# РЕЦЕНЗИЯ

от дтн Васил Георгиев Ангелов,
професор в Минно-геоложки университет „Св. И. Рилски“
Минно-електромеханичен факултет
ръководител катедра „Математика“
за дисертационния труд
на тема
**„Дробни диференциални уравнения с разпределено закъснение“**

с автор

**Магдалена Асенова Веселинова**

за придобиване на образователната и научна степен „доктор“ по:

Област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика;

Професионално направление 4.5. Математика;

Докторска програма Диференциални уравнения

## ОБЩО ОПИСАНИЕ НА ПРЕДСТАВЕНИТЕ МАТЕРИАЛИ

Със заповед № РЗЗ–6000/16.12.2016 г. на Ректора на Пловдивския университет „Паисий Хилендарски“ съм определен за член на научното жури във връзка с процедурата за защита на дисертационния труд на тема „Дробни диференциални уравнения с разпределено закъснение“ за придобиване на образователната и научна степен „доктор“ по: Област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика; Професионално направление 4.5. Математика; докторска програма Диференциални уравнения от Магдалена Асенова Веселинова – редовен докторант към катедра „Математически анализ“ на Факултета по математика и информатика (ФМИ) при Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“.

Докторантката е представила следните материали:

1. Автобиография по европейски формат;
2. Диплома за висше образование ПУ-2013, у.и. № 53010, регистрационен № 1883 от 13.10.2013 с приложение към нея;
3. Заповед № Р33-802/25.02.2014 г. за зачисляване в докторантура;
4. Заповед № 106/06.04.2015 г. за провеждане на изпит за докторантски минимум;
5. Протокол от 17.04.2015 г. за издържан докторантски минимум;
6. Заповед № Р33-5351/25.11.2015 г. за смяна на научните ръководители – проф. дмн Степан Иванов Костадинов и проф д-р Андрей Иванов Захариев с доц. д-р Христо Стефанов Кискинов;
7. Протокол № 7/28.10.2016 г. на КС за откриване на процедура за предварително

обсъждане на дисертационния труд;

8. Заповед № Р 33-5165/07.11.2016 г. за разширяване на КС във връзка с предварителното обсъждане на дисертационния труд;
9. Заповед № Р 33-5475/23.11.2016 за отчисляване от докторантура с право на защита;
10. Протокол №8 от 09.12.2016 на КС за предваеително обсъждане на дисертационния труд;
11. Списък на всички публикации;
12. Дисертационен труд с декларация за оригиналност;
13. Автореферат;
14. Копия на публикациите по темата на дисертацията
15. Служебна бележка от НПД за участие в научни и научно-приложни проекти;
16. Декларация за оригиналност и достоверност на приложените документи;
17. Справка за специфичните изисквания на ФМИ при ПУ.

## КРАТКИ БИОГРАФИЧНИ ДАННИ ЗА ДОКТОРАНТКАТА МАГДАЛЕНА АСЕНОВА ВЕСЕЛИНОВА

Родена е на 13.07.1989 г. Завършила е висше образование бакалавър „Информатика“ в ПУ „П. Хилендарски“ през 2012 г. След това завършва магистратура „Бизнес информатика с английски език“ през 2013 г. пак в ПУ “П. Хилендарски”.

Има три придобити квалификации в “Oracle University” и една в “Global Knowledge”.

От януари 2012 г. до момента е хоноруван асистент в ПУ “Паисий Хилендарски“.

Със заповед на Ректора на ПУ “П. Хилендарски“ № Р 33-802/25.02.2014 г. Магдалена Веселинова е зачислена като редовен докторант Област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика; Професионално направление 4.5. Математика; докторска програма Диференциални уравнения към катедра „Математически анализ“ на Факултет по математика и информатика (ФМИ) при Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“ със срок на обучение 3 години, считано от 01.03.2014 г. до 01.03.2017 г. За научни ръководители са определени проф. дмн Степан И. Костадинов и проф д-р Андрей И. Захариев и тема на дисертационния труд „Дробни диференциални уравнения с разпределено закъснение“. По-късно със заповед на Ректора № Р 33-5351/25.11.2015 г. научните ръководители са заменени с доц. д-р Христо Стефанов Кискинов.

