Пловдивски университет "Паисий Хилендарски"
Факултет по математика и информатика

ПЕТКО ДИМИТРОВ ПРОЙНОВ

Апроксимиране на неподвижни точки и приложения за числено решаване на нелинейни уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертационен труд
за присъждане на научната степен
"ДОКТОР НА НАУКИТЕ"
по област на висше образование
4. Природни науки, математика и информатика;
професионално направление 4.5. Математика;
научна специалност Математически анализ

Пловдив – 2014

Дисертационният труд е обсъден и насрочен за защита на разширен катедрен съвет на катедра "Математически анализ" при Факултет по математика и информатика на Пловдивски университет "Паисий Хилендарски", проведен на 09.01.2015 г.

Дисертационният труд "Апроксимиране на неподвижни точки и приложения за числено решаване на нелинейни уравнения" се състои от увод, дванадесет глави, заключение и библиография. Библиографията съдържа 278 заглавия. Общият обем на дисертационния труд е 303 страници. Списъкът на авторските публикации включва 11 заглавия.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на 17.04.2015 г. от 13 ч. в Заседателната зала на Нова сграда на Пловдивски университет "Паисий Хилендарски", гр. Пловдив.

Материалите по защитата са на разположение за интересуващите се в деканата на ФМИ, Нова сграда на ПУ "Паисий Хилендарски", бул. "България" № 236, каб. 330, всеки работен ден от 8:30 до 17:00 часа.

Научно жури

Председател:
проф. д.м.н. Христо Семерджиев
(ПУ „П. Хилендарски", Пловдив, рецензент).

Членове:
акад. проф. д.м.н. Благовест Сендов (ИИКТ при БАН, София);
проф. д.м.н. Рони Леви (СУ „Климент Охридски", София, рецензент);
проф. д.м.н. Румен Малеев (СУ „Климент Охридски", София);
проф. д.т.н. Васил Ангелов (МГУ „Св. Иван Рилски", София);
проф. д-р Михаил Константинов (УАСГ, София, рецензент);
проф. д-р Ангел Дишлиев (ХТМУ, София).

Номерацията на теоремите, лемите, следствията и дефинициите в автореферата съвпада с тяхната номерация в дисертационния труд.

Съдържание

Цел на дисертационния труд

В настоящия дисертационен труд се изследват главно два типа проблеми:

• Проблемът за получаване на общи теореми за сходимост на итерационния процес на Пикар

$$x_{n+1} = Tx_n, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{1}$$

с произволен ред на сходимост, където T е итерационна функция в метрично или конусно метрично пространство.

• Проблемът за получаване на теореми за сходимост с оценки на грешката за някои специални итерационни процеси за числено решаване на нелинейни уравнения.

Нека да разгледаме четири забележителни теореми за сходимост на итерационни методи.

Принцип на Банах за свиващите изображения. Знаменитата теорема на Банах за неподвижните точки, известна също като "'принцип на Банах за свиващите изображения", е публикувана за първи път през 1922 година в дисертационния труд на Банах [19], където тя се използва за получаване на теорема за съществуване на решение на едно интегрално уравнение. Оттогава досега принципът на Банах е най-често използваната теорема за решаване на проблеми за съществуване в много раздели на математическия анализ.

Theorem 0.1 (Принцип на Банах за свиващите изображения)**.** *Нека (X, d) е пълно метрично пространство и нека $T\colon X \to X$ е свиващо изображение с коефициент на свиване $\lambda < 1$, т.е.*

$$d(Tx, Ty) \le \lambda\, d(x, y) \quad \text{за всички } x, y \in X. \tag{2}$$

Тогава T притежава единствена неподвижна точка ξ в X. Нещо повече, за всяка точка $x_0 \in X$ итерационната редица на Пикар (1) е сходяща към ξ с оценка на грешката

$$d(x_n, \xi) \le \frac{\lambda^n}{1 - \lambda}\, d(x_0, Tx_0) \quad \text{за всички } n \ge 0.$$

Теорема на Канторович. Нека да разгледаме проблема за апроксимиране на локално единствено решение на операторно нелинейно уравнение от вида

$$F(x) = 0,$$

където $F\colon \Omega \subset X \to Y$ е диференцируемо по Фреше изображение, което изобразява отворено подмножество Ω на банахово пространство X в банахово пространство Y. Знаменитият метод на Нютон-Канторович [114]

$$x_{n+1} = x_n - F'(x_n)^{-1} F(x_n), \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{3}$$

несъмнено е един от най-популярните методи за решаване на такива уравнения.

През 1948 година Канторович [115] доказва своята знаменита теорема за полулокална[1] сходимост на метода (3). Тази теорема е известна в математическата литература като "теорема на Нютон-Канторович".

Theorem 0.2 (Теорема на Канторович за сходимост на метода на Нютон)**.** *Нека X и Y са две банахови пространства, $F\colon \Omega \subset X \to Y$ е диференцируем по Фреше оператор в отвореното и изпъкнало множество Ω и нека неговата производна удовлетворява условие на Липшиц*

$$\|F'(x) - F'(y)\| \le c\,\|x - y\| \quad \text{за всички } x, y \in \Omega. \tag{4}$$

Нека $x_0 \in \Omega$ е начално приближение, удовлетворяващо следните условия:

(*a*) $F'(x_0)$ *е обратим оператор и* $\|F'(x_0)^{-1}\| \le b$;

(*b*) $\|F'(x_0)^{-1} F(x_0)\| \le a$;

(*c*) $h = abc \le \frac{1}{2}$;

(*d*) $\overline{U}(x_0, \rho) \subset \Omega$, *където* $\rho = \dfrac{2a}{1 + \sqrt{1 - 2h}}$.

Тогава уравнението $F(x) = 0$ притежава единствено решение ξ в затвореното кълбо $\overline{U}(x_0, \rho)$ и итерацията на Нютон-Канторович (3) е коректно дефинирана и сходяща към ξ с оценка на грешката

$$\|x_n - \xi\| \le \frac{1}{bc}\,\frac{1}{2^{n-1}}\,(2h)^{2^n - 1} \quad \text{за всички } n \ge 0.$$

Нещо повече, ако $h < \frac{1}{2}$, то итерацията (3) е сходяща квадратично към решението ξ.

[1] В дисертационния труд използваме стандартната терминология на теорията на сходимостта на итерационни процеси, изложена в класическата монография на Ортега и Райнболд [164].

Теорема на Смейл. През 1986 година Смейл [236] публикува своята знаменита теорема за полулокална сходимост на метода на Нютон-Канторович (3) в банахови пространства за аналитични изображения. Теоремата на Смейл гарантира сходимост на метода на Нютон-Канторович по информация само в една единствена точка – началното приближение x_0. Тази теорема е известна като "α-теорема" на Смейл, а нейното доказателство е известно като "α-теория" или "point estimation theory".

Theorem 0.3 (Теорема на Смейл за сходимост на метода на Нютон)**.** *Нека $F\colon X \to Y$ е аналитичен оператор, изобразяващ банахово пространство X в банахово пространство Y. Нека $x_0 \in X$ е начално приближение, удовлетворяващо следното условие:*

$$\|F'(x_0)^{-1}F(x_0)\| \sup_{k>1} \left\| F'(x_0)^{-1} \frac{F^{(k)}(x_0)}{k!} \right\|^{1/(k-1)} < \alpha_0, \tag{5}$$

където числото $\alpha_0 = 0.130\ldots$ е най-малкия положителен корен на уравнението $(2t^2 - 4t + 1)^2 = 2t$. Тогава итерацията на Нютон-Канторович (3) *е сходяща квадратично към решение ξ на уравнението $F(x) = 0$. Освен това,*

$$\|x_{n+1} - x_n\| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n - 1} \|x_0 - x_1\| \quad \textit{за всички } n \ge 0.$$

Теорема на Дочев. През 1891 година Вайерщрас [256] въвежда своя знаменит итерационен метод за едновременно апроксимиране на всичките нули на даден полином $f \in \mathbb{C}[z]$. Методът на Вайерщрас се дефинира със следната итерация

$$x^{k+1} = x^k - W(x^k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

където оператора $W\colon \mathcal{D} \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ (известен като "корекция на Вайерщрас") се дефинира чрез $W(x) = (W_1(x), \ldots, W_n(x))$ като

$$W_i(x) = \frac{f(x_i)}{a_0 \prod_{j \ne i}(x_i - x_j)} \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{7}$$

където $n \ge 2$ е степента на полинома f, a_0 е старшия коефициент на f и $\mathcal{D}$ е множеството от всички вектори в $\mathbb{C}^n$ с различни координати.

Може да се докаже, че ако итерацията на Вайерщрас (6) е сходяща в $\mathbb{C}^n$, то нейната граница винаги е вектор ξ в $\mathbb{C}^n$, чиито координати $\xi_1, \ldots, \xi_n$ са точно нулите f с техните кратности. В дисертационния труд такъв вектор ξ в $\mathbb{C}^n$ се нарича *вектор-корен* на f.

През 1962 година Дочев [56] публикува следната теорема за локална сходимост на метода на Вайерщрас. В тази теорема и навсякъде в дисертационния труд означаваме с $\operatorname{sep}(f)$ *числото на отделимост* на полинома f, което се дефинира като най-малкото разстояние между две различни нули на f.

Theorem 0.4 (Теорема на Дочев за сходимост на метода на Вайерщрас)**.** *Нека $f \in \mathbb{C}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$ с прости нули, ξ е вектор-корен на f и $0 \leq h < 1$. Нека $x^0 \in \mathbb{C}^n$ е начално приближение, удовлетворяващо следното условие:*

$$\|x^0 - \xi\|_\infty \leq \rho = \frac{\sqrt[n-1]{1+h} - 1}{2\,\sqrt[n-1]{1+h} - 1}\operatorname{sep}(f).$$

Тогава итерацията на Вайерщрас (6) *е коректно дефинирана и сходяща квадратично към ξ с оценка на грешката*

$$\|x^k - \xi\|_\infty \leq \rho\, h^{2^k-1} \quad \text{за всички } k \geq 0.$$

Главна цел на дисертационния труд. Основните цели на настоящия дисертационен труд са:

• Да се разработи обща теория за сходимост на итерационния процес на Пикар за апроксимиране на неподвижни точки в метрични и конусно метрични пространства, която да обобщава формулираните по-горе теореми на Банах, Канторович, Смейл и Дочев.

• Да се приложи общата теория към итерационни методи от типа на Нютон-Канторович за решаване на нелинейни уравнения в банахови пространства, а също така – към итерационни методи от типа на Вайерщрас за едновременна апроксимация на нули на полиноми.

• Да се разработи единна теория на конусно метричните пространства над телесно векторно пространство и да се приложи към теорията на неподвижните точки.

Кратък обзор на дисертационния труд

Дисертационния труд се състои от увод, дванадесет глави, заключение и библиография. Заключението включва: резюме на получените резултати (което съдържа кратко описание на основните приноси в дисертационния труд) и списък на публикациите по дисертационния труд.

Нека (X, d) е метрично пространство (или конусно метрично пространство и нека $T\colon D \subset X \to X$ е оператор (итерационна функция) изобразяващ подмножеството D на X в X. Започвайки от произволна точка $x_0 \in D$ можем да построим итерационната редица на Пикар (1), която може да бъде крайна или безкрайна. Казваме, че итерацията (1) е *коректно дефинирана*, ако $x_n \in D$ за всички $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Основната цел на дисертационния труд е да се разработи обща теория за сходимост на итерационни процеси от типа (1), която да съдържа теореми за сходимост от произволен ред $r \geq 1$. Основните проблеми, които възникват, са следните:

(i) Коректност на итерацията. Да се намерят начални условия за началното приближение $x_0 \in D$, такива че итерационната редица на Пикар (1) е коректно дефинирана.

