

ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ
“ПАИСИЙ ХИЛЕНДАРСКИ”
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
КАТЕДРА “ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА И
МОДЕЛИРАНЕ”

Павлина Христова Атанасова

ЧИСЛЕНИ МЕТОДИ И АЛГОРИТМИ ЗА
ИЗСЛЕДВАНЕ НА НЕЛИНЕЙНИ ПАРАМЕТРИЧНИ
ЗАДАЧИ ВЪВ ФИЗИКАТА

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертационен труд

за присъждане на образователната и научна степен “доктор”

Област на висше образование: 4. – Природни науки, математика и
информатика;

Професионално направление: 4.5. – Математика

(Научна специалност: 01.01.13 – Математическо моделиране и
приложение на математиката)

Научен ръководител:

проф. дмн Т.Л. Бояджиев

Пловдив, 2011

ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ “ПАИСИЙ ХИЛЕНДАРСКИ”
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
КАТЕДРА “ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА И МОДЕЛИРАНЕ”

Павлина Христова Атанасова

ЧИСЛЕНИ МЕТОДИ И АЛГОРИТМИ ЗА
ИЗСЛЕДВАНЕ НА НЕЛИНЕЙНИ ПАРАМЕТРИЧНИ
ЗАДАЧИ ВЪВ ФИЗИКАТА

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертационен труд

за присъждане на образователната и научна степен “доктор”

Област на висше образование: 4. – Природни науки, математика и
информатика;

Професионално направление: 4.5. – Математика

(Научна специалност: 01.01.13 – Математическо моделиране и приложение
на математиката)

Научен ръководител:

проф. дмн Тодор Бояджиев

Рецензенти:

проф. дмн Евгени Христов

проф. дмн Николай Витанов

Пловдив, 2011

Дисертационният труд е обсъден и насочен за защита на разширено заседание на катедра “Приложна математика и моделиране” при Факултета по математика и информатика на ПУ “Паисий Хилендарски”.

Дисертационният труд **“Числени методи и алгоритми за изследване на нелинейни параметрични задачи във физиката”** съдържа 145 страници. Използваната литература включва 148 източника, от които 77 на латиница. Списъкът на авторските публикации се състои от 8 заглавия.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на 27.06.2011г. от 11:00ч. в заседателната зала на новата сграда на ПУ “П. Хилендарски”.

Материалите по защитата са на разположение на интересувалите се в секретариата на ФМИ, нова сграда на ПУ, каб. 330, всеки ден от 8:30 до 17:00 часа.

Съдържание

Обща характеристика на дисертационния труд	4
Актуалност на темата	4
Цели и задачи на дисертационния труд	5
Структура и обем на дисертационния труд	5
Кратко съдържание на дисертационния труд	7
Глава 1. Математическа постановка, числени методи и алгоритми за изследване на модели, описващи физични процеси	7
Глава 2. Числено изследване на дълги джозефсонови контакти, описвани с 2SG- уравнение	13
Глава 3. Числено изследване на двуслойни симетрични джозефсонови контакти, описвани със система от SG-уравнения	18
Авторска справка за приносите в дисертационния труд	21
Насоки за развитие	24
Благодарности	24
Апробация на резултатите	26
Публикации по темата на дисертационния труд	28
Библиография	31

Обща характеристика на дисертационния труд

Актуалност на темата

Математическото моделиране като методология се състои в замяна на даден обект, явление, процес с математически модел и изследване на модела. Най-разпространените съвременни методи за изследване на моделите се основават на използването на компютърни изчислителни алгоритми. Този метод на изучаване има редица достоинства както в теоретичен, така и в експериментален аспект. Да се изследва индиректно самия обект чрез неговия математически модел дава възможност бързо и относително евтино да се изучат неговите свойства и поведение. В същото време изчислителните, компютърните, симулационните или най-общо казано имитационните експерименти с моделите на обектите дават възможност чрез съвременните числени методи и мощните технически средства на информатиката да се изучат достатъчно задълбочено обекти и явления, което е недостъпно при чисто теоретичните подходи.

Голяма част от математическите модели на физичните процеси представляват многопараметрични нелинейни диференциални задачи. Те могат да се представят в общия случай като нелинейни функционални уравнения, зависещи от параметрите на модела. Появяват се нетривиални проблеми, свързани със спецификата на модела. Трудностите са свързани основно с

1. нелинейността
2. многопараметричността.

Изследването на тези задачи изисква прилагане на подходящи методи, отчитащи особеностите на конкретната диференциална задача.

Подходящи методи и алгоритми на изчислителната физика за изследване на модели на редица сложни физични процеси от различни раздели на теоретичната физика са разработени в ОИЯИ, Дубна. В дисертационния труд са използвани някои от тях, като основните са:

1. Алгоритъм за продължение по параметрите;
2. Метод за намиране на бифуркационни зависимости;
3. Непрекъснат аналог на метода на Нютон.

Посочените методи и алгоритми се прилагат в представеният дисертационен труд за решаване на нови актуални задачи от физиката на **джозефсоновите контакти (ДК)**.

Цели и задачи на дисертационния труд

Основните цели и задачи на представения дисертационен труд са следните:

1. Числено изследване на статични решения на нелинейни многопараметрични задачи и анализ на устойчивостта на тези решения в зависимост от параметрите.
2. Прилагане на описаните по-горе числени методи и алгоритми за изследване на статични процеси в джозефсонови контакти.
3. Разработване на комплекс проблемно-ориентирани програми за числено изследване на два конкретни модела:
 - 3.1. Модел на дълги джозефсонови контакти, описвани чрез двойно sine-Gordon уравнение с отчитане на втората хармоника в джозефсоновия ток;
 - 3.2. Модел на двуслойни симетрични джозефсонови контакти, описвани чрез система от sine-Gordon уравнения при отчитане само на първата хармоника в джозефсоновия ток.
4. Използване на създадените изчислителни схеми и комплекси от програми за числен анализ на влиянието на параметрите на разгледаните модели върху
 - решенията на математическата задача;
 - устойчивостта на тези решения;
 - някои физични величини.

Структура и обем на дисертационния труд

Дисертационният труд се състои от увод, три глави, авторска справка за приносите, апробация на резултатите, публикации по темата на дисертацията – 8 заглавия, библиография от 148 източника, от които 71 на кирилица и 77 на латиница. Обемът на основната част е 135 страници, а на използваната литература е 10 страници, съдържа 36 фигури – 1 в първа глава, 20 във втора глава и 15 в трета глава и 5 таблици.

В представения дисертационен труд са построени нови изчислителни схеми, използвайки съвкупност от модерни методи, разработени и утвърдени през последното десетилетие. Те са описани в **глава 1**. На основата на развитите схеми са създадени проблемно-ориентирани комплекси от програми. С

тях успешно е извършено числено изследване на два конкретни модела на ДК, които имат важно значение в развитието на съвременните нанотехнологии.

В глава 2 се разглеждат **ДК с втора хармоника в джозефсоновия ток**. За много приложения важна е втората хармоника в джозефсоновия ток, например, в контакти от тип SNINS и SFIFS, където чрез N е означен слой нормален метал, а чрез F – слой метален феромагнетик ([22]). Подобни структури, с внасяне на допълнителни слоеве, напоследък предизвикват засилен интерес у учените, занимаващи се с ДК – както теоретици, така и експериментатори.

Отчитането на втората хармоника влияе на разпределенията на магнитния поток в ДК. Обаче детайлни изследвания на основните разпределения в ДК с отчитане на втората хармоника и тяхната устойчивост при изменение на параметрите на ДК отсъстват до момента. В дисертационния труд се изследва ефектът на втората хармоника върху съществуването и устойчивостта на разпределенията на магнитния поток. В рамките на този модел са получени нови значими резултати, които би било интересно да се проверят експериментално.

В глава 3 се изследват **двуслойни симетрични ДК**. Многослойните ДК са обект на съвременните изследвания, поради увеличаване на изходната мощност на джозефсоновите генератори. Един от най-интересните резултати, експериментално получени за последните години е, т. нар. ефект на “синхронизация на критичните токове” (current locking) ([14],[19]). Същността на ефекта се заключава в съвпадане на някои участъци от частичните критични криви от вида “ток-магнитно поле” за двуслойни ДК. При това на експерименталните криви се наблюдават скокове на критичния ток, съответстващи на фиксирани стойности на външното магнитно поле. В дисертационния труд е иницирано приложението на теорията на частичната устойчивост при числено изследване на критични режими в ДК. Използвайки този подход е показано, че от математическа гледна точка ефектът “current locking” може да бъде обусловен от точки на прекъсване на частичните критични криви, положението на които зависи от избора на модел и стойности на параметрите.