## ОБЩА ХАРАКТЕРИСТКА НА ДИСЕРТАЦИЯТА

Настоящата дисертация е посветена на изследването на системи дробни диференциални уравнения с разпределено закъснение. Дробните производни са в смисъл на Риман-Лиувил и на Капуто. Решават се следните задачи: намиране на достатъчни условия за съществуване и единственост на решение на началната задача за неутрални системи линейни дробни диференциални уравнения с разпределено закъснение в случаите на рационално съизмерими и несъизмерими редове на диференциране; изследвани са и уравнения с производни от разпределен ред относно дадена плътностна функция като разпределените дробни производни се базират на производната на Капуто; намерени са и достатъчни условия за глобална асимптотична устойчивост на различни класове от споменатите уравнения. Решаваните в дисертацията задачи са ясно формулирани в шест точки.

## ОБЩА СТУКТУРА НА ДИСЕРТАЦИЯТА

Дисертацията се състои от увод, три глави, заключение, публикации по дисертационния труд и използвана литература. Обемът на работата е 121 страници. Списъкът на авторските публикации е от четири заглавия. Една от статиите е публикувана в списание с импакт фактор, останалите статии са публикувани в списания с импакт ранг.

В Увода след кратко въведение в тематиката са формулирани основните задачи на дисертацията.

Глава 1 съдържа обзор на получените резултати в теорията на дробните диференциални уравнения. Дадени са дефинициите на дробните производни на Риман-Лиувил и Капуто и техните основни свойства. Дадени са определенията и свойствата на някои известни специални функции, които се използват по-нататък в изложението. Формулирани са накратко получени резултати от различни автори, които по-нататък се обобщават.

Основните приноси в дисертацията се съдържат в Глава 2 и 3, поради което ще се спрем по-подробно на получените там резултати.

Глава 2 се състои от два раздела: 2.1 и 2.2.

В раздел 2.1 е разгледана начална задача за неутрална система дробни диференциални уравнения с разпределени закъснения и с производна на Риман-Лиувил. В подраздел 2.1.1 е разгледана неутрална система линейни дробни диференциални уравнения с разпределено закъснение с рационално несъизмерими редове на диференциране:

$$D_{0+}^{\alpha_k}\left[x_k(t)-\sum_{j=1}^{n}\int_{-\tau}^{0}x_j(t+\theta)d_\theta v_k^j(t,\theta)\right]=\sum_{j=1}^{n}\int_{-\sigma}^{0}x_j(t+\theta)d_\theta u_k^j(t,\theta)+f_k(t);\; k=1,2,\dots,\; n,$$

където производната е в смисъл на Риман-Лиувил. За ядрата са изпълнени условията (S), които се използват при доказателството на теоремата за съществуване и единственост. Специално условията в (S6) не са формулирани ясно и те трябва да се подразбират. Функцията на Хевисайд има в аргумента си две променливи. Изход от ситуацията има при малко по-друго формулиране на условията – по-скоро преозначаване на функциите.

Съществена роля играят Дефиниции 2.1.1.1 и 2.1.1.2. В първата се въвежда непрекъснатост на функции с особеност в нулата, което е предпоставка за въвеждане на подходяща метрика в пространство от такива функции. След това е формулирана Лема 2.1.1.1, която дава възможност за свеждане на началната задача към задача за интегрално уравнение по аналогия с известния случай за обикновени диференциални уравнения. Тя е валидна при условията (S). След въвеждането на подходяща метрика в пространството от $\alpha-$непрекъснати функции, следва формулировката на важната Теорема 2.1.1.1. Нейното съдържание е, че при условията на Лема 2.1.1.1 съществува единствено непрекъснато локално решение на началната задача. Доказателството се базира на теоремата на Банах за свиващите изображения в пространство от сингулярни функции с подходящо въведена метрика в него. Това е безспорен принос в дисертацията.

**Забележка.** Пропуск на изложението е, че не е коментирано (може би още в Увода) каква е връзката между непрекъснатост и дробна диференцируемост. Както е известно не всяка непрекъсната функция е диференцируема в общоприетия смисъл. При дробното диференциране поради конвулюционния характер на дефиницията се оказва, че диференцирането е възможно даже при сумируема функция (вж. [77], [40]), което придава смисъл на Лема 2.1.1.1.