(ii) Сходимост на итерацията. Да се намерят начални условия за началното приближение $x_0 \in D$, които да гарантират че итерационната редица на Пикар (1) е сходяща към неподвижна $\xi \in D$ на оператора T със съответния ред на сходимост $r \geq 1$.

(iii) Оценки на грешката. Да се намерят априорни и апостериорни оценки на грешката, т.е. оценки отгоре за разстоянието $d(x_n, \xi)$ за всяко $n \geq 0$.

Изградената в дисертационния труд обща теория за сходимост на итерационни процеси се базира на следните основни понятия:

- Квази-хомогенни функции от степен $r \geq 0$ в интервал $J \subset \mathbb{R}$, който съдържа нулата.
- Контролни функции от ред $r \geq 1$ в интервал $J \subset \mathbb{R}$, който съдържа нулата.
- Функции на началните условия на T.
- Начални точки на T (относно дадена функция на началните условия).

- Функции на сходимост на T (относно дадена функция на началните условия).

Нека да разгледаме дефинициите на тези понятия.

Дефиниция 2.1 (Квази-хомогенни функции)**.** Функция $\varphi\colon J \to \mathbb{R}_+$ се нарича *квази-хомогенни* от степен $r \geq 0$ в J, ако удовлетворява следното условие:

$$\varphi(\lambda t) \leq \lambda^r \varphi(t) \quad \text{за всички } \lambda \in [0,1) \text{ и } t \in J.$$

Тук и навсякъде в дисертационния труд по дефиниция $0^0 = 1$. Очевидно, една функция φ е квази-хомогенна от ред $r = 0$ в интервал J тогава и само тогава, когато φ е (монотонно) растяща в J. Нека да отбележим, че ако означим с Q_r множеството от всички квази-хомогенни функции от степен r в интервал J, то $Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \cdots$. Следователно, квази-хомогенните функции могат да се разглеждат като класификация на растящите функции в J.

Дефиниция 2.2 (Контролни функции от висок ред)**.** Функция $\varphi\colon J \to \mathbb{R}_+$ се нарича *контролни функции от ред* $r \geq 1$ в J ако е квази-хомогенна от ред r в J и

$$\varphi(t) \leq t \quad \text{за всички } t \in J. \tag{8}$$

Контролна функция φ от ред r в J се нарича *строго контролна функция*, ако неравенството (8) е строго за всички $t \in J \backslash \{0\}$.

Първото основно понятие в нашата теория е понятието "функция на началните условия" (на дадена итерационна функция), което играе централна роля в теоремите за сходимост на итерационни методи, представени в настоящия дисертационен труд. Нещо повече, методът който предлагаме за доказване на теореми за сходимост може да се нарече "метод на функциите на началните условия".

Дефиниция 3.1 (Функции на началните условия)**.** Нека $T\colon D \subset X \to X$ е изображение на произволно множество X. Функция $E\colon D \to \mathbb{R}_+$ се нарича *функция на началните условия* на T (с контролна функция φ в J), ако съществува функция $\varphi\colon J \to J$, такава че

$$E(Tx) \leq \varphi(E(x)) \text{ за всички } x \in D, \text{ такива че } Tx \in D \text{ и } E(x) \in J. \tag{9}$$

Дефиниция 3.2 (Начални точки относно функция на началните условия)**.** Нека $T\colon D \subset X \to X$ е изображение на произволно множество X и нека $E\colon D \to \mathbb{R}_+$ е функция на началните условия на T (с контролна функция в J). Точка $x \in D$ се нарича *начална точка* на T, ако $E(x) \in J$ и итерационната редица $(T^n x)_{n=0}^{\infty}$ е коректно дефинирана.

В представената теория сходимостта на всеки итерационен процес от вида (1) винаги се изследва относно дадена функция на началните условия E и началното условие за началното приближение x_0 се дава във вида

$$E(x_0) \in J,$$

където x_0 е начална точка на T. Ако E е функция на началните условия с контролна функция от ред $r \geq 1$ в J, то числото r ще бъде реда на сходимост на итерационния процес.

При изследване локалната сходимост на даден итерационен процес първите три понятия от общата теория са достатъчни да се гарантира сходимост на метода. Но в главния случай на полулокална сходимост е необходимо и второто основно понятие "функция на сходимост" на T. Ролята на тази функция е да гарантира сходимостта на итерационния метод.

В общият случай сходимостта на даден итерационен метод от типа (1) се изследва относно дадена функция на началните условия E и дадена функция на сходимост F.

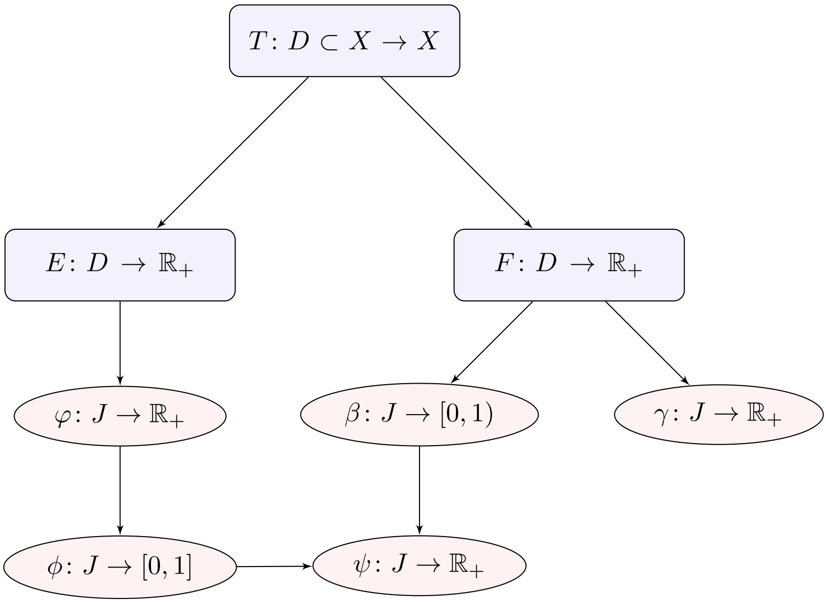
Дефиниция 4.1 (Функции на сходимост)**.** Нека $T\colon D \subset X \to X$ е оператор на метрично пространство (X, d) и $E\colon D \to \mathbb{R}_+$ е функция на началните условия на T с контролна функция φ в J. Функция $F\colon D \to \mathbb{R}_+$ се нарича ***функция на сходимост*** на T (с контролни функции β и γ), ако удовлетворява следните две условия:

$$F(Tx) \leq \beta(E(x))\, F(x), \quad \forall\, x \in D, \text{ такива че } Tx \in D \text{ и } E(x) \in J, \tag{10}$$

$$d(x, Tx) \leq \gamma(E(x))\, F(x), \quad \forall\, x \in D, \text{ такива че } E(x) \in J, \tag{11}$$

където $\beta\colon J \to [0, 1)$ и $\gamma\colon J \to \mathbb{R}_+$ са растящи функции.

Когато прилагаме общата теория за сходимост към даден итерационен метод ние не работим с метода, а с неговата итерационна функция T. Първо избираме функция на началните условия E и функция на сходимост F. Второ намираме контролната функция φ на E и контролните функции β и γ на F. Трето – намираме помощните функции ϕ и ψ, които участват в оценките на грешката. Зависимостите между основните функции, с които се работи в теорията са показани в следната диаграма:



Глава 1. Теореми за неподвижни точки в метрични пространства

Много автори обобщават известната теорема на Банах за неподвижните точки в различни направления. В Глава 1 разглеждаме два типа обобщения на теоремата на Банах. Първият тип теореми за неподвижни точки използват контролни функции. По-точно, в тези теореми условието за свиване (2) се замества с така-нареченото φ-условие

$$d(Tx, Ty) \le \varphi(d(x,y)) \quad \text{за всички } x, y \in X, \tag{12}$$

с *контролна функция* $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Вторият тип теореми за неподвижни точки използват използват условия от типа на Меир и Кийлър [151]. Класическото условие за свиване на Меир и Кийлър може да се представи във вида

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > \varepsilon : \ \varepsilon \le d(x,y) < \delta \ \Rightarrow \ d(Tx, Ty) < \varepsilon. \tag{13}$$

В Глава 1 доказваме две общи теореми за еквивалентност между тези два типа условия за свиване (Теорема 1.4 и Теорема 1.8). Едната от тези теореми обобщава резултата на Лим (2001).

Също в тази глава получаваме ново обобщение (Теорема 1.9) на теоремата на Банах за неподвижните точки, което обобщава резултатите на Матковски [149], Ячимски [105], Маити и Пал [145], Парк и Роудс [165], Замфиреску [270, 271], Чирич [40, 41, 43, 44] както и класическите резултати на Ракоч [210], Браудър [29], Боид и Вонг [28], Бианчини и Грандолфи [25], Фури [77], Зитароса [278], Матковски [148] и други.

Накрая нека да отбележим, че тази глава може да се разглежда като първо стъпало към понятието "функция на началните условия".

Глава 2. Обобщение на принципа на Банах за свиващите изображения с произволен ред на сходимост

В Глава 2, въвеждаме понятието квази-хомогенна функция от степен $r \geq 0$, както и понятието контролна функция от ред $r \geq 1$. Също в тази глава разглеждаме и частен случай на функция на началните условия, която се дефинира с равенството $E(x) = d(x, Tx)$. След това представяме ново обобщение на принципа на Банах с произволен ред на сходимост $r \geq 1$ на последователните приближения (Теорема 2.2). Новата теорема обобщава съответните резултати на Райнболд [215] (вж. също [164, 12.3.2]), Гелман [81], Чирич [40], Рус [221], Корнщад [131], Хикс и Роудс [93], Парк [166], Хикс [92] и други. В Параграф 2.5 прилагаме Теорема 2.2 към метода на Нютон-Канторович и към методи от типа на Нютон за решаване на нелинейни уравнения в банахови пространства. Като частен случай на Теорема 2.2 получаваме известната теорема на Мисовских [157] (известна като теорема на Нютон-Мисовских; вж. също [116, 164]), както и резултатите на Райнболд [215, Теореми 4.1 и 4.6] и Хуанг [96] с нови апостериорни оценки на грешката.

Накрая нека да отбележим, че тази глава може да се разглежда като второ стъпало към понятието "функция на началните условия".

Глава 3. Обща теория за локална сходимост на итерационни процеси и приложения към метода на Нютон

В Глава 3 въвеждаме понятието функция на началните точки. Също получаваме няколко общи теореми за локална сходимост на итерационни методи (Теорема 3.1, Теорема 3.2 и Теорема 3.3) с ред на сходимост $r \geq 1$ Нека да формулираме втората теорема за локална сходимост (Теорема 3.2).