Разработените изчислителни схеми и програми могат да бъдат лесно адаптирани за решаването на други задачи, възникващи в актуалните модели на нелинейни многопараметрични физични задачи.

Кратко съдържание на дисертационния труд

Глава 1. Математическа постановка, числени методи и алгоритми за изследване на модели, описващи физични процеси

1.1. Математическа постановка на задачата

Голяма част от математическите модели описващи адекватно сложни физични процеси се основават на използването на система от нелинейни интегро-диференциални уравнения от вида

$$\Gamma \frac{\partial^\alpha \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^\alpha} = \{-\Theta[(\nabla_{\mathbf{x}} I + A(\vec{\rho}; \mathbf{x}, t))^2 + V(\vec{\rho}; \mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))] + \Pi \int_{\Omega} G(\vec{\rho}; \mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{u}(\mathbf{x}', t)) d\mathbf{x}'\} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad (1)$$

където t е времето на еволюционния процес, $\mathbf{x} \in \Omega$, Ω е област на координатното пространство, $\vec{\rho}$ е вектор от параметрите на модела, A е външното поле, V и G са локалния и нелокалния потенциал на взаимодействие, Γ, Θ, Π са оператори, които се задават в конкретния разглеждан модел. За всеки модел системата (1) се допълва с начални и гранични условия. Възможно е да се добавят и условия за нормировка на търсените решения.

Общи характеристики на уравненията (1) са многопараметричността на модела, многомерност на координатното пространство, наличие на особени точки в него, спектър на решенията. Този клас нелинейни задачи описва еволюцията на сложни системи, която може да има бифуркационни и критични режими.

Особено място заемат стационарните задачи ($\Gamma = 0$).

Задачата за устойчивост на решенията на системата (1) може да се реши по различни начина. Ще разгледаме един от тях, който се използва в дисертацията — изследва се устойчивостта на стационарните решения на системата (1) при $\Gamma = 0$. За намерените стационарни решения се поставя задача за тяхната еволюция в малък интервал от време при малко смущение от специален вид. Като резултат се формира спектрална задача, която заедно със стационарната гранична задача (1) образуват нова система. От свойствата на част от спектъра на системата се прави извод за характера на локалната устойчивост на моделирания процес.

Стационарната задача може да се запише в следния общ вид:

$$\varphi(\mathbf{a}, \vec{\lambda}, y) = 0, \quad (2)$$

където y е елемент от някоя област на банаховото пространство (В-пространство) Y ; $\mathbf{a} \in R_l$ и $\vec{\lambda} \in R_m$ са вектори от евклидови пространства от съответните размерности. Нелинейната функция φ при зададен вектор \mathbf{a} привежда елементите $z = \{\vec{\lambda}, y\}$ от областта на пространството $R_m \times Y$ в пространството $R_m \times U$, където U е В-пространство, такова че $U \supseteq Y$. Предполага се, че за всеки зададен вектор \mathbf{a} уравнението (2) има изброимо (или крайно) множество от решения $\{y_n^*\}, n = 0, 1, 2, \dots$. При това на всяко решение y_n^* може да съответства вектор от собствени стойности (СС) $\vec{\lambda}_n^*$. Решението $z_n^* = \{\vec{\lambda}_n^*, y_n^*\}$ на уравнението (2) представлява функция на вектора от параметрите \mathbf{a} .

1.2. Обща характеристика на задачите за устойчивост

В една от обширните книги на В.И. Воротников и В.В. Румянцев ([3]) е направен обзор на задачите за устойчивост, както глобална, така и частична. В дисертационния труд е представен съкратен вариант на основните части от този обзор, като се отделя специално внимание на устойчивостта по част от променливите.

Теорията за устойчивост по част от променливите (частична устойчивост) се използва при моделирането на двуслойни ДК (III-а глава от дисертационния труд), където тази теория е приложена за конкретната задача.

1.3. Метод за изследване на модели, описващи стационарни процеси

Линеаризация на нелинейната задача. В [2] е дадена постановка на задачата за изчисляване на бифуркационните криви за равновесни решения за широк клас от нелинейни уравнения с оператор, зависещ от някакво множество от параметри. Нека T е интервал от реалната полуправа $[0, \infty)$. Да разгледаме частния случай на уравнението (1)

$$\dot{u} + G(u, p) = 0, \quad (3)$$

където $u : T \rightarrow \mathcal{B}$, \mathcal{B} е реално или комплексно банахово пространство с размерност $M \geq 1$, G е нелинеен оператор, дефиниран в множество $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}$ и зависи от K -вектора $p \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^K$ от физичните параметри на модела.

Да предположим, че в някоя област $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^K$ на изменение на параметрите на уравнението (3) съществува равновесно решение $u_s(p)$, което зависи гладко от параметрите и такова, че

$$G(u_s, p) = 0. \quad (4)$$

По-нататък зависимостта на G от векторния параметър p ще отбелязваме

само при необходимост.

За решаване на нелинейната задача (4) се използва непрекъснатият аналог на метода на Нютон (НАМН), при което изходната задача се заменя с решаване на задачата

$$\frac{\partial G}{\partial u_s} i_s + G(u_s) = 0, \quad (5)$$

където $\frac{\partial G}{\partial u_s}$ е производна на Фреше.

Полагаме $w = i_s$. Като заместим производните в уравнението (5) получаваме линейна задача за ОДУ, за която използваме подходящ метод на решаване. След получаване на нарастването w , новото приближение към точното решение се намира по формулата

$$u_s^{k+1} = u_s^k + \tau_k w, k = 0, 1, 2, \dots,$$

където параметърът τ_k определя движението по нарастването w . В тази дисертация за намиране на оптималната стойност на τ_k се използва метода на Ермаков–Калиткин ([6]).

Изследване на устойчивост на решението. За изучаване на устойчивостта на решението $u_s(x)$ на уравнението (4) се съпоставя линейната задача за собствени стойности (СС)

$$A(p) \psi = \kappa \psi, \quad (6)$$

Тук линейният оператор $A \equiv G'_u$ е производна на Фреше на нелинейния оператор $G(u)$ в точката $u_s \in \mathcal{D}$ и подходящо условие за нормировка

$$N[\psi] = 0. \quad (7)$$

Предполагаме, че в някоя област \mathcal{P} от пространството на параметрите спектърът на оператора $A(p)$ е дискретен. Нека $\lambda(p) = \min \operatorname{Re} \kappa_i(p)$. Тогава условието за устойчивост на равновесното решение $u_s(p)$ има вида $\lambda(p) > 0$. При $\lambda(p) < 0$ равновесното решение е неустойчиво.

Уравнението

$$\lambda(p) = 0 \quad (8)$$

определя в пространството от параметрите бифуркационната повърхност за решението u_s .

1.4. Метод за изследване на критични режими в нелинейни системи

За да се изчислят бифуркационните точки системата, която се състои от уравненията за равновесните състояния (4), уравненията на линейната задача за

собствени стойности (6) и условията за нормировка (7), се разглеждат като единно нелинейно функционално уравнение относно функциите $u(p)$, $\psi(p)$ и един от параметрите на K -мерния вектор p , който означаваме чрез ξ . Можем да изберем без ограничение на общостта $\xi \equiv p_1$. Останалите $K - 1$ на брой параметри се предполага, че са известни. Собствената стойност на линейната задача (6) също се приема за фиксирана (например, равна на нула). По този начин, посочената система преминава в обратна задача за СС относно параметъра ξ .

