ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ
„ПАИСИЙ ХИЛЕНДАРСКИ”

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
КАТЕДРА „ОБУЧЕНИЕ ПО МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА И ИНФОРМАЦИОННИ ТЕХНОЛОГИИ”

Катерина Лазар Аневска

ФОРМИРАНЕ НА ЗНАНИЯ И УМЕНИЯ ЗА ТРАНСФОРМАЦИИ В ЕВКЛИДОВАТА РАВНИНА ЧРЕЗ КОМПЛЕКСНИ ЧИСЛА В СРЕДНОТО УЧИЛИЩЕ

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертационен труд
за присъждане на образователната и научна степен „доктор”
Област на висшето образование: 1. Педагогически науки
Професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по...
Докторска програма: Методика на обучението по математика

Научни ръководители: проф. д.п.н. Сава Иванов Гроздев
проф. д-р Пенка Петрова Рангелова

Рецензенти:

ПЛОВДИВ
2015

Дисертационният труд е обсъден и насочен за защита на разширено заседание на катедра „Обучение по математика, информатика и информационни технологии” при Факултета по математика и информатика на ПУ „Паисий Хилендарски” на N^0 30-2014/15.

Дисератационният труд „Формиране на знания и умения за трансформации в евклидовата равнина чрез комплексни числа в средното училище“ содържа 156 страници и се състои от увод, три глави, заключение, библиография, приложения. Приложенията към него са 19 на брой. Библиографията включва 104 източника. Списъкът на авторските публикации съдържа 9 заглавия.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на ___________. от ____ часа в Заседателната сала на новата сграда ПУ „Паисий Хилендарски”.

Материалите по защитата са на разположение на интересуващите се в секретариата на ФМИ, нова сграда на ПУ, кабинет 330 всеки работен ден от 8:30 до 17:00 часа.

Използвани съкращения:

ЕГ	Експериментална група
ЕП	Експериментална програма
КГ	Контролна група
КП	Контролна програма
ТКС	Тест на Колмогоров-Смирнов

СЪДЪРЖАНИЕ

Обща характеристика на дисертационния труд

Актуалност на разглеждания проблем

Настоящите и бъдещите реформи на образователната система в Македония трябва да са съобразени с тенденциите за нейното включване в Европейския съюз, т.е. стремежът е кандидатският статут да се материализира в пълноправно членство. Следователно пътят, по който трябва да се движи образованието в Македония през следващия период, т.е. в двадесет и първи век, трябва да бъде в насоките, които са определени от изискванията на Европейския съюз. Освен това при бъдещи промени в образователната система трябва да се имат предвид Стратегията за развитие на образованието на Република Македония, Лисабонската стратегия и редица други документи, които се отнасят до образователната система.

Според Лисабонската стратегия, знанията и уменията са социален капитал, за който обществото трябва непрекъснато да се грижи, което е една от причините и за въвеждане на обучение през целия живот, но и постоянното оценяване на съществуващата образователна система и нейното адаптиране към нуждите на обществото. В тази посока е и стратегията на Европейския съюз, която се стреми към изграждане на Европа на знанието, като се подчертае значението на образованието, иновациите и изследванията, както за индивидуалното развитие на индивида, така и за подготовката му за успешно професионално развитие и включване в социалните потоци. Ясно е, че по този начин не само се осигурява реализация на индивида, но и се увеличава знанието и умението на обществото като цяло, което е необходимо, за да се преодолеят предизвикателствата на съвременното информационно общество. Последното само по себе си изисква промяна на съдържанието и методите, които се използват при реализацията на учебно-образователния процес.

Мотиви за избор на дисертационното излесдване

Държавните органи, професионалните сдружения, свързани с образованието, и учителите полагат големи усилия за успешното интегриране на Република Македония в Европейското образователно пространство. Дълъг период от време сме свидетели на множество реформи в образованието на Македония, с цел подобряване на цялостната образователна система, а оттам и на обучението по математика. Проучванията, които провеждат международните професионални асоциации, показват, че въпреки проектите за модернизация на образованието, от които голяма част се отнасят точно до обучението по математика, резултатите не са задоволителни. Това особено се отнася до готовността на учениците от средното училище успешно да се включат в обучението на техническите факултети, както и да приложат придобитите знания. Оттук идва и необходимостта за промяна на учебните програми по математика в отделните сегменти с цел:

- Да се подобри вътрешно-предметната интеграция на часовете по математика;
- Учениците да придобиват трайни и приложими знания;
- Да се подобри готовността на учениците за успешно включване в по-високите образователните нива.

Постигането на посочените цели е цялостна и комплексна задача, за чиято реализация е необходимо да се преразгледат всички учебни теми, които се изучават в средното образование, което означава пълна реформа на образователната система. Затова в нашите изследвания ще се спрем на въпроса как усвояването на комплексните числа може да допринесе за постигането на желаните цели, с което всъщност се дефинира проблема за изследване, а това е:

Дали придобиването на знания и формиране на умения за трансформации в Евклидовата равнина чрез комплексни числа в средното училище увеличава интеграцията на преподаване и колко същото има принос за подобряване на подготовката на учениците за успешно включване в по-високите образователни нива?

Цели на дисертационното изследване

Дисертационното изследване има четири цели и това:

- *Научна цел* – да се покаже, че с помощта на комплексни числа може да се подобри вътрешно-предметната интеграция на обучението по математика.
- *Теоретична цел* - да се даде пълно разработване на трансформациите в Евклидовата равнина и тяхното прилагане чрез комплексни числа.
- *Методична цел* – да се представи практически модел за изследванията от този вид, който ще бъде приложим и в други случаи.
- *Практическа цел* - на компетентните професионални държавни органи и преподавателите да се предложи парциален инструмент за подобряване на обучението по математика в средното образование.

Обект на изследването

Обект на изледването се учениците од 3. и 4. клас в средното училище.

Предмет на изследването

Предмет на изледването се:

- постиженията на учениците, с които за комплексните числа и тяхното прилагане се получават според съществуващите учебни програми в средното образование в Македония и според предложената ЕП.
- постиженията на учениците за трансформациите в Евклидовата равнина и тяхното прилагане, които те придобиват според съществуващите учебни програми в средното образование в Македония и според предложената ЕП.

Предишните анализи трябва да отговорят на въпроса дали ЕП позволява учениците да получат по-качествени знания и умения, което всъщност означава нейно въвеждане като избирателен предмет в природо-математическата гимназиална А-посока, в която избираемите предмети са от областта на математиката и информатиката.

Хипотези на изследването

Предмета, целите на изследването, предварителните наблюдения и теоретичният анализ позволяват да дефинираме своите предвиждания в следните работни хипотези:

Първа основна хипотеза. ЕП позволява придобиване на по-трайни знания и умения, отколкото съществуващите учебни програми, т.е. увеличава способността на учениците за включване в по-високите нива на образование.

Първа помощна хипотеза. ЕП позволява придобиване на по-високи знания и умения относно комплексните числа в сравнение със съществуващите учебни програми.

Втора помощни хипотеза. ЕП позволява придобиване на по-високи знания и умения за трансформации в Евклидовата равнина, техните свойства и алгебрична структура в сравнение със съществуващите учебни програми.

Трета помощна хипотеза. По отношение на прилагането на придобитите знания при решаването на проблеми, свързани с мерната характеристика на геометричните фигури, учениците, с които е реализирана ЕП, постигат по-добри резултати от учениците, с които са реализирани съществуващите програми.

Четвърта помощна хипотеза. По отношение на прилагането на придобитите знания при решаването на конструктивни задачи учениците, с които е реализирана ЕП постигат по-добри резултати от учениците, с които са реализирани съществуващите програми.

Втора основна хипотеза. ЕП повишава вътрешно-предметната интеграция на обучението по математика.

Очаквани резултати от изследването

Изследването трябва да осигури:

- Да се получат знания за степента на възможна вътрешно-предметна интеграция на обучението по математика в частта на комплексни числа, алгебричните структури и Евклидовата равнинна геометрия.
- Да се докаже, че чрез предложената ЕП учениците получават качествени знания и умения, което всъщност ще оправдае въвеждането на дисциплината като избирателна програма в природо-математическата гимназиална А-посока.
- Да се даде оценка за това дали и доколко прилагането на комплексни числа в изучаването на трансформации в Евклидовата равнина допринася не само за по-доброто им усвояване, но и за придобиване на трайни знания и умения по математика.

Методи на изследването

- *сравнителния метод* - в частта на анализа на съществуващите учебната програма по математика в средното образование;
- *анализ и синтез* - в частта на анализа на основни знания за комплексните числа, с които придобиват учениците и тяхното приложение за подготовката им при успешно включване във факултетите,
- *статистическия метод*, при обработката на резултатите от тестовете на учениците;
- *генерализацията и систематизирането*, в частта на заключителните съображения.

Използван инструментариум

- Тест 1 на тема Комплексни числа,
- Тест 2 на тема Трансформации в Евклидовата равнина,
- Тест 3 на тема Решаването на проблеми, свързани с мерната характеристика на геометричните фигури,
- Тест 4 на тема Решаването на конструктивни задачи,
- Анкетен въпросник за учители и Анкетен въпросник за студенти.

Кратко съдържание на дисертационния труд

Дисертационният труд е структуриран по следния начин: въведение, три глави, заключение, библиография и приложения.

Глава 1. „Знанието и неговото оценяване“ е посветена на знанието и неговото оценяване, т.е. разработва се декларативното и процедурното знание, както и характеристиките на знанието. Освен това в тази глава е даден преглед за проверка на знанията и мониторинга на постиженията на учениците, както и тяхното оценяване. В края на тази глава се разглеждат диференциацията и интеграцията на преподаване, които се прилагат в училище, тъй като въвеждането на избираеми предмети е точно в експлоатация на диференциацията и интеграцията на преподаването.

В параграф 1.1. „Знания, видове знания“, са разработени понятията декларативното и процедулно, като е направен опит за тяхното пълно разграничаване. Освен това, в следващите съображения е даден кратък преглед на умеенията и възможностите за по-долу са представени характеристиките на знанието, което е взета класификацията на И. Й. Лърнър *честота на знанията, дълбочината на причинно-следствените връзки, обобщеност, конкретност, систематичност, системност, развитие и плътност на знанията, гъвкавост, хадеждност, оперативност* и *осъзнатост*.

В параграф 1.2. „Проверка на знанията и мониторинг на постиженията на учениците“, са разработени принципите и целите на проверката. Също така е даден преглед на функциите на проверката, т.е.е подчертано, че това е:*контролна, информационна, превантивна, оперативна и Функция за образователен стимул.* Освен това, в този параграф са разработени и видовете проверка според времето на реализация и необходимостта от проверка. Така накратко са разработени диагностичната, формативната, сумативната и ипсативната проверка, при която се посочени и основните принципи, на които трябва да се основават тези видове проверка. В края на този параграф е даден преглед на начините и формите на проверка на знанията на учениците, като отделно са разработени предимствата и недостатъците на устната и писмената проверка на учениците.

В параграф 1.3. „Оценка на постиженията на учениците“, се разработват целите функциите и принципите на проверката, като за оценката е прието, че трябва да се основава на следните принципи: *гъвкавост, непрекъснатост, обективност, прозрачност и индивидуализация и диференциация.* Се разработват целите функциите и принципите на проверката, като за оценката е прието, че трябва да се основава на следните принципи:

В параграф 1.4. „Критерии за оценяване на постиженията на учениците в Република Македония“, са представени стандартите за оценяване на учениците в Република Македония, които са изградени в съответствие с Блумовата таксономия. При това, за всяка оценка е дадено процентуално съотношение което трябва да достигне всеки ученика във всяко от четирите нива на Блумовата таксономия. Също така са представени и сумативните постижения на ученика на ниво програма, които за оценка 2са от 26-39%, за оценка 3 от 40-63%, за оценка 4 от 64-76% и за оценка 5 над 77%. Освен това, за да стане ясно при какви критерии са оценявани учениците на тестовете, използвани в експеримента, е подчертано, че в учебните програми са планирани цели и от другите области за развитието на личността на ученика, учителят трябва да поеме грижата за мотивация на ученика, активността в уроците, както и за ролята на ученика в преподаването. Тези елементи също са неразделна част от оценката, но те не трябва да имат подчертано влияние, което ще пренебрегва системата на приети знания и умения от когнитивната зона. Затова, учителят при оформяне на главна оценка може да увеличи или намали същата най-малко 0,25 от една степен по скалата за оценяване, в зависимост от посочените елементи, които се отнасят до мотивацията, редовността и активността на ученика.

В параграф 1.5. „Диференциация и интеграция на обучението“, е даден кратък обзор на диференцията и интеграцията на преподаване, като отделна е подчертана интеграцията, за която са представени и няколко примера. Така, като се тръгне от идеята, че комплексните числа трябва да подобрят внатрешнопредметната интеграция на часовете по математика са дадени три характерни примери отнасящи се на това.В следният пример говорим за межупредметната интеграция на преподаването т.е интеграция на преподаването между математиката и биологията: **Пример.** В природо-математическата гимназиална А-посока, в IV годината на обучението по биология се изучават елементи от генетиката. Обаче темата не е в корелация с обучението по математика, въпреки че за това са налице всички предпоставки. Именно в часовете по математика се изучават комбинации и елементи от теорията на вероятностите, така че без трудности могат да се обработват следните въпроси:

1. Стохастичен характер на законите на генетиката;
2. Взаимно действие на гените;
3. Елементи на генетиката на населението и формула на Харди-Вайнбърг;
4. Популацията под въздействието на избор и разпределение на "ценни" гени в популацията;
5. Мутациите в популации, малки популации. ■

Глава 2. „Методични бележки за усвояването на геометрията на комлексните числа“ се разработват елементи от методиката на изучаването на комплексни числа в средното образование. При това особено внимание се отделя на метода на координатите, изучаването на подобията и движенията в Евклидовата равнина чрез комплексни числа, както и прилагането на същите при решаване на метрични задачи. В този раздел е даден и опит за методично-дидактическо разрешаване на проблема за въвеждането на понятието експоненциален запис на комплексно число, което има ключово значение при изучаването на подобията и движенията.