Теорема 3.2 (Втора теорема за локална сходимост)**.** *Нека $T\colon D \subset X \to X$ е оператор на метрично пространство (X, d). Нека $E\colon D \to \mathbb{R}_+$ е функция* *на началните условия T с контролна функция φ от ред $r \geq 1$ в J. Нека ξ е точка в D, такава че $E(\xi) \in J$ и T е итерационно свиващо изображение в ξ, т.е.*

$$d(Tx, \xi) \leq \beta(E(x))\, d(x, \xi) \quad \text{за всички } x \in D, \text{ такива че } E(x) \in J, \tag{14}$$

където $\beta\colon J \to [0, 1)$ е растяща функция, удовлетворяваща следните две условия:

$$t\beta(t) \text{ е строго контролна функция от ред } r \text{ в } J \tag{15}$$

и

$$t \in J : \phi(t) = 0 \;\Rightarrow\; \beta(t) = 0, \tag{16}$$

където $\phi\colon J \to \mathbb{R}_+$ е растяща функция, удовлетворяваща условието

$$\varphi(t) = t\,\phi(t) \quad \text{за всички } t \in J. \tag{17}$$

Тогава ξ е единствена неподвижна точка на T в множеството

$$U = \{x \in D : E(x) \in J\}.$$

Нещо повече, за всяка начална точка x_0 на T са в сила следните твърдения:

(i) *Итерационната редица (1) лежи в множеството U и е сходяща към ξ. Освен това, ако $\phi(E(x_0)) < 1$, то редицата (1) е сходяща с R-ред на сходимост r още от първата итерация.*

(ii) *За всяко $n \geq 0$ са в сила оценките*

$$d(x_{n+1}, \xi) \leq \theta\, \lambda^{r^n}\, d(x_n, \xi) \quad \text{и} \quad d(x_n, \xi) \leq \theta^n\, \lambda^{S_n(r)}\, d(x_0, \xi), \tag{18}$$

където $\lambda = \phi(E(x_0))$, $\theta = \psi(E(x_0))$ и $\psi\colon J \to \mathbb{R}_+$ е функция, такава че

$$\beta(t) = \phi(t)\,\psi(t) \quad \text{за всички} \quad t \in J. \tag{19}$$

Във втората част на тази глава теорията за локална сходимост на итерационни методи се прилага към метода на Нютон-Канторович за решаване на нелинейни уравнения в банахови пространства, а също така – към метода на Шрьодер за апроксимиране на кратни нули на полиноми и на аналитични функции. Теорията се прилага също за получаване на теореми за кълбо на единственост на нелинейни уравнения в банахови пространства. Получените резултати обобщават и подобряват резултати на Дочев [55], Трауб и Возниаковски [242], Смейл [236], Дедьо [47], Тили [241], Ванг [252], Ванг и Ли [255], Аргирос и Гутиерез [14], Джиусти, Лецерф, Салви и Якобсон [83] и други.

Например, в Параграф 3.5 прилагаме Теорема 3.2 към класическия метод на Шрьодер [229] (известен също като "метод на Нютон за кратни нули") за апроксимиране на кратни нули на аналитични функции. Нека $f \colon D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ и $\xi \in D$ е нула на f с кратност $m \in \mathbb{N}$. Методът на Шрьодер се дефинира чрез итерацията

$$z_{k+1} = T z_k, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{20}$$

където оператора на Шрьодер $T \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ се дефинира чрез

$$Tz = \begin{cases} z - m\,\dfrac{f(z)}{f'(z)} & \text{при} \quad f'(z) \neq 0, \\ z & \text{при} \quad f'(z) = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Ако f е аналитична функция в околност на ξ дефинираме

$$\gamma(\xi) = \gamma(f, \xi) = \sup_{k > m} \left| \frac{m!\, f^{(k)}(\xi)}{k!\, f^{(m)}(\xi)} \right|^{1/(k-m)}.$$

Тази величина в частния случай $m = 1$ е въведена от Смейл [236], а при $m \geq 1$ е въведена от Якобсон [260]. В Параграф 3.5 изследваме локалната сходимост на метода на Шрьодер (20) за аналитични функции относно следната функция на началните условия:

$$E(z) = \gamma(\xi)\,|z - \xi|. \tag{22}$$

В резултат на това изследване получаваме следната теорема (Теорема 3.10), която обобщава и подобрява предишните резултати на Трауб и Возниаковски [242] и Смейл [236] и подобрява резултатът на Джиусти, Лецерф, Салви и Якобсон [83].

Теорема 3.10. *Нека $f \colon D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Нека $\xi \in D$ е нула на f с кратност m и нека f е аналитична в отворен кръг $U = \{z \in \mathbb{C} : E(z) < r\} \subset D$, където функцията $E \colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$ се дефинира чрез* (22) *и*

$$0 < r \leq \frac{3m + 2 - \sqrt{m^2 + 12m + 4}}{4m}.$$

Тогава за всяко начално приближение $z_0 \in U$ итерацията на Шрьодер (20) *е сходяща Q-квадратично към ξ както следва*

$$|z_{k+1} - \xi| \leq C_k\,|z_k - \xi|^2 \quad \text{за всички} \quad k \geq 0,$$

където $C_k = \gamma(\xi)\,\mu(E(x_k))$, $C_k \to \gamma(\xi)/m$ *при* $k \to \infty$ *и реалната функция* μ *се дефинира чрез* $\mu(t) = 1/(2mt^2 - (3m+1)t + m)$. *Нещо повече, за всяко* $k \geq 0$ *са в сила следните оценки на грешката*

$$|z_{k+1} - \xi| \leq \lambda^{2^k}|z_k - \xi| \quad \text{и} \quad |z_k - \xi| \leq \lambda^{2^k-1}|z_0 - \xi|,$$

където $\lambda = \phi(E(z_0))$ *и* $\phi(t) = t/(2mt^2 - (3m+1)t + m)$.

Ще отбележим, че в случая $m = 1$ Теорема 3.10 допълва знаменитата γ-теорема на Смейл [236] с апостериорни оценки на грешката.

Глава 3 завършва с обща теорема за кълбото на единственост на нелинейни уравнения в банахови пространства. Тази теорема обобщава и подобрява резултатите на Дедьо [47], Ванг [252] и Хуанг [97].

Теорема 3.16. *Нека* X *и* Y *са банахови пространства и* $F\colon D \subset X \to Y$ *е непрекъснат оператор в изпъкнало множество* D *и непрекъснато диференцируем по Фреше в* $\operatorname{int} D$. *Нека* $\xi \in \operatorname{int} D$ *е проста нула на* F, *т.е.* $F(\xi) = 0$ *и* $F(\xi)^{-1}$ *съществува и е ограничен оператор. Нека* F' *удовлетворява афинно инвариантно* ω*-условие от вида*

$$\|F'(\xi)^{-1}(F'(x) - F'(\xi)\| \leq \omega(\|x - \xi\|), \ \forall\, x, y \in D, \text{такива че } \|x - \xi\| < r, \tag{23}$$

където $r > 0$ *и* $\omega\colon [0, r] \to \mathbb{R}_+$. *Ако функцията* φ, *дефинирана с*

$$\varphi(t) = \int_0^t \omega(u)\, du,$$

е строго контролна от първи ред в $[0, r)$ *и непрекъсната отдясно в нулата, то уравнението* $F(x) = 0$ *притежава единствено решение в множеството* $D \cap U(\xi, r)$. *Нещо повече, ако* r *е неподвижна точка на* φ *и* ω *е непрекъсната в* $[0, r]$, *то* r *е оптималния радиус на кълбото на единственост на уравнението* $F(x) = 0$ *при условие* (23).

Глава 4. Обща теория за сходимост на итерационни процеси и приложения към теореми от типа на Нютон Канторович

В Глава 4 въвеждаме понятието *функция на сходимост* на T, което гарантира сходимостта на итерацията на Пикар (1).

В параграфи 4.2–4.5 е представена обща теория за сходимост на итерационни процеси от типа (1). В Параграф 4.4 са доказани четири общи теореми за сходимост на итерационни процеси (Теореми 4.2–4.5). Следните две теорема са опростени версии на съответно на Теорема 4.3 и Теорема 4.4.

Теорема 4.3 (Втора теорема за сходимост). *Нека $T\colon D \subset X \to X$ е оператор в пълно метрично пространство (X, d), $E\colon D \to \mathbb{R}_+$ е функция на началните условия на T с контролна функция φ в J, удовлетворяваща условието* (8) *и нека $F\colon D \to \mathbb{R}_+$ е функция на сходимост на T с контролни функции β и γ. Ако съществува функция $g\colon J \to \mathbb{R}_+$, такава че*

$$\beta(t)g(\varphi(t)) \le g(t) - 1 \quad \text{за всички} \quad t \in J, \tag{24}$$

то следните твърдения са в сила за всяка начална точка x_0 на T:

(i) Сходимост. *Итерационната редица на Пикар* (1) *е коректно дефинирана, лежи в затвореното кълбо $\overline{U}(x_0, \rho)$ и е сходяща към точка $\xi \in \overline{U}(x_0, \rho)$, където*

$$\rho = \gamma(E(x_0))\, g(E(x_0))\, F(x_0).$$

(ii) Първа апостериорна оценка. *За всяко $n \ge 0$ е в сила следната оценка на грешката*

$$d(x_n, \xi) \le \gamma(E(x_n))\, g(E(x_n))\, F(x_n). \tag{25}$$

(iii) Втора апостериорна оценка. *За всяко $n \ge 0$ е в сила следната оценка на грешката*

$$d(x_{n+1}, \xi) \le \gamma(E(x_n))[g(E(x_n)) - 1]F(x_n). \tag{26}$$

(iv) Съществуване на неподвижна точка. *Ако $\xi \in D$ и T е непрекъснато изображение в ξ, то ξ е неподвижна точка на T.*

Теорема 4.4 (Трета теорема за сходимост). *Нека $T\colon D \subset X \to X$ е оператор на пълно метрично пространство (X, d) и $E\colon D \to \mathbb{R}_+$ е функция на началните условия на T с контролна функция φ от ред $r \ge 1$ в J. Нека $F\colon D \to \mathbb{R}_+$ е функция на сходимост на T с контролни функции β и γ, удовлетворяващи условията* (15) *и* (16)*. Нека x_0 е дадена начална точка на T. Тогава са в сила следните твърдения.*

(i) Сходимост. *Итерационната редица на Пикар* (1) *е коректно дефинирана, лежи в затвореното кълбо $\overline{U}(x, \rho)$ и е сходяща към точка $\xi \in \overline{U}(x, \rho)$, където*

$$\rho = \frac{\gamma(E(x_0))\, F(x_0)}{1 - \beta(E(x_0))}\,,$$

$\lambda = \phi(E(x_0))$, $\theta = \psi(E(x_0))$, $\phi\colon J \to [0, 1]$ е растяща функция, удовлетворяваща условие (17) *и $\psi\colon J \to \mathbb{R}_+$ е растяща функция, удовлетворяваща условие* (19).

(ii) Априорна оценка. *За всяко $n \geq 0$ е в сила следната априорна оценка на грешката*

$$d(x_n, \xi) \leq A_n \, F(x_0) \frac{\theta^n \, \lambda^{S_n(r)}}{1 - \theta \, \lambda^{r^n}} \, . \tag{27}$$

където $A_n = \gamma\left(E(x_0)\lambda^{S_n(r)}\right)$.

(iii) Първа апостериорна оценка. *За всяко $n \geq 0$ е в сила следната апостериорна оценка на грешката*

$$d(x_n, \xi) \leq \frac{\gamma(E(x_n)) \, F(x_n)}{1 - \beta(E(x_n))} \, . \tag{28}$$

(iv) Втора апостериорна оценка. *За всяко $n \geq 0$ е в сила следната апостериорна оценка на грешката*

$$d(x_{n+1}, \xi) \leq \gamma_n \, F(x_n) \frac{\theta_n \lambda_n}{1 - \theta_n (\lambda_n)^r} \, . \tag{29}$$

където $\lambda_n = \phi(E(x_n))$, $\theta_n = \psi(E(x_n))$ и $\gamma_n = \gamma(E(x_{n+1}))$.