За решаване на нелинейната задача за СС се прилага НАМН. На всяка стъпка от итерационния процес се решават две двойки линейни уравнения относно нарастванията (U_1, U_2) и относно собствените функции (Ψ_1, Ψ_2)

$$\begin{aligned} A(\xi) U_1 &= -G(u, \xi), \\ A(\xi) U_2 &= -G'_\xi(u, \xi); \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} [A(\xi) - \lambda I] \Psi_1 &= -A'_u(\xi) \psi U_1 - [A(\xi) - \lambda I] \psi, \\ [A(\xi) - \lambda I] \Psi_2 &= -A'_u(\xi) \psi U_2 - A'_\xi(\xi). \end{aligned} \quad (10)$$

Поправката P за СС се намира от уравнението

$$P = -(N'[\psi] \Psi_2)^{-1} (N[\psi] + N'[\psi] \Psi_1), \quad (11)$$

което следва от условието за нормировка (7). Ако (u^k, ψ^k, ξ^k) е приближеното решение на задачата на k -тата итерация ($k = 0, 1, 2, \dots$), то следващото приближение $(u^{k+1}, \psi^{k+1}, \xi^{k+1})$ към точното решение се изчислява по формулите

$$u^{k+1} = u^k + \tau_k (U_1^k + P^k U_2^k), \quad (12a)$$

$$\psi^{k+1} = \psi^k + \tau_k (\Psi_1^k + P^k \Psi_2^k), \quad \xi^{k+1} = \xi^k + \tau_k P^k. \quad (12b)$$

1.5. Алгоритъм за продължение по параметрите

Първоначално методите за продължение по параметър са се развивали като начин за получаване на начални приближения с цел да се разшири областта на сходимост на итерационните методи, използвани за решаване на нелинейни задачи (2) при фиксиран набор на параметрите (виж [10] и цитираната там литература). Съвременните разработки в тази област в значителна степен са насочени към решаване на проблеми, свързани с анализа на бифуркациите и критичните режими в нелинейни задачи (виж, например, [11, 21, 23]).

Всяка схема на числено продължение съдържа в един или друг вид три задължителни компонента:

1. избор на начално приближение,
2. метод за решаване на задачата за конкретната стойност на параметъра (най-разпространените методи са нютоновите итерационни схеми),
3. алгоритъм за движение по параметъра.

За да се осигури по-висока устойчивост и бърза сходимост на нютоновите итерации, началното приближение се строи по резултатите, получени за 2–3 предишни стойности на параметъра. Често, за начално приближение, се използва схема от ойлеров тип:

$$\varphi^{(0)}(\alpha_{i+1}) = \varphi(\alpha_i) + (\alpha_{i+1} - \alpha_i) \frac{\varphi(\alpha_i) - \varphi(\alpha_{i-1})}{\alpha_i - \alpha_{i-1}}. \quad (13)$$

Тук α_i е елемент от вектора на параметрите на i -тата стъпка от продължението.

Алгоритъмът на продължение, който е представен в дадения раздел, позволява да се реши проблема, свързан с неединствеността на решението. Идеята на предлагания метод се състои в следното.

При продължение по параметъра α на решението z на стационарната гранична задача

$$\varphi(z, \alpha) = 0 \quad (14)$$

(тук φ – нелинеен оператор; α – елемент на вектора от параметри, по който се прави продължението; останалите елементи на вектора от параметрите са фиксирани). Обикновено се изчислява норма или някоя друга скаларна характеристика на решението $S(z)$ (така наречената “бифуркационна мярка”) и се строи нейната зависимост от параметъра $S(\alpha)$. Като правило, в качество на такава скаларна характеристика се използват величини, имащи физичен смисъл в разглежданите модели.

В предложената в работата [7] схема на продължение се използва фактът, че производната $d\alpha/dS(z)$ в точката на обръщане е равна на нула. Като се апроксимира числено стойността на тази производна и проверявайки на всяка стъпка по параметъра дали е изпълнено съотношението

$$\frac{|\Delta\alpha_i|}{\Delta S_i} < \epsilon, \quad (15)$$

където $\epsilon > 0$ е отнапред зададено малко число, $\Delta\alpha_i = \alpha_i - \alpha_{i-1}$ – стъпка по параметъра, а $\Delta S_i = |S(z(\alpha_i)) - S(z(\alpha_{i-1}))|$, може с необходимата точност да се установи положението на точката на обръщане, в която движението по бифуркационната крива трябва да смени посоката. Това означава, че при изпълнение на условието (15) трябва да се смени знака на стъпката на продължението по

параметъра. При това, построяването на началното приближение по формулата (13) с използване на резултатите, получени за две предишни стойности на параметъра, изключват връщане на клона с вече известните решения.

Стъпката по параметъра се изчислява по формулата

$$\Delta\alpha_{i+1} = \Delta\alpha_i \cdot \frac{\Delta S_{i-1}}{\Delta S_i}, \quad (16)$$

която осигурява нейното намаляне близко до точката на обръщане (където решението се изменя бързо) и увеличаване на “полегатия” участък от бифуркационната крива. При това, началната стъпка ($i = 0$) по параметъра трябва да бъде достатъчно малка, за да осигури устойчива и бърза сходимост (за 3–5 итерации) на нютоновите итерационни схеми. Да отбележим тук, че, при движение по “полегатите” участъци от бифуркационната крива, ефективни са “класическите” нютонови итерации, а на участъците близко до точките на обръщане е необходим преход към итерации на основата на НАМН, което се осигурява от съответния избор на итерационния параметър τ .

По този начин, представеният подход осигурява възможността да се излезе на нови клонове на решения в точките на обръщане. Заедно с това се запазва структурата на матрицата, която апроксимира оператора на производната на Фреше, без да усложнява нютоновата итерационна схема, за разлика от други известни в литературата подходи ([11, 23]).

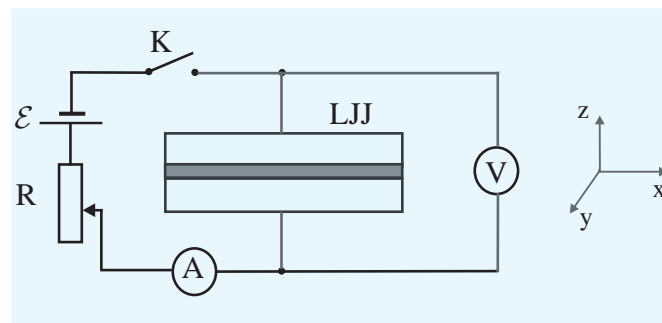
От друга страна, предложеният алгоритъм за избор на стъпката по параметъра позволява да се регулира нейната стойност, осигурявайки по този начин бърза сходимост на нютоновите итерации и висока скорост на движение по параметъра.

Глава 2. Числено изследване на дълги джозефсонови контакти, описвани с 2SG- уравнение

2.1. Електродинамика в дълги джозефсонови контакти

В този раздел са представени известните в литературата уравнения управляващи сложната и много интересна електродинамика на дългите джозефсонови контакти. Отначало се извеждат динамичните уравнения на разпространение на електромагнитните вълни за единичен контакт. Извежда се теоретико-математическия модел, който ги описва.

2.2. Постановка на задачата за модел с двойно sine-Gordon уравнение



Фиг. 1: Схема на дълъг ДК.

На Фиг. 1 е показана схемата на дълъг ДК. В най-простия си вид ДК представлява сандвич, съставен от два слоя свръхпроводящ метал, които са разделени от тънък диелектричен слой (тунелна бариера). Контактът се намира в еднородно магнитно поле h_e , насочено по оста y . Към системата е приложен източник на ток \mathcal{E} . В джозефсонов (статичен) режим ([18]) измерваното от приборите напрежение между свръхпроводниците е $V = 0$, а в динамичен и, в частност, в резистивен режим напрежението е $V \neq 0$. В разглеждания от нас случай на дълъг ДК размерите на контакта по осите y и z са пренебрежимо малки и магнитният поток φ в контакта зависи само от x .

Пълният ток през ДК съдържа компонента, която се нарича “свръхток” (ток на Джозефсон) I_S ([9]). Зависимостта на величината I_S от разликата на фазите на вълновите функции в свръхпроводящите електроди в повечето случаи може да се смята за нечетна строго 2π -периодична функция ([8]) и, следователно, тя може да бъде представена във вид на ред по синуси

$$I_S = I_c \sin \varphi + \sum_{m=2}^{\infty} I_m \sin m\varphi. \quad (17)$$

Основната амплитуда I_c , както и висшите амплитуди I_m , зависят от геометрията, материалите и технологиите на изготвяне на контакта ([12, 16]).

Точната теория ([8]) показва, че в повечето случаи всички членове в (17), освен първия, могат да се пренебрегнат, откъдето се получава “традиционният” модел $I_S = I_c \sin \varphi$. Обаче, съществуват реални физични ситуации за ДК, при моделирането на които е необходимо да се отчита не само първия, но и висшите членове в разлагането (17) (виж, например работите [12, 16, 17, 20]). В частност, ограничавайки се с първите две събираеми в (17), не е трудно да се покаже ([17]), че в статичен режим на работа на контакта ([9]) безразмерното разпределение на магнитния поток $\varphi(x)$ по оста x удовлетворява двойното sine-Gordon уравнение (по-нататък ще използваме означението 2SG)

$$-\varphi'' + a_1 \sin \varphi + a_2 \sin 2\varphi - \gamma = 0, \quad x \in (-l; l). \quad (18)$$

Всички величини тук и по-долу са безразмерни (за начините на привеждане в безразмерен вид виж, например, [4, 9] и монографията [18]). С щрих означаваме диференциране по координатата x , l е полудължината на контакта, величината γ — външният ток, а амплитудите a_1 и a_2 съответстват на първите два коефициента в общото Фурие-разлагане (17).