В параграф 2.1. е дадена ЕП според която е реализаран експеримента и което представлява основа за разработката на параграфите, съдържащи се в тази глава.

ЕКСПЕРИМЕНТАЛНА УЧЕБНА ПРОДГРАМА

ИДЕНТИФИКАЦИОННИ ДАННИ

Название на учебния предмет: *Геометрия на комплексните числа*
Вид на средно образование: *гимназиално*
Година на изучаване: четвърта
Брой часове:
- Брой часове седмично: 2 часа
- Брой часове годишно: 72 часа

Състояние на учебния предмет*:* *избираем*

ЦЕЛИ НА УЧЕБНАТА ПРОГРАМА

Общообразователна цел на обучението по предмета Геометрия на комплексните числа е учениците да получат напреднали знания за комплексни числа. Тези знания, умения и навици включват:
- да подобри вътрешно-предметната интеграция на обучението по алгебра и геометрия в средното образование;
- разработване на устното и писменото математическо изразяване, което трябва да бъде просто, ясно и всеобхватно;
- приемане на математически методи за осъзнаване на реалната действителност, което предполага развитие на качествата на мисленето, и по-специално на еластичността, важността, дълбочината и съответствието на мисленето;
- получаването на навици за активно себепознание в работата и тяхното използване в обучението с помощта и самостоятелното учене;
- придобиване самочувствие за прилагане на приетите математически умения при намиране, използване и представяне на математически аргументи.

Практическата цел на обучението по предмета *Геометрия накомплексните числа* е учениците да придобият знания, умения и навици за прилагане на придобитите знания и методи в ежедневието и в свързаните науки. Осъществяването на тази цел е възможно само ако на учениците постоянно се посочват възможности за прилагане на придобитите знания във физиката, техниката, решаването на задачи от ежедневния живот и други подобни.

Специфичните цели, които трябва да се постигнат при изучаването на предмета *Геометрия на комплексните числа*:
- да разбира комплексното число като набор от подредени двойки реални числа, да приеме структурата на множеството комплексни числа и да приеме алгебричния запис на комлексното число;
- да знае понятието конюгирано комплексно число и операции с комплексни числа;
- да знае геометричната интерпретация на комплексното число и геометричната интерпретация на събирането и изваждане на комплексни числа;
- да знае тригонометричния и експоненциалния запис на комплексно число, кореннуването на комплексни числа и геометричната интерпретация на умножението, делението и коренуването на комплексни числа;
- да знае различни видове уравнение на права и окръжност в комплексна форма, както и разстоянието от точка до права;
- чрез комплексни числа да се запознаят с преките подобия в Евклидовата равнина, техните групови свойства, както и образите на права, ъгъл и окръжност при пряко подобие;
- да знае Римановата интерпретация на комплексно число;
- чрез комплексни числа да се запознаят с движенията в Евклидовата равнина, тяхната класификация и груповите свойства на различните подгрупи движения;
- чрез комплексни числа да се запознаят с хомотетията, инверсията и трансформацията на Мобиус, техните геометрични и групови свойства;
- чрез комплексни числа да се запознаят с непреките подобия, подобия, непреките изометрии и изометриите и техните групови свойства;
- чрез комплексни числа да се запознаят със степента на точка относно на окръжност, радикалната ос, радикалния център и сноп окръжности, както и тяхната класификация;
- чрез комплексни числа да се запознаят с геометрията на триъгълник (ортоцентър, център на описаната и вписаната окръжност, Ойлерова права, Ойлерова окръжност, медиана, лице на триъгълник и т.н.);
- чрез комплексни числа дасе запознаят с теоремите на Талес, Питагор, Манелай , Дезарг, Паскал, Чева, Ван Марк, Ойлер, Стюарт, Симсън, Птолемей, Аполоний, Лагранж, Лайбниц, Брокар и Нютон.

НЕОБХОДИМИ ПРЕДИШНИ ЗНАНИЯ

За постигане на поставените цели в обучението по предмета Геометрия на комплексните числа са необходими знания от задължителните предмети Математика за първа, втора и трета година и от избирателния предмет елементарна алгебра от първа година и за:

- множеството на реалните числа и необходимостта от неговото разширяване с множеството комплексните числа (математика - втора година);
- математическата индукция и Биномната формула (математика - трета година);
- квадратни уравнения (математика - втора година);
- тригонометрични функции и техните свойства (математика - трета година);
- експоненциалната функция и нейните свойства (математика - трета година);
- полиноми с реални коефициенти (алгебра - трета година, не е задължително);
- ос на симетрия и централна симетрия, ротация и транслация (математика - основно образование);
- конструкция на геометрични фигури (математика - втора година);
- площ на равнина фигура (математика - втора година).

1. Комплексни числа (16 часа)

Съдържание	**Конкретни цели**	**Дидактически насоки**
- комплексно число като подредени двойки реални числа, равенство на комплексни числа; - операции с комплексни числа, свойства; - модул на комплексно число, свойства на умножението; - алгебричен запис на комплексно число; - имагинерна единица, свойства, реална и имагинерна част на комплексно число; - конюгирано комплексно число, свойства и коефициент на комплексни числа; - неравенство на триъгълника; равенство на успоредник и неравенство на Коши-Буняковски- Шварц; - геометрична интерпретация на комплексно число, афикс на точка в Евклидова равнина; - разделяне на отсечка в дадено съотношение; - стереографска проекция, Риманова интерпретация на	- дава дефиниция на комплексното число ; - определя равенство на комплексните числа; - дава определение за събиране и умножение на комплексните числа; - доказва комутативния, асоциативния и дистрибутивния закон; - доказва свойствата на $n=(0,0)$ и $e=(1,0)$; - доказва съществуването на обратно число при събиране и определя разликата на комплексни числа; - определя модул на комплексно число и доказва неговите свойства: - доказва, че от $zw = n$ следва $z = n$ или $w = n$; - доказва закон за съкращаване на събирането и умножението на комплексни числа; - доказва съществуване и уникалност на реципрочна стойност на комплексно число $z \neq n$; - доказва, че изображението f: $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$, $f(a) = (a, 0)$ е инекция; - дава определение за имагинерна единица; - определя алгебричен запис на комплексно число и идентифицира реална и имагинерна част от комплексно число; - дава определение за конюгирано комплексно число; - доказва свойствата на конюгираните комплексни числа свързани с умножението и събирането на комплексните числа и модул комплексно число; - изразява определение за частното на комплексните числа и доказва, че $\|z/w\| = \|z\|/\|w\|$; - изразява и доказва неравенството на триъгълника; - изразява и доказва неравенството на Коши-Буняковски-Шварц; - възприема връзката между имагинерната и реалната част на комплексното число от точка в правоъгълна координатна система;	- учениците са запознати с комплексните числа, така че при излагането на материала, от тази част трябва да се използва дедуктивния метод, с използване на индуктивен метод, където това е необходимо, - преди да се премине към излагане на материала е необходимо на учениците да се напомнят понятията бинарна операция, полугрупа, неутрален елемент, инверсен елемент, група, комутативна група и поле. - приемането на геометричната интерпретация на комплексното число, операциите събиране, изваждане, умножение и деление на комплексни числа трябва да е съпътствано с добри геометрични илюстрации, а това особено се отнася на n-те корени на единицата и Бернулиевата спирала, - при доказване на свойствата на функцията $f(t)=\cos(t)+i\sin(t)$ трябва да се отбележи, че това не е доказателство за формулата $e^{it}=\cos(t)+i\sin(t)$а това е само оправдание на записа, - при разработката на Римановата сфера и стереографската проекция може да възникнат трудности, защото учениците нямат необходимите знания от аналитичната геометрия в пространството, затова е желателно тази част да се илюстрира с модели на разглобяване съставен от две равнини и една сфера, която се пресича с равнина, която

комплексно число; - -Разширена комплексна равнина, разстояние; - образ на права и окръжност при стереографска проекция; - аргумент на комплексно число, основна стойност; - тригонометричен запис на комплексно число, операции; - формула на Моавър; кореннуване на комплексно число, n-ти корени на единицата, примитивни n-ти корени на единицата; - експоненциален запис на комплексено число, операции; - формули на Ойлер, геометрична интерпретация на умножението и делението на комплексни числа - Бернулиева (логаритмична) спирала; - множеството $\mathbf{C}^n$, дефиниция и операции в $\mathbf{C}^n$; - скаларен(външен) произведение в$\mathbf{C}^n$.	- обяснява понятието комплексна равнина и представлява комплексно число в комплексна равнина; - представлява комплексно число с вектор и го обяснява; - да забелязва сравнително връзката между векторно представяне на комплексното число и неговия модул; - събира и изважда комплексни числа векторно представени; - с помощта на комплексните числа разделя отсечката в дадено съотношение; - да се дефинира стереографската проекция на точка з въз Римановата сфера S; - да се дефинира понятието разширена комплексна равнина и да се знае намирането на разстояние в разширената комплексна равнина; - да се даде дефиниция за аргумент на комплексно число и основната му стойност; - да се определи тригонометрическия запис на комплексното число и доказва формулата на Моавър; - да се определят *n*-те корени от единица и обяснява тяхното геометрическо значение; - да се определи примитивен n-ти корен от единица; - да се доказват свойствата на функцията f: $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$, $f(t) = \cos(t) + i\sin(t)$; - да се определи експоненциалния запис на комплексното число и изразява операциите умножение и деление на комплексните числа с помощта на експоненциалния запис; - да се дадат формулите на Ойлер; - да се обясни геометричното представяне на умножаване и деление с комплексно число; - да се определи множеството $\mathbf{C}^n$, операциите събиране в $\mathbf{C}^n$ и умножение на елемент от $\mathbf{C}^n$ с комплексно число и доказва техните свойства; - да се решават задачи от първи и втори тип във връзка с въведените понятия и доказаните свойства	преминава през пола, - да се внимава за избора на задачите, при което е необходимо, - да се илюстрира намиране на четвърти корен от комплексно число без прилагане и с прилагането на формулата на Моавър, - решаването уравнения да бъде илюстрирано със задачи от втори тип, а същото се отнася за доказване идентичности и неравенства, - да се илюстрира значението на комплексните числа в теория на полиноми с реални коефициенти, - да се илюстрира прилагането на формулата на Моавър и експоненциалния запис на комплексно число при изчисляването на сбор и произведение. - да се използват различни подходи за разбиране на задачата: четене на целия текст на задачата и анализ, след това анализ на важни етапи от решаването на задачата, посочване на модели за решаване на определени видове задачи и други подобни - от учениците се изисква самостоятелно създаване план за решаване на задачи, - се извършва писмена проверка на постиженията на целите в определени етапи от реализацията на темата, - чрез анализ на направените пропуски в писмените проверки се създават проблемни ситуации, а за тяхното решаване се настоява за самостоятелна работа или работа в групи, - подобно се анализират грешките, които учениците правят при изработването на домашните задачи

2. Трансформации в Евклидова равнина (28 часа)		
Съдържание	**Конкретни цели**	**Дидактически насоки**
- уравнение на права, комплексен ъглов коефициент и огледална точка; - ъгъл между две прави, колинеарни и нормални прави; - точка симетрична по отношение на права,	- знае уравнението на права зададена с точка, симетрична на координатното начало по отношение на правата; - знае определение за комплексен ъглов коефициент на права и огледална точка; - знае уравнение на права през две точки; - знае условие за колинеарност на три точки; - намира ориентиран ъгъл между две прави; - с помощта на комплексни ъглови коефициенти	- учениците в предишните курсове са запознати с повечето понятия, които са ползвани в тази част, затова е желателно излагането на материала да е дедуктивно, с помощта на индуктивният метод, - цялостното излагане на мате-