(v) Съществуване на неподвижна точка. *Ако $\xi \in D$ и T е непрекъснато изображение в ξ, то ξ е неподвижна точка на T.*

В Параграф 4.5 прилагаме тези резултати за получаване на теореми за неподвижни точки на *итерационно свиващи изображения* (относно дадена функция на началните условия E).

Дефиниция 4.2 (Итерационно свиващи изображения)**.** Нека (X, d) е метрично пространство. Изображение $T \colon D \subset X \to X$ се нарича *итерационно свиващи изображение* (в D), ако

$$d(Tx, T^2x) \leq \lambda \, d(x, Tx) \text{ за всички } x \in D, \text{ такива че } Tx \in D \text{ и } x \neq Tx.$$

Резултатите в този параграф обобщават, подобряват и допълват резултати на Ортега и Райнболд [164, Глава 12], Хикс и Роудс [93], Парк [166], Чирич [40] и Бериндe [22, 23].

Нека да отбележим, че всяка от общите теореми в тази глава е обобщение и подобрение на принципа на Банах за свиващите изображения. Например, като положим в Теорема 4.3 $E(x) = F(x) = d(x, Tx)$, $\varphi(t) = \lambda t$ $(0 \leq \lambda < 1)$, $\beta \equiv \lambda$, $\gamma \equiv 1$ и $g \equiv 1/(1-\lambda)$, получаваме класическия принцип на Райнболд за итерационно свиващите изображения (вж. Ортега и Райнболд [164, Глава 12]), който е подобрение на принципа на Банах за свиващите изображения. Аналогично, като положим в Теорема 4.4 $E(x) = F(x) = d(x, Tx)$, $\varphi(t) = \lambda t$ $(0 \le \lambda < 1)$, $r = 1$, $\beta = \phi \equiv \lambda$ и $\gamma = \psi \equiv 1$, ние отново получаваме принципа на Райнболд за итерационно свиващите изображения.

В Параграф 4.6, прилагаме общата теория за сходимост на итерационни методи към метода на Нютон-Канторович (3), където $F\colon \Omega \subset X \to Y$ е оператор, който е диференцируем по Фреше в отворено подмножество Ω на банахово пространство X със стойности в банахово пространство Y. В този параграф предполагаме, че F' удовлетворява афинно инвариантно ω-условие от вида

$$\|F'(x_0)^{-1}(F'(x) - F'(y)\| \le \omega(\|x - y\|) \quad \forall\, x, y \in D, \text{ такива че } \|x - y\| \in J,$$

където ω е растяща функция в интервал $J \subset \mathbb{R}_+$, съдържащ нулата. При това условие условие изследваме полулокалната сходимост на итерацията на Нютон-Канторович (3) относно функция на началните условия E, която се дефинира с формулата

$$E(x) = \|F'(x)^{-1}F'(x_0)\|\, \omega(\|F'(x)^{-1}F(x)\|)$$

и относно функция на сходимост $\mathscr{F}$, която се дефинира чрез

$$\mathscr{F}(x) = \|F'(x)^{-1}F(x)\|. \tag{30}$$

В резултат на проведеното изследване, получаваме три теореми от типа на знаменитата теорема на Нютон-Канторович (Теореми 4.10, 4.11, 4.12), които обобщават , подобряват и допълват резултати на Езкеро и Ернандез [67, 68], Граг и Тапиа [85], Островски [163], Миел [153], Ямамото [264] (вж. също [265]) и други.

Нека да формулираме трета теорема от този тип, която съдържа като частни случаи множество известни подобрения на знаменитата теорема на Канторович [115].

Теорема 4.12 (Трета теорема от типа на Канторович)**.** *Нека X и Y са две банахови пространства и нека $F\colon \Omega \subset X \to Y$ е непрекъснато диференцируем по Фреше оператор в отворено и изпъкнало множество Ω. Нека точката $x_0 \in \Omega$ е такава,че съществува $F'(x_0)^{-1} \in L(Y, X)$ и F' и удовлетворява афинно инвариантно условие от вида*

$$\|F'(x_0)^{-1}(F'(x) - F'(y))\| \le \omega(\|x - y\|), \quad \forall\, x, y \in \Omega, \text{ такива че } \|x - y\| \in J,$$

където ω е квази-хомогенна функция от първа степен в интервал J. Нека началното приближение x_0 удовлетворява условията

$$E(x_0) \leq \frac{1}{2} \quad \textit{и} \quad \overline{U}(x_0, \rho) \subset \Omega,$$

където

$$\rho = \frac{2\,\|F'(x_0)^{-1}F(x_0)\|}{1 + \sqrt{1 - 2E_(x_0)}}\,,$$

Тогава са в сила следните твърдения:

(i) Сходимост. *Итерационната редица на Нютон-Канторович (3) лежи в затвореното кълбо $\overline{U}(x_0, \rho)$ и е сходяща към решение $\xi \in \Omega$ на уравнението $F(x) = 0$. Нещо повече, ако $E(x_0) < 1/2$, то итерацията на Нютон-Канторович е сходяща квадратично към ξ.*

(ii) Априорна оценка на грешката. *За всяко $n \geq 0$ е в сила оценката*

$$\|x_n - \xi\| \leq (1 - \theta^2)\frac{\theta^{2^n - 1}}{1 - \theta^{2^n}}\,\|x_0 - x_1\|, \tag{31}$$

където

$$\theta = \frac{1 - \sqrt{1 - 2E(x_0)}}{1 + \sqrt{1 - 2E(x_0)}}\,. \tag{32}$$

(iii) Първа апостериорна оценка на грешката. *За всяко $n \geq 0$ е в сила оценката*

$$\|x_n - \xi\| \leq \frac{2\,\|x_{n+1} - x_n\|}{1 + \sqrt{1 - 2E(x_n)}}\,, \tag{33}$$

(iv) Втора апостериорна оценка на грешката. *За всяко $n \geq 0$ е в сила оценката*

$$\|x_{n+1} - \xi\| \leq \frac{1 - \sqrt{1 - 2E(x_n)}}{1 + \sqrt{1 - 2E(x_n)}}\,\|x_{n+1} - x_n\|. \tag{34}$$

(v) Трета апостериорна оценка на грешката. *За всяко $n \geq 0$ е в сила оценката*

$$\|x_{n+1} - \xi\| \leq \theta^{2^n}\,\|x_{n+1} - x_n\|. \tag{35}$$

(vi) Оценки за $E(x_n)$. *За всяко $n \geq 0$ са в сила оценките*

$$E(x_{n+1}) \leq \varphi(E(x_n)), \tag{36}$$

$$E(x_n) \leq \frac{1+\theta}{1-\theta}\,\frac{1-\theta^{2^n}}{1+\theta^{2^n}}\;\omega(\|x_{n+1}-x_n\|), \tag{37}$$

$$E(x_n) \leq \frac{2\,\theta^{2^n}}{(1+\theta^{2^n})^2}\,. \tag{38}$$

(vii) Оценки за $\|x_{n+1}-x_n\|$. *За всяко $n \geq 0$ са в сила оценките*

$$\|x_{n+2}-x_{n+1}\| \leq \beta(E(x_n))\,\|x_{n+1}-x_n\|, \tag{39}$$

$$\|x_{n+2}-x_{n+1}\| \leq \frac{\theta^{2^n}}{1+\theta^{2^{n+1}}}\,\|x_{n+1}-x_n\|, \tag{40}$$

$$\|x_{n+2}-x_{n+1}\| \leq \frac{1+\theta}{1-\theta}\,\frac{1-\theta^{2^{n+1}}}{1+\theta^{2^{n+1}}}\;\Phi(\|x_{n+1}-x_n\|), \tag{41}$$

$$\|x_{n+1}-x_n\| \leq (1-\theta^2)\frac{\theta^{2^n-1}}{1-\theta^{2^{n+1}}}\,\|x_0-x_1\|, \tag{42}$$

(viii) Скорост на сходимост. *За всяко $n \geq 1$ са в сила оценките*[2]

$$\|x_{n+1}-\xi\| \leq \frac{1+\theta}{1-\theta}\,\frac{1-\theta^{2^n}}{1+\theta^{2^n}}\,\Phi(\|x_n-\xi\|), \tag{43}$$

$$\|x_{n+1}-\xi\| \leq \frac{1+\theta}{1-\theta}\,(1-\theta^{2^{n+1}})\,\Phi(\|x_{n+1}-x_n\|). \tag{44}$$

Тук реалните функции φ, β и Φ се дефинират чрез формулите

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{1-t}\right)^2, \quad \beta(t) = \frac{t}{2(1-t)} \quad \text{и} \quad \Phi(t) = \int_0^t \omega(u)\,du.$$

В Параграф 4.7 прилагаме общата теория за сходимост на итерационни процеси към метода на Нютон-Канторович (3) за решаване на нелинейни уравнения от вида $F(x) = 0$, където $F\colon \Omega \subset X \to Y$ е аналитична функция в отворено подмножество Ω на банахово пространство X със стойности в банахово пространство Y. В този параграф изследваме итерацията на

[2]Тези оценки са в сила и при $n = 0$ при условие, че $\rho \in J$.

Нютон-Канторович относно функция на началните условия E, дефинирана чрез формулата

$$E(x) = \|F'(x)^{-1}F(x)\| \sup_{k>1} \left\| F'(x)^{-1} \frac{F^{(k)}(x)}{k!} \right\|^{1/(k-1)} \tag{45}$$

и относно функция на сходимост $\mathscr{F}$, дефинирана чрез (30). Като резултат получаваме нова пълна версия на α-теоремата на Смейл [236] с априорни и апостериорни оценки на грешката както и с някои други оценки. Резултатът подобрява и допълва предишния резултат на Райнболд [217].

Нека да формулираме пълната версия на α-теоремата на Смейл [236]. Във формулировката на теоремата използваме реалните функции φ, ϕ, β и ψ, дефинирани както следва

$$\varphi(t) = \frac{t^2}{(2t^2-4t+1)^2}, \quad \phi(t) = \frac{t}{(2t^2-4t+1)^2}, \quad \beta(t) = \frac{t(1-t)}{2t^2-4t+1},$$

$$\psi(t) = (1-t)(2t^2-4t+1).$$

Теорема 4.16. *Нека X и Y са две банахови пространства, $F\colon \Omega \subset X \to Y$ е аналитично изображение в отворено множество Ω и нека $x_0 \in \Omega$ е начално приближение, удовлетворяващо условието*

$$E(x_0) \le R \quad \text{и} \quad \overline{U}(x_0, \rho) \subset \Omega,$$

където функцията E се дефинира чрез (45) и $R = 0.162\ldots$ е единствената неподвижна точка на реалната функция φ в интервала $(0, 1 - \sqrt{2}/2)$ и

$$\rho = \frac{\|F'(x_0)^{-1}F(x_0)\|}{1 - \beta(E(x_0))}\,.$$

Тогава са изпълнени следните твърдения:

(i) Сходимост. *Итерацията на Нютон-Канторович (3) е коректно дефинирана, лежи в затвореното кълбо $\overline{U}(x_0, \rho)$ и е сходяща към решение $\xi \in \overline{U}(x_0, \rho)$ на уравнението $F(x) = 0$. Нещо повече, ако $E(x_0) < R$, то сходимостта е квадратична.*

(ii) Априорна оценка на грешката. *За всяко $n \ge 0$ е в сила оценката*

$$\|x_n - \xi\| \le \frac{\theta^n \lambda^{2^n-1}}{1 - \theta\,\lambda^{2^n}}\, \|x_0 - x_1\|, \tag{46}$$

където $\lambda = \phi(E(x_0))$, $\theta = \psi(E(x_0))$.