В случая на overlap-контакт с крайна дължина за уравненията (18) се поставя гранична задача с условия на краищата

$$\varphi'(\pm l) = h_e, \quad (19)$$

където h_e е външното магнитно поле, по направление на оста y .

В задачата (18), (19) влизат пет параметъра $p = (l, h_e, \gamma, a_1, a_2)$. Следователно, всяко решение зависи, освен от координатата x , и от вектора на параметрите p : $\varphi = \varphi(x, p)$ (по-нататък зависимостта от p ще изписваме само при необходимост). Оттук следва, че всички величини, които се определят чрез решенията на задачата (18), (19), също ще бъдат функции на p .

Физичният експеримент показва, че с нарастването по модул на външния ток γ съществува някоя критична стойност γ_{cr} , при която контактът преминава в динамичен режим на работа ([9]). От математическа гледна точка този преход може да се разглежда ([4]) като загуба на устойчивостта (бифуркация) на някое от статичните решения $\varphi(x)$ на задачата (18), (19) при вариране на γ . При това минималната собствена стойност (МСС) λ_0 на съответната задача на Щурм-Лиувил (ЗЩЛ)

$$-\psi'' + q(x)\psi = \lambda\psi, \quad x \in (-l; l), \quad (20a)$$

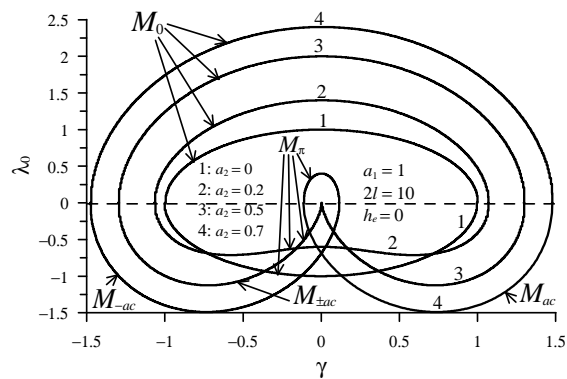
$$\psi'(\pm l) = 0, \quad (20b)$$

с потенциал $q(x, p) = a_1 \cos \varphi + 2a_2 \cos 2\varphi$ се анулира.

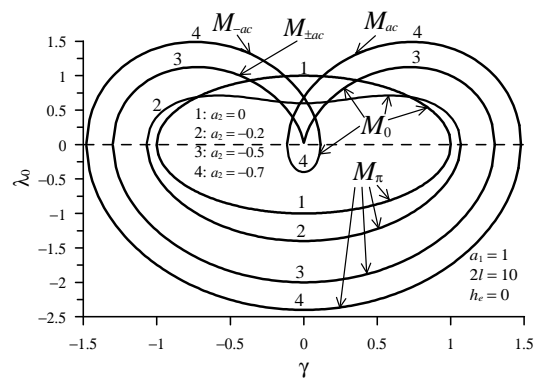
2.3. Числено решаване

Авторът на дисертационния труд е съставил комплекс от проблемно-ориентирани програми, които реализират представените схеми. За решаването на задача (18)–(19) се прилага итерационен алгоритъм, основаващ се на НАМН. Получената линеаризирана задача се решава с използването на два различни подхода. Първоначално, в процеса на работа, дискретизацията се провежда с помощта на сплайн-колокационна схема, която дава точност $O(h^2)$. В последствие точността на схемата е повишена на $O(h^4)$ с прилагане на метода на Нумеров. Получените алгебрични системи решават с използване на прогонка за тридиагонални системи. Точността на схемите се проверява по правилото на Рунге.

За апроксимация на ЗЩЛ (24) се използват триточкови диференчни формули от втори ред ([1]). Като резултат, на задачата (24) се съпоставя линейна алгебрична задача за СС. За пресмятане на първите няколко СС на получената матрица се използва стандартна подпрограма ([24]).



Фиг. 2: Зависимост на МСС от външния ток γ за КР при фиксирани стойности $a_1 = 1$, $h_e = 0$ и $2l = 10$ и при положителни стойности на параметъра a_2 .



Фиг. 3: Зависимост на МСС от външния ток γ за КР при фиксирани стойности $a_1 = 1$, $h_e = 0$ и $2l = 10$ и при отрицателни стойности на параметъра a_2 .

2.4. Числени резултати

С използване на съставения комплекс от програми е проведен обширен числен експеримент, чрез който се изследва влиянието на параметрите върху разпределението на магнитния поток в ДК и неговата устойчивост.

Отчитането на втората хармоника $a_2 \sin 2\varphi$ в модела (18) довежда до това, че за $\gamma = 0$ и $h_e = 0$, освен известните в традиционния случай ($a_1 = 1, a_2 = 0$)

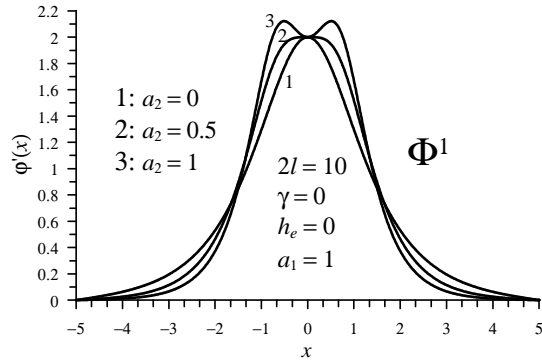
тривиални решения M_0 и M_π съществуват още два класа от решения

$$\varphi = \pm \arccos(-a_1/2a_2) + 2k\pi \text{ (означени с } M_{\pm ac}).$$

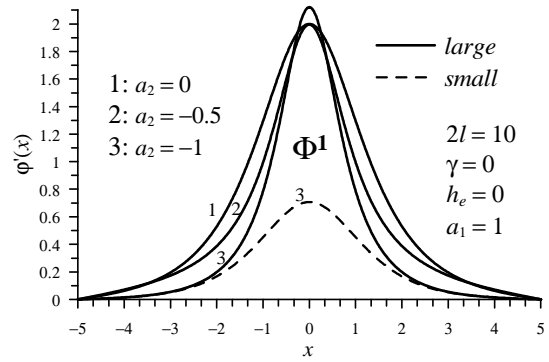
Те съществуват само при някои стойности на параметрите a_1 и a_2 : $|a_1/a_2| \leq 2$ и $a_2 \neq 0$.

Изменение на тривиалните решения и тяхната устойчивост. На Фиг. 2 се демонстрират кривите на зависимостите на МСС от външния ток γ за КР при различни положителни стойности на параметъра a_2 и при фиксирана стойност $h_e = 0$. Показано е раждането на устойчивите състояния M_π от неустойчиви при $a_2 > 0.5$.

На Фиг. 3 е показано изменението на устойчивостта при отрицателни стойности на a_2 . Демонстрира се, че майснеровото разпределение M_0 губи устойчивостта си при $a_2 < -0.5$ и на негово място се появяват двете нови константни решения $M_{\pm ac}$, които са устойчиви при тези стойности на параметрите.



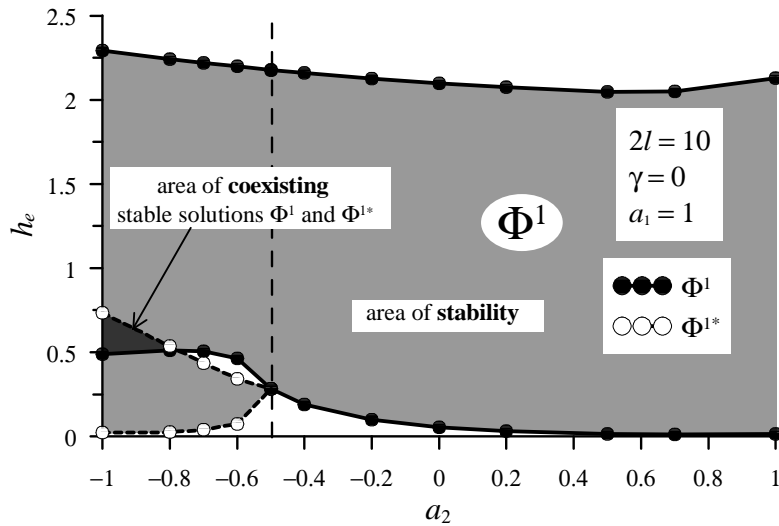
Фиг. 4: Разпределение на вътрешното магнитно поле за флаксона Φ^1 при положителни стойности на параметъра a_2 при $\gamma = 0$, $h_e = 0$ и $2l = 10$.