В раздел 2.2 са разгледани автономни неутрални системи дробни диференциални уравнения с рационално несъизмерими редове на диференциране. Доказан е аналог на класическия резултат – ако всички корени на въведения аналог на характеристично уравнение имат отрицателни реални части, то неутралната дробна хомогенна линейна система е глобално асимптотично устойчива. В случая, когато системите не са от неутрален тип, са получени достатъчни условия за глобална асимптотична устойчивост, базирани на устойчивостта на случая без закъснения.

В подраздел 2.2.1 се разглежда системата

$$D_{0+}^{\alpha_k}\left[x_k(t)-\sum_{j=1}^{n}\int_{-\tau}^{0}x_j(t+\theta)d_\theta v_k^j(t,\theta)\right]=\sum_{j=1}^{n}\int_{-\sigma}^{0}x_j(t+\theta)d_\theta u_k^j(t,\theta)+f_k(t);\ k=1,2,...,\ n\,.$$

Лема 2.2.1.1 съдържа доказателство на едно обобщено неравенство на Белман-Гронуол. С нейна помощ е доказана Теорема 2.2.1.1, която при условия (S), дава оценка на решението на началната задача за последното уравнение. Основен резултат е Теорема 2.2.1.2, която гарантира глобално асимптотично устойчивост на решението при отрицателни реални части на корените на характеристичното уравнение. Техниката на доказателството се основава на трансформацията на Лаплас.

В подраздел 2.2.2 са дадени експлицитни условия за устойчивост на неутрални дробни системи с разпределени закъснения. Въведени са подходящи матрични функции $\Phi(p)$ и $G(p)$, чиито детерминанти дават обобщени характеристични уравнения на системата. След няколко леми, които дават оценки на характеристичните корени в комплексната равнина, се стига до Теорема 2.2.2.1. Тя гласи, че ако са изпълнени част от условия (S), $\mu(\Phi(p))<0$ и $\det G(p)>0$, то системата е глобално асимптотично устойчива.

В подраздел 2.2.3 са получени условия за устойчивост на автономни линейни системи с разпределени закъснения:

$$D_{0+}^{\alpha_k}x_k(t)=\sum_{j=1}^{n}\int_{-\sigma}^{0}x_j(t+\theta)d_\theta u_k^j(t,\theta)+f_k(t);\ k=1,2,...,\ n\,.$$

Формулирани са условия (P), аналогични на условия (S).

Теорема 2.2.3.2 е доказана при условия (P) и условия, свързани с геометричното разположение на характеристичните корени. Тя гарантира глобална асимптотична устойчивост на решението на последната система. Следват няколко полезни следствия.

В Глава 3 са разгледани аналогични на Глава 2 въпроси, но с производна на Капуто. Тя се състои от два раздела. Първият се състои от два подраздела, докато вторият − от четири.

В раздел 3.1 са намерени достатъчни условия за съществуване и единственост на решението на началната задача за неутрална система с линейни дробни диференциални уравнения с разпределено закъснение с производни на Капуто. Формулирани са и достатъчни условия за съществуване и единственост на решение на началната задача за същите системи, но с производни от разпределен ред относно дадена плътностна функция.

В подраздел 3.1.1 се разглежда началната задача за системата

$$D_{0+}^{\alpha_k}\left[x_k(t)-\sum_{j=1}^{n}\int_{-\tau}^{0}x_j(t+\theta)d_\theta v_k^j(t,\theta)\right]=\sum_{j=1}^{n}\int_{-\sigma}^{0}x_j(t+\theta)d_\theta u_k^j(t,\theta)+f_k(t);\ k=1,2,...,\ n$$

с производни на Капуто. За ядрата са формулирани условия (T), аналогични на условията (S) от Глава 2. Основен резултат е Теорема 3.1.1.1, която гарантира съществуване и единственост на непрекъснато решение на горната система. Доказателството е пропуснато, защото е аналогично на това на Теорема 2.1.1.1.