симетрала на отсечка; - уравнение на права през две точки, автоконюгирано уравнение на права, разстояние от точка до права; - уравнение на окръжност, уравнение на окръжност през три точки; - автоконюгирано уравнение на окръжност, Аполониева окръжност; - взаимно отношение на права и окръжност; - уравнения на тангенти и хорда на единична окръжност, успоредност, нормалност и пресичащи точки. - пряко подобие, групови свойства, център на преките подобия, характеризиране на преките подобия; - изображение на права, окръжност и отсечка при пряко подобие, пряко подобни фигури; - движение, група свойства; - класификация на движенията, групови свойства; - инволютивно изображение, свойства; - хомотетия, свойства, група хомотетии и транслация; - изображение на права и окръжност при хомотетия, хомотетичност на произволна окръжност; - неподвижни прави и окръжности при преките подобия;	изразява условие за успоредност и нормалност на две прави; - намира точка, симетрична на дадена точка по отношение на дадена права; - намира симетрала на отсечка; - записва дадено уравнение на права в автоконюгиран вид. - намира разстояние от точка до права; - записва уравнение на окръжност с даден център и даден диаметър; - записва уравнение на окръжност с даден диаметър; - намира център на окръжност, която минава през три неколинеарни точки; - дадено уравнение на окръжност вписва в нейната автоконюгирана форма; - изразява и записва условията за взаимно отношение на права и окръжност; - съставя уравнение на тангента в дадена точка на окръжност, и по-специално на единичната окръжност; - вписва условие за нормалност на хорда на единичната окръжност; - намира пресечната точка на две прави, които пресичат единичната окръжност с точки с афикси *a, b* и *c, d*; - намира ортоголнална проекция на точка върху права, която пресича единичната окръжност; - намира сечение на тангенти, които преминават през крайни точки на хордата, която не е диаметър; - определя преки подобия; - доказва груповите свойства на множеството от преки подобия; - доказва необходимото и достатъчно условие за определение на преки подобия; - намира изображения на права и окръжност при пряко подобие, акцентиращо върху успоредни и нормални прави и ориентиран ъгъл; - определя ъгъл и коефициент на пряко подобие; - определя пряко подобни фигури; - доказва необходимо и достатъчно условие за пряка подобност на триъгълници; - определя неподвижна точка (център) на пряка подобност; - доказва свойства на тангентите на изображението на тангента към окръжност при пряко подобие; - определя движение; - доказва груповите свойства на множеството от движения; - класифицира движенията и доказва груповите свойства на отделни подмножества от множеството движения; - определя инволютивно движение и характеризира инволютивните движения; - определя хомотетия;	риала трябва да е подкрепено с подходящи примери и чертежи, - реализирането на съдържанието застъпено в тази тема трябва да бъде подкрепено с помощта на подходящ програмен пакет, като Геоалгебра и т.н., - при изучаването на преките и непреките подобия специално внимание трябва да се обърне на класификация на същите. - при изучаването на движенията и непреките изометрии специално внимание трябва да се обърне на груповите свойства и идентификацията на отделните подгрупи на групата движения, както и на геометрическото значение на същите, - при изучаването на преките и непреките подобия, т.е. на движенията и непреките изометрии от особено значение е учениците съзнателно да приемат с колко двойки придружени точки същите са определени, - при изучаването на пряко и непряко подобни фигури, от особено значението на учениците да се обясни процедурата, с която всяка окръжност се изобразява в единичната окръжност $\|z\| = 1$ и с ротация всяка точка от единичната окръжност може да се изобрази в точката (1,0), - при изучаването на хомотетията е необходимо да се илюстрира процедурата за намиране изображение на точка, права и окръжност и същата да се прилага при решаване на конструктивни задачи, с което на практика ще се подобри вътрешно-предметната интеграция на учебния процес, - при изучаването на инверсията задължително трябва да се разработи процедура за

- свойство на центровете на хомотетия на три окръжности с неколинеарни центрове и различни радиуси; - непряко подобие, свойства, характеризиране на непреките подобия; - изображение на права, окръжност и отсечка при непряко подобие, непряко подобни фигури; - набор подобия, групови свойства - непряка изометрия, изометрии, група свойства на изометриите; - неподвижна точка, неподвижна права и неподвижна окръжност при непряко подобие, оси на непряко подобие; - инверсия, окръжност на инверсия, свойства на инверсията; - изображение на права и окръжност при инверсия, неподвижни прави и не подвижна окръжност при инверсия, ортогонална окръжност; - Трансформация на Мобиус, групови свойства, неподвижна точка за трансформацията на Мобиус; - кръгово качеството на трансформацията на Мобиус; - симетрични точки спрямо окръжност; - характеризиране на трансформацията на Мобиус; и - изображение на единичния кръг в	- доказва, че две произволни окръжности са хомотетични; - доказва свойства на хомотетията свързани с изобразяване на права; - определя неподвижна права и неподвижна окръжност по отношение на пряко подобие; - определя преки подобия, които имат неподвижни прави и неподвижни окръжности; - определя външен и вътрешен център на хомотетия и доказва свойства, свързани с тях; - определя непреки подобия и доказва свойства на композициите на преките и непреки подобия; - определя прилики и доказва груповите свойства; - характеризира непреките подобия; - определя изображение на права, окръжност и ориентиран ъгъл при непреки подобия; - определя косвено подобни фигури; - доказва критерий за непряко подобие на два триъгълника; - определя косвена изометрия и изометрия; - доказва груповите свойства на множеството изометрии; - класифицира инволютивните изометрии; - определя неподвижна точка (център) за непряко подобие и определя непреките подобия, които имат неподвижни точки; - определя неподвижни прави и неподвижни окръжност на непряко подобие и определя неподвижни прави и окръжности на ос на симетрия; - доказва, че непряко подобие, която не е изометрия има две взаимно нормални фиксирани (неподвижни) прави (оси на непряко подобие); - определя инверсия и доказва, че нейни неподвижни точки са само точки от окръжността на инверсия; - доказва, че инверсията е инволютивна; - доказва свойства на изображение на точка по отношение на окръжност на инверсия и изгражда изображение на точка при инверсия; - намира изображение на права, окръжност и ориентиран ъгъл при инверсия и реализира тяхна ефективна геометрична конструкция; - определя сечение на права и окръжност и сечение на две окръжности под ъгъл и доказва, че при инверсия тези ъгли се даспазват; - намира неподвижни окръжности при инверсия; - определя трансформация на Мобиус и доказва груповите свойства на множеството трансформации на Мобиус; - вписва преобразуването на Мобиус като композиция на елементарни трансформации и като композиция на инверсия и непряко подобие; - доказва кръговото свойство на трансформацията на Мобиус; - дефинира симетрични точки в окръжността и доказва неговите свойства свързани о трансформа-	ефективна конструкция на изображението на точка, права, ъгъл и окръжност и да решат определен брой конструктивни задачи с което отново ще се увеличи вътрешно-предметната интеграция на учебния процес, - при изучаването на трансформацията на Мобиус особено се настоява за доказването на груповите свойства, - приемането на геометричните свойства на трансформацията на Мобиус трябва да бъде подкрепено с ясни ефективни чертежи, - при изучаването на трансформацията на Мобиус от особена важност учениците съзнателно да приемат с колко двойки придружени точки същата е определена, - от особена важност за всяка от разгледаните трансформации учениците осъзнателно да приемат неподвижните точки, прави и окръжности и същите да могат нагледно да илюстрират, - използват се различни подходи за разбиране на задачата: четене на целия текст на задачата и неговия анализ, след това анализ на важни етапи от решаването на задачата, посочване на модели за решаване някои видове задачи и други подобни, - от учениците се изисква самостоятелно създаване на план за решаване на задачи, - настоява се на строгост и прецизност при решаването на конструктивни задачи, - се извършва писмено проверка на постижения на целите в определени етапи от реализацията на темата, - чрез анализ на направените пропуски в писмените проверки се създават проблемни ситуации, а за

единичен кръг и трансформацията на Мобиус.	цията на Мобиус; - определя симетрични точки по отношение на окръжност и доказва своите качества, свързани с трансформацията на Мобиус; - определя неподвижна (фиксирана) точка за трансформацията на Мобиус и доказва свойства за неподвижните точки; - доказва геометрична категоризация на трансформацията на Мобиус; - решава задачи от първи и втори тип във връзка с въведените понятия и доказаните свойства.	тяхното решаване се настояване индивидуална или групова работа , - подобно се анализират грешките, които учениците правят при изработването на домашните задачи.

3. Геометрия на окръжност и триъгълник (28 часа)		
Съдържание	**Конкретни цели**	**Дидактически насоки**
- централен и периферен ъгъл на окръжност, теорема на Талес, ъгъл между хорда и тангента; - степен на точка относно окръжност, свойства, антихомотетичен и точки; - радикална ос и радикален център; - свойства на радикалната ос, окръжност; - сноп окръжности, радикален център на сноп окръжности; - ортоцентър и медицентър на триъгълник, средна отсечка на триъгълника, медицентър на четириъгълник; - Теорема на Лайбниц, - правоъгълен триъгълник, Питагорова теорема; - Ойлерова права, Ойлерова окръжност, Ойлерова точка; - точка на	- определя централен и периферен ъгъл на окръжност и доказва свойствата на същите; - доказва теоремата на Талес; - определя тангентни отсечки към окръжност от точка и доказва тяхното равенство; - доказва равенство на ъгъл между тангента и хорда и периферния ъгъл над хордата; - определя степен на точка спрямо окръжност; - определя антихомотетични точки и доказва свойствата на същите; - определя допиране на окръжност на две окръжности по същия и различен начин и доказва свойства на същите; - определя радикална ос и доказва нейните свойства; - определя окръжност, която пресича дадена окръжност и доказва свойства за окръжностите, които едновременно пресичат две окръжности; - определя радикален център и конструира радикална ос на две окръжности; - обяснява защо без ограничение на общността при изучаването на триъгълник можем да считаме, че той е вписан в единичната окръжност; - определя ортоцентър на триъгълник; - изчислява афикса на ортоцентъра на триъгълник с помощта на афиксите на върховете и доказва свойства свързани с ортоцентъра, височините и страните; - определя медицентър на триъгълник; - изчислява афикса на медицентъра с помощта на афиксите на върховете на триъгълника и доказва свойства, свързани с медицентъра, медианите и страните; - определя медицентър на четириъгълник и изчислява неговия афикс с помощта на афиските на върховете на този четириъгълник; - изразява и доказва теоремата на Лайбниц; - определя правоъгълен триъгълник и доказва неговите свойства; - знае и доказва Питагоровата теорема; - доказва съществуването на Ойлеровата права; - доказва свойството на комплексни ъглови коефи-	- учениците в предишните курсове са запознати с повечето понятия, които са ползвани в тази част, заради това е желателно излагането на материала да е дедуктивно, с помощта на индуктивния метод където това е необходимо, - цялостното излагане на материала трябва да е подкрепено с подходящи примери и чертежи, - реализирането на съдържанието представени в тази тема трябва да бъде подкрепено с помощта на подходящ програмен пакет, като Геоалгебра, - настоява се на точни доказателства на теоремите, които доказателства трябва да бъдат придружени със съответните чертежи, - реализирането на съдържанията представени в тази тема трябва да бъде подкрепено с помощта на подходящ програмен пакет, като Геоалгебра, - настоява се на точни доказателства на теоремите, които доказателства трябва да бъдат придружени със съответните чертежи; - по възможност, е желателно да се направи сравнение между доказателствата на теоремите с помощ на комплексни числа и класически доказателства в Евклидовата геометрия, което е особено важно да при теоремите на Менелай и Чева, - задължително трябва да се решат редица конструктивни задачи за триъгълник, които трябва да бъдат в функция на увеличаване на вътрешно-предметната интеграция,

Менелай, теорема на Менелай; - перспективни и полярни триъгълници, теорема на Дезарг, теорема на Паскал; - триъгълни координати, - теорема на Чева, прави на Чева; - теорема на Ван Обел; - положително ориентиран триъгълник (многоъгълник), отрицателно ориентиран триъгълник (многоъгълник), площ на триъгълник (многоъгълник); - вписана и описана окръжност на триъгълник, точка на Жергон, точка на Нагел, теорема на Ойлер; - теорема на Стюарт, медиана; - теорема на Симсън, права на Симсън; - теорема на Птолемей, коциклични точки, неравенство на Птоломей; - скаларно произведение, теорема на Аполоний, теорема на Лагранж; - теорема на Брокар; - теорема на Нютон.	циенти на Ойлерова права и страните на триъгълника; - доказва съществуването на Ойлерова окръжност и Ойлерова точка; - определя точка на Менелай; - изразява и доказва теоремата на Менелай; - дефинира полярни и перспективнитриъгълници; - знае и доказва теоремата на Дезарг; - знае и доказва теоремата на Паскал; - въвежда триъгълни координати в комплексната равнина и доказва съществуването и уникалността на представянето на точка с помощта на същите; - знае и доказва теоремата на Чева; - определя отсечка (прави) на Чева и доказва свойства на същите; - знае и доказва теорема на Ван Обел; - доказва формулата за лице на триъгълник; - определя положително и отрицателно ориентиран триъгълник; - доказва теоремата за връзката между лицата и съответните страни на подобни триъгълници; - определя положително и отрицателно ориентиран многоъгълник; - доказва съществуването на вписаната окръжност в триъгълник и изчислява нейния радиус и афикс на центъра; - доказва съществуването на точката на Жергон; - доказва съществуването на вписаните окръжности на триъгълник и изчислява техните центрове и радиуси; - доказва съществуването на точката на Нагел; - извежда уравненията на ъглополовящите на вътрешните ъгли на триъгълник; - изразява и доказва теоремата на Ойлер за центровете и радиусите на вписаната в и описаната окръжност около триъгълник; - изказва и доказва теоремата на Стюарт; - определя медиана на триъгълник и доказва свойства на медианите; - изказва и доказва теоремата на Симпсън; - определя правата на Симпсън и изпълнява нейното уравнение; - изказва и доказва теоремата на Птолемей; - определя коцикличност на четири точки; - доказва необходимото и достатъчно условие за коцикличност или колинеарност на четири точки; - доказва неравенството на Птолемей; - определя скаларно произведение; - доказва необходимо и достатъчно условие за нормалност на два вектори; - изказва и доказва теоремата на Аполоний; - определя барицентър; - изказва и доказва теоремата на Лагранж и теоремата на Лайбниц като нейно следствие; - изказва и доказва теоремите на Брокар и Нютон;	- при решаването на конструктивната задачи е необходимо да се настоява за реализиране на отделните етапи: анализ, конструкция, доказателство и дискусия, като както и при решаването на останалите задачи специално внимание ще се обърне на допълнителна работа върху задачата, - прилагането на формулата за лице на многоъгълник да бъде последвано от подходящ геометричен чертеж, от който ще се види, че в случай на вдлъбнатия многоъгълник част от площта в сбора се появява три пъти, като два пъти е с един и веднъж с обратен знак, а частта, която е извън многоъгълника се появява веднъж с един, а след това с обратен знак и той се отменя, - при изучаването на барицентъра, теоремата на Лагранж и теоремата на Лайбниц е необходимо да се установи връзка с физиката (механика), - необходимо е въвеждането на триъгълните координати да бъде съпътствано с подходящи коментари - използват се различни подходи за разбиране на задачата: четене на целия текст на задачата и анализ, след анализ на важни етапи от решаването на задачата, посочване на модели за решаване определени типове задачи и т.н.; - от учениците се изисква самостоятелно създаване план за решаване на задачи, - изисква се строгост и прецизност при решаването на построителни задачи; - настоява за взискателност и прецизност при решаването на конструктивни задачи; - чрез анализ на направените пропуски в писмените работи се създават проблемни ситуации, а за тяхното решаване се настоява за индивидуална или групова работа; - подробно се анализират грешките, които учениците правят при изработване на домашните задачи.