Фиг. 5: Както на Фиг. 4 за отрицателни a_2 . Пунктираната линия показва “малкото” решение.

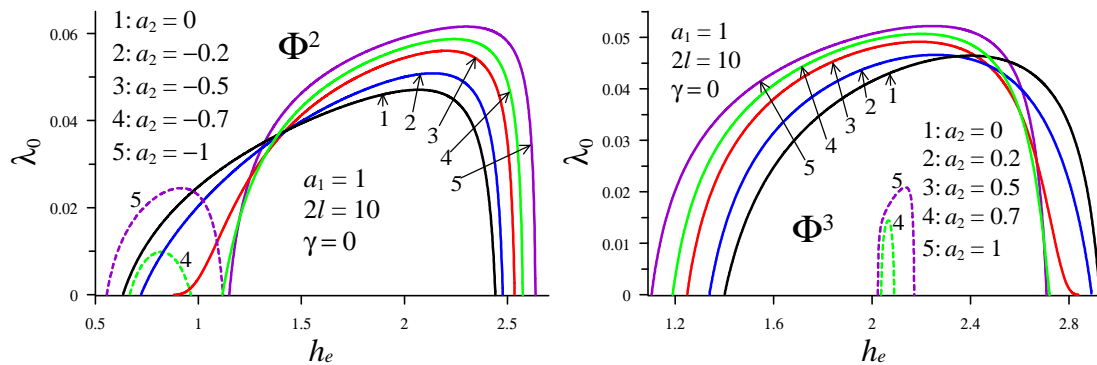
Изменение на едно-флаксонните решения Φ^1 и тяхната устойчивост. На Фиг. 4 се демонстрира деформацията на производната на решението (вътрешното магнитно поле) от вида Φ^1 под влияние на параметъра a_2 . При $a_2 = 0.5$ кривата $\varphi'(x)$ има плато в околност на центъра $x = 0$. По-нататъшното увеличаване на параметъра a_2 води до формиране на два максимума на функцията $\varphi'(x)$. По този начин, отчитането на коефициента a_2 води до качествено изменение на вида на флаксона.

При намаляване на параметъра a_2 при $h_e = 0$ (Фиг. 5) наблюдаваме зараждане на нов вихър когато $a_2 < -0.5$ при нулево магнитно поле, което се съгласува с аналитичните резултати (виж [13] и цитираната там литература).



Фиг. 6: Бифуркационна диаграма за едно-флаксонното решение върху равнината на параметрите a_2 и h_e . Тук $a_1 = 1$, $2l = 10$, $\gamma = 0$.

На Фиг. 6 се демонстрира полученото влияние на втората хармоника върху областта на устойчивост за еднофлаксонното решение на тази фигура. При $a_2 > -0.5$ няма качествени изменения. При $a_2 < -0.5$ наблюдаваме област, в която не съществува традиционното устойчиво еднофлаксонно решение и област, в която едновременно съществуват две устойчиви такива решения.

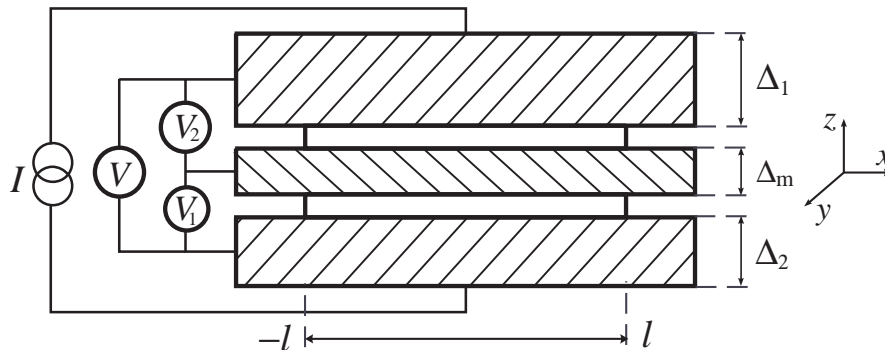


Фиг. 7: Зависимостта $\lambda_0(h_e)$ за Φ^n при $2l = 10$, $\gamma = 0$, $h_e = 2$ и $a_1 = 1$ при различни стойности на параметъра a_2 . Лявата фигура показва $\lambda_0(h_e)$ за Φ^2 при отрицателни a_2 , а дясната — $\lambda_0(h_e)$ за Φ^3 при положителни a_2 .

Изменение на флаксонните решения Φ^n , $n > 1$ и тяхната устойчивост. При увеличаване на външното магнитно поле h_e могат да съществуват по-сложни устойчиви флаксонни състояния. Основен резултат в този параграф е че за всички n -флаксонни разпределения ($n \geq 3$) се появяват нови устойчиви решения, които съществуват заедно с традиционните решения (Фиг. 7). Получените от нас резултати могат да бъдат изследвани експериментално.

Глава 3. Числено изследване на двуслойни симетрични джозефсонови контакти, описвани със система от SG-уравнения

3.1. Постановка на задачата



Фиг. 8: Схема на двуслоен ДК.

В рамките на модела на дългите ДК, отчитайки само електромагнитното взаимодействие между съседните слоеве статични разпределения на магнитния поток $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))^T$ в ДК удовлетворяват граничната задача

$$-A \varphi_{xx} + J_z(\varphi) + \Gamma = 0, \quad (21a)$$

$$\varphi_x(\pm l) = H, \quad (21b)$$

където 2-векторът $H = h_e(1, 1)^T$, а константата h_e представлява външното магнитно поле, което е по посока на оста y (виж Фиг. 8). Да отбележим, че решенията на (21) зависят гладко както от физичната координата x , така и от параметрите l , s , h_e и γ , т.е., $\varphi = \varphi(x, p)$, където чрез $p \equiv \{l, s, h_e, \gamma\}$, $p \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^4$ е означен 4-вектора на параметрите на модела. По-нататък зависимостта от p ще изписваме само при необходимост.

3.2. Устойчивост на разпределенията на магнитния поток

Частична устойчивост на разпределенията в слоевете на ДК. Нека $\varphi_2(x)$ е някое фиксирано разпределение на магнитния поток във втория слой, удовлетворяващо заедно с разпределението $\varphi_1(x)$ задачата (21). Да разгледаме еднопараметричното отклонение $\varphi_1(x) + \epsilon u_1(x)$ на състоянието $\varphi_1(x)$ в първия

слой на контакта. Тогава достигаем до частичната ЗЩЛ

$$-a_{11}u_{1,xx} + q_1(x)u_1 = \mu_1 u_1, \quad (22a)$$

$$u_{1,x}(\pm l) = 0, \quad (22b)$$

$$\int_{-l}^l u_1^2(x) dx - 1 = 0, \quad (22c)$$

потенциалът на която $q_1(x) \equiv Q_{11}(x) = \cos \varphi_1(x)$ се определя чрез решението $\varphi_1(x)$. За крайния интервал $[-l, l]$ задачата (22) има ограничен отдолу дискретен спектър ([5]). При това, на всяка СС μ_{1n} отговаря единствена СФ $u_{1n}(x)$, за която е изпълнено условието за нормировка (22c). Броят на корените на $u_{1n}(x)$ в интервала $(-l, l)$ е равно на n . В частност, СФ $u_{10}(x)$, съответстваща на минималната СС μ_{10} , няма корени при $x \in (-l, l)$.

Бифуркационната зависимост “ток-магнитно поле” за разпределението $\varphi_1(x)$ представлява геометрично място от точки върху равнината $\mathcal{P}_{h\gamma}$, такива, че

$$\mu_{10}(h_e, \gamma) = 0. \quad (23)$$

Глобална устойчивост на разпределенията в ДК. Преминаваме към регулярната матрична задача на Шурм-Лиувил (ЗЩЛ)

$$-A \psi_{xx} + Q(x)\psi = \lambda \psi, \quad (24a)$$

$$\psi_x(\pm l) = 0, \quad (24b)$$

$$\int_{-l}^l \langle \psi, \psi \rangle dx - 1 = 0, \quad (24c)$$

с потенциал $Q(x)$. Спектърът на задачата (24) е дискретен и е ограничен отдолу

$$\lambda_{\min} \equiv \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$$

При това, на всяка собствена стойност (СС) λ_n , $n = 0, 1, \dots$ съответства единствена собствена функция (СФ) $\psi_n(x) \equiv (\psi_{1n}(x), \psi_{2n}(x))^T$, удовлетворяваща условието за нормировка (24c).

