РЕЦЕНЗИЯ

За дисертационния труд на проф. д-р Петко Димитров Пройнов

На тема „Апроксимиране на неподвижни точки и приложения за числено решаване на нелинейни уравнения"

За добиване на научната степен „Доктор на науките"

По научна област 4, научно направление 4.5 – Математика, научна специалност – Математически анализ.

Рецензент;проф. дмн Рони Нисим Леви

Тема на дисертацията: Дисертацията е посветена на изследване и приложение на метода на последователните приближения (наричан в дисертацията метод на Пикар) за намиране на неподвижните точки на оператори в метрични пространства. Основополагащ резултат в тази насока е теоремата на Банах за неподвижна точка на свиващо изображение, която има многобройни приложения. Условието в тази теорема е прекалено ограничително: това се вижда и в най-простия случай на рекурентни редици от реални числа. Не е учудващо, че съществуват много работи, посветени на значителни обобщения на принципа на Банах, които обхващат значително по-широки класове от случаи.

Един по-стар итерационен метод, не попадащ в рамките на принципа за свиващите изображения, е методът на Нютон за приблизително пресмятане на корените на уравнения. Канторович е обобщил този метод за функции, дефинирани върху (безкрайномерни) банахови пространства, и го е приложил към различни задачи, свързани с диференциални и интегрални уравнения. В настоящата дисертация се разглеждат приложения на метода на Нютон-Канторович, имащи за цел едновременната апроксимация на всички корени на алгебричен полином. В този случай итерационният процес действа в пространството на n-мерните вектори, където n е степента на полинома. Този подход води началото си от работа на Вайерщрас, модифициран е от Ерлих, и след това е бил обект на различни обобщения и усъвършенствания, между които важно място заемат работите на Кирил Дочев.

Основните резултати на настоящата дисертация са насочени в следните две направления:

1/ Намиране на колкото се може по-общи условия, осигуряващи сходимост на итерационния процес в абстрактни метрични (или обобщени метрични) пространства. Търсено е, и постигнато, обобщение на голям брой доказани преди това резултати на други автори.

2/ Приложение на някои от така получените резултати към споменатите по-горе варианти на метода на Нютон за едновременно намиране на корените на полином.

Съдържание на дисертацията: Дисертацията се състои от 282 страници печатен текст, разпределен в предговор, 12 глави, и заключение, и цитирана литература от 278 заглавия. Ще разгледам съдържанието на дисертацията по глави.

В глава 1 се разглеждат обобщения на принципа на свиващите изображения в две посоки: в едната от тях, произлизаща от Брауър, условието за свиващо изображение се заменя с т.нар φ-условие: $d(Tx,Ty) \le \varphi(d(x,y))$, като φ е т.нар. контролна (или калибровъчна) функция, удовлетворяваща определени условия. Друго условие е условието на Меир-Кийлър, изискващо равномерна непрекъснатост на функцията $min(d(x,y),d(Tx,Ty))$ при x близко до y. В § 1.3 се доказва еквивалентността на съответните набори от условия за тези две направления. В § 1.4 се формулират и доказват редица теореми като т. 1.9 и 1.10 и техните следствия, осигуряващи съществуването на неподвижни точки и обобщаващи едновременно теореми от споменатите по-горе два подхода.

Глава 2 е посветена на използването на контролни функции, квази-хомогенни от произволен ред. Теоремите 2.1 и 2.2 дават условия за сходимост на процеса в този случай, както и критерии за избора на стартова точка за процеса. По-нататък тези теореми се прилагат към метода на Нютон-Канторович в банахови пространства, като при това се получават теореми 2.4 и 2.5.

В глава 3 авторът въвежда важното за него понятие „функция $E(x)$ на началните условия, подчинена на контролната функция φ“. Свойствата на тази функция позволяват да се намерят критерии за това, дали дадена точка е подходяща за начален момент за итерационния процес, т.е. дали всички нейни итерации остават в пределите на дефиниционното множество (този въпрос се изследва и в глава 4). Така въпросите за сходимост на итерационния процес в метрично пространство могат да бъдат „прехвърлени" към съответните числови редици $E(x_n)$, ако за итерационния процес е изпълнено условието $d(Tx,\xi) \le \beta(E(x))d(x,\xi)$ за някоя точка ξ (която в последствие ще се окаже неподвижна точка на оператора T). Получените чрез този подход теореми 3.1и 3.2 се прилагат към метода на Нютон, и по-специално, към метода на Шрьодер за едновременно намиране на корените на полином. Този подход позволява да се оцени и скоростта на сходимост на итерациите, като при определени условия сходимостта се оказва доста бърза, с т.нар. квадратична оценка .

В глава 4 продължава започнатото в глава 3 търсене на общи условия за сходимост на итерационния процес. На базата на въведените в предните глави понятия „контролна функция" и „ функция на началните условия" авторът въвежда ново понятие „функция на сходимост, подчинена на дадени две контролни функции". Това понятие също позволява да се намерят условия за сходимост на процеса, обобщени в теорема 4.1. В следващите теореми се намират и съответните априорни и апостериорни оценки за скоростта на сходимост на итерационните редици, удовлетворяващи условията на 4.1, както и оценка за радиуса на стабилност, оценяващ възможните пертурбации на началната точка. В параграф 4.6 общите условия от предните параграфи отново се прилагат към процеса на Нютон-Канторович в банахово пространство. В 4.7 се уточнява важният резултат на Смейл за оценка на скоростта на горния метод за аналитични изображения.