В подраздел 3.1.2 се разглежда системата

$$D_{0+}^{\alpha_k}x_k(t)=\sum_{j=1}^{n}\int_{-\sigma}^{0}x_j(t+\theta)d_\theta u_k^j(t,\theta)+f_k(t);\ k=1,2,...,n\ ,$$

където производната е на Капуто. След няколко помощни твърдения се стига до Теорема 3.1.2.1 , която гарантира единствено непрекъснато решение, в случай, че то съществува.

Следва Теорема 3.1.2.2 , в която е доказано съществуване на непрекъснато решение. Използвана е класическата техника на доказателство: дефиниране на подходящ оператор във функционално пространство и прилагане на принципа на Банах.

В раздел 3.2 се разглежда проблемът за устойчивост на автономни линейни дробни системи с разпределени закъснения. Техниката на изследване е Лапласовата трансформация. В общи линии схемата на изследване повтаря разглежданията от Глава 2, поради което няма да се спирам по-подробно.

## ОСНОВНИ НАУЧНИ ПРИНОСИ В ДИСЕРТАЦИЯТА

В основни линии приемам претенциите на докторантката за приносите в дисертацията, а именно:

1. Намерени са достатъчни условия за съществуване и единственост на решението на началната задача за: неутрални системи линейни дробни диференциални уравнения с разпределено закъснение за дробни производни на Риман-Лиувил (съответно на Капуто) и с рационално несъизмерими редове на диференциране (Глави 2 и 3) и за системи линейни дробни диференциални уравнения с производни от разпределен ред относно дадена плътностна функция и с разпределени закъснения с дробни производни на Капуто (Глава 3).
2. Формулирани са достатъчни условия за глобална асимптотична устойчивост на автономни неутрални системи дробни диференциални уравнения с

разпределени закъснения с рационално несъизмерими редове на диференциране. Резултатите и са и за двата вида дробни производни.

3. Намерени са достатъчни условия за глобална асимптотична устойчивост на автономни линейни системи дробни диференциални уравнения с производни от разпределен ред относно дадена плътностна функция.
4. Намерени са експлицитни условия за глобална асимптотична устойчивост на линейни автономни системи дробни диференциални уравнения с разпределени закъснения с рационално съизмерими и несъизмерими редове на диференциране.

## КРИТИЧНИ БЕЛЕЖКИ И ПРЕПОРЪКИ

Критичните бележки в общи линии ги споменах в хода на изложението на анализа на дисертацията. Пропускам някои технически грешки, които неизбежно се появяват във всяка статия.

Искам да отбележа, че в дисертацията не фигурира никакъв съществен пример от приложенията. Няма даже и илюстративен пример. Така че като основна препоръка за бъдещата работа на докторантката е да изследва такива примери, които биха могли да я насочат и за изграждането на теорията.

## ПУБЛИКАЦИИ НА ДОКТОРАНТКАТА И ОЦЕНКА НА АВТОРСКОТО УЧАСТИЕ В ПОЛУЧАВАНЕ НА ПРИНОСИТЕ

Авторството на докторантката в представените трудове е неоспоримо, тъй като те са написани в един и същи начин на изложение. Приносът в съавторските публикации е оценим и не оставя място за съмнения.

Статиите на докторантката, свързани с дисертацията, са 4 броя. Една статия е публикувана в международно списание с импакт фактор и три статии публикувани в списания с импакт ранг.

Авторефератът отразява правилно получените резултати, като са подчертани основните приноси.

Получените резултати са докладвани на няколко математически конференции, отбелязани в края на автореферата.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Направените критични бележки по дисертацията не намаляват нейната стойност. Те трябва да се разглеждат като насока за бъдещото развитие на докторантката. Оценката ми за дисертационния труд, автореферата, научните публикации и научните приноси на Магдалена Асенова Веселинова е **положителна.**

Представеният дисертационен труд отговаря на всички изисквания, условия и критерии по Закона за развитието на академичния състав в Република България (ЗРАСРБ), Правилника за прилагане на ЗРАСРБ, ПРАС на ПУ и специфичните изисквания на Факултета по математика и информатика при Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“ по ПРАС на ПУ.

На базата на получените резултати предлагам да бъде присъдена образователната и научна степен **„доктор“** на **Магдалена Асенова Веселинова** по: Област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика; Професионално направление 4.5. Математика; Докторска програма Диференциални уравнения.

25.01.2017 г.

Подпис:

/............................................/