Уравнението

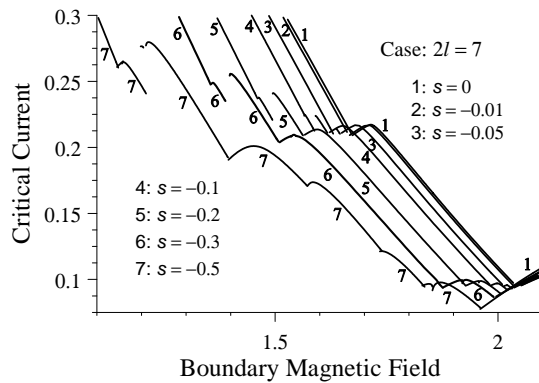
$$\lambda_0(h_e, \gamma) = 0 \quad (25)$$

определя в неявен вид бифуркационната крива за разпределението $\varphi(x)$ върху параметричната равнина $\mathcal{P}_{h\gamma} \equiv \{h_e, \gamma\} \in \mathbb{R}^2$.

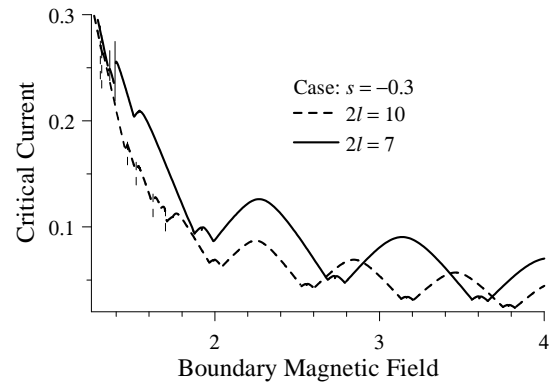
3.3. Алгоритми за числено решаване

За числено решаване на построените задачи се използва алгоритъма за намиране на бифуркационните зависимости, описан в Глава 1, построен на основата на непрекъснатия аналог на метода на Нютон. За дискретизация на съответните линеаризирани задачи са използвани две различни схеми, чиято реализация е дело на съавторите на докторанта.

3.4. Резултати от численото моделиране



Фиг. 9: КК на ДК при различни стойности на параметъра s за $2l = 7$.



Фиг. 10: Частични КК за първия слой на ДК при $s = -0.3$ за $2l = 10$ и $2l = 7$.

На Фиг. 9 се демонстрира влиянието на параметъра на взаимодействието s върху частичната КК. Виждаме, че при намаляване на стойността $|s|$ КК се изместват надясно, а амплитудата на скоковете на критичния ток бързо намалява. По този начин, КК при намаляване на $|s|$ се стреми към положение, съответстващо на независими слоеве ($s = 0$).

На Фиг. 10 се сравняват получените в числения експеримент КК при коефициенти на взаимодействие между слоевете $s = -0.3$ и две дължини $2l = 10$ и $2l = 7$ на контакта. Да отбележим, че при увеличаване на дължината на контакта ($2l = 10$) броят на скоковете расте, а тяхната структура става все по-сложна. Обаче, експерименталните наблюдения на някои от скоковете могат да бъдат затруднителни, имайки предвид тяхната незначителна амплитуда.

Показано е, че от математическа гледна точка ефектите, получени в експеримента ([14], [15]), могат да бъдат обусловени от точки на прекъсване на частичните критични криви, положението на които зависи от избора на модел и стойности на параметрите.

Авторска справка за приносите в дисертационния труд

Поставените в увода цели са постигнати. Ще акцентираме върху основните резултати, получени в дисертационния труд:

I. Разработени са ефективни изчислителни схеми за числено изследване на статични решения на нелинейни многопараметрични задачи и анализ на устойчивостта на тези решения в зависимост от параметрите, които имат следните по-важни характеристики:

1. Реализират концепцията за обединяване на алгоритъма за продължение по параметрите с итерации на основата на непрекъснатия аналог на метода на Нютон.
2. За дискретизация на получаваните на всяка итерация линеаризирани задачи се използват методи, за които теоретично и числено е показано, че имат грешка от ред $O(h^4)$.
3. Използва се ефективна числена схема за моделиране на бифуркационните зависимости на равновесните решения за широк клас от уравнения във физичните модели.
4. Иницирано е приложението на теорията на частичната устойчивост при численото изследване на критични режими.

II. Приложени са разработените числени методи и алгоритми за изследване на статични процеси в джозефсонови контакти.

III. Създадени са проблемно-ориентирани комплекси от програми на основата на разработените схеми. С тях успешно е извършено числено изследване на два конкретни модела на джозефсонови контакти:

1. Контакти, в които се отчита втората хармоника в джозефсоновия ток.
2. Двуслойни симетрични контакти.

Разработените програмни комплекси могат със сравнително малки изменения да се използват за решаването на други задачи, възникващи в съвременните модели на сложни физични системи.

IV. Числен анализ. При провеждането на числения експеримент със създадените програмни комплекси са получени редица нови резултати за двата изследвани модела:

1. Модел на дълъг джозефсонов контакт, описван чрез двойно sine-Gordon уравнение с отчитане на втората хармоника в джозефсоновия ток, където се изследва ефектът на втората хармоника върху съществуването и устойчивостта на разпределенията на магнитния поток:
 - (а) Открити са нови, тъй наречени, “малки” флаксони, които съществуват едновременно със стандартните “големи” флаксони;
 - (б) Доказано е съществуването на нови константни решения, които не съществуват в традиционния модел при $a_2 = 0$, като е изследвана и тяхната устойчивост;
 - (в) Показано е, че влиянието на параметъра a_2 води до стабилизация на константни решения, които в традиционния случай са винаги неустойчиви или отсъстват;
 - (г) Изучена е деформацията на майснеровите и флаксонните решения при изменение на параметъра a_2 ;
 - (д) Изследвана е устойчивостта на решенията при изменение на външното магнитно поле h_e и външния ток γ при различни стойности на коефициента a_2 .

2. Модел на двуслоен симетричен джозефсонов контакт, описван чрез система от sine-Gordon уравнения при отчитане само на първата хармоника в джозефсоновия ток:
 - (а) Изучена е глобална и частична устойчивост на разпределенията в зависимост от условията на физическия експеримент;
 - (б) Построени са бифуркационни криви за редица разпределения на магнитния поток в джозефсоновия контакт, като критичната крива се разглежда като обвивка на бифуркационните криви за отделни разпределения;
 - (в) Показано е, че от математическа гледна точка ефектът “current locking” може да бъде обусловен от точки на прекъсване на частичните критични криви, положението на които зависи от избора на модел и стойности на параметрите;

Връзките между резултатите, целите и задачите, мястото на описание в дисертационния труд, направените публикации и изнесените доклади са следните:

резултати	цели и задачи	място на описание	публикации	доклади
I	1	глава 1		
II	2	2.2,	A3 ÷ A6,	A1, A4 ÷ A8,
III.1	3.1	2.3, 2.4.1	B1	B3, B4, B5
II	2	3.2	A1, A2,	A1, A2, A3, A8,
III.2	3.2	3.3	B1	B1, B2
IV.1	4	2.4.1	A3 ÷ A6,	A1, A4 ÷ A8,
			B1	B3, B4, B5
IV.2	4	3.4	A1, A2,	A1, A2, A3, A8,
			B1	B1, B2

Във връзка с провеждането на процедура за придобиване на образователната и научна степен “**доктор**” в Пловдивския университет “Паисий Хилендарски” и защита на представения от мен дисертационен труд, декларирам:

Резултатите и приносите на проведеното дисертационно изследване, представени в дисертационния труд на тема: “**Числени методи и алгоритми за изследване на нелинейни параметрични задачи във физиката**“ са оригинални и не са заимствани от изследвания и публикации, в които нямам участия.

