 3^p + 3^{2p-2} - 3 + 5^p - 2^p,$$

където s е произволен идемпотент по модул n.

В следващата таблица съществуващите долни граници са получени от Теореми 2.1.2 и 2.1.3.

Новите конструкции получаваме от Теореми 2.3.3, 2.3.4, 2.3.6–2.3.12.

	Съществ. долна граница	Нови конст-рукции	Нова долна граница	Точен брой	Не описани
$\mathbb{Z}_3$	1			1	0
$\mathbb{Z}_4$	1			1	0
$\mathbb{Z}_5$	1			1	0
$\mathbb{Z}_6$	33			33	0
$\mathbb{Z}_7$	1			1	0
$\mathbb{Z}_8$	1			1	0
$\mathbb{Z}_9$	1			1	0
$\mathbb{Z}_{10}$	393			393	0
$\mathbb{Z}_{11}$	1			1	0
$\mathbb{Z}_{12}$	769	286	1 055	1 055	0
$\mathbb{Z}_{13}$	1			1	0
$\mathbb{Z}_{14}$	5 256			5 256	0
$\mathbb{Z}_{15}$	6 215			6 215	0
$\mathbb{Z}_{16}$	1			1	0
$\mathbb{Z}_{17}$	1			1	0
$\mathbb{Z}_{18}$	66 049	542 931	608 980	610 684	1 704
$\mathbb{Z}_{19}$	1			1	0
$\mathbb{Z}_{20}$	98 305	10 918	109 223	109 847	624
$\mathbb{Z}_{21}$	304 834			304 834	0
$\mathbb{Z}_{22}$	1 111 088			1 111 088	0
$\mathbb{Z}_{23}$	1			1	0
$\mathbb{Z}_{24}$	2 162 689			2 619 758	457 069
$\mathbb{Z}_{25}$	1			1	0
$\mathbb{Z}_{26}$	17 400 576			17 400 576	0
$\mathbb{Z}_{27}$	1			1	0
$\mathbb{Z}_{28}$	18 874 369	628 006	19 502 375	19 570 310	67 935
$\mathbb{Z}_{29}$	1			1	0
$\sum$				41 740 064	527 332

Таблица 2. Долни граници за ненуласиметрични почти-пръстени

Част от резултатите в този глава са публикувани в [18], [19] и [10], като не са публикувани доказателствата на Теореми 2.2.8–2.2.13, Следствие 2.2.14 и Теореми 2.3.9–2.3.12.

Глава III. Генериране на почти-пръстени над крайни циклични групи

3.1. Нови алгоритми

Коректността на алгоритмите и програмите за генериране е проверена с известния брой на почти-пръстените над крайни циклични групи над $\mathbb{Z}_n$, $n \leq 15$. За проверката на брой за $n \geq 16$ са използвани точните разултати на Jacobson [12] от 1966 г. за $\mathbb{Z}_n$, където n е просто число и броя на ненуласиметричните почти-пръстени описани в [21] (Теорема 2.1.3) от 1986 г.

Алгоритъм 1

В разработените програми представяме един почти-пръстен с помощта на функцията π, като за съхраняването на стойностите на π използваме едномерен масив от цели числа *pi*.

Функциите π се построяват последователно, като в масивът *pi* се добавят елементи, изпълняващи равенство (1). Ако новият елемент на π не отговаря на (1), се връщаме на предходното ниво. При пресмятането на (1), в дясната част на равенството може да се получи $x \cdot \pi(y)$ да е по-голямо от намерените елементи до този момент. В този случай допускаме, че новият елемент изпълнява условие (1).

Понеже не всички елементи са проверени дали отговарят на условие (1), всяка намерена по този начин функция π се проверява наново за това дали всеки два нейни елемента отговарят на (1).

С този алгоритъм са генерирани и е намерен броя на всички почти-пръстени над $\mathbb{Z}_n$, $n \leq 23$. Освен това използваме алгоритъма и за проверка на верността на следващите по-ефективни алгоритми.

С генерирането на тези почти-пръстени са направени редица хипотези за долни граници на почти-пръстените и за някои зависимости, които са използвани за да се намери броя на почти-пръстените за по-големи n.

Алгоритъм 2

По определение за да бъде изпълнено условие (1), стойностите на функцията π трябва да са подгрупа на мултипликативната група $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$.