(iii) Първа апостериорна оценка на грешката. *За всяко $n \geq 0$ е изпълнена оценката*

$$\|x_n - \xi\| \leq \frac{\|x_{n+1} - x_n\|}{1 - \beta(E(x_n))}, \tag{47}$$

където $\lambda_n = \phi(E(x_n))$, $\theta_n = \psi(E(x_n))$.

(iv) Втора апостериорна оценка на грешката. *За всяко $n \geq 0$ е изпълнена оценката*

$$\|x_{n+1} - \xi\| \leq \frac{\theta_n \lambda_n}{1 - \theta_n (\lambda_n)^2} \|x_{n+1} - x_n\|. \tag{48}$$

(v) Други оценки. *За всяко $n \geq 0$ са в сила оценките*

$$\|x_{n+2} - x_{n+1}\| \leq \beta(E(x_n)) \|x_{n+1} - x_n\|, \tag{49}$$

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \theta^n \, \lambda^{2^n - 1} \|x_0 - x_1\|. \tag{50}$$

Глава 5. Единна теория на конусно метричните пространства и приложения към теорията на неподвижните точки

В тази глава си поставяме три цели. Първо – да се разработи единна теория на телесните векторни пространства. Второ – да се разработи единна теория на конусно метричните пространства над телесно векторно пространство. Трето – да се разработят пълни формулировки на принципа за итерационно свиващите изображения, принципа на Банах за свиващите изображения и принципа на Чирич за квази-свиващите изображения в конусно метричните пространства над телесно векторно пространство. За целта въвеждаме понятието "Строга векторна наредба", което се оказва твърде естествено и лесно за използване в конусно метричните пространства и техните приложения в теорията на неподвижните точки. Това понятие играе централна роля в новата теория. Основните резултати в тази глава обобщават и допълват резултати на Дю (2010), Кадебург, Раденович и Ракочевич (2011), Патхак и Шахзад (2009), Вардовски (2009), Раденович и Кадебург (2011) и други.

Структурата на Глава 5 е следната:

В Параграф 5.2 въвеждаме аксиоматична дефиниция за векторно пространство със сходимост (Дефиниция 5.1), която не включва аксиома за единственост на границата на сходяща редица, както и аксиома за сходимост на подредиците на сходяща редица. Предложените аксиоми са достатъчни за разработената теория и за доказване на включените в тази глава теореми за неподвижни точки в конусно метрични пространства над телесно векторно пространство.

В Параграф 5.3 получаваме необходимо и достатъчно условие едно множество да бъде вътрешност на телесен конус във векторно пространство със сходимост (Теорема 5.1).

В Параграф 5.4 даваме дефиниция за наредено векторно пространство със сходимост и формулираме известната теорема за взаимно еднозначното съответствие между векторните наредби и конусите в тези пространства.

В Параграф 5.5 въвеждаме аксиоматична дефиниция за новото понятие "строга векторна наредба" в наредено векторно пространство със структура на сходимост (Дефиниция 5.11). След това доказваме, че в наредено векторно пространство съществува строга векторна наредба $\prec$ тогава и само тогава, когато то е телесно векторно пространство (Теорема 5.3). Нещо повече, ако положителният конус на наредено векторно пространство телесен, то в това пространство съществува единствена строга векторна наредба . Следователно, между строгите векторни наредби и телесните конуси съществува взаимно и еднозначно съответствие. Оказва се, че телесно векторно пространство може да се дефинира като наредено векторно пространство със сходимост, снабдено със строга векторна наредба (Следствие 5.1).

В Параграф 5.6 доказваме че във всяко телесно векторно пространство може да се въведе топология на наредбата τ и че от $x_n \to x$ следва, че $x_n \xrightarrow{\tau} x$ (Теореми 5.4 и 5.5). Като следствие от този резултат показваме, че всяка сходяща редица в телесно векторно пространство е ограничена и притежава единствена граница (Теорема 5.6).

В Параграф 5.7, като използваме функционала на Минковски, доказваме, че топологията на наредбата във всяко телесно векторно пространство е нормируема с монотонна норма (Теорема 5.7). Също така доказваме , че всяко нормално телесно векторно пространство Y е нормируемо в смисъл, че в него може да се въведе норма $\|\cdot\|$ такава, че $x_n \to x$ тогава и само тогава, когато $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ (Теорема 5.9). В заключение към този параграф доказваме, че сходящите редици в нормално телесно векторно пространство притежават всички основни свойства на сходимостта в $\mathbb{R}$ (Теорема 5.10).

Този резултат показва, че теоремата на Сандвича играе важна роля в телесните векторни пространства. В частност, Теорема 5.10 показва, че една редица (x_n) в нормално телесно пространство е сходяща към вектор x тогава и само тогава, когато за всеки вектор $c \succ 0$ са в сила неравенствата $x - c \prec x_n \prec x + c$ за достатъчно големи n.

В Параграф 5.8 даваме класическите дефиниции за конусно метрично пространство и за конусно нормирано пространство. Ще отбележим, че в дефиницията за конусно нормирано пространство $(X, \|\cdot\|)$ ние разглеждаме X като векторно пространство над произволно нормирано поле $\mathbb{K}$.

В Параграф 5.9 изучаваме конусно метричните пространства над телесно векторно пространство. Теорията на тези пространства е много близка до теорията на класическите метрични пространства. Например, всяко конусно метрично пространство над телесно векторно пространство е метризируемо топологично пространство (Теорема 5.12) и в тези пространства е в сила теоремата за вложените кълба (Теорема 5.20). Нещо повече, конусната метрика е еквивалентна на метрика, която запазва някои неравенства. Сред другите резултати в този параграф ние доказваме, че всяко конусно нормирано пространства над телесно векторно пространство е нормируемо. (Теорема 5.14). Също така в този параграф получаваме някои полезни свойства на конусно метричните пространства, които се оказват важен инструмент при доказване на теореми за сходимост с априорни и апостериорни оценки на грешката за итерационни процеси от типа на Пикар (Теорема 5.16 и Теорема 5.19). Основните резултати в този параграф обобщават и допълват резултати на Дю [59], Каделбург, Раденович и Ракочевич [112, 111], Чакали, Сьонмез и Генч [31], Симич [235], Абделжавад и Резапур [3], Аранделович и Кешкич [12], Амини-Харанди и Факхар, [9], Кхани и Пурмахдиан [124], Сьонмез [238], Асади, Ваезапур и Солеймани [17], Шахин и Телси [228], Азам, Бег и Аршад [18].

В Параграф 5.10 получаваме пълен вариант на принципа на итерационно свиващите изображения в конусно метрични пространства над телесно векторно пространство. Основният резултат в този параграф е следната теорема:

Теорема 5.21 (Принцип за итерационно свиващите изображения). *Нека (X, d) е пълно конусно метрично пространство над телесно векторно пространство $(Y, \preceq)$. Нека $T\colon D \subset X \to X$ итерационно свиващо изображение в D с коефициент на свиване $\lambda < 1$, т.е.*

$$d(Tx, T^2x) \preceq \lambda\, d(x, Tx) \ \text{ за всички } x \in D, \ \text{ такива че } Tx \in D.$$

и нека съществува точка $x_0 \in D$, такава че $\overline{U}(x_0, r) \subset D$, където $r = \dfrac{1}{1-\lambda}\, d(x_0, Tx_0)$. Тогава са в сила следните твърдения:

(i) Сходимост на итерационния метод. *Итерацията на Пикар* (1) *е коректно дефинирана, лежи в затвореното кълбо $\overline{U}(x_0, r)$ и е сходяща към точка $\xi \in \overline{U}(x_0, r)$.*

(ii) Априорна оценка на грешката. *В сила е следната оценка:*

$$d(x_n, \xi) \preceq \frac{\lambda^n}{1-\lambda}\, d(x_0, Tx_0) \quad \text{за всички } n \geq 0. \tag{51}$$

(iii) Апостериорни оценки на грешката. *В сила са следните оценки:*

$$d(x_n, \xi) \preceq \frac{1}{1-\lambda}\, d(x_n, x_{n+1}) \quad \text{за всички } n \geq 0; \tag{52}$$

$$d(x_n, \xi) \preceq \frac{\lambda}{1-\lambda}\, d(x_n, x_{n-1}) \quad \text{за всички } n \geq 1. \tag{53}$$

(iv) Съществуване на неподвижна точка *Ако T притежава затворена графика, то ξ е неподвижна точка на T.*

Част (i) обобщава резултати на Патхак и Шахзад [167, Теорема 3.7] и Вардовски [259, Теорема 3.3]. Ще отбележим, че резултатите на тези автори са получени в случая когато $D = X$ и Y е нормално телесно банахово пространство.

В Параграф 5.11 получаваме пълна версия на принципа на Банах за свиващите изображения в конусно метрични пространства над телесно векторно пространство (Теорема 5.22). Тази теорема обобщава и допълва резултати на Резапур и Хамлбарани [214], Дю [59], Раденович и Каделбург [208] и други.

Параграф 5.12 е посветен на неподвижни точки на квази-свиващи изображения в конусно метрични пространства над телесно векторно пространство. Тук получаваме пълна версия на теоремата на Чирич за неподвижните точки на квази-свиващи изображения на конусно метрично пространство над телесно векторно пространство (Теорема 5.26). Този резултат обобщава и допълва предишните резултати, които принадлежат на Джанг [273], Динг, Йованович, Каделбург и Раденович [53] и други.

Глава 6. Общи теореми за сходимост на итерацията на Пикар в конусно метрични пространства

В Глава 3 и Глава 4 представихме обща теория за сходимост на итерационни методи от типа (1), където $T\colon D \subset X \to X$ е итерационна функция в метрично пространство X. В тази глава, като използваме резултат от Глава 5, ние разширяваме общата теория в конусно метрични пространства. В Глава 6 представяме три теореми за локална сходимост и две теореми за полулокална сходимост в в конусно метрични пространства. те са подобни на съответните резултати в метрични пространства.

Глава 7. Локална сходимост на метода на Вайерщрас

В Глава 7 прилагаме общата теория за локална сходимост, развита в Глава 6.1, към метода на Вайерщрас за едновременна апроксимация на всичките нули на даден полином с коефициенти от произволно нормирано поле.

Основните резултати в тази глава (Теорема 7.4, Теорема 7.5, Теорема 7.9 и Теорема 7.10) обобщават, подобряват и допълват всички предишни резултати в това направление, които принадлежат на Дочев [56], Кюркчиев и Марков [129], Ванг и Чао [248], Тили [241], Хан [89], Якобсон [261] и други. Резултатите са формулирани за полиноми над произволно нормирано поле, но те са нови и в случая на реални или комплексни полиноми.

Нека да въведем някои означения, които използваме в тази и следващите глави на дисертационния труд.