Насоки за развитие

Авторът на дисертационния труд е поставил нови цели за постигане по направления във физиката на ДК, в които няма достатъчно изследвания и които са били разисквани по време на конференции и представляват интерес за физиците-експериментатори:

1. Изследване на бифуркационните зависимости за ДК, описван с 2SG-уравнение, които са получени аналитично само за точкови контакти. Предложените в дисертацията методи дават възможност да се изследва влиянието на дължината на контакта върху критичните криви.
2. Изследване на контакти, при които джозефсоновия ток се представя чрез друга зависимост от магнитния поток. Реални такива контакти, за които няма достатъчно изследвания са, например, ДК с изменяща се ширина на диелектричния слой, с различни видове нехомогенности и други.
3. Изследване влиянието на втората хармоника с по-големи абсолютни стойности от 1.
4. Изследване влиянието на третата хармоника в джозефсоновия ток.
5. Изследване влиянието на висши хармоники от зависимостта ток-магнитно поле за многослойни структури от ДК.
6. Изследване на намерения малък флаксон, при ДК с втора хармоника в джозефсоновия ток, под влиянието на външното магнитно поле и другите параметри на модела.
7. Изследване на динамичните решения и построяване на волт-амперните характеристики.
8. Прилагане на други схеми за дискретизация, например, основаващи се на обобщени полиноми, като по този начин ще се взимат предвид конкретните особености на уравненията.

Описаните числени методи и алгоритми могат да намерят приложение за решаване на редица други нелинейни многопараметрични задачи от физиката.

Благодарности

Изявявам огромната си благодарност на моя научен ръководител проф. дмн Тодор Бояджиев, който, в истинския смисъл на думата, беше мой учител. Той ме въведе в интересната научна тематика и през последните 7–8 години от своя живот с бащина грижа и преподавателска самоотверженост ми оказа неоценима помощ в работата над моята дисертация.

Дълбока благодарност изразявам на деканите на ФМИ на ПУ проф. д-р Димитър Мекеров и проф. д-р Асен Рахнев за непрекъснатата подкрепа.

Искрено благодаря на всички преподаватели от катедра Приложна математика и моделиране, където се обучавах по време на докторантурата, за колегиалната подкрепа и оказаните съвети, особено на ръководителя на катедрата проф. дмн Христо Семерджиев.

Изказвам голяма благодарност на директора на ЛИТ, ОИЯИ проф. дфмн Виктор Иванов за подкрепата и за оказаната помощ на различни етапи от моето 6-годишно пребиваване в наукоград Дубна.

Признателна съм на целия колектив на ЛИТ – ОИЯИ за вниманието, топлото отношение и сърдечното приемане.

За оказаната помощ дължа дълбока благодарност на здн на РФ проф. дфмн Евгений Жидков, на здн на РФ проф. дфмн Игор Пузинин, на проф. дфмн Таисия Пузинина, на проф. дфмн Елена Земляная и на проф. дфмн Юрий Шукринов.

Благодаря на проф. дмн Стефка Димова за сътрудничеството, конструктивните съвети и стимулиращите дискусии.

Благодаря сърдечно на всички, които в една или друга степен ми помогнаха!

Апробация на резултатите

Участие в проекти

1. Проект на Лабораторията по информационни технологии, Обединен институт за ядрени изследвания (ОИЯИ), Дубна, Русия “Математическа поддръжка на експерименталните и теоритични изследвания, провеждани от ОИЯИ” (05-6-1060-2005/2013);
2. Програма за сътрудничество между ОИЯИ–Дубна и българския научен център “ОИЯИ – България”.

А. Доклади на международни конференции

1. Pavlina Atanasova, Todor Boyadjiev, Bifurcations of the Magnetic Flux in Long Josephson Junctions, Second International Pamporovo Winter Workshop on Cooperative Phenomena in Condensed Matter devoted to Quantum phases and phase transitions, Pamporovo, Bulgaria, 28th July - 7th August 2001.
2. P.H. Atanasova, T.L. Boyadjiev, Partial Stability and Bifurcations of the Vortices in Twofold Josephson Junctions, 6th International Congress on Mathematical Modeling, Nizhni Novgorod, Russia, 20-26 september 2004.
3. Атанасова П. Х., Бояджиев Т. Л., Моделирование критических кривых для двухслойных джозефсоновских контактов, ХLI Всероссийской конференции по проблемам математики, информатики, физики и химии, Москва, Россия, апрель 2005.
4. Атанасова П. Х., Бояджиев Т. Л., Земляная Е.В., Шукринов Ю.М., Устойчивость и бифуркации магнитного потока в джозефсоновских контактах, описываемых двойным уравнением sine-Gordon, Stability and bifurcations of magnetic flux distributions in Josephson junctions, describing by double sine-Gordon equation, International Conference “Mathematical Modeling and Computational Physics”, 7-11 July, Dubna (LIT), 2009.
5. P.Kh. Atanasova, E.V.Zemlyanaya, T.L.Boyadjiev, Yu.M.Shukrinov, Numerical investigation of the second harmonic effects in the LJJ, Fifth International Conference on Finite Difference Methods: Theory and Applications, June 28 - July 2, 2010, Lozenetz, Bulgaria.
6. P.Kh. Atanasova, E.V.Zemlyanaya, T.L.Boyadjiev, Yu.M.Shukrinov, Influence of second harmonic on stability of magnetic flux in LJJ, describing by double sine-Gordon equation, International conference “Dubna-Nano2010” , Dubna, Russia, July 5-10, 2010
7. P.Kh. Atanasova, E.V.Zemlyanaya, T.L.Boyadjiev, Yu.M.Shukrinov, Stability analysis of magnetic flux in the LJJ model with double sine-Gordon equation, Seventh International Conference on Numerical Methods and Applications August 20 - 24, 2010, Borovets, Bulgaria

8. П.Х. Атанасова, Численное исследование нелинейных моделей в физике джозефсоновских контактов, DIAS-TH, 30 января - 6 февраля, Дубна, Россия, 2011

Б. Доклады на семинари

1. Атанасова П. Х., Димова С.Н., Бояджиев Т.Л., Численное моделирование критических зависимостей для двухслойных джозефсоновских контактов, Семинар по вычислительной и прикладной математике, ЛИТ, ОИЯИ, Дубна, Россия, 25 февраля 2005.
2. Атанасова П. Х., Бояджиев Т. Л., Структура бифуркационных кривых для двухслойных симметричных джозефсоновских контактов, Семинар по вычислительной физике, ЛИТ, ОИЯИ, Дубна, Россия, 15. Декабрь, 2005.
3. Атанасова П. Х., Бояджиев Т. Л., Земляная Е.В., Шукринов Ю.М., Численное моделирование длинных джозефсоновских контактов, описываемых двойным уравнением sine-Gordon, Семинар, ЛИТ, ОИЯИ, Дубна, Россия, 04. 06. 2009.
4. П.Хр.Атанасова, Т.Л.Бояджиев, Е.В.Земляная, Ю.М.Шукринов, Изменение на устойчивости на распределения на магнитный поток в ДДК под влияние на вторую гармонику в модели с 2SG-уравнение, Научный семинар по прикладной математике и моделированию, Факультет математики и информатики, Пловдивский университет, Блгария 13.05.2010г.
5. П.Хр. Атанасова, Е.В. Земляная, Ю.М. Шукринов. Численный анализ модели LJJ с учетом второй гармоники в разложении джозефсоновского тока, Семинар, ЛИТ, ОИЯИ, Дубна, Россия, 05 август 2010 г.

Публикации по темата на дисертацията

[А] Реферирани списания

1. Числено моделиране на критичните зависимости за двухслойни джозефсонови контакти:

[A1_1] (IF 0.134) **Атанасова, П.Х.**, С.Н. Димова, Т.Л. Бояджиев. Численное моделирование критических зависимостей для симметричных двухслойных джозефсоновских контактов // Журнал вычислительной математики и математической физики (ЖВМиФМ), Vol.46, No. 4, 2006, 700 – 714 // Computational Mathematics and Mathematical Physics, Volume 46, Number 4, April 2006, 666 – 679.

[A1_2] **Атанасова, П.Х.**, С.Н. Димова, Т.Л. Бояджиев. Численное Моделирование критических зависимостей для двухслойных джозефсоновских контактов // Препринт Объединенного Института Ядерных Исследований, Дубна, P11-2005-162, 2005.

[A1_3] **Атанасова, П.Х.**, Т.Л. Бояджиев. Моделирование критических зависимостей для двухслойных джозефсоновских контактов // Scientific Report of the Laboratory of Information Technologies, 2004–2005. Dubna: JINR, 2005.