Във функцията за проверка на условие (1), ако дясната част на (1) е по-голяма от индекса на последния намерен елемент, се прави допълнителна проверка, за това дали новата стойност на π образува мултипликативна подгупа с намерените до момента стойности на π.

Скоростта на програмата не се подобрява, но идеята може да се развие по следния начин: Функциите π могат да се генерират само от елементи на мултипликативна подгрупа, намерена предварително.

Алгоритъм 3

В този алгоритъм правим пълна проверка на условие (1) за новите елементи на функцията π. В някои случаи това означава непоследователно добавяне на нови елементи на произволно място в масива *pi*.

Тези "непоследователни" елементи не могат да се запишат директно в масива *pi*. Използваме два нови масива *pi_2* и *pi_n*. В първия записваме стойността на "непоследователния" елемент, който е получен в резултат на $x \cdot \pi(y)$, а във втория масив записваме броя на появяванията на този стойност на тази позиция, понеже тя може да се получи при произведението на различни числа. Използва се и масив с указатели *pi_ptr* към списъци с тези "непоследователни" елементи. Това помага при обратния ход на алгоритъма те да се премахнат по-лесно.

При този начин на работа, след като се намерят всички елементи на една функция π, тя не трябва да се проверява наново за изпълнението на условие (1) за всички нейни елементи.

Практически алгоритъмът работи линейно спрямо броя на почти-пръстените над $\mathbb{Z}_n$. Броят на почти-пръстените нараства поне два пъти спрямо предходно n. Спрямо n сложността на алгоритъма е 2^n.

Зависимости на почти-пръстените използвани в алгоритмите

С описаните по горе алгоритми не може да получим броя и да генерираме почти-пръстените над $\mathbb{Z}_n$ за $n \geq 24$, където $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ има ненулеви нилпотенти от втора степен, понеже броят на тези почти-пръстени е огромен (това се вижда от долната граница описана в Теорема 2.2.6) и не могат да бъдат генерирани в реално време.

В този случай за да пресметнем броя на тези почти-пръстени, не генерираме почти-пръстените описани в Теорема 2.2.6. По време на генерацията на пропускаме цели групи почти-пръстени отговарящи на Теорема 2.2.6. След това пресмятаме броя на пропуснатите почти-пръстени, както е описано в Следствие 2.2.14.

По този начин пресмятаме броя на почти пръстените над $\mathbb{Z}_{25}$ и над $\mathbb{Z}_{27}$.

Например над $\mathbb{Z}_{25}$ броят на всички почти пръстени описани в Теорема 2.2.6 е 5^{20} или 95367431640625. Съгласно Следствие 2.2.14 ние не генерираме почти-пръстени със стойности за функцията π:

$0, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, 0;$

$0, 0, 0, 0, 0, 0, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, 0;$

$0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, 0$ и

$0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, x_{41}, x_{42}, x_{43}, x_{44}, 0,$

където $x_{ij} \in \{d_1, \ldots, d_m\}$ и поне един от $x_{ik}, k{=}1, 2, 3, 4$ има ненулева стойност; В този случай генерираме почти-пръстени описани от Теорема 2.2.6, които имат стойност за функцията π:

$0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, x_{51}, x_{52}, x_{53}, x_{54},$

и техният брой е само $5^4 = 625$. За $\mathbb{Z}_{25}$ програмата генерира 17887556 почти-пръстена, а броят на всички почти-пръстени над $\mathbb{Z}_{25}$ е $17887556 + 5^{20} - 5^4 = 95367449527556$.

	Брой почти-пръстени	Алгоритъм 1	Алгоритъм 3
$\mathbb{Z}_{15}$	27 998	0:00	0:00
$\mathbb{Z}_{16}$	16 834 654	1:40	0:28
$\mathbb{Z}_{17}$	72 817	0:01	0:01
$\mathbb{Z}_{18}$	15 642 899	2:50	0:37
$\mathbb{Z}_{19}$	286 381	0:04	0:02
$\mathbb{Z}_{20}$	986 766	0:22	0:06
$\mathbb{Z}_{21}$	1 468 857	0:25	0:11
$\mathbb{Z}_{22}$	3 336 633	0:51	0:22
$\mathbb{Z}_{23}$	4 371 616	1:07	0:30
$\mathbb{Z}_{24}$	18 441 731	34:20	2:05
$\mathbb{Z}_{25}$	95 367 449 527 556	»	»
$\mathbb{Z}_{26}$	52 149 753	»	6:03
$\mathbb{Z}_{27}$	286 174 087 735	»	»
$\mathbb{Z}_{28}$	227 490 140	»	25:17
$\mathbb{Z}_{29}$	273 300 896	»	35:00