С $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ означаваме произволно нормирано поле, а с $\mathbb{K}[z]$ – пръстена на полиномите над полето $\mathbb{K}$. Векторното пространство $\mathbb{K}^n$ е снабдено с p-норма $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$ $(1 \le p \le \infty)$ и с по-координатна наредба $\preceq$ $(x \preceq y \Leftrightarrow x_i \le y_i \ \forall i)$. Лесно се вижда, че $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p, \preceq)$ е телесно векторно пространство. Дефинираме изображение $\|\cdot\|\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^n$ чрез равенството

$$\|x\| = (|x_1|, \ldots, |x_n|). \tag{54}$$

Тогава $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ е конусно нормирано пространство над $\mathbb{R}^n$. За два вектора $x \in \mathbb{K}^n$ и $y \in \mathbb{R}^n$ с $\dfrac{x}{y}$ означаваме вектор в $\mathbb{R}^n$, дефиниран чрез равенството

$$\frac{x}{y} = \left(\frac{|x_1|}{y_1}, \cdots, \frac{|x_n|}{y_n}\right). \tag{55}$$

Важна роля в дисертационния труд играе функцията $d\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^n$, която се дефинира чрез $d(x) = (d_1(x), \ldots, d_n(x))$, където

$$d_i(x) = \min_{j \neq i} |x_i - x_j| \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Нека да формулираме първата основна теорема в Глава 7, която обобщава и подобрява в няколко направления класическата теорема на Дочев [56] за метода на Вайерщрас.

Теорема 7.4. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, който притежава n прости нули в $\mathbb{K}$, ξ е вектор-корен на f и $1 \leq p \leq \infty$. Нека $x^0 \in \mathbb{K}^n$ е начално приближени, такова че*

$$E(x^0) = \left\| \frac{x^0 - \xi}{d(\xi)} \right\|_p < R(n,p) = \frac{2^{1/(n-1)} - 1}{2^{1/q}\left(2^{1/(n-1)} - 1\right) + (n-1)^{-1/p}}\,. \tag{56}$$

Тогава итерацията на Вайерщрас (6) *е коректно дефинирана и сходяща квадратично към ξ с оценки на грешката*

$$\|x^{k+1} - \xi\| \preceq \lambda^{2^k}\, \|x^k - \xi\| \quad \textit{и} \quad \|x^k - \xi\| \preceq \lambda^{2^k - 1}\, \|x^0 - \xi\| \tag{57}$$

за всички $k \geq 0$, където $\lambda = \phi(E(x^0))$ и реалната функция ϕ се дефинира чрез равенството

$$\phi(t) = \left(1 + \frac{t}{(n-1)^{1/p}(1 - 2^{1/q}\, t)}\right)^{n-1} - 1. \tag{58}$$

Глава 8. Първа теорема за полулокална сходимост на метода на Вайерщрас

В тази глава получаваме полулокална теорема за метода на Вайерщрас с компютърно проверяеми начални условия (Теорема 8.2). Основният резултат обобщава, подобрява и допълва всички предишни резултати в това направление, които принадлежат на Прешич (1980), Ченг (1082, 1982), Ванг и Чао (1993,1987), Петкович, Карстенсен и Трайкович (1995), Петкович (1996), Петкович, Херцег и Илич (1998), Батра (1998), Хан (1998) Петкович и Херцег (2001). Полученият резултат съдържа също така компютърно проверяеми априорни и апостериорни оценки на грешката, както и формули за локализация на нулите на полинома.

Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$. В тази глава изследваме полулокалната сходимост на метода на Вайерщрас (6) относно функция на началните условия $E \colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}_+$, която се дефинира чрез

$$E(x) = \left\| \frac{W(x)}{d(x)} \right\|_p \qquad (1 \leq p \leq \infty) \tag{59}$$

и функция на сходимост $F \colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}_+^n$, която се дефинира чрез

$$F(x) = \|W(x)\|, \tag{60}$$

където $W \colon \mathcal{D} \to \mathbb{K}^n$ е корекцията на Вайерщрас на f, дефинирана с (7).

Теорема 8.2. *Нека $\mathbb{K}$ е пълно нормирано поле, $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$ и $1 \leq p \leq \infty$. Нека $x^0 \in \mathbb{K}^n$ е начално приближение, удовлетворяващо условието*

$$E(x^0) < 1/2^{1/q} \quad \text{и} \quad \phi(E(x^0)) \leq 1, \tag{61}$$

където E се дефинира с (59) и ϕ се дефинира с

$$\phi(t) = \frac{(n-1)^{1/q}\, t}{(1-t)(1-2^{1/q}\, t)} \left(1 + \frac{t}{(n-1)^{1/p}\,(1-2^{1/q}\, t)}\right)^{n-1}. \tag{62}$$

Тогава са в сила следните твърдения.

(i) Съществуване на нули. *Полиномът f се разлага на линейни множители в полето $\mathbb{K}$.*

(ii) Сходимост. *Итерацията на Вайерщрас (6) е коректно дефинирана, лежи в затвореното кълбо $\overline{U}(x_0, \rho)$ и е сходяща към вектор-корен ξ на f, където $\rho = \dfrac{\|W(x^0)\|}{1-\beta(E(x^0))}$ и реалната функция β се дефинира с*

$$\beta(t) = \frac{(n-1)^{1/q}\, t}{1-t} \left(1 + \frac{t}{(n-1)^{1/p}\,(1-2^{1/q}\, t)}\right)^{n-1}. \tag{63}$$

Освен това, сходимостта е квадратична (още от първата итерация) при условие, че $\phi(E(x^0)) < 1$.

(iii) Априорна оценка на грешката. *За всяко $k \geq 0$ е в сила оценката*

$$\|x^k - \xi\| \preceq \frac{\theta^k\, \lambda^{2^k-1}}{1-\theta\,\lambda^{2^k}}\, \|x^1 - x^0\|, \tag{64}$$

където $\lambda = \phi(E(x^0))$, $\theta = \psi(E(x^0))$ и реалната функция ψ се дефинира с $\psi(t) = 1 - 2^{1/q}\, t$.

(iv) Първа апостериорна оценка на грешката. *За всяко $k \geq 0$ е в сила оценката*

$$\|x^k - \xi\| \preceq \frac{\|x^{k+1} - x^k\|}{1 - \beta(E(x^k))}\,. \tag{65}$$

(v) Втора апостериорна оценка на грешката. *За всяко $k \geq 0$ е в сила оценката*

$$\|x^{k+1} - \xi\| \preceq \frac{\theta_k \lambda_k}{1 - \theta_k (\lambda_k)^2}\, \|x^{k+1} - x^k\|, \tag{66}$$

където $\lambda_k = \phi(E(x^k))$, $\theta_k = \psi(E(x^k))$.

(vi) Други оценки *За всяко $k \geq 0$ са в сила оценките*

$$\|x^{k+2} - x^{k+1}\| \preceq \theta\, \lambda^{2^k}\, \|x^{k+1} - x^k\|, \tag{67}$$

$$\|x^{k+1} - x^k\| \preceq \theta^k\, \lambda^{2^k - 1}\, \|x^1 - x^0\|. \tag{68}$$

(vii) Локализация на нулите. *Ако $\phi(E(x^0)) < 1$, то f притежава n прости нули $\mathbb{K}$ и за всяко $k \geq 0$ затворените кръгове*

$$D_i^k = \{z \in \mathbb{K} : |z - x_i^k| \leq r_i^k\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{69}$$

където $r_i^k = \dfrac{|W_i(x^k)|}{1 - \beta(E(x^k)}$, са взаимно непресичащи се и всеки от тях съдържа точно една нула на полинома f.

Глава 9. Втора теорема за полулокална сходимост на метода на Вайерщрас

В предната глава доказахме теорема за полулокална сходимост на метода на Вайерщрас. В тази глава доказваме нова теорема за полулокална сходимост на метода на Вайерщрас с начални условия от съвсем друг вид. В своята знаменита работа [256] Вайерщрас прави прекрасен анализ на полулокалната сходимост на метода (6), но той не формулира в явен вид теорема за сходимост на метода. Новата теорема в тази глава е получена чрез комбиниране на идеи на Вайерщрас [256] с идеи от Глава 4 на настоящия дисертационен труд. Нещо повече – основната теорема в тази глава (Теорема 9.2) може да се разглежда като количествена версия на изследването на Вайерщрас за сходимостта на метода (6).

Нека $f(z) = z^n + C_1 z^{n-1} + \cdots + C_n$ е нормиран полином в $\mathbb{K}[z]$ от степен $n \geq 2$. В тази глава изучаваме метода на Вайерщрас (6) относно функция на началните условия $E\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$, дефинирана с

$$E(x) = \|\sigma(x) - C\|_\infty, \tag{70}$$

където $C \in \mathbb{K}^n$ е вектора от коефициентите на f, който се дефинира чрез $C = (C_1, \ldots, C_n)$ и $\sigma\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ е оператора на Виет, дефиниран чрез

$$\sigma_i(x) = (-1)^i \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_i \leq n} x_{j_1} \ldots x_{j_i} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

За даден полином $f(z) = \sum_{i=0}^n C_i z^i$ в $\mathbb{K}[z]$ дефинираме норма $|f|$ чрез

$$|f| = \max\{|C_0|, \ldots, |C_n|\}.$$

В Лема 9.6 доказваме, че за всеки нормиран полином $f \in \mathbb{K}[z]$ от степен $n \geq 2$, съществува положително число δ, такова че

$$|f - g| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad |\Delta(f) - \Delta(g)| \leq \delta\,|f - g| \tag{71}$$

за всеки нормиран полином $g \in \mathbb{K}[z]$ от степен n.

В доказателството на Лема 9.6 предлагаме ефективен алгоритъм, чрез който за всеки нормиран полином $f(z) = z^n + C_1 z^{n-1} + \ldots + C_n$ намираме положително число δ, което удовлетворява свойството (71).

След предварителните бележки можем да формулираме втората теорема за полулокална сходимост на метода на Вайерщрас.

Теорема 9.2. *Нека $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ е пълно нормирано поле, $f \in \mathbb{K}[z]$ е нормиран полином от степен $n \geq 2$ с дискриминанта $\Delta(f) \neq 0$, и $\alpha = \|C\|_\infty + 2$, където C е вектора от коефициентите на f. избираме $0 < \theta < 1$ и положително число δ, което удовлетворява свойството* (71)*. Нека да съществува вектор $x^0 \in \mathbb{K}^n$, такъв че*

$$E(x^0) < R = \min\left\{1, \frac{\theta|\Delta(f)|}{\beta^n\,\mu}, \frac{(1-\theta)|\Delta(f)|}{\delta}\right\}, \tag{72}$$

където $E\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$ се дефинира с (70) *и числата β и μ се дефинират с*

$$\beta = n\alpha^{n-1} + (\alpha - 1)\sum_{j=1}^{n-1} j\alpha^{j-1} \quad \text{и} \quad \mu = \max_{1 \leq i \leq n} \binom{n}{i}\left((\alpha + \gamma)^i - \alpha^i - i\alpha^{i-1}\gamma\right),$$

където $\gamma = \dfrac{1}{\beta}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i$. Тогава са изпълнени следните твърдения:.

(i) Съществуване на нулите. *f притежава n прости нули в $\mathbb{K}$.*

(ii) Сходимост. *Итерацията на Вайерщрас* (6) *е коректно дефинирана и сходяща квадратично към корен-вектор ξ на f.*

(iii) Априорна оценка на грешката. *За всяко $k \geq 0$ е в сила оценката*

$$\|x^k - \xi\|_\infty \leq \frac{c\,\lambda^{2^k-1}}{1-\lambda^{2^k}}\,E(x^0), \tag{73}$$

където $\lambda = b\,E(x^0)$, $b = \dfrac{\beta^n\,\mu}{\theta|\Delta(f)|}$ *и* $c = \dfrac{\beta^n\,\gamma}{\theta|\Delta(f)|}$.