Дейности на учителя. Реализирането на часовете по този предмет от учителя иска да запази ролята на традиционния учител, при което до определена степен извършва трансфер на знания. Това е необходимо поради прилагането на дедуктивния метод на излагане на материала, учителя трябва всеки повод да използва да бъде организатор, координатор, инструктор и лидер за обмен на опит, инициатор за създаване на проблемни ситуации и др.

Дейности на ученика. Дейността на ученика произтичащи пряко от начина на осъществяване на учебния процес, освен в случаите, когато е необходима групова работа, дейността на ученика трябва да е отражение на индивидуалната (самостоятелна) работа. Ученикът ще анализира проблеми, самостоятелно ще решава задача, ще обяснява или доказва възгледи, ще провежда изследвания и други. Всички дейности на ученика са с цел той да се превърне в централен орган в учебния процес, което ще го мотивира към самообучение и самооценка

Организация и реализация на учебния процес. Учебният процес по избираемия предмет ***Геометрия на комплексните числа*** е специализиран и е предназначен за учениците, които проявяват особен интерес към математиката и точните науки. Следователно е необходимо обучението да се организира в специализирана стая, при което е необходимо да се осигури използването на подходяща информационна поддръжка и използването на подходящ програмен пакет. Тя ще се основава на активното участие на ученика в създаването, управлението (анализ) и разрешаването на проблеми и ситуации, които се отнасят до съдържанието на учебната програма, и по-специално в частта на решаването задачи, които по правило трябва да бъдат задачи от втори тип, с минимално участие на задачите от първи тип.

След оценка на учителя, в посока на постигане на целите на обучението ученикът от време на време ще изготвя самостоятелни работи под формата на една или повече задачи за решаване, а в рамките на обучението по предмета самостоятелно ще реализира и някои проектни задачи.

Учителят ще извършва глобално, тематично и дневно планиране на учебния процес , което ще съдържа описание на неговите дейности и на дейностите на учениците. Подготовката на учителя за час, въпреки описанието на дейността на учителя и ученика, ще означава и допълнителни мотивационни компоненти за ученикът чрез обмислени дейности.

Учебни средства. За постигане на целите на обучението по предмета Геометрия на комплексните числа е необходимо експертно разработено и планирано прилагането на различни учебни средства, и преди всичко: модели, образи, чертежи, графики, след изделията: табло, компютър с подходящи програмни пакети, интерактивна дъска, достъп до интернет и LCD прожектор.

Учебници и учебни помагала за учениците. За реализацията на тази учебна програма е необходимо изготвянето на адекватен учебник и сборник задачи или просто учебник, в който ще бъде поместена подходяща колекция от решени примери и задачи за самостоятелна работа. Изработка на учебника и колекцията трябва да отговаря на стандартите писани в съответствие с Концепцията за учебници.

Допълнителна литература за учители. Като полезна подкрепа на програмата, е препоръчително учителя да използва подходяща, методична дидактическа литература, да следи експертни списание предназначени за ученици от средното образование, както и съответните интернет страници, на които можете да намерите задачи от различни състезания по математика, считано от общински, регионални, държавни и международни конкурси, включително Международната математическа олимпиада.

Оценка на постиженията на ученика. При оценките на постиженията на учениците е важно да се оценява не само знанията, но и уменията. Що се отнася до знанието е необходимо изработване на измервателни инструменти, които ще оценяват и декларативното и процедуралното знание на ученика. При това оценката трябва да бъде такава, че ще се оценяват всички характеристики на знанието и това: фреквентност, дълбочина, обобщеност, конкретност, систематичност, флексибилност, оперативност и други характеристики на знанието. Последното е възможно, само ако проверката на знанията и мониторинга на постиженията на учениците е планирана системна дейност, която ще идентифицира входните параметри на учебния процес, ще моделира самия процес и ще бележи изходни параметри от учебния процес. Ясно е, че по този начин е необходимо да се осъществява контролната, информационната, превантивната, оперативната и образователно-мотивационна функция за проверка, което означава, че е необходимо проверката да се реализира като: диагностично, формативно, сумативно и ипсативно. В този учебен предмет тези видове проверка могат да се реализират като устно и писмено проверка, при което една от задачите е измерване на знанията на учениците. За тази цел учителят трябва да изработи подходящи измервателни инструменти, които трябва да са валидни, чувствителни, обективни и релиабилни. Независимо кои измервателни инструменти ще използва учителя, се препоръчва по време на учебната година вземане на четири писмени работи, които ще бъдат съставени от задачи от първи и втори тип:

- Първата писмена работа трябва да бъде изработена след завършване на темата Комплексни числа; - Втората писмена работа след изучаването на непреките прилики; - Третата писмена работа да обхваща инверсията, трансформацията на Мобиус, степен на точка на окръжност, радикална ос, радикален център; - Четвъртата писмена работа да обхване геометрията на триъгълник.
Стандарти за учители. Обучението по математика може да извършва лице с: - Завършени проучвания по математика, учебна посока, VII-1 степен и посещаван подходящ семинар за геометрия на комплексното число; - Завършени проучвания по математика, теоретична посока, VII-1 или приложна посока и е придобил педагогическа, психологическа, методично подготовката на подходящ факултет.,
Сстандарти за пространство и оборудване. Помещенията и оборудването за работа с учениците в рамките на обучението по математика трябва да бъдат в съответствие с Рандеманът за учебни средства, и помощи по утвърдения учебни предмет математика, с посочените допълнения.

В параграф 2.2. „Методика на изучаването на комплексните числа“, се въвежда понятието комплексно число като наредена двойка (a,b) от реални числа и за комплексни числа (0,0) и (1,0) се приемат обозначенията n и е, съответно. След това се определя релацията равенство на комплексни числа и операциите събиране и умножение на комплексни числа. За множеството на комплексните числа с така въведените операции събиране и умножение важат комутативните и асоциативните закони, както и дистрибутивният закон на умножение по отношение на събирането. В следващите раздели се доказва, че n и e са нулата и единицата за събиране и умножаване, съответно, и се доказва съществуването на противоположни елементи, след което се въвежда понятието модул от комплексно число, а след това операциите изваждане и делене на комплексни числа. Освен това, желателно е да се докажат законите за съкращаване при умножение и събирането на комплексни числа, а след това да се премине към въвеждане на алгебричен записна комплексно число. Сега, трябва да се докаже, че изображението $f:\mathbf{R}\to\mathbf{C}$ дефинирано с $f(a)=(a,0)$ е биекция на множеството реални числа $\mathbf{R}$ в множеството $A=\{(a,0)\,|\,a\in\mathbf{R}\}\subseteq\mathbf{C}$, която запазва операциите. Затова множеството реални числа $\mathbf{R}$ можем да считаме за подмножество на множеството комплексни числа $\mathbf{C}$, с което сме готови да въведем имагинерна единица и алгебричен записна комплексно число.

В следващите абзаци се въвежда понятието конюгиранокомплексно число и се доказват неговите свойства. При изучаването на комплексните числа е необходимо да се въведе геометричното представяне на комплексно число и да се илюстрира събирането и изваждането на комплексни числа. Също така, в този раздел е необходимо да се илюстрира неравенството на триъгълника, както и геометричното представяне на конюгиранокомплексно число. Освен това, трябва да се въведе понятието аргумент на комплексно число, чието въвеждане е необходимо за въвеждане на полярните координатии тригонометричния записна комплексно число

$$z=|z|(\cos(\arg z)+i\sin(\arg z))\,.$$

Ясно е, че в тази част трябва да се докаже, че

$$\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2+2k\pi\,,\ k=0,\pm1,\pm2,...$$

$$\arg\frac{z_1}{z_2}=\arg z_1-\arg z_2+2k\pi\,,\ k=0,\pm1,\pm2,...$$

след което трябва да следва формулата на Моавър за кореннуване на комплексни числа, т.е. на формулата

$$w=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}(\cos\tfrac{\arg z+2k\pi}{n}+i\sin\tfrac{\arg z+2k\pi}{n})\ ,\ k=0,\pm1,\pm2,...$$

В параграф 2.3. „Въвеждане на експоненциален запис на комплексно число и формули на Ойлер“, се показва дека с помощта на развитията на Тейлър на функциите exp, sin и cos, може във вид на формално тъждество да се получи формулата на Ойлер. Както вече споменахме подобна процедура е неприложима за учениците от средното образование, така че в тази част ще дадем процедура, за която смятаме, че е достъпна за учениците от средното образование и че тя е достатъчна, за да се "убедят " учениците в точността на формулата на Ойлер, за да могат по-нататък да я използват.

Теорема 1. Нека функцията $f:\mathbf{R}\to\mathbf{C}$ е определена с $f(\alpha)=\cos\alpha+i\sin\alpha$, $\alpha\in\mathbf{R}$. Тогава, $f(\alpha)\neq0$, за всеки $\alpha\in\mathbf{R}$, $f(\alpha+\beta)=f(\alpha)f(\beta)$, за всеки $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ и $f(-\alpha)=\frac{1}{f(\alpha)}$, за всеки $\alpha\in\mathbf{R}$.

По-нататък, на учениците съобщаваме, че чрез предходната теорема доказахме, че функцията f удовлетворя ваобичайните свойства на експо-ненциалната функция. Затова е естествено да въведем означението $f(x)=e^{ix}$, за всеки $x\in\mathbf{R}$, с което на практика въведохме формулата на Ойлер (5). Сега, свойствата от Теорема 1, записваме във вида $e^{i\alpha}e^{i\beta}=e^{i(\alpha+\beta)}$, $e^{-i\alpha}=\frac{1}{e^{i\alpha}}$ и на учениците съобщаваме, че от тази формули и принципа на математическа индукция непосредствено следва формулата $(e^{i\alpha})^n=e^{in\alpha}$, за $n=0,\pm1,...$, която самостоятелно трябва да докажат. По-нататък припомняме за тригонометричния запис на комплексно число и правим извода, че всяко комплексно число z, такова, че $|z|=1$ и $\varphi=\arg z$ може да се запише във вида $z=\cos\varphi+i\sin\varphi=e^{i\varphi}$ и че важи $e^{2\pi i}=1, e^{\pi i}=-1, e^{\frac{\pi i}{2}}=i, e^{\frac{3\pi i}{2}}=-i$. Накрая, използвайки свойствата на тригонометричните функции sinи cos (9) заменяйки φ с $-\varphi$, учениците трябва да се уверят във верността на формулата $\cos\varphi-i\sin\varphi=e^{-i\varphi}$, и да получат известните формули на Ойлер: $\cos\varphi=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$, $\sin\varphi=\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2}$, с чиято помощ тригонометричните функции $\cos$ и $\sin$ се изразяват чрез експоненциалната функция. След като са въведение формулите на Ойлер, учениците трябва да си припомнят тригонометричния запис на комплексно число, т.е. $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, където $\varphi=\arg z$ е основната стойност на $\operatorname{Arg} z\in(0,2\pi]$ и да заключат, че всяко комплексно число $z\neq0$ може да бъде написано във вида $z=re^{i\varphi}$, където $r=|z|$ и $\varphi=\arg z$. След това, на учениците се съобщава, че записът (7) на комплексно число $z\neq0$ е т.нар. *експоненциален запис* на z.

В по-нататъшните раздели, следва да се отбележи, че операциите умножение и делене на комплексни числа могат да се запишат по

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \text{ и } \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

След усвояването на експоненциалния запис на комплексно число, е необходимо да се обърне внимание на някои негови предимства, особено при изучаване на движенията и подобия.

В параграф 2.4. „Метод на координатите“, е дадено , че с този метод необходимо е да се приеме, че:

- ако са дадени точки A и B и чиито афикси са z_1 и z_2, съответно, и ако C е точка от отсечката AB, която разделя AB в отношение $\lambda : \mu \neq -1$, тогава тя има афикс $z = \frac{\lambda z_2 + \mu z_1}{\lambda + \mu}$,
- условието за колинеарност на три точки чиито афикси са z_0, z_1 и z_2:
$$\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = \frac{\overline{z_2} - \overline{z_0}}{\overline{z_1} - \overline{z_0}}$$
- различните видове уравнение на права:
- условията за успоредност и ортогоналност на две прави;
- уравнението на перпендикулярна права, прекарана през дадена точка към дадена права;
- уравнението на симетрала на отсечка $\overline{AB}$, чиито крайни точки A и B и имат афикси a и b, съответно
- формулата за разстояние от точка с афикс z_0 до права (p) зададена с нейното уравнение $Az + B\overline{z} + C = 0$, където $C \in \mathbf{R}$ и $B = \overline{A} \neq 0$,
- различните видове уравнения на окръжност, а именно:
- Условията за взаимно положение на права и окръжност, а с това и уравнение на допирателна към окръжност в дадена нейна точка и др.