Време за изпълнение на програмите с алгоритми 1 и 3 в минути и секунди. Програмите са изпълнени на CPU: Intel(R) Core(TM)2 Duo P8600 @ 2.40GHz

3.2. Точен брой на почти пръстените над $\mathbb{Z}_n$, $3 \leq n \leq 29$

С помощта на алгоритмите, описани в предходния параграф, е намерен точния брой на почти-пръстените над $\mathbb{Z}_n$, $16 \leq n \leq 29$.

	Нула-симетрични	Ненула-симетрични	Точен брой
$\mathbb{Z}_3$	6	1	7
$\mathbb{Z}_4$	16	1	17
$\mathbb{Z}_5$	28	1	29
$\mathbb{Z}_6$	65	33	98
$\mathbb{Z}_7$	111	1	112
$\mathbb{Z}_8$	349	1	350
$\mathbb{Z}_9$	1 169	1	1 170
$\mathbb{Z}_{10}$	807	393	1 200
$\mathbb{Z}_{11}$	1 311	1	1 312
$\mathbb{Z}_{12}$	4 467	1 055	5 522
$\mathbb{Z}_{13}$	5 263	1	5 264
$\mathbb{Z}_{14}$	10 505	5 256	15 761
$\mathbb{Z}_{15}$	21 783	6 215	27 998
$\mathbb{Z}_{16}$	16 834 653	1	16 834 654
$\mathbb{Z}_{17}$	72 816	1	72 817
$\mathbb{Z}_{18}$	15 032 215	610 684	15 642 899
$\mathbb{Z}_{19}$	286 380	1	286 381
$\mathbb{Z}_{20}$	876 919	109 847	986 766
$\mathbb{Z}_{21}$	1 164 023	304 834	1 468 857
$\mathbb{Z}_{22}$	2 225 545	1 111 088	3 336 633
$\mathbb{Z}_{23}$	4 371 615	1	4 371 616
$\mathbb{Z}_{24}$	15 821 973	2 619 758	18 441 731
$\mathbb{Z}_{25}$	95 367 449 527 555	1	95 367 449 527 556
$\mathbb{Z}_{26}$	34 749 177	17 400 576	52 149 753
$\mathbb{Z}_{27}$	286 174 087 734	1	286 174 087 735
$\mathbb{Z}_{28}$	207 919 830	19 570 310	227 490 140
$\mathbb{Z}_{29}$	273 300 895	1	273 300 896

Таблица 3. Точен брой почти-пръстени над $\mathbb{Z}_n$, $3 \leq n \leq 29$.

Получените резултати съвпадат с намерения точен брой на почти-пръстените над $\mathbb{Z}_n$, където n е просто число [12] и с точния брой на ненуласиметричните почти-пръстени описани в Теорема 2.1.3.

3.3. Примери за почти-пръстени

При изследването на почти-пръстените се използва следния запис $\langle k\ (\ x_0\, x_1\ \ldots\ x_{n-1}\ )\rangle$, където k е поредния номер при генерирането на почти-пръстените, а x_i е стойността на фунцията $\pi\colon x_i = \pi(i),\ i \in \mathbb{Z}_n$.

Например 2 (0 0 0 1) означава втория почти-пръстен над $\mathbb{Z}_4$ със стойности на съответната функция π: $\pi(0)=\pi(1)=\pi(2)=0,\ \pi(3)=1$.

Таблицата за събиране на елементите на почти-пръстен е същата, като таблицата за събиране на $\mathbb{Z}_n$. Таблицата за умножение на елементите на описания почти-пръстен получаваме, като използваме правилото за умножение на елементите на почти-пръстен: $p * q = \pi(p) \cdot q$.