Глава 5 започва с изложение на основите на теорията на наредените векторни пространства, като с оглед на приложението към итерационните процеси се обръща внимание главно на „редичните" пространства, т.е. пространства, в които е определен класът на сходящите редици. Разглежда се връзката между наредбата, порядковата топология, и индуцираната монотонна норма в такива пространства. В § 5.9 се разглеждат въведените от Д. Курепа „конусно метрични пространства", т.е. пространства, в които метриката взема стойности в положителния конус на дадено наредено векторно пространство. (В приложенията обикновено такова пространство е пространството R^n с наредба, определена от първия октант). В такива пространства също се поставя въпросът за сходимост на итерационния процес. Този проблем се изследва в глава 6. В нея за конусно метрични пространства се разглеждат аналози на въведените в глави 1 – 4 понятия: контролна функция, функция на началните условия, функция на сходимост, и се получават твърдения за сходимост на итерационния процес, аналогични на тези от предните глави.

В глава 7, както и във всички следващи глави, се търси приложение на получените до този момент общи резултати към проблема за едновременно намиране на всички корени на даден алгебричен полином (обикновено се изисква полиномът да няма кратни корени). Конкретно в тази глава се разглежда методът на Вайерщрас. В работите на Вайерщрас не са дадени най-общите условия, осигуряващи сходимост на метода. Въпросът за намиране на такива условия, както и за определяне на скоростта на сходимост, е бил предмет на голям брой статии, сериозна част от които принадлежат на български математици, и тяхната дейност се продължава и обобщава в настоящата дисертация. Така, теорема 7.4 , доказана като следствие от общите разглеждания от глава 6, заедно със своите следствия обобщава известни резултати на Якубсон, Кюркчиев-Марков, и други. Друга такава теорема е 7.9, в която се обобщават резултати на Тили и Чжао.

В глава 8 отново се разглежда метода на Вайерщрас, като целта е да се намерят проверяеми критерии за избор на начална точка на процеса. Едно лесно за проверка условие за това е намерено в теорема 8.2, в която се пресмята и скоростта на съответния итерационен процес. Показано е, че теоремата подобрява редица резултати на работили по темата автори. В глава 9, теорема 9.2, се дават други условия за сходимост на процеса в завиимост от началната точка. За разлика от теорема 8.2, тук участват коефициентите на полинома, по-точно на неговата дискриминанта.

В глави 10 и 11 се изследва сходимостта на метода на Ерлих за едновременно намиране на всички корени на даден полином. Получените резултати до голяма степен са паралелни на тези от глави 8 и 9, но, разбира се, изискват независими пресмятания. Отново е показано, че получените резултати обобщават редица по-рано получени резултати на други автори. И накрая, глава 12 съдържа резултати за полулокалната сходимост на метода на Чебишев за същата задача.

Като цяло, предлаганата дисертация съдържа голям брой общи резултати за сходимост на итерационните процеси в метрични и конусно-метрични пространства, както и приложенията на тези резултати към итерационния процес на Нютон-Канторович и към задачата за едновременно намиране на корените на даден полином.

Наукометрични данни за публикациите към дисертацията. Резултатите на дисертацията са публикувани в 11 научни труда (приблизително отговарящи на главите на дисертацията). 9 от тях за в издания с импакт-фактор. Седем от публикациите са самостоятелни, а останалите четири с по един съавтор. Публикациите не са представяни в защитата на степента Доктор и в хабилитациите за доцент и професор на дисертанта. Общо дисертантът е автор на 53 научни труда. Работите на Пройнов са широко цитирани; само работите по темата на дисертацията имат 224 цитирания, по-голямата част от които – в издания с импакт-фактор. За единадесет публикации този показател е много добър.

Критични бележки. По мое мнение, един от основните недостатъци на дисертацията е липсата на достатъчно примери, които да позволят да се оцени силата и приложимостта на получените резултати. В частност, за резултатите от абстрактната част на дисертацията не става ясно дали те имат по-широка област на приложимост от дадената в текста, и дали абстрактната формулировка на твърденията е оправдана е оправдана. Освен това, според мен читателите на дисертацията биха били значително улеснени, ако беше отделено повече внимание на подреждането и на логическите връзки между различните абстрактни резултати. Тези недостатъци обаче не влияят на значението на работата, и аз предполагам, че в бъдещата си работа дисертантът би могъл да запълни посочените празнини.

Нарушения при предварителното обсъждане на дисертацията и при провеждане на процедурата не съм забелязал.

Заключение: На основата на гореизложеното смятам, че представената дисертация удовлетворява всички изисквания на закона и на правилника на Университета и предлагам на Почитаемото Научно Жури на Петко Димитров Пройнов да бъде присъдена научната степен Доктор на математическите науки.

20.03.2015 г. Рецензент:

/Р. Леви/