(iv) Апостериорни оценки на грешката. *За всяко $k \geq 0$ са в сила оценките*

$$\|x^k - \xi\|_\infty \leq \frac{c\,E(x^k)}{1-b\,E(x^k)} \quad \text{и} \quad \|x^{k+1} - \xi\|_\infty \leq \frac{b\,c\,E(x^k)^2}{1-b^2E(x^k)^2}\,. \tag{74}$$

Глава 10. Локална сходимост на метода на Ерлих

В Глава 10 прилагаме общата теория за локална сходимост към известния итерационен метод на Ерлих [64] за едновременна апроксимация на всичките нули на даден полином. Методът на Ерлих се дефинира чрез следната итерация:

$$x^{k+1} = \Phi x^k, \qquad k = 0, 1, \ldots, \tag{75}$$

където итерационната функция на Ерлих $\Phi\colon \mathscr{D} \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ се дефинира с $\Phi(x) = (\Phi_1(x), \ldots, \Phi_n(x))$ като

$$\Phi_i(x) = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i) - f(x_i)\displaystyle\sum_{j \neq i} \frac{1}{x_i - x_j}}\,. \tag{76}$$

Очевидно, дефиниционната област на Φ е множеството

$$\mathscr{D} = \left\{ x \in \mathcal{D} : f'(x_i) - f(x_i) \sum_{j \neq i} \frac{1}{x_i - x_j} \neq 0 \ \text{ за всички } \ i \in I_n \right\}. \tag{77}$$

Нека да припомним, че с $\mathcal{D}$ означаваме множеството от всички вектори в $\mathbb{K}^n$ с различни координати.

В тази глава доказваме три теореми за локална сходимост (Теорема 10.6, Теорема 10.7, Теорема 10.8) за метода на Ерлих при различни начални условия. Новите резултати обобщават, подобряват и допълват резултатите на Кюркчиев и Ташев (1981), Ванг и Чао (1989) и Тили (1998).

Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, който има n прости нули в $\mathbb{K}$ и нека $\xi \in \mathbb{K}^n$ е корен-вектор на f.

В Параграф 10.2 изследваме локалната сходимост на метода на Ерлих (75) относно функция на началните условия $E \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$, дефинирана чрез

$$E(x) = \left\| \frac{z - \xi}{d(\xi)} \right\|_p \qquad (1 \leq p \leq \infty). \tag{78}$$

Следващият резултат е първата основна теорема в тази глава. Тази теорема обобщава, подобрява и допълва резултатите на Кюркчиев и Ташев [130] и Ванг и Чао [247].

Теорема 10.6. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, който има n прости нули в $\mathbb{K}$, ξ е вектор-корен на f и $1 \leq p \leq \infty$. Нека $x^0 \in \mathbb{K}^n$ е начално приближение, удовлетворяващо условието*

$$E(x^0) = \left\| \frac{x^0 - \xi}{d(\xi)} \right\|_p < R = \frac{2}{b + 1 + \sqrt{(b-1)^2 + 8a}}\,, \tag{79}$$

където $E \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$ се дефинира с (78), $a = (n-1)^{1/q}$ и $b = 2^{1/q}$. Тогава итерацията на Ерлих (75) е коректно дефинирана и сходяща кубично към ξ с оценки на грешката

$$\|x^{k+1} - \xi\| \preceq \lambda^{3^k} \|x^k - \xi\| \quad \text{и} \quad \|x^k - \xi\| \preceq \lambda^{(3^k - 1)/2} \|x^0 - \xi\| \tag{80}$$

за всички $k \geq 0$, където $\lambda = \phi(E(x^0))$ и реалната функция ϕ се дефинира с

$$\phi(t) = \frac{at^2}{(1 - bt)(1 - t) - at^2}\,. \tag{81}$$

Следствие 10.2. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, който има n прости нули в $\mathbb{K}$ и нека ξ е вектор корен на f. Ако началното приближение $x^0 \in \mathbb{K}^n$, удовлетворява условието*

$$E(x^0) = \left\| \frac{x^0 - \xi}{d(\xi)} \right\|_1 < \sqrt{2} - 1, \tag{82}$$

то итерацията на Ерлих (75) е коректно дефинирана и сходяща кубично към ξ с оценки на грешката

$$\|x^{k+1} - \xi\| \preceq \lambda^{3^k} \|x^k - \xi\| \quad \text{и} \quad \|x^k - \xi\| \preceq \lambda^{(3^k - 1)/2} \|x^0 - \xi\| \tag{83}$$

за всички $k \geq 0$, *където* $\lambda = \phi(E(x^0))$ *и* $\phi(t) = t^2/(1-2t)$.

В Параграф 10.2 изследваме локалната сходимост на метода на Ерлих (75) относно функция на началните условия $E\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$, дефинирана чрез

$$E(x) = \left\| \frac{x - \xi}{d(x)} \right\|_p \qquad (1 \leq p \leq \infty). \tag{84}$$

Следващият резултат е втората основна теорема в тази глава. Тази теорема обобщава, подобрява и допълва резултатите на Ванг и Чао [247] и Тили [241].

Теорема 10.8. *Нека* $f \in \mathbb{K}[z]$ *е полином от степен* $n \geq 2$, *който се разлага на линейни множители в* $\mathbb{K}$, ξ *е вектор-корен на* f, $1 \leq p \leq \infty$. *Нека* $x^0 \in \mathbb{K}^s$ *е вектор с различни координати, удовлетворяващ условието*

$$E(x^0) = \left\| \frac{x^0 - \xi}{d(x^0)} \right\|_p \leq R = \frac{2}{b + 1 + \sqrt{(b-1)^2 + 8a}}\,, \tag{85}$$

където функцията $E\colon \mathcal{D} \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$ *се дефинира с* (84), $a = (n-1)^{1/q}$ *и* $b = 2^{1/q}$. *Тогава* f *притежава само прости нули в* $\mathbb{K}$ *и итерацията на Ерлих* (75) *е коректно дефинирана и сходяща към* ξ *с оценки на грешката*

$$\|x^{k+1} - \xi\| \preceq \theta \lambda^{3^k} \|x^k - \xi\| \quad \text{и} \quad \|x^k - \xi\| \preceq \theta^k \lambda^{(3^k - 1)/2} \|x^0 - \xi\| \tag{86}$$

за всички $k \geq 0$, *където* $\lambda = \phi(E(x^0))$, $\theta = \psi(E(x^0))$ *и реалните функции* ϕ *и* ψ *се дефинират с*

$$\phi(t) = \frac{at^2}{(1 - bt)(1 - t) - at^2} \quad \text{и} \quad \psi(t) = \frac{(1 - bt)(1 - t) - at^2}{1 - t - at^2} \tag{87}$$

Нещо повече, сходимостта е кубична при условие, че $E(x^0) < R$.

Следствие 10.5. *Нека* $f \in \mathbb{K}[z]$ *е полином от степен* $n \geq 2$, *който се разлага на линейни множители в* $\mathbb{K}$ *и нека* ξ *е вектор-корен на* f. *Ако началното приближение* $x^0 \in \mathbb{K}^n$ *удовлетворява условието*

$$E(x^0) = \left\| \frac{x^0 - \xi}{d(x^0)} \right\|_1 < \sqrt{2} - 1,$$

то f *притежава само прости нули в* $\mathbb{K}$ *и итерацията на Ерлих* (75) *е коректно дефинирана и сходяща кубично към* ξ *с оценки на грешката*

$$\|x^{k+1} - \xi\| \preceq \theta \lambda^{3^k} \|x^k - \xi\| \quad \text{и} \quad \|x^k - \xi\| \preceq \theta^k \lambda^{(3^k - 1)/2} \|x^0 - \xi\|,$$

за всички $k \geq 0$, *където* $\lambda = \phi(E(x^0))$, $\theta = \psi(E(x^0))$ *и реалните функции* ϕ *и* ψ *се дефинират с* $\phi(t) = t^2/(1-2t)$ *и* $\phi(t) = (1-2t)/(1-t-t^2)$.

Глава 11. Полулокална сходимост на метода на Ерлих

В тази глава, изследваме полулокалната сходимост на метода на Ерлих (75) за полином $f \in \mathbb{K}[z]$ относно функция на началните условия $E\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}_+$, дефинирана с (59) и функция на сходимост $F\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}_+^n$, дефинирана с (60). Получената теорема за полулокална сходимост на метода (75) (Теорема 11.3) обобщава, подобрява и допълва резултатите на Ченг и Хуанг [277], Петкович и Херцег [177], както и предишните резултати [172, 175, 180, 176].

Теорема 11.3. *Нека $\mathbb{K}$ е пълно нормирано поле, $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$ и $1 \leq p \leq \infty$. Нека $x^0 \in \mathbb{K}^n$ е начално приближение с различни координати, такова че*

$$E(x^0) < 1/(a+b) \quad \textit{и} \quad \phi(E(x^0)) \leq 1, \tag{88}$$

където функцията $E\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}_+$ се дефинира с (59), $a = (n-1)^{1/q}$, $b = 2^{1/q}$ и реалната функция ϕ се дефинира с

$$\phi(t) = \frac{at^2}{(1-(a+1)t)(1-(a+b)t)} \left(1 + \frac{t}{c(1-(a+b)t)}\right)^{n-1}, \tag{89}$$

Тогава са изпълнени следните твърдения.

(i) Съществуване на нулите. *Полиномът f се разлага на линейни множител в $\mathbb{K}$.*

(ii) Сходимост. *Итерацията на Ерлих (75) е коректно дефинирана, лежи в затвореното кълбо $\overline{U}(x^0, \rho)$ и е сходяща към вектор-корен ξ на f, където*

$$\rho = \frac{\gamma(E(x^0)}{1-\beta(E(x^0))} \|W(x^0)\|$$

и реалните функции β и γ са дефинирани с

$$\beta(t) = \frac{at^2}{(1-at)(1-(a+1)t)} \left(1 + \frac{t}{c(1-(a+b)t)}\right)^{n-1} \quad \textit{и} \quad \gamma(t) = \frac{1}{1-at}.$$

Освен това, сходимостта е кубична още от първата итерация при условие, че $\phi(E(x^0)) < 1$.

(iii) Априорна оценка на грешката. *За всяко $k \geq 0$ е в сила оценката*

$$\left\|x^k - \xi\right\| \preceq A_k \, \frac{\theta^k \lambda^{(3^k-1)/2}}{1-\theta\lambda^{3^k}} \left\|W(x^0)\right\|, \tag{90}$$

където $\lambda = \phi(E(x^0))$, $\theta = \psi(E(x^0))$, $A_k = \gamma(E(x^0)\lambda^{(3^k-1)/2})$ *и реалната функция* ψ *се дефинира с* $\psi(t) = \dfrac{1-(a+b)t}{1-at}$.

(iv) Първа апостериорна оценка на грешката. *За всяко* $k \geq 0$ *е в сила оценката*

$$\left\|x^k - \xi\right\| \preceq \frac{\gamma(E(x^k)}{1-\beta(E(x^k))} \left\|W(x^k)\right\|. \tag{91}$$

(v) Втора апостериорна оценка на грешката. *За всяко* $k \geq 0$ *е в сила оценката*

$$\left\|x^{k+1} - \xi\right\| \preceq \frac{\theta_k \lambda_k}{1-\theta_k(\lambda_k)^3} \gamma(E(x_{k+1})) \left\|W(x^k)\right\|, \tag{92}$$

където $\lambda_k = \phi(E(x^k))$ *и* $\theta_k = \psi(E(x^k))$.

(vi) Локализация на нулите. *Ако* $\phi(E(x^0)) < 1$, *то* f *притежава* n *прости нули в* $\mathbb{K}$ *и за всяко* $k \geq 0$ *затворените кръгове*

$$D_i^k = \{z \in \mathbb{K} : |z - x_i^k| \leq r_i^k\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{93}$$

където $r_i^k = \dfrac{\gamma(E(x^k))}{1-\beta(E(x^k)}\,|W_i(x^k)|$, *са взаимно непресичащи се и всеки от тях съдържа точно една нула на* f.