Например за почти-пръстенът

63 (0 5 4 0 2 1)

над $\mathbb{Z}_6$, таблиците за събиране и умножение са следните:

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	5	4	3	2	1
2	0	4	2	0	4	2
3	0	0	0	0	0	0
4	0	2	4	0	2	4
5	0	1	2	3	4	5

За този почти-пръстен не е изпрълнен десния дистрибутивен закон:

$$(1{+}2)*1 = \pi(3)\cdot 1 = 0\cdot 1 = 0 \neq 3 = 5{+}4 = \pi(1)\cdot 1{+}\pi(2)\cdot 1 = 1*1{+}2*1\,.$$

В дисертацията са представени различни групи почти-пръстени отговарящи на условията на теоремите от глава II.

3.4. Инструменти за изследване на почти-пръстени

За подпомагане на анализирането на генерираните почти-пръстени е използван продукт, с чиято помощ визуално могат да се намерят връзки между почти-пръстените над една циклична група и да бъдат направени различни хипотези. Някои от тези хипотези са довели до твърденията в настоящата работа.

Нека f е групов автоморфизъм над $(\mathbb{Z}_n, +)$ и допускаме, че $f(1) = s$, където $(n, s) = 1$. Предполагаме, че π_1 и π_2 дефинират две асоциативни операции $*_1$ и $*_2$ съответно. Тогава според [7, Теорема III] f е изоморфизъм на почти-пръстени тогава и само тогава, когато

$$\pi_1(p) = \pi_2(p \cdot s) \; , \tag{3}$$

за всяко $p \in \mathbb{Z}_n$. Използваме равенство (3) за намиране на всички класове от изоморфни почти-пръстени над $\mathbb{Z}_n$.

Създаден е програмен продукт, с чиято помощ от вече генерираните почти-пръстени се намират класовете от изоморфни почти-пръстени.

Алгоритъм за намиране на неизоморфни почти-пръстени

В [17] са представени всички класове от изоморфни почти-пръстени над циклични групи от ред ≤ 8. В дисертацията е представен алгоритъм, с който се намират всички класове от изоморфни почти-пръстени (неизоморфни почти-пръстени) над циклични групи от ред ≤ 29 (с изключение на 25 и 27).

Намирането на неизомофните почти-пръстени и на съответните класове става с линейна сложност спрямо броя на всички почти-пръстени.

	Почти-пръстени	Неизоморфни п-п
$\mathbb{Z}_3$	7	5
$\mathbb{Z}_4$	17	12
$\mathbb{Z}_5$	29	10
$\mathbb{Z}_6$	98	60
$\mathbb{Z}_7$	112	24
$\mathbb{Z}_8$	350	135
$\mathbb{Z}_9$	1170	222
$\mathbb{Z}_{10}$	1200	329
$\mathbb{Z}_{11}$	1312	139
$\mathbb{Z}_{12}$	5522	1749
$\mathbb{Z}_{13}$	5264	454
$\mathbb{Z}_{14}$	15761	2716
$\mathbb{Z}_{15}$	27998	3817
$\mathbb{Z}_{16}$	16834654	2114460
$\mathbb{Z}_{17}$	72817	4572
$\mathbb{Z}_{18}$	15642899	2610019
$\mathbb{Z}_{19}$	286381	15957
$\mathbb{Z}_{20}$	986766	128966
$\mathbb{Z}_{21}$	1468857	124447
$\mathbb{Z}_{22}$	3336633	334065
$\mathbb{Z}_{23}$	4371616	198808
$\mathbb{Z}_{24}$	18441731	2376382
$\mathbb{Z}_{26}$	52149753	4347239
$\mathbb{Z}_{28}$	227490140	19133400
$\mathbb{Z}_{29}$	273300896	9761352

Таблица 4. Брой неизоморфни почти-пръстени над $\mathbb{Z}_n$

Броят на почти-пръстените над $\mathbb{Z}_n$ в един клас от изоморфни почти-пръстени съответства на делителите на $\varphi(n)$.