Имайки предвид изнесеното по-горе, може да се каже, че при прилагането на комплексните числа, метода на координатите всъщност е метод на комплексни координати. Следователно, този подход в равнинната аналитична геометрия, с право, в литературата се нарича и аналитична геометрия в комплексни координати ([85]).

В параграф 2.5. „Задаване на трансформации в евклидовата равнина с помощта на комплексни числа“, се разработва методология на изучаването на трансформации с помощта на комплексни числа, така че с първо се определя пряка прилика, а след това се посочва, че трябва да се :

- докажат груповите свойства на преките подобия;
- докажат, че всяко пряко подобие е определено с две двойки съответни точки;
- разгледат образите на права, успоредни и нормални прави, ъгъл и окръжност при пряко подобие.

След това се задават директно подобни фигури и се доказват техните свойства, в края се разглеждат неподвижните точки и центъра на директно подобие.

Освен това, изучаването на движенията в Евклидовата равнина трябва да започне със следното определение: *Прякото подобие S(z)=az+b, |a|=1 наричаме движение*. За следващите разглеждания да се: изучат груповите свойства на движенията; извърши тяхна класификация; разгледат образите на права и окръжност при всяко отделно движение. Ясно е, че при класифициране на движенията е необходимо да се изучат подгрупите от групата движения и инволютивни движения.

След изучаването на движенията, поради нейното значение, е необходимо отделно да се изучи хомотетията, при което е необходимо да се приеме, че множеството транслации и хомотетии по отношение на композицията на изображение е подгрупа на групата на преките подобия. В по-нататъшните съображения е необходимо да се разгледат: образите на права и окръжност при хомотетия; свойствата на центровете на две хомотетии и тяхната композиция, която не е транслация; неподвижните прави и окръжностипри пряко подобие; свойството на центровете на хомотетии на три кръга с неколинерни центрове и взаимно различни радиуси и др.

Естествено след разглеждането на преките подобия и движенията трябва да се премине към определянето на непреките подобия, т.е. на определението: *Изображението* $S:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$, *определено с* $S(z)=a\bar{z}+b,\ a,b\in\mathbf{C},\ a\neq 0$ *наричаме непряко подобие.* В по-нататък множеството непреки прилики ще обозначаваме с $\boldsymbol{IS}$. Освен това, естествено е да се: разгледат композицията на пряко и непряко сходство, както и композицията на две косвени прилика, даде критерии за ориентация на непряка прилика; разгледат снимките на права, ъгъл и окръжност при непряко подобие; определят индиректно подобни фигури; проучат непреките изометрии и изометриите; докаже, че непряката изометрия е инволютивна, точно когато е ос на симетрия.

Изучаването на трансформации в Евклидовата равнина с помощта на комплексни числа трябва да за завърши с приемането на инверсията. В този раздел е необходимо да се: приеме понятието кръг на инверсия; докаже, че инверсията е инволютивно изображение; представя ефективна конструкция на изображението на точка при инверсия; докаже качеството на ъгъла на инверсията, разгледат образите на права и окръжност при инверсия, неподвижните прави и окръжности; разглеждат понятията за сечение на права и окръжност, два кръга под определен ъгъл и понятието ортогоналниокръжности.

При приемането на предишните знания, от особена важност е учениците да осъзнаят, че редица свойства на геометричните фигури, свързани с права, окръжност и ъгъл се запазват при трансформации на Евклидовата равнина, което в крайна степен позволява при решаване на много задачи, в които дадено изображение вписано в окръжност, без ограничение на общото, да предположим, че окръжността е еднократна. Последното е от особена важност за опростяване на съображенията, които се дължат на простите уравнения на тангента на единичната окръжност, напречното сечение на две тангенти на единичната окръжност, секанта на единична окръжност др.

В параграф 2.6. „Защо е добре учениците да се запознаят със стереографската проекция?“, се обяснява необходимостта учениците да се запознаят с стереографската проекция, с цел по-добре да разберат как права може да се изобрази в окръжност.

В параграф 2.7. „Бележки за прилагането на комплексни числа в геометрията на окръжност и триъгълник“ е разработена методиката за прилагане на комплексните числа при изучаването на геометрията на триъгълник и кръг. При това особено внимание е отделено защото без ограничение на општоста можем да смятаме, че триъгълника е вписан в единичнична окръжност.

Споменатото по-горе ни позволява, след като с помощта на комплексни числа се разгледат всички трансформации в Евклидовата равнина, то прилагането на комплексни числа в геометрията, учениците могат да приемат по следния ред:

- да се докажат твърденията, които са свързани с централен и периферен ъгъл на окръжност, теоремата на Талес, теорема за допирателна, теорема за периферен ъгъл и др.;
- да се даде понятието степен на точка относно окръжност, както и свързаността ѝ с хомотетията;
- да се въведат понятията радикална ос, радикален център и окръжност, пресичаща на половина дадена окръжност, както и твърденията, свързани с тях;
- да се даде понятието сноп окръжности, както и твърденията, свързани с него.

Освен това, от особено значение е учениците да приемат прилагането на комплексните числа при изучаването на геометрията на триъгълник, т.е. с помощта на комплексни числа, за да могат да:

- доказват съществуването на центъра на тежест, ортоцентър, център на описана и център на вписана окръжност;
- доказват теоремите на Лайбниц, Стюарт и Питагор;
- доказват съществуването на Ойлерова права и Ойлерова окръжност, както и твърдения, свързани с тях, както е например, твърдението: *За комплексните ъглови коефициенти* t_1, t_2, t_3 *и* t_4 *на страните и Ойлеровата права на произволен триъгълник важи уравнението*
$$t_1t_2 + t_1t_3 + t_1t_4 + t_2t_3 + t_2t_4 + t_4t_4 = 0\,.$$
- да знаят понятията точка на Менелай и да доказват теоремата на Менелай;
- да знаят понятията перспективен и поляρен триъгълник и да доказват теоремите на Дезарг и Паскал;
- да знаят триъгълните координати и да доказват теоремите на Чева и Ван-Обел, при което е необходимо да знаят понятието (отсечки) прави на Чева и твърденията, свързани с тях;
- да знаят формулите за пресмятане на лице на триъгълник, чийто върхове са с известни афикси;
- да знаят понятията точка на Жергон, точка на Нагел, медиана, права на Симпсън, както и да доказват твърденията, свързани с тях;
- да доказват теоремата и неравенството на Птолемей;
- да знаят тълкуването на скаларното произведение чрез комплексни числа, както и прилагането му при доказване на важни теореми, като теоремите на Аполоний, Лагранж, Лайбниц др.

След усвояването на прилагането на комплексни числа в доказване на предварително посоченото съдържание, от особена важност е учениците да могат да използват метода, който предлагат комплексни числа за решаване на задачи, да го прилагат при решаването на нестандартни задачи, за което от особено значение е учениците да могат в различни ситуации правилно да избират координатната система. Това е важно, тъй като правилният избор на координатната система и прилагането на комплексни числа дава възможност решаването на редица нестандартни геометрични задачи да бъдат сведени до елементарни изчисления, както е показано със следната задача.

В параграф 2.8. „Диференциация и интеграция на преподаването чрез изучаване на геометрията на комплексните числа“ е показано как комплексни числа могат да се използват за внатрешнопредметна интеграция на преподаването по математика. Последното всъщност най-добре може да се направи с изучаване на трансформации в Евклидската равнина, за което е необходимо:

- учителите да придобият още един поглед на тази част от математичния сектор, като в бъдеще ще бъдат в състояние по-качествено да реализират своите работни задължения;
- възприемането на значението на комплексните числа ще бъде стимул на бъдещите учители да се обърне по-голямо внимание при изготвянето на съответно учебно съдържание в средното образование;
- този пример за вътрешно-предметна интеграция положително да повлияе на бъдещите учители непрекъснато да се грижи за вътрешно-предметната интеграция на обучението.

Глава 3. Изследвания съдържа резултатите от експерименталното изследване на ЕГ и КГ, при което е извършена проверка на основните и спомагателните хипотези и са формирани изводи във връзка с реализирания експеримент.

В параграф 3.1. „Методологически подходи и дизайн на изследването“ са разработени образеца на респондентите, изследователните процедури и измервателните инструменти.Поради невъзможността да се получи проста случайна извадка, в периода от 20 януари до 20 май 2014 г. направих експеримент, в който доброволно участваха две групи от по 25 ученици от природо-математическата гимназия А-посока: КГ и ЕГ, от трета и четвърта година от гимназията Йосип Броз Тито в Скопие, който бе реализиран в следните етапи:

- *разделяне на учениците в КГ и ЕГ*, като основен критерий бе групите в предишните години да имат приблизително еднакви математически постижения, т.е. в редовното обучение да са постигнали приблизително равни резултати и учениците от КГ да са посещавали изборния предмет Елементарна алгебра и геометрия;
- *изработка на ЕП* за въвеждане на нов избирателен предмет *Геометрия на комплексните числа*, за която е разработена авторска учебна програма, представена в таблицата в Глава 2.
- според ЕП е написан материал за преподаване и упражнения, който през 2015 е издаден като книга ([37]),
- *избор на съдържание от съществуващите тематични програми* в предметите Математика 1, Математика 2, Математика 3 и Елементарна алгебра и геометрия, с цел оформяне на *КП (Приложение 1)*, която ще бъде сравнена с ЕП,
- с КГ, според съществуващата литература, която се използва в образователната система в Република Македония и книгата [33] от посочената литература, се повтаря съдържанието на КП,

- с ЕГ се реализира ЕП, за която е готова специална книга ([37]), в която на по-високо ниво са разработени комплексни числа и тяхната приложимост в Евклидовата геометрия;
- КП и ЕП бяха разделени в по 4 (четири) сравними части, на които бяха проведени тестове на учениците от двете групи;
- за всяко изпитване е извършена обработка на получените резултати, която обработка включва:
  i) оценка на валидността на теста, т.е. дали постиженията на учениците следват нормалното разпределение,
  ii) сравнение на постиженията на учениците от КГ и ЕГ.

за получаване на знания и оценка на ЕП беше направена анкета с преподавателите от средното образование, а за получаване на знания по определени въпроси от учениците, беше проведена анкета със студенти от I и II г. от Архитектурния факултет и Факултета по информатика при ФОН университета в Скопие.

В параграф 3.2. „Резултати от изследването“ се съдържа обработването на резултатите от проучването, т.е. проверките на основните и спомагателните хипотези. Овде ќе ја презентираме обработката само на резултатите од вториот тест кој беше спроведен со учениците, бидејќи останатите резултати се обработуваат на потполно ист начен.

Вторият тест е направен върху част от учебните програми, свързани с трансформации в Евклидовата равнина. Тестът съдържа 8 задачи, които оценяват постиженията на учениците според пропорционална скала. Както и при първия тест, така и тук се прилага ТКС, с чиято помощ е тествана хипотезата, че постиженията на учениците имат нормално разпределение. Освен това, както и за първия тест и тук, за всяка от дадените задачи са сравнени резултатите на учениците от контролната и експерименталната група и са дадени подходящи изводи за тях.

Таблица 5. ТКС за втория тест на КГ

x_i	n_i	$F_n(x_i)$	$z_i = \frac{x_i - 46}{14}$	$F(x_i)$	$\lvert F_n(x) - F(x) \rvert$
29	1	0,04	-1,21	0,11314	0,07314
30	1	0,08	-1,14	0,12714	0,04714
31	2	0,16	-1,07	0,14231	0,01769
32	2	0,24	-1,00	0,15866	0,08134
35	1	0,28	-0,79	0,21476	0,06524
37	1	0,32	-0,64	0,26109	0,05891
39	2	0,40	-0,50	0,30854	0,09146
41	1	0,44	-0,36	0,35942	0,08058
43	1	0,48	-0,21	0,41683	0,06317
46	1	0,52	0,00	0,50000	0,02000
48	2	0,60	0,14	0,55567	0,04433
50	2	0,68	0,29	0,61226	0,06774
54	1	0,72	0,57	0,71566	0,00434
56	1	0,76	0,71	0,76115	0,00115
60	2	0,84	1,00	0,84134	0,00134
61	1	0,88	1,07	0,85769	0,02231

63	1	0,92	1,21	0,88686	0,03314
68	1	1,00	2,07	0,98077	0,01923

Тестът 2 и резултатите от постиженията на учениците от КГ и ЕГ са дадени в Приложенията 6, 7 и 8, съответно. В Приложение 9 е представена таблица на честотата, на която може да се видят разликите в оценките на учениците от двете групи. Да напомним, че преди извършване на проверката на учениците от двете групи беше съобщено материал ще бъде обхванат от същия, като им бе посочена и подходяща литература.

Отново не разполагаме с данни за средно аритметичната и средно квадратично отклонение, а тъй като те са необходими за понататъшното разглеждане, същите ще се изчисляват от данните в приложение 9. Така получаваме, че средноаритметичната стойност, т.е. средният брой спечелени точки на учениците е $\overline{x}_{25} = 46,32$, при което средно квадратичното отклонение е $\overline{s}_{25} = 14,21$. Следователно, имайки предвид, че тестът е валиден, обективен и чувствителен, т.е. ако неговите измервателни функции са наред, тогава постиженията на учениците трябва да следват нормалното разпределение $\mathrm{N}(46;14^2)$, нужно е да тестваме хипотезата H_0, че функцията на разпределение F_X на постиженията на учениците е равна на нормалното разпределение, т.е. хипотезата $H_0 : F_X = \mathrm{N}(46;14^2)$. За тази цел, както вече споменахме ще ползваме ТКС за съответствие, при което ще вземем ниво на значимост $\alpha = 0,05$. Постъпваме аналогично както и в предишни разглеждания, при което $z_i = \frac{x_i - 46}{14}$. Изчисленията са дадени в таблица 5.

Според данните от таблица 5, най-голямата стойност на $|F_n(x) - F(x)|$ е $d_{25} = 0,09146$ и тя се достига за $x = 39$. Тъй като нивото на значимост е $\alpha = 0,05$, а броят на данните е $n = 25$, от таблицата за критерия на Колмогоров намираме $d_{25;\,0,05} = 0,2639$. Накрая, тъй като $d_{25} = 0,09146 < 0,2639 = d_{25;\,0,05}$ нямаме причина да отхвърлим предположението, че разпределението на постиженията на учениците на втория тест е $\mathrm{N}(46;14^2)$.

Както за КГ, така и за ЕГ ще приемем ТКС. В Приложение 8 са представени резултатите от втория тест отделно за всяка задача и за всеки ученик от ЕГ. Аналогично, както и в предишния случай от данните в Приложение 9 получаваме, че средноаритметичната стойност, т.е. средният брой получени точки на учениците е $\overline{x}_{25} = 58,32$, при което средно квадратичното отклонение е $\overline{s}_{25} = 15,13$. Следователно, за оценка на измерваните характеристики на теста 2, по отношение на ЕГ, трябва да тестваме хипотезата H_0, че функцията за разпределение F_X на постиженията на учениците е равна на съответното нормално разпределение, т.е. хипотезата $H_0 : F_X = \mathrm{N}(58;15^2)$. За тази цел отново ще използваме теста на Колмогоров-Смирнов за съответствие с ниво на значимост $\alpha = 0,05$, при което $z_i = \frac{x_i - 58}{15}$. Изчисленията са дадени в таблица 6.

Таблица 6. ТКС за втория тест на ЕГ					
x_i	n_i	$F_n(x_i)$	$z_i = \frac{x_i - 58}{15}$	$F(x_i)$	$\lvert F_n(x) - F(x) \rvert$
39	1	0,04	-1,27	0,10204	0,06204
41	2	0,12	-1,13	0,12924	0,00924
43	2	0,20	-1,00	0,15866	0,04134
45	1	0,24	-0,87	0,19215	0,04785
48	2	0,35	-0,67	0,25143	0,06857
51	1	0,36	-0,47	0,31918	0,04082
53	2	0,44	-0,33	0,37070	0,06930
55	1	0,48	-0,20	0,42074	0,05926
57	10	0,52	-0,07	0,47210	0,04790
59	2	0,60	0,07	0,52790	0,07210
61	1	0,64	0,20	0,57930	0,06070
63	1	0,68	0,33	0,62930	0,05070
67	2	0,76	0,60	0,72575	0,03425
71	2	0,84	0,87	0,80785	0,03215
74	1	0,88	1,07	0,85769	0,02231
78	1	0,92	1,33	0,90824	0,01176
83	1	0,96	1,67	0,95254	0,00746
88	1	1,00	2	0,97725	0,02275

Според данните от таблица 6, най-голямата стойност е $\lvert F_n(x) - F(x) \rvert$ е $d_{25} = 0{,}0721$ и тя се достига за $x = 59$. Тъй като нивото на значимост е $\alpha = 0{,}05$ а броят на данните е $n = 25$, от табелата за критерия на Колмогоров намираме $d_{25;\,0{,}05} = 0{,}2639$. Накрая, тъй като $d_{25} = 0{,}0721 < 0{,}2639 = d_{25;\,0{,}05}$ нямаме причина да отхвърлим предположението, че разпределението на постиженията на учениците на втория тест е $\mathrm{N}(58;15^2)$.

В предишните съображения видяхме, че в Тест 2 оценките и на двете групи следват нормално разпределение, така че същите трябва подробно да ги сравняваме. Както можем да забележим, учениците от ЕГ средно имат по 58,32 точки, а учениците от КГ средно имат по 46,32, при което в ЕГ средноквадратичното отклонение е около 15 точки, а при КГ това е около 14 точки. Това означава, че постиженията на учениците от ЕГ по отношение на постиженията на учениците от КГ са по-високи с 25,91%, което показва, че в изучаването на това съдържание прилагането на ЕП дава значително по-добри резултати. Следователно, можем да заключим, че прилагането на ЕП, в частта на разгледаното съдържание, позволява както повишена вътрешно-предметна интеграция на часовете по математика в средното образование, така и по-добра готовност на учениците за включване в по-високите нива на образование. Отново, точно потвърждение за този извод можем да получим, ако приложим теста за различията на математическите очаквания при неизвестни дисперсии и големи проби, колкото е възможно, тъй като в предишните съображения видяхме, че и в двете групи постиженията на учениците на този тест следват нормалното разпределение. В случая имаме

$$\bar{x}_{25} = 58,32\ ,\ \bar{y}_{25} = 46,32\ ,\ n_1 = n_2 = 25,\ \bar{s}_x = 14,21 \text{ и } \bar{s}_y = 15,13\ .$$

с ниво на значимост $\alpha = 0,01$ ще тестваме хипотезата $H_0 : m_1 \le m_2$ в сравнение с алтернативната хипотеза $H_1 : m_1 > m_2$. Имаме

$$\frac{\bar{x}_{n_1} - \bar{y}_{n_2}}{\sqrt{n_2 \bar{s}_x^2 + n_1 \bar{s}_y^2}} \sqrt{n_1 n_2} = \frac{58,32-46,32}{\sqrt{25 \cdot 15,13^2 + 25 \cdot 14,21^2}} \sqrt{25 \cdot 25} = 2,85$$

и от таблицата на нормалното разпределение намираме $z_{1-\alpha} = 2,33$. Накрая,

$$\frac{\bar{x}_{n_1} - \bar{y}_{n_2}}{\sqrt{n_2 \bar{s}_x^2 + n_1 \bar{s}_y^2}} \sqrt{n_1 n_2} = 2,85 > 2,33 = z_{1-\alpha}\ ,$$

което означава, че трябва да отхвърлим хипотезата H_0, т.е., че с ниво на значимост $\alpha = 0,01$ приемаме, че математическото очакване на постиженията на учениците от ЕГ е по-голямо от математическото очакване на постиженията на учениците от КГ. Освен това, средноквадратните отклонения $\bar{s}_x = 14,21$ и $\bar{s}_y = 15,13$ леко се различават, но преди да вземем окончателно решение за приемане или отхвърляне на втората спомагателна хипотеза ще сравним дисперсиите на постиженията на двете групи. За тази цел ще използваме теста за равенство на дисперсиите на две независими нормално разпределени забележителности, т.е. с ниво на значимост $\alpha = 0,10$ ще тестваме хипотезата $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, срещу алтернативната хипотеза $H_1 : \sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$. От дадените условия имамее $n_1 = n_2 = 25$, $\bar{s}_x = 14,21$ и $\bar{s}_y = 15,13$ затова $\frac{n_1(n_2-1)\bar{s}_x^2}{n_2(n_1-1)\bar{s}_y^2} = 0,88085$.

Освен това, от табелата на Фишеровото разпределение намираме

$$F_{n_1-1, n_2-1; \frac{\alpha}{2}} = F_{24,24;0,05} = 2,66 \text{ и } F'_{n_2-1, n_1-1; \frac{\alpha}{2}} = F_{24,24;0,05} = 2,66\ ,$$

което означава $F_2 = 2,66$ и $F_1 = \frac{1}{2,66} = 0,38$. Накрая, тъй като

$$F_1 = 0,38 < \frac{n_1(n_2-1)\bar{s}_x^2}{n_2(n_1-1)\bar{s}_y^2} = 0,88085 < 2,66 = F_2$$

заключаваме, че нямаме причина да отхвърлим хипотезата $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

От досега казаното следва, че трябва да ***приемем втората спомагателна хипотеза***, което означава, че *за трансформации в Евклидовата равнина, техните свойства и алгебричната структура на същите, ЕП позволява придобиване на по-високи знания и умения, отколкото със съществуващите учебни програми*.

Що се отнася до постиженията на учениците на отделните задачи, от таблици 7 и 8 може да се отбележи, че при всички задачи постиженията на учениците, които са следили ЕП са по-добри от постиженията на учениците, които са следили КП. При това, при задачите от 1 - 5 имаме леко подобрение на резултатите, което се дължи и на самото естество на същите, т.е. на факта, че същите са задачи, при които непосредствено се проверява степента на усвоеността на операционни и структурните знания, т.е. непосредствено се прилагат свойствата на трансформации в Евклидовата равнина. Именно тук непосредствено се потвърждава предположението, че усвояването на трансформациите в Евклидовата равнина чрез комплексни числа увеличава вътрешно-предметната интеграция на алгебричното и геометричното съдържание, което изучават учениците от средното образование, което само по себе си означава, че те са по-добре подготвени за включване в по-високите степени на образование.

Таблица 7. Точки и среден резултат за всяка задача на учениците в КГ								
Задача	1	2	3	4	5	6	7	8
общ резултат	161	149	188	195	194	98	112	61
Среден резултат от ученик	6,44	5,96	7,52	7,80	7,76	3,92	4,48	2,44

Таблица 8. Точки и среден резултат за всяка задача на учениците в ЕГ								
Задача	1	2	3	4	5	6	7	8
общ резултат	168	166	213	223	224	171	191	142
Среден резултат от ученик	6,72	6,64	8,52	8,92	8,96	6,84	7,64	5,68

Освен това, от таблици 7 и 8 може да се види, че учениците от ЕГ показват забележимо по-добри операционни и структурни знания при задачите от 6 - 8. Така, задача номер 6 напълно и частично са решили само 6 и 1 ученици от КГ, съответно, а докато при ЕГ имаме 8 пълни и 9 частични решения, което е довело до увеличаване на общия резултат на учениците от ЕГ за около 75%. Подобна е разликата в постиженията на учениците от ЕГ, по отношение на учениците от КГ, и при задачата номер 7 и 8, при което те са по-високи с около 70%. Освен това, може да се забележи че при задача номер 8 постиженията на учениците от ЕГ са 2,32 пъти по-високи от постиженията на учениците от КГ. От анализа на резултатите от този тест може да се заключи, че разликите в постиженията на учениците от двете групи преди всичко се дължат на прилагането на аналитичния апарат на комплексните числа в изучаване на трансформации в Евклидовата равнина, особено при изучаването на груповите свойства и класификацията на подобията и движенията. Последното особено се проявява при решаването на задача номер 8, където постигнатия резултат на учениците от ЕГ изключително се дължи на прилагането на аналитичния апарат в изучаването на инверсията.

В предишните разглеждания сравнихме резултатите, които учениците от двете групи постигнаха на един от четирите теста и въз основа на същите направихме заключения за спомагателните и основните хипотези изразени във втория параграф от тази глава. Въпреки, че предишните резултати са достатъчни за вземанена решение за приемане или отхвърляне на поставените хипотези, обаче в хода на изследването проведохме две допълнителни проучвания, чиито резултати не могат да се считат за обективен показател за вземане на решения във връзка с поставените хипотези, но те са функция на получаване мнение за предмета на изследване от заинтересованите страни, т.е. от учителите и учениците.

Първото проучване е проведено с 75 учители, които преподават в средното образование в Македония. Същото съдържа 10 въпроса с по три предложени отговори, а в края се дава възможност за допълнителна забележка код на анкетираното лице. Анкетния въпросник за учители е даден в приложение 18, а резултатите са дадени в таблица 17.

Таблица 17. Резултати от анкетата на преподавателите										
Отговор	Въпрос									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Вярно	53	44	62	51	38	59	29	64	17	58
Частично вярно	15	18	13	11	13	16	27	11	0	0
Неправилно	7	13	0	13	24	0	23	0	58	17

Получените резултати от проведената анкета ще анализираме, при което, когато това е възможно, ще се опитаме да ги съпоставим с постиженията на учениците на проведените тестове. Така:

i. От получените отговори на първия въпрос може да се види, че 70,67% от преподавателите са на мнение, че ЕП позволява учениците да придобият добри операционни знания, а докато само 9, 33% от учителите смятат, че това не е вярно. Забелязваме, че получените отговори от учителите напълно съответстват на резултатите от първия и третия тест, където всъщност има най-изразени операционни знания.

ii. Което се отнася до придобиването на структурни знания, дори 58,67% от преподавателите дават предимство на ЕП, а докато 17,33% от учителите смятат, че учениците с нейното прилагане не получават добри структурни знания. Въпреки това, мнението на учителите не отговаря на резултатите получени от втория тест, където основен момент е проверката точно на приложимостта на структурните знания, придобивани от учениците.

iii. По отношение на приемането на свойствата на движенията и подобията в Евклидовата равнина, дори 82,67% от учителите смятат, че това по-добре осигурява експерименталната програма, която изцяло съответства на резултатите, получени от втория тест.

iv. От получените отговори на четвърто въпрос може да се види, че 68% от учителите смятат, че с ЕП учениците ще постигат по-добри резултати при решаването на метрични задачи от геометрията на триъгълник и окръжност. Такова мнение на учителите изцяло съответства на резултатите, получени от третия тест, въпреки че дори 17,33% от учителите смятат, че това не е вярно, а 14,67% от учителите практически нямат мнение по този въпрос.

v. Което се отнася до отговорите, които са дали учители на петия въпрос, може да се каже, че те не са подкрепени с резултати, които учениците са постигнали на четвъртия тест. Именно, въпреки че КГ е показала добри резултати при решаването на конструктивни задачи, обаче 50,67% от наставниците смятат, че ЕП дава възможност учениците да придобият знания, с чиято помощ ще постигат добри резултати при решаването на конструктивни задачи, а докато 32% смятат, че това по-добре го позволява КП. Вероятна причина за тази диспропорция се крие във факта, че учителите не успяха да реализират ЕП, становището си базираха само на анализа на книгата, която в литературата е посочена като номер [33] и в която на конструктивните задачи е отделено достатъчно внимание.

vi. Което се отнася до интеграцията на часовете по математика, дори 78,67% от учителите смятат, че по-добре позволява ЕП, а докато останалите 22,33% смятат, че това е частично вярно. Може да се каже, че тази оценка на учителите изцяло съответства на резултатите които учениците са постигнали при проведените тестове.

vii. Около въпроса дали реализирането на ЕП значително подобрява готовността на учениците за включване в по-високите образователни нива, становищата на преподавателите са разделени. Причината за това разделение на мисленето на учителите може да се види от част в забележките, които са дадени в предвиденото поле на въпросника. Именно част от преподавателите с право отбелязват, че реализирането на ЕП няма да има никакво влияние върху готовността на учениците за продължаване на тяхното образование в студентските направления от областите: строителство, архитектура, графичен дизайн, вътрешен дизайн и сродните учебни програми, където по естество на нещата значително предимство има предизборната програма Основно алгебра и геометрия, в която между другото се изучават и елементи от проекта геометрия.

viii. Причината, поради която осмият въпрос беше включен във въпросника за учители, е да се получи уместно мислене за това в коя година би могла да се въведе ЕП в гимназиалното образование. С оглед на това, че нейното въвеждане не е възможно във II г., съвсем естествено е да се види дали е възможно в III г. и от получените отговори на учителите може да се заключи, че това е възможно.

ix. От таблица 25 може да се види, че 77,33% от анкетираните преподаватели не са съгласни изборния предмет - основно алгебра и геометрия да се замени с ЕП и в частта на разследващ въпросник, предвиден за бележка, като причина за това посочват подготовката на учениците за продължаване на образованието на учебните програми от областите: строителство, архитектура, графичен дизайн, вътрешен дизайн и други свързани студентски програми.

x. И накрая, от данните в таблица 25 може да се види, че отговорите на последния въпрос са диаметрално противоположни на отговорите на деветия въпрос, при който според бележките в края на въпросника същите се основават именно на възможността учениците, в зависимост от това къде възнамеряват да продължат образованието си, да могат да избират дали ще слушат ЕП или съществуващите предмети - алгебра и геометрия.

Освен мнението на учителите, за да дадем окончателно оценка на програмите и изводи за поставените хипотези, сметнахме, че е важно и мнението на студентите, които учат технически науки, затова проведохме подходящо проучване с 40 студента, които учат във Факултета по информатика и 20 студента, които учат в Архитектурния факултет при ФОН университета в Скопие, от които поискахме да попълнят въпросника. При това в предишни консултации установихме, че проучваните студенти в средното образование са изслушали изборния предмет елементарна алгебра и геометрия, така че поради значимостта на отговорите въпросите, съдържащи се във въпросника, на студентите подробно им обяснихме експерименталната програма, като прозрение получиха електронна версия на книгата [33], според която се реализира експерименталната програма.

Резултатите от проведената анкета са дадени в таблица 18.

Таблица 18. Резултати от анкетата на студентите

Отговор	Въпрос				
	1	2	3	4	5
Вярно	55	37	47	25	40
Частично вярно	5	13	7	4	0
Неправилно	0	10	6	31	20

Получените резултати от проведената анкета анализираме, при което, когато това е възможно, се опитваме да ги съпоставим с постиженията на студентите на проведените тестове:

i. От получените отговори на първия въпрос може да се види, че 91,57% от анкетираните студенти са на мнение, че ЕП позволява учениците да придобият по-добри и задълбоченизнания за множеството комплексни числа, напълно съответства на постиженията на студентите на първия тест.
ii. По отношение на усвояването на свойствата на движенията и подобията в Евклидовата равнина 61,67% от анкетираните студенти дават предимство на ЕП, 21,67% смятат, че тя има частично предимство, а докато 16,66% от анкетираните студенти дават предимство на КП. Както може да се види и в този случай отговорите на въпроса напълно са несъответстващи с постиженията на студентите от втория тест.
iii. За придобиването на знания, с чиято помощ по-лесно ще се решавават метрични задачи за триъгълник и окръжност 78,33% от студентите смятат, че по-добре позволява ЕП, която отново кореспондира с постиженията на учениците на третия тест.
iv. По въпроса за компетентността за решаване на конструктивни задачи, от получените отговори може да се види, че повече от половината, т.е. 51,66% от студентите смятат, че по-добре осигурява приемането на КП, информацията, която се потвърди с резултатите от четвъртия тест.
v. Естествено, на последния въпрос отговорите на студентите са разделени в зависимост от това, какво учат, така че 66,67% и дават предимство на ЕП, а 33,33% смятат, че нейното реализиране не подобрява готовността на студентите за включване в по-високите образователни нива.

От по-рано изнесеното може да се заключи, че резултатите, получени от проучване, проведено сред учителите и резултатите, получени от проучване, проведено сред студентите изцяло потвърждават заключенията във връзка с поставените хипотези.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Една от целите на обучението по математика е учениците да получават изчерпателни, приложими и трайни знания, които между другото трябва да дадат възможност за успешното им включваневъв висшите степени на образование. За постигане на тази цел е необходимо пълно интегриране на учебните програми, при което трябва да се държи сметка, че подобна интеграция трябва да позволи и адекватна диференциация на обучението. В предишните съображения видяхме, че въвеждането на изборния предмет *Геометрия на комплексните числа*, за което в Допълнение А е предложена подходяща учебна програма и осигуряване на учениците успоредно да избират предмета *елементарна алгебра и геометрия*, допринася за постигането на желаните цели. Именно проведеното проучване показа, че:

- ЕП повишава вътрешно-предметната интеграция на обучението по математика;
- ЕП позволява придобиване на по-добри знания и умения, отколкото съществуващите учебни програми, т.е. дава големи възможности на учениците за включване в по-високите образователни нива.

Освен това, самото проучване е осъществено, за да даде отговор на въпроса какво, защо и как трябва да се променя в определен образователен раздел с цел да се постигнат желаните цели. От друга страна, многобройните промени, които през последните години се случваха в училищната система на Македония, а с това и в часовете по математика не са базирани на някакви изследвания, т.е. не са провеждани изследвания за изходните резултати, които са резултат от реализирането на съществуващите учебни програми. При това, без никакви предишни валидни изследвания, извършени промени в учебните планове и въвеждани нови учебни програми, както и математически анализ, предмет в който дословно се повтарят съдържание от предмета математика в IV година, а се съдържа и съдържание, за което със сигурност може да се каже, че не е съобразено с възрастта и знанията на учениците. Подобна е ситуацията и с въвеждането на предмета Предприемачество и бизнес, който не само не е в корелация с останалите предмети, но и не може да се намери валидно обяснение за неговото директно въвеждане в началното образование, и упоритото се настояване за изучаването му във всички образователни профили и направления в средното образование.

Имайки предвид изнесеното, желателно е, ако в бъдеще се предприемат някакви стъпки в посока на изменение на учебния план и учебните програми в образователната система на Македония, компетентните органи да се опитат да следват следния алгоритъм, за който смятаме, че може да позволи промените да подобрят образователната система, а не те да са цел сами за себе си:

- За оценка на постиженията на учениците да се изработят измервателни инструменти, които трябва да бъдат структурирани в съответствие с критериите за постиженията на учениците според образователните стандарти,
- Да се направи случайна извадка с цел проверка на валидността, обективността и чувствителността на измервателните уреди, което може да се направи с проверка на хипотезата: *резултатите от учениците оценени с така подготвените измервателни уреди следват нормалното разпределение,*

- ако предходната хипотеза се приеме, тогава с помощта на измервателни уреди, напълно готови по аналогов начин да оценят постиженията на учениците, т.е. изходните резултати от образователния процес,
- ако постиженията на учениците следват нормалното разпределение, тогава заключаваме, че с учебната програма се постигат желаните цели,
- ако постиженията на учениците не следват нормалното разпределение, тогава е необходим допълнителен анализ, за това какво и как трябва да се промени и др.

АПРОБАЦИЯ НА РЕЗУЛТАТИТЕ

Основните резултати от дисертационното изследване са апробирани в проведеното експериментално обучение с ученици от 3 и 4 клас, а също се изложени и во неколку публикации.

АВТОРСКА СПРАВКА ЗА ПРИНОСИТЕ В ДИСЕРТАЦИОННИЯ ТРУД

Основните приноси се свеждат до:
Научни:
1. Разработена е методика за въвеждане на понятието експоненциален запис на комплексно число в средното образование.
2. Изработена е и е предложена учебна програма за въвеждане на предмет *Геометрия на комплексните числа*.
3. Направен е сравнителен анализ между стандартното преподаване и преподаването с помощта на комплексни числа на геометрични знания в Евклидовата равнина.

Научно–приложни:
4. Показано е предимството на метода на координатите в преподаването на геометрични знания с помощта на комплексни числа.
5. Разработена е методика за изучаване на трансформации в Евклидовата равнина с помощта на комплексни числа.
6. Разработена е методика за прилагане на комплексни числа в изучаването на геометрията на окръжност и триъгълник.

Връзки между приносите, мястото на описание в дисертационния труд и направените публикации:

Принос	Параграф	Публикации
1	2.2	5
2	3.1	33
3	3.2.1, 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4, 3.2.5 и 3.2.6	56
4	2.3	33
5	2.4 и 3.1	6
6	2.6 и 3.1	6

БЛАГОДАРНОСТИ

Изказвам най-сърдечна благодарност на научните си раководители проф. д.п.н. Сава Иванов Гроздев и проф. д-р Пенка Петрова Рангелова за съдействието и помощта при разработването на настоящата дисертация. Също така на проф. д.п.н. Васил Борисов Милушев и доц.д-р. Румяна Петкова Маврова, които помогнаха за значително подобряване на изложението на дисертационния труд.

ПУБЛИКАЦИИ НА АВТОРА ПО ТЕМАТА НА ДИСЕРТАЦИОННИЯ ТРУД

1. **Anevska, K.** (2014). Methodical approach for introduction of exponential entry of complex number in secondary education, Proceedings of the Congress of Mathematicians of Macedonia, September 24-27, 2014, Ohrid, Macedonia, pp. 13-19, ISBN 978-9989-646-69-0
2. Gogovska, V., **Anevska, K.,** Malčeski, R. (2014). Properties of Thinking and Adoption of Mathematical Knowledge, Proceedings of the 2014 International Conference on Education and Educational Technologies II (EET '14), Praga, pp. 101-105, ISBN 978-1-61804-231-6.
3. Glavche, M., Malčeski, R., **Anevska, K.** (2015). Errors made by the students from fifth grade in Macedonia while studying Mathematics, Математика и математическо образование, 2015, 44, pp. 265-274, ISSN 1313-3330.

СТАТИИ В СПИСАНИЯ:

1. **Anevska, K.**, Gogovska, V., Malčeski, R. (2015). The role of complex numbers in interdisciplinary integration in Mathematics teaching, Elsevier, Procedia - Social and Behavioral Sciences (под печат), ISSN 1877-0428.
2. **Anevska, K.,** Grozdev, S., Malcheski, R. (2015). Comparative analysis regarding the study of transformations in the Euclidian plane applying complex numbers, Mathematics and Informatics, Vol. 58, No. 3, ISSN 1310–2230 (под печат).
3. Glavche, M., **Anevska, K.** (2014). Systems of exercises to improve the geometric representations of the students in elementary educations, Teacher, Vol. 6, pp. 28-32, ISBN: 978-1-61804-231-6.
4. Malčeski, R., **Anevska, K.,** Glavche, M. (2014). The integration of Mathematics instruction in elementary education, IJSR, ISSN 2319-7064, Vol. 3, Iss. 9, pp. 2394-2398.
5. Малчески, Р., **Аневска, К.** (2014). Хомотетија, Сигма, Скопје, (нема ISSN)

ИЗДАДЕНО УЧЕБНО ПОСОБИЕ:

1. Malcheski, R., Grozdev, S., **Anevska, K.** (2015). Geometry of complex numbers, Архимед, София, ISBN 978-954-779-188-6, (под печат).

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Alfors, L. V.: Complex analysis, second edition, New-York-St. Louis-San Francisco-Toronto-London-Sydney, 1966.
2. Alpay, D.: A Complex Analysis Problem Book, Birkhäuser, Basel, 2011
3. Andreescu, T.; Andrica, D.: Complex Numbers from A to … Z, Birkhäuser, Boston, 2006.
4. Andreescu, T.; Andrica, D.: Proving some geometric inequalities by using complex numbers, Educat¸ia Matematic˘a Vol. 1, Nr. 2 (2005), 19–26
5. Anevska, K.: Methodical approach for introduction of exponential entry of complex number in secondary education, Proceedings of the Congress of Mathematicians of Macedonia, September 24-27, 2014, Ohrid, Macedonia, pp. 13-19, , 2014, ISBN 978-9989-646-69-0
6. Anevska, K., Gogovska, V., Malcheski, R.: The role of complex numbers in interdisciplinary integration in mathematics teaching, Elsevier, Procedia - Social and Behavioral Sciences, 2014
7. Arslanagić, Š.: Matematika za nadarene (drugo izdanje), Bosanska riječ, Sarajevo, 2005
8. Ašić, M. i dr.: Međunarodne matematičke olimpijade, DM Srbije, Beograd, 1986
9. Beins, B. C., McCarthy, M. A.: Research Methods and Statistics. Pearson Education, Inc., 2012
10. Cain, G.: Complex Analysis, School of Mathematics, Georgia Institute of Technology, 1999
11. Conway, J. B.: Functions of One Complex Variable, Springer-Werlag, New-York-Haidelberg-Berlin, 1987
12. D'Angelo, J. P.: An Introduction to Complex Analysis and Geometry, Dept. of Mathematics, Univ. of Illinois, http://www.math.uiuc.edu/~jpda/jpd, (посетено на 15.05.2014)
13. Deaux, R.: Introduction to the geometry of complex numbers, Dover publications, Inc., New York, 2008
14. Dimitrijević, R.: Primene kompleksnih brojeva u geometriji, (посетено на 15.05.2014)
15. Dugošija, D.; Ivanović, Ž.: Trigonometrija, Krug, Beograd, 2006
16. Đurković, R.: Matematička takmičenja srednjoškolaca u Jugoslaviji 1990, DM Srbije, Beograd, 1991
17. Engel, A.: Problem-Solving Strategies, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1998
18. Freitag,E.; Busam,B. Complex Analysis, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 2005
19. Gogovska,V., Malcheski, R.: Improvement intra-disciplinary integration of mathematics instruction, Elsevier, Procedia - Social and Behavioral Sciences, 2012
20. Govedarica, V.: Matematička takmičenja u Republici Srpskoj, Zavod za udžbenike I nastavna sredstva, Istočno Sarajevo, 2007
21. Grozdev, S. For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice). ADE, Sofia, 2007. (ISBN 978-954-92139-1-1), 295 с.
22. Grozdev, S., Curves and Surfaces of Learning in Teacher’s Practice, Procedia – Social and Behavioral Sciences, Volume 11, 2011, pp 225 – 229 (ELSEVIER, ISSN: 1877-0428). Available at www.sciencedirect.com
23. Grozdev, S., E. Stoimenova, Psychometric properties of Olympiad test problems, Proc. 3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education, Athens, 2003, 257 – 264.
24. Grozdev, S., Mathematical modeling of educational process, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 32, 1, 2002, 85 – 90.
25. Grozdev, S., S. Doichev, S. Savchev, The Geometric Problems in the Bulgarian National Competitions – Tendency to Development, Proc. WFNMC 4th Conf., Melbourne, August 4-11, 2002, Geometry & Mathematics Competitions, Iran, 2002, 129 – 151
26. Grozdev, S., Y. Tsankov, Curves and surfaces of learning, 32nd Spring conference, Sunny Beach, April 5-8, 2003, In “Mathematics and Education in Mathematics”, Sofia, 2003, 317 – 322.
27. Hahn, L. S.: Complex Numbers & Geometry, Cambridge University Press, 1994
28. Harkin, A. A.; Harkin, J. B.: Geometry of Generalized Complex Numbers, Mathematics Magazine, Vol. 77, No. 2, p.p. 118-129, 2004
29. Jordan, A.M.: Measurement in education, McGraw-Hill Book Company, Inc, New York, 1953
30. Kadelburg, Z., Mladenović, P.: Savezna takmičenja iz matematike, DMS, Beograd, 1990
31. Koen, M., Nejgel, E.: Uvod u logiku i naučni metod. Beograd: Zavod za izdavanje udžbenika i nastavna sredstva SRS, 1979
32. Larson,L.C.: Problem-Solving Through Problems, Spinger-Verlag, New York, 1983
33. Malcheski, R., Grozdev, S., Anevska, K.: Geometry of complex numbers, Архимед, София, 2015
34. Mateljević, M.: Kompleksne funkcije 1 & 2, DMS, Beograd, 2006
35. McMullen, C.: Complex Analysis, Harvard University, 2011, http://www.math.harvard.edu/ (посетено на 15.05.2014)

36. Mitrinović, D. S.: Kompleksna analiza, zbornik zadataka i problema, Naučna knjiga, Beograd, 1972
37. Mitrović, M.; Ognjanović, S.; Veljković, M.; Petković, Lj.; Lazarević, N.: Geometrija za I razred Matematičke gimnazije, Krug, Beograd, 1998
38. Mitrović, M.; Ognjanović, S.; Velković, M.; Petković, Lj.; Lazarević, N.: Geometrija, Krug, Beograd, 2003
39. Mladenović, P.; Ognjanović, S.: Pripremni zadaci za matematička takmičenja za učenike srednjih škola, DMS, Beograd, 1991
40. Mužić, V.: Metodologija, Svjetlost, Sarajevo, 1979
41. Nahn, L. S.: Complex numbers & Geometry, The Mathematical Association of America, 1994
42. Needham, T.: Visual Complex Analysis, Claredon Press, Oxford University Press Inc., New York, 1997
43. Olsen, J.: The Geometry of Möbius Transformations, http://www.johno.dk/ mathematics/
44. Olsen, J.: The Geometry of Möbius Transformations, University of Rochester, http://www.johno.dk/mathematics, (посетено на 15.05.2014)
45. Pavković, B.; Veljan, D.: Elementarna matematika I, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992
46. Poincare, H.: Znanost i hipoteze, Globus, Zagreb, 1989
47. Pongrac, C. Ispitivanje I ocjenjivanje u obrazovanju, Školska knjiga, Zagreb, 1980
48. Read, J. B.: Calculus with Complex Number, Teylor & Francis Inc., London-New York, 2003
49. Schwerdtfeger, H.: Geometry of complex numbers, Dover publications, Inc., New York, 1979
50. Spiegel, A. M.: Theory and problems of complex variabbles, McGraw-Hill Book Co., Singapore, 1981
51. Suzić, N.: Primijenjena pedagoška metodologija, XBS, Banja Luka, 2007
52. Toth, G.: Glimpses of Algebra and Geometry, Second Edition, Springer-Verlag, New York, 2002
53. Wieting, T.: Complex Numbers: from Geometry to Astronomy, http://people. reed.edu/~wieting/essays, (посетено на 15.05.2014)
54. Yaglom, I. M.: Complex Numbers in Geometry, Academic Press, Leicester, England, 1968
55. Андреев, М. Дидактика. София: Народна просвета, 1981
56. Аневска, К., Гроздев, С., Малчески, Р.: Сравняване на стандартното изучаване и изучаването с помощта на комплексни числа на движенията и еднаквостите в евклидовата равнина, Математика и информатика, София, 2015
57. Ганчев, И., Колягин, Ю., Кучинов, Й., Портев, Л., Сидоров, Ю.: Методика на обучението по математика, I част, Модул, София, 1996
58. Ганчев, И.: Обучението по математика в системата на междупредметните връзки, София, 1985
59. Ганчев, И.: Основни учебни дейности в урока по математика, Модул, София, 1996
60. Гроздев, С., В. Ненков, Д. Деков, Няколко хомотетично породени свойства на Фойербаховите конфигурации, Математика и информатика, т. 57, 1, 2014, 68–72 (ISSN 1310-2230).
61. Гроздев, С., В. Ненков, Множество от хомотетии, свързано с описани четириъгълници, Математика плюс, 4, 2009, 62 – 70.
62. Гроздев, С., В. Ненков, Хомотетични конични сечения в равнината на триъгълник, Математика и информатика, т. 57, 2, 2014, 139–154 (ISSN 1310-2230).
63. Гроздев, С., Моделиране и управление на възможностите на изявени ученици за решаване на задачи, Педагогика, 1, 2003, 58 – 74.
64. Гроздев, С., Ненков, В. Около ортоцентъра в равнината и пространството. Архимед, София, 2012. (ISBN 978-954-779-145-9), 120 с.
65. Гроздев, С., Синергетика на ученето, Педагогика, 7, 2002, 3 – 23.
66. Гроздев, С., Х. Лесов. Зимни математически състезания. ВУЗФ, София, 2012. (ISBN 978-954-8590-17-4), 351 с.
67. Димовски, И.; Малчески, Р.; Малческа, Ц.: Следење, проверување и оценување на постигањата на учениците, ФОН универзитет, Скопје, 2010
68. Димоски, И.: Следење и вреднување на постигањата на учениците, ФОН универзитет (интерно издание), Скопје, 2008
69. Јаничиќ, П.: Збирка задатака из геометрије (седмо издание), Математички факултет, Београд, 2007
70. Карамата, Ј.: Комплексан број, са применом на елементарну геометрију, Научна књига, Београд, 1950
71. Князева, Е., Гроздев, С., Георгиева, М., Гълъбова, Д. Синергетичният подход във висшето педагогическо образование (Върху примери от дидактиката на математиката). В. Търново: СЛОВО, 2013, 215 с. + 4 приложения. (ISBN 978-954-439-986-3)
72. Колягин, Ю., Луканкин, Г.Л. и др.: Методика на преподаването по математика в средното училище (обща методика), Народна просвета, София, 1980
73. Кртинић, Ђ.: Математичке олимпијаде средњошколаца 2007-2011, ДМС, Београд, 2012

74. Лопандић, Д.: Геометрија за III разред усмереног образовања, Научна књига, Београд, 1988
75. Мадески, Ж.; Самарџиски, А.; Целакоски, Н.: Збирка задачи по геометрија, Просветно дело, Скопје, 1981
76. Малчески, Р., Малчески, А, Трајковска, И.: Комплексни броеви, можност за внатрешнопредметна интеграција во наставата по математика, Зборник трудови од II конгрес на математичарите и информатичарите на Македонија, Охрид, 2000
77. Малчески, Р.: Методика на наставата по математика, ФОН универзитет, Скопје, 2010
78. Малчески, Р.: Основи на математичка анализа, Ун. Св. Кирил и Методиј, Скопје, 2001
79. Малчески, Р.: Теорема на Менелај, Сигма, Скопје, 1999
80. Малчески, Р.; Аневска, К.: Хомотетија, Сигма, Скопје, 2014
81. Малчески, Р.; Докоска, М.: Математика 2 (за реформирано гимназиско образование), Просветно дело, Скопје, 2002
82. Малчески, Р.; Малческа, Ц.; Малческа, Ф.: Стратегии и техники на учење и подучување, ФОН универзитет, Скопје, 2010
83. Малчески, Р.; Малчески, А.: Пресликувања во рамнина преку комплексни броеви I, Сигма, Скопје, 2000
84. Малчески, Р.; Малчески, А.: Пресликувања во рамнина преку комплексни броеви II, Сигма, Скопје, 2000
85. Малчески, Р.; Малчески, А.: Пресликувања во рамнина преку комплексни броеви III, Сигма, Скопје, 2001
86. Малчески, Р.; Малчески, А.: Пресликувања во рамнина преку комплексни броеви IV, Сигма, Скопје, 2001
87. Малчески, Р.; Малчески, С.; Аневска, К.: Методологија на НИР, ФОН универзитет, 2014
88. Моденов, П. Ц.: Задачи по геометрии, Наука, Москва, 1979
89. Петров, П. Д. Дидактически измерения на умението за решаване на задачи. Автореферат на дисертация за присъждане на научната степен „доктор на педагогическите науки". Ст. Загора, 2013
90. Попоски, К. Современи сваќања за проверувањето и оценувањето на постигањата на учениците, ППС МИС, Скопје, 1996
91. Портев, Л., Н. Николов. Методика на обучението по математика. Книга I. Обща методика. Пловдив: УИ „Паисий Хилендарски", 1987
92. Прасолов, В. В.: Задачи по планиметрии, част I, Наука, Москва, 1963
93. Прасолов, В. В.: Задачи по планиметрии, част II, Наука, Москва, 1963
94. Радев, П. Обща училищна дидактика. Пловдив: УИ „Паисий Хилендарски", 2005
95. Рудакова, И. А.: Дидактика, Феникс, Ростов на Дон, 2005
96. Рудин, У.: Основи на математическия анализ, Наука и изкуство, София, 1973
97. Самарџиски, А.: Хомотетија, инверзија и задачите на Аполониј, ПМФ, Скопје, 1988
98. Сергеева Т. Ф., М. В. Шабанова, С. И. Гроздев. Основы динамической геометрии. АСОУ, Москва, 2014. (ISBN 978-5-91543-140-8), 160 с.
99. Сидоров, Ю. В.; Федорюк, М. В.; Шабунин, М. И.: Лекции по теории функций комплексного переменного, Наука, Москва, 1989
100. Смиљаниќ, Ѓ. Нека питања оценивања ученика, ЗИУСРС, Београд, 1966
101. Стојан, С.: Карактеристики на знаењата какоосnова за вреднување на постигањата на учениците, Зборник на трудови од Меѓународен симпозиум за оценување, БРО, Скопје, 1997
102. Тонов, И. К.; Сидеров, П. Н.: Приложение на комплексните числа в геометрията, София, 1981
103. Тошић, Т.; Петровић, В.: Збирка задатака из основа геометрије, Грађевинска књига, Београд, 1985
104. Целакоски, Н.: Дидактика на математиката, Нумерус, Скопје, 1993