Следствие 11.2. *Нека* $\mathbb{K}$ *е пълно нормирано поле,* $f \in \mathbb{K}[z]$ *е полином от степен* $n \geq 3$ *и*$1 \leq p \leq \infty$. *Нека* $x^0 \in \mathbb{K}^n$ *е начално приближение с различни координати, удовлетворяващо условието*

$$\left\|\frac{W(x^0)}{d(x^0)}\right\|_p \leq \frac{1}{2(n-1)^{1/q}+2}. \tag{94}$$

Тогава f *притежава* n *прости нули в* $\mathbb{K}$ *и итерацията на Ерлих* (75) *е коректно дефинирана и сходяща кубично към вектор-корен* ξ *на* f. *Освен това са в сила оценките на грешката* (90), (91) *и* (92).

Следствие 11.5. *Нека* $\mathbb{K}$ *е пълно нормирано поле,* $f \in \mathbb{K}[z]$ *е полином от степен* $n \geq 2$. *Нека* $x^0 \in \mathbb{K}^n$ *е начално приближение, удовлетворяващо условието*

$$\left\|\frac{W(x^0)}{d(x^0)}\right\|_1 \leq R = 0.292\ldots,$$

където R е единствения корен на уравнението

$$\left(\frac{t}{1-2t}\right)^2 \exp\frac{t}{1-2t} = 1.$$

Тогава f притежава n прости нули в $\mathbb{K}$ и итерацията на Ерлих (75) *е коректно дефинирана и сходяща кубично към вектор-корен ξ на f. Освен това са в сила оценките на грешката* (90), (91) *и* (92) *при $p = 1$.*

Глава 12. Теорема за полулокална сходимост на метода от типа на Чебишов

В тази глава получаваме теорема за полулокална сходимост на един метод от типа на Чебишов за едновременна апроксимация на всичките нули на даден полином $f \in \mathbb{C}[z]$. Полученият резултат обобщава, подобрява и допълва резултата на Л. Петкович и М. Петкович (2001).

Методът от типа на Чебишов се дефинира със следната итерация

$$x^{k+1} = x^k - \Phi(x^k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{95}$$

където оператора $\Phi\colon \mathscr{D} \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ се дефинира с $\Phi(x) = (\Phi_1(x), \ldots, \Phi_n(x))$ и

$$\Phi_i(x) = \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\left(1 + \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\sum_{j\neq i}\frac{1}{x_i - x_j}\right) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

и дефиниционната област $\mathscr{D}$ на Φ е множеството

$$\mathscr{D} = \{x \in \mathcal{D} \, : \, f'(x_i) \neq 0 \text{ при } i = 1, \ldots, n\}.$$

Методът (95) е изучаван в работите [146, 147, 181, 33, 196, 197]. През 2001 година Л. Петкович и М. Петкович [181] доказват следната теорема за сходимост на метода (95) с компютърно проверяеми начални условия.

Теорема 12.1 (Петкович и Петкович [181]). *Нека $f \in \mathbb{C}[z]$ е полином от степен $n \geq 3$ с прости нули. Ако едно начално приближение $x^0 \in \mathbb{C}^n$ с различни координати удовлетворява условието*

$$\left\|W_f(x^0)\right\|_\infty < \frac{\delta(x^0)}{5n},$$

където $\delta(x^0) = \min_{i\neq j}|x_i^0 - x_j^0|$, то метода от типа на Чебишов (95) *е сходящ кубично към вектор корен на f*

В тази глава получаваме нова теорема за метода от типа на Чебишов (Теорема 12.2), която обобщава, подобрява и допълва Теорема 12.1 в няколко направления. Във формулировката на теоремата ще използваме реалните функции γ, ψ, β и ϕ, дефинирани с формулите

$$\gamma(t) = \frac{1 - at}{(1 - (n - 1 + a)t)^2}\,, \quad \psi(t) = 1 - bt\gamma(t),$$

$$\beta(t) = t^2 \left(\frac{a\,\gamma^2(t)}{1 - t\,\gamma(t)} + \frac{(n-1)^2}{(1 - (n - 1 + a)t)^2} \right) \left(1 + \frac{t\,\gamma(t)}{c\,\psi(t)} \right)^{n-1} \quad \text{и} \quad \phi(t) = \frac{\beta(t)}{\psi(t)}.$$

Теорема 12.2. *Нека $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ е пълно нормирано поле, $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$ и $1 \leq p \leq \infty$. Нека $x^0 \in \mathbb{K}^n$ е начално приближение с различни координати, удовлетворяващо условието*

$$E(x^0) < \tau = \frac{2}{2(n - 1 + a) + b + \sqrt{b^2 + 4(n-1)b}} \quad \text{и} \quad \phi(E(x^0)) \leq 1,$$

където E се дефинира чрез (59), $a = (n-1)^{1/q}$, $b = 2^{1/q}$ и $c = (n-1)^{1/p}$. Тогава са в сила следните твърдения:

(i) Сходимост. *Итерацията от типа на Чебишов (95) е коректно дефинирана и сходяща към вектор-корен $\xi \in \mathbb{K}^n$ на f. Освен това, ако $\phi(E(x^0)) < 1$, то сходимостта е кубична още от първата итерация.*

(ii) Априорна оценка на грешката. *За всяко $k \geq 0$ е в сила оценката*

$$\|x^k - \xi\| \preceq \gamma(E(x^0))\, \frac{\theta^k \lambda^{(3^k - 1)/2}}{1 - \theta\lambda^{3^k}}\, \|W_f(x^0)\|. \tag{96}$$

(iii) Първа апостериорна оценка на грешката. *За всяко $k \geq 0$ е в сила оценката*

$$\|x^k - \xi\| \preceq \frac{\gamma(E(x^k))}{1 - \beta(E(x^k))}\, \|W_f(x^k)\|. \tag{97}$$

(iv) Втора апостериорна оценка на грешката. *За всяко $k \geq 0$ е в сила оценката*

$$\|x^{k+1} - \xi\| \preceq \gamma(E(x^{k+1}))\frac{\theta_k \lambda_k}{1 - \theta_k(\lambda_k)^3}\, \|W_f(x^k)\|, \tag{98}$$

където $\lambda_k = \phi(E(x^k))$ и $\theta_k = \psi(E(x^k))$.

(v) Локализация на нулите. *Ако $\phi(E(x^0)) < 1$, то f притежава n прости нули в $\mathbb{K}$ и за всяко $k \geq 0$ затворените кръгове*

$$D_i^k = \{z \in \mathbb{K} : |z - x_i^k| \leq r_i^k\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{99}$$

където $r_i^k = \dfrac{\gamma(E(x^k))}{1 - \beta(E(x^k))} |W_i(x^k)|$, са взаимно непресичащи се и всеки от тях съдържа точно една нула на f.

Следващото следствие също подобрява и допълва теорема Теорема 12.1.

Следствие 12.1. *Нека $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ е пълно нормирано поле, $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$ и $x^0 \in \mathbb{K}^n$ е начално приближение, такова че*

$$\left\| \frac{W(x^0)}{d(x^0)} \right\|_\infty \leq \frac{1}{4n} \, .$$

Тогава са в сила следните твърдения:

(i) Съществуване на прости нули. *Полиномът f притежава n прости нули в полето $\mathbb{K}$.*

(ii) Локализация на нулите. *За всяко $k \geq 0$ затворените кръгове* (99) *са взаимно непресичащи се и всеки от тях съдържа точно една нула на полинома f.*

(iii) Сходимост и оценки на грешката. *Итерацията от типа на Чебишов* (95) *е коректно дефинирана и сходяща кубично към вектор-корен $\xi \in \mathbb{K}^n$ на f с оценки на грешката* (96), (97) *и* (98), *където E се дефинира чрез* (59).

Заключение

Резюме на получените резултати

Дисертационният труд съдържа обща теория за сходимост на итерационни процеси от типа на Пикар, единна теория на конусно метричните пространства над телесно векторно пространство и техни приложения за детайлно изследване на сходимостта на известни итерационни методи. По мнение на автора основните приноси в настоящия дисертационен труд са следните:

1. Дисертационният труд съдържа оригинална обща теория за сходимост на итерационни процеси от типа на Пикар (Глави 2, 3, 4, 6). Тази теория е публикувана в периода 2009–2010 година в две публикации в Journal of Complexity [193, 194].

2. Дисертационният труд съдържа оригинална единна теория на конусно метричните пространства над телесно векторно пространство, в която в частност е разработен апарат за апроксимиране на неподвижни точки в конусно метрични пространства (Глава 5). Тази теория е публикувана през 2013 година във Fixed Point Theory and Applications [195]

3. Получено е обобщение на принципа на Банах за свиващите изображения с произволен ред на сходимост на последователните приближения (Теорема 2.1). Този резултат обобщава, подобрява и допълва единствения резултат в това направление, който принадлежи на Гелман (1971).

4. Получено е обобщение на известната теорема на Мисовских (1950) за сходимост на метода на Нютон-Канторович в банахови пространства (Теорема 2.4). Този резултат подобрява също и резултати на Ортега и Райнболд (1970) и Хуанг (2002)

5. Получена е теорема за сходимост на метода на Шрьодер за апроксимиране на кратни нули на аналитични функции (Теорема 3.10). Тази теорема обобщава резултати на Трауб и Возниаковски (1979) и Смейл (1986) и подобрява резултата на Джиусти, Лецерф, Салви и Якобсон (2005).

6. Получена е пълна ω-теорема за полулокална сходимост на метода на Нютон-Канторович в банахови пространства (Теорема 4.12), която

обобщава, подобрява и допълва класическата теорема на Канторович (1948). Тази теорема обобщава и подобрява резултати на Островски (1971), Граг и Тапиа (1974), Миел (1980, 1981), Ямамото (1986), Смейл (1986) Райнболд (1988), Ямамото (2000) и други.

7. Получен е пълен вариант на принципа на итерационно свиващите изображения в конусно метрични пространства над телесно векторно пространство (Теорема 5.21). Този резултат обобщава и допълва както класическите резултати на Ортега и Райнболд (1970) така и по-новите резултати на Патхак и Шахзад (2009), Вардовски (2009) и други.

8. Получен е пълен вариант на принципа на Банах за свиващите изображения в конусно метрични пространства над телесно векторно пространство (Теорема 5.22). Този резултат обобщава и допълва (с оценки на грешката) резултати на Резапур и Хамлбарани (2008), Дю (2010), Раденович и Каделбург (2011) и други.

9. Получен е пълен вариант на принципа на Чирич за квази-свиващите изображения в конусно метрични пространства над телесно векторно пространство (Теорема 5.26), който обобщава и допълва съответните резултати на Жанг (2011), Динг, Йованович, Каделбург и Раденович (2013) и други.

10. Получени са два вида теореми за локална сходимост на метода на Вайерщрас за едновременна апроксимация на всичките нули на даден полином с коефициенти от произволно нормирано поле (Теорема 7.4, Теорема 7.9 и Теорема 7.10). Тези резултати обобщават, подобряват и допълват (с оценки на грешката) предишните резултати на Дочев (1962), Кюркчиев и Марков (1983), Ванг и Чао (1991), Тили (1998), Хан (2000), Якобсон (2002) и други.

11. Получена е нова теорема за сходимост на метода на Вайерщрас с компютърно проверяеми начални условия (Теорема 8.2). Новият резултат съдържа също компютърно проверяеми оценки на грешката, както и информация за