	Класове изом.п-п	Класове от изом. п-п/брой изом. п-п в тях					
$\mathbb{Z}_3$	5	$3_{/1}$	$2_{/2}$				
$\mathbb{Z}_4$	12	$7_{/1}$	$5_{/2}$				
$\mathbb{Z}_5$	10	$3_{/1}$	$1_{/2}$	$6_{/4}$			
$\mathbb{Z}_6$	60	$22_{/1}$	$38_{/2}$				
$\mathbb{Z}_7$	24	$3_{/1}$	$2_{/2}$	$3_{/3}$	$16_{/6}$		
$\mathbb{Z}_8$	135	$18_{/1}$	$68_{/2}$	$49_{/4}$			
$\mathbb{Z}_9$	222	$9_{/1}$	$18_{/2}$	$15_{/3}$	$180_{/6}$		
$\mathbb{Z}_{10}$	329	$22_{/1}$	$25_{/2}$	$282_{/41}$			
$\mathbb{Z}_{11}$	139	$3_{/1}$	$2_{/2}$	$7_{/5}$	$127_{/10}$		
$\mathbb{Z}_{12}$	1749	$106_{/1}$	$578_{/2}$	$1065_{/4}$			
$\mathbb{Z}_{13}$	454	$3_{/1}$	$1_{/2}$	$3_{/3}$	$6_{/4}$	$11_{/6}$	$430_{/12}$
$\mathbb{Z}_{14}$	2716	$22_{/1}$	$38_{/2}$	$91_{/3}$	$2565_{/6}$		
$\mathbb{Z}_{15}$	3817	$22_{/1}$	$82_{/2}$	$473_{/4}$	$3240_{/8}$		
$\mathbb{Z}_{16}$	2114460	$58_{/1}$	$626_{/2}$	$19216_{/4}$	$2094560_{/8}$		
$\mathbb{Z}_{17}$	4572	$3_{/1}$	$1_{/2}$	$3_{/4}$	$30_{/8}$	$4535_{/16}$	
$\mathbb{Z}_{18}$	2610019	$194_{/1}$	$1815_{/2}$	$2995_{/3}$	$2605015_{/6}$		
$\mathbb{Z}_{19}$	15957	$3_{/1}$	$2_{/2}$	$2_{/3}$	$13_{/6}$	$64_{/9}$	$15873_{/18}$
$\mathbb{Z}_{20}$	128966	$106_{/1}$	$502_{/2}$	$10302_{/4}$	$118056_{/8}$		
$\mathbb{Z}_{21}$	124447	$22_{/1}$	$102_{/2}$	$91_{/3}$	$125_{/4}$	$3571_{/6}$	$120536_{/12}$
$\mathbb{Z}_{22}$	334065	$22_{/1}$	$38_{/2}$	$703_{/5}$	$333302_{/10}$		
$\mathbb{Z}_{23}$	198808	$3_{/1}$	$2_{/2}$	$187_{/11}$	$198616_{/22}$		
$\mathbb{Z}_{24}$	2376382	$469_{/1}$	$9143_{/2}$	$127796_{/4}$	$2238974_{/8}$		
$\mathbb{Z}_{26}$	4347239	$22_{/1}$	$25_{/2}$	$91_{/3}$	$282_{/4}$	$2258_{/6}$	$4344561_{/12}$
$\mathbb{Z}_{28}$	19133400	$106_{/1}$	$578_{/2}$	$1530_{/3}$	$1065_{/4}$	$346904_{/6}$	$18783217_{/12}$
$\mathbb{Z}_{29}$	9761352	$3_{/1}$	$1_{/2}$	$6_{/4}$	$19_{/7}$	$1165_{/14}$	$9760158_{/28}$

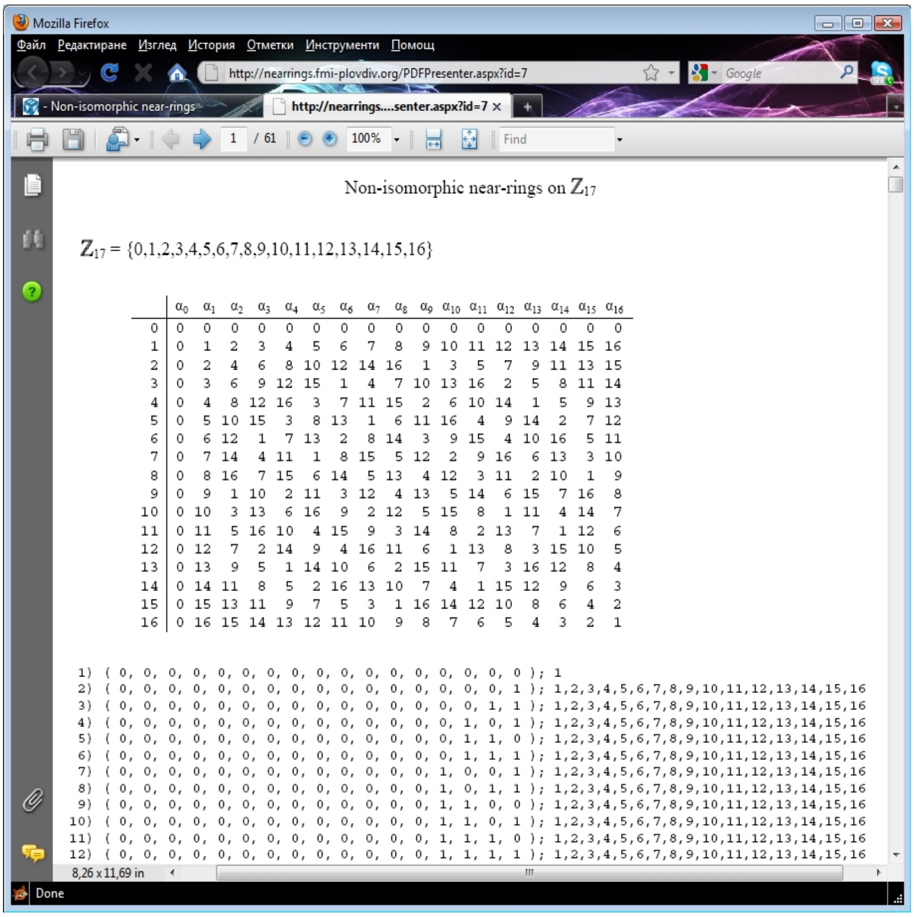
Таблица 6. Брой класове от изоморфни почти-пръстени по броя на изоморфните почти-пръстени в тях

Разработена е библиотека от функции, с чиято помощ се проверяват различни свойства на генерираните почти-пръстени или на намерените неизоморфни почти-пръстени.

В дисертацията са представя списък на всички дистрибутивни почти-пръстени над $\mathbb{Z}_n$, $n \leq 23$.

3.5. Динамичен уеб сайт за публикуване на резултатите

Създаден е динамичен уеб сайт `http:\\nearrings.fmi-plovdiv.org`, в който са публикувани неизоморфните почти-пръстени над крайни циклични групи от ред по-малък или равен на 29 (с изключение на 25 и 27). Публикувани са и всички регулярни почти-пръстени над същите крайни циклични групи.



Non-isomorphic near-rings on $\mathbb{Z}_{17}$

$\mathbb{Z}_{17} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16\}$

	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}	α_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	1	3	5	7	9	11	13	15
3	0	3	6	9	12	15	1	4	7	10	13	16	2	5	8	11	14
4	0	4	8	12	16	3	7	11	15	2	6	10	14	1	5	9	13
5	0	5	10	15	3	8	13	1	6	11	16	4	9	14	2	7	12
6	0	6	12	1	7	13	2	8	14	3	9	15	4	10	16	5	11
7	0	7	14	4	11	1	8	15	5	12	2	9	16	6	13	3	10
8	0	8	16	7	15	6	14	5	13	4	12	3	11	2	10	1	9
9	0	9	1	10	2	11	3	12	4	13	5	14	6	15	7	16	8
10	0	10	3	13	6	16	9	2	12	5	15	8	1	11	4	14	7
11	0	11	5	16	10	4	15	9	3	14	8	2	13	7	1	12	6
12	0	12	7	2	14	9	4	16	11	6	1	13	8	3	15	10	5
13	0	13	9	5	1	14	10	6	2	15	11	7	3	16	12	8	4
14	0	14	11	8	5	2	16	13	10	7	4	1	15	12	9	6	3
15	0	15	13	11	9	7	5	3	1	16	14	12	10	8	6	4	2
16	0	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

```
 1) ( 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 ); 1
 2) ( 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 ); 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16
 3) ( 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1 ); 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16
 4) ( 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1 ); 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16
 5) ( 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0 ); 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16
 6) ( 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1 ); 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16
 7) ( 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1 ); 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16
 8) ( 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1 ); 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16
 9) ( 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0 ); 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16
10) ( 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1 ); 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16
11) ( 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0 ); 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16
12) ( 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1 ); 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16
```

Част от резултатите в тази глава са публикувани в [9] и [11], като в статия [9] са публикуваните резултатите до $n \leq 23$.

Перспективи за развитие

С използването на нови намерени зависимости може да се подобри значително използвания алгоритъм и с негова помощ да бъдат генерирани и да бъде намерен точния брой на почти-пръстените над $\mathbb{Z}_n$, $n > 29$. Значително ускорение може да се постигне с паралелни алгоритми и компютри.

Намирането на тези почти-пръстени може да доведе до формулирането на нови теореми, подобряване на намерените досега долни граници и обобщаването на някои от вече представените теореми.

Друга възможна цел за развитие е пълното теоритично описание на почти-пръстените над циклични групи с ред ≤ 16.

Освен това ще бъдат изследвани различни свойства на намерените почти-пръстени, като строга регулярност, π-регулярност, N-регулярност, обобщена регулярност и др.

Апробация на резултатите

Резултатите, получени в изследването, са използвани в следните университетски проекти:

- ИС-М-4/2008 на Фонд научни изследвания към Пловдивски университет "П. Хилендарски".

Част от резултатите, получени в дисертационния труд, са докладвани на следните национални и международни конференции и семинари:

- Юбилейна международна конференция REMIA 2010, Пловдив, 10–12 декември 2010 г.;
- Национален семинар по теория на кодирането, В. Търново, 17–19 декември 2010 г. Велико Търново

Авторска справка за приносите в дисертационния труд

Поставените в увода цели са постигнати.

Приносите в дисертационния труд са:

1. Разработени са алгоритми, с които са генерирани и е намерен точния брой на всички почти-пръстени над крайни циклични групи от ред по-малък или равен на 29.

2. Разработена е програма за подпомагане на визуалното изследване на намерените почти-пръстени;

3. Използвайки генерираните почти-пръстени са направени хипотези и формулирани теореми, подобряващи досега известните долни граници на броя на почти-пръстените над крайни циклични групи. По конкретно са формулирани и доказани:

– 10 теореми подобряващи долната граница на нуласиметични почти-пръстени над крайни циклични групи;

– 9 теореми подобряващи долната граница на ненуласиметични почти-пръстени над крайни циклични групи;

– Следствие доказващо зависимост, която се използва в алгоритъма за намиране на броя на почти-пръстените.

С представените твърдения се описват:

– повече от 98 процента от нуласиметричните;

– повече от 99.5 процента от ненуласиметричните почти-пръстени над крайни циклични групи от ред по-малък от 30.

Напълно са описани ненуласиметричните почти-пръстени над $\mathbb{Z}_n$, $n \leq 17$.

4. Описани са алгоритми, с чиято помощ са намерени всички класове от изоморфни почти-пръстени над крайни циклични групи от ред по-малък или равен на 29 (с изключение на 25 и 27).

5. Разработени са програмни средства и библиотеки от функции за изследване на почти-пръстените. С тях намерените неизоморфни почти-пръстени са изследвани за дистрибутивност, регулярност и др.

Създаден е динамичен уеб сайт `nearrings.fmi-plovdiv.org` за публикуване на резултатите от изследването на почти-пръстените.

Намерени са няколко технически грешки в [17].

Връзките между приносите, целите, задачите, мястото на описание в дисертационния труд и направените публикации са следните:

Принос	Цел	Задачи	Параграф	Публикации
1	I	А, Е	3.1	[11]
2	II	Б	3.4	
3	III	Г, Д	2.2, 2.3	[18], [19], [10]
4	IV	Ж	3.4	[9]
5	IV	З	3.4	[9]

Благодарности

Изказвам най-сърдечна благодарност на научния си ръководител проф. д-р Асен Рахнев, на колегите от катедрата и от ФМИ на ПУ "П. Хилендарски" за съветите, препоръките и съдействието.

Публикации по дисертационния труд

1. Rahnev A. K., A. A. Golev, Computing Near-rings on Finite Cyclic Groups, Compt. rend. Acad. bulg. Sci., 63, No. 5, 2010, 645–650, ISSN 1310-1331, IF 2009:0.204 .

2. Rahnev A. K., A. A. Golev, Some New Lower Bounds for the Number of Near-Rings on Finite Cyclic Groups, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 59, No. 1, 2010, 59–75, ISSN 1311-8080.

3. Golev A., A. Rahnev, Computing Classes of Isomorphic Near-rings on Cyclic Groups of Order up to 23, Scientific Works, Plovdiv University, vol. 37, book 3, Mathematics, 2010, 53–66, ISSN 0204-5249.

4. Golev A., Algorithms for Generating Near-rings on Finite Cyclic Groups, Proceedings of the Anniversary International Conference REMIA 2010, Plovdiv, 10–12 December 2010, 255–262, ISBN 978-954-423-648-9.

5. Golev A. A., A. K. Rahnev, Computing Near-rings on Finite Cyclic Groups of Order up to 29, Compt. rend. Acad. bulg. Sci., 64, No. 4, 2011, 461–468, ISSN 1310–1331, IF 2009:0.204 .

Литература

[1] Рахнев А. К., π-регулярност в почти-пръстени, Научни трудове на ПУ "П. Хилендарски", 20(1982), 11–31.

[2] Рахнев А., Върху някои класове дистрибутивни почти-пръстени, Сборник работи на млади научни работници, Пловдив, 1983, 184–191.

[3] Рахнев А. К., Обобщено регулярни почти-пръстени и пръстени, Автореферат на дисертация за присъждане на научната степен "Кандидат на математическите науки", София, 1987.

[4] Aichinger E., F. Binder, J. Ecker, R. Eggetsberger, P. Mayr and C. Nöbauer. SONATA: Systems Of Nearrings And Their Applications, Package for the group theory system GAP4. Johanes Kepler University Linz, Austria, 2008. http://www.algebra.uni-linz.ac.at/sonata/

[5] Atagün A. O., IFP Ideals in Near-Rings, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, Volume 39 (1) (2010), 17–21.

[6] Choi S. J., Quasiideals of a P-Regular Near-Ring, International Journal of Algebra, Vol. 4, 2010, no. 11, 501–506.

[7] Clay J. R., The near-rings on a finite cycle group, Amer. Math. Monthly, 71, 1964, 47–50.

[8] Clay J. R., The near-rings on groups of low order, Math. Zeitschr., 104, 1968, 364–371.

[9] Golev A., A. Rahnev, Computing Classes of Isomorphic Near-rings on Cyclic Groups of Order up to 23, Scientific Works, Plovdiv University, vol. 37, book 3, Mathematics, 2010, 53–66, ISSN 0204–5249.

[10] Golev A. A., A. K. Rahnev, Computing Near-rings on Finite Cyclic Groups of Order up to 29, Compt. rend. Acad. bulg. Sci. 64, No. 4, 2011, 461–468, ISSN 1310–1331, IF 2009:0.204 .

[11] Golev A., Algorithms for Generating Near-rings on Finite Cyclic Groups, Proceedings of the Anniversary International Conference REMIA 2010, Plovdiv, 10-12 December 2010, 255–262, ISBN 978–954–423–648–9.

[12] Jacobson R. A., The structure of near-rings on a group of prime order, Amer. Math. Monthly, 73, 1966, 59–61.

[13] Meldrum J., Near-rings and their links with groups, Pitman Publ. Co. (Research Note Series, No 134), 1985.

[14] Nandakumar P., BI-Regular Near-Rings, Southeast Asian Bulletin of Mathematics (2009) 33: 491–496.

[15] Narmada S., S. Anil Kumar, Characterizations of Strongly Regular Near-Rings, Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS), Volume 48, Issue 2, Pages 211–216 (2011).

[16] Pilz G., Near-rings, North-Holland, Amst., 23, 1977.

[17] Pilz G., Near-rings, North-Holland, Amst., Revised edition, 23, 1983.

[18] Rahnev A. K., A. A. Golev, Computing Near-rings on Finite Cyclic Groups, Compt. rend. Acad. bulg. Sci., 63, No. 5, 2010, 645–650, ISSN 1310-1331, IF 2009:0.204 .

[19] Rahnev A. K., A. A. Golev, Some New Lower Bounds for the Number of Near-Rings on Finite Cyclic Groups, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 59, No. 1, 2010, 59–75, ISSN 1311–8080.

[20] Rakhnev A. K., G. A. Daskalov, Construction of near-rings on finite cyclic groups, Math. and Math. Education, Sunny Beach, Bulgaria, 1985, 280-288.

[21] Rakhnev A. K., On near-rings, whose additive groups are finite cyclics, Compt. rend. Acad. bulg. Sci., 39, 1986, No. 5, 13–14.

[22] Yerby R., H. Heatherly, On near-rings of low orders, Near-Ring Newsletter, 7, 1984, 14–22.