2. Построяване на критичните криви за двухслойни джозефсонови контакти:

[A2_1] **Атанасова, П.Х.**, Т.Л. Бояджиев, Л.А. Севастианов. Построение критических кривых для двухслойных джозефсоновских контактов // Вестник Российского Университета Дружбы Народов, No 1, 2006, 49-54.

[A2_2] **Атанасова, П.Х.**, Т.Л. Бояджиев. Построение критических кривых для двухслойных джозефсоновских контактов // Препринт Объединенного Института Ядерных Исследований, Дубна, P11-2005-143, 2005.

3. Устойчивост и бифуркации на магнитния поток в джозефсонови контакти, описвани с двойно sine-Gordon уравнение:

[A3_1] **Атанасова, П.Х.**, Т.Л. Бояджиев, Е.В. Земляная, Ю.М. Шукринов. Устойчивость и бифуркации магнитного потока в джозефсоновских контактах, описываемых двойным уравнением sine-Gordon // Вестник Российского Университета Дружбы Народов, Math, № 2 (2), 2010, 108-112.

- [A3_2] **Atanasova, P.Kh.**, E.V.Zemlyanaya, T.L.Boyadjiev, Yu.M.Shukrinov. Numerical analyze of LJJ, describing by double sine-Gordon equation // LIT Scientific report 2008-2009, ed by Gh.Adam, V.V.Ivanov, V.V.Korenkov, T.A.Strizh, P.V.Zrelov, Dubna: JINR, 2009, 182-183, (in Russian).

4. Числено моделиране на дълги джозефсонови контакти, описвани с двойно sine-Gordon уравнени:

- [A4_1] (**IF 0.023**) **Атанасова, П.Х.**, Т.Л. Бояджиев, Е.В. Земляная, Ю.М. Шукринов. Численное моделирование длинных джозефсоновских контактов, описываемых двойным уравнением синус-Гордона // Журнал Математического моделирования, том 22(11), 2010, 49-64

- [A4_2] **Атанасова, П.Х.**, Т.Л. Бояджиев, Е.В. Земляная, Ю.М. Шукринов. Численное моделирование длинных джозефсоновских контактов, описываемых двойным уравнением синус-Гордона // Препринт Объединенного Института Ядерных Исследований, Дубна, P11-2010-8, 2010.

5. Influence of second harmonic on stability of magnetic flux in LJJ, describing by double sine-Gordon equation:

- [A5] **Atanasova, P.Kh.**, E.V.Zemlyanaya, T.L.Boyadjiev, Yu.M.Shukrinov and Paul Seidel. Influence of second harmonic on stability of magnetic flux in LJJ, describing by double sine-Gordon equation // International conference "Dubna-Nano2010 Dubna, Russia, July 5-10, 2010. Journal of Physics: Conference Series, Volume 248, 2010, ID 012044 (<http://arxiv.org/abs/1007.4778>).

6. Numerical study of magnetic flux in the LJJ model with double sine-Gordon equation:

- [A6] **Atanasova, P.Kh.**, E.V.Zemlyanaya, T.L.Boyadjiev, Yu.M.Shukrinov. Numerical study of magnetic flux in the LJJ model with double sine-Gordon equation // Seventh International Conference on Numerical Methods and Applications August 20 - 24, 2010, Borovets, Bulgaria - LNCS 6046, pp. 347-352. Springer, Heidelberg, 2011 (<http://arxiv.org/abs/1005.4796>).

[Б] Нереферирани списания

- [Б1] **Атанасова, П.Х.**, С.Н. Димова, Т.Л. Бояджиев. Численное моделирование критических зависимостей для двухслойных джозефсоновских контактов // Сообщение Объединенного Института Ядерных Исследований, Дубна, P11-2005-16, 2005.

[B] Сборник на конференция

- [B1] **Atanasova, P.Kh.**, E.V.Zemlyanaya, T.L.Boyadjiev, Yu.M.Shukrinov. Numerical investigation of the second harmonic effects in the LJJ // Fifth International Conference on Finite Difference Methods: Theory and Applications, June 28 – July 2, 2010, Lozenetz, Bulgaria - <http://arxiv.org/abs/1005.5691>.

Библиография

- [1] Березин, Н.С., Е.П. Жидков, Методы вычислений – М., Наука, 1960.
- [2] Бояджиев, Т.Л. Численное исследование критических режимов в нелинейных полевых моделях физики, Дисс. на соиск. уч. степени д.ф.м.н., Дубна, 2002.
- [3] Воротников, В.И., В.В.Румянцев. Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения – М.: Научный мир, 2001.
- [4] Гальперн, Ю.С., А.Т. Филиппов. Связанные состояния солитонов в неоднородных джозефсоновских переходах // ЖЭТФ, Т. 86, вып. 4 (1984), с. 1527; Sov. Phys. JETP, **59** (1984), 894.
- [5] Гельфанд, И.М., С.В. Фомин. Вариационное исчисление – М.: Наука, 1961.
- [6] Ермаков, В.В., Н.Н. Калиткин. Оптимальный шаг и регуляризация метода Ньютона // ЖВМиМФ, **21**, No 2, 1981, с. 491.
- [7] Земляная, Е.В., И.В. Барашенков. Численное исследование многосолитонных комплексов в нелинейном уравнении Шрёдингера с диссипацией и накачкой // Математическое моделирование. 2004. Т. 16, № 10, 3–14.
- [8] Лихарев, К.К. Сверхпроводящие слабые связи: стационарные процессы – УФН, 1979, Т. 127, 185.
- [9] Лихарев, К.К. Введение в динамику джозефсоновских переходов – Москва, “Наука”, ГРФМЛ, 1985.
- [10] Ортега, Дж., В. Рейнболдт. Итерационные методы решения нелинейных систем со многими неизвестными: Пер. с англ. – М.: Мир, 1975, 558.
- [11] Allgower, E.L., Georg K. Numerical continuation methods. – New-York: Elsevier, 1990.
- [12] Buzdin, A., A.E. Koshelev. Periodic alternating 0-and π -junction structures as realization of φ -Josephson junctions // Phys. Rev. B Vol.67, 220504(R), 2003.
- [13] Goldobin, E., D. Koelle, R. Kleiner and A. Buzdin. Josephson junctions with second harmonic in the current-phase relation: Properties of φ junctions // Phys. Rev. B. **76**, 2007, 224523.
- [14] Goldobin, E., Н. Kohlstedt, A.V. Ustinov. Tunable phase locking of stacked Josephson flux-flow oscillators // Appl. Phys. Lett. 1996. V. 68. Is. 2, 250–252.

- [15] Goldobin, E. and A.V. Ustinov. Current locking in magnetically coupled long Josephson junctions // Phys. Rev. B. 1999. V. 59. № 17, 11532–11538.
- [16] Golubov, A.A., M.Yu. Kypriyanov, E. Il'ichev. The current-phase relation in Josephson junctions // Rev. Mod. Phys., V76, 411, Apr 2004, 411.
- [17] Hatakenaka, Noriyuki, Hideaki Takayanagi, Yoshiro Kasai, Satoshi Tanda. Double sine-Gordon fluxons in isolated long Josephson junction // Physica B, Vol.284–288, 2000, p. 563-564.
- [18] Likharev, K.K. Dynamics of Josephson Junctions and Circuits – Gordon and Breach, New York, 1986. – 634
- [19] Nevirkovets, I.P., J.E. Evetts, M.G. Blamire. Transition From Single Junction to Double Junction Behavior In Sisis- Type Nb-Based Devices // Phys. Lett. A. 1994. V. 187. Is. 1, 119–126.
- [20] Nishida, Munehiro, Kyoko Murata, Toshiyuki Fujii, and Noriyuki Hatakenaka. Time dilation of a bound half-fluxon pair in a long Josephson junction with a ferromagnetic insulator // Phys. Rev. Lett. Vol.99, 207004, 16 November 2007.
- [21] Roose, D. et al., Continuation and Bifurcations: Numerical techniques and applications. (Eds.) – Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1990.
- [22] Ryazanov, V.V., V.A. Oboznov, A.Yu. Rusanov et al. Coupling of Two Superconductors through a Ferromagnet: Evidence for a π Junction // Phys. Rev. Lett., Vol. 86, 2001, p.2427.
- [23] Seydel, R. From equilibrium to chaos. Practical bifurcation and stability analysis. – New-York: Elsevier, 1988. – 376 c.
- [24] TRIDIB – translation of the ALGOL procedure BISECT, Num. Math. 9, 386-393(1967) by Barth, Martin, and Wilkinson. Handbook for Auto. Comp., vol.ii – linear algebra, 249-256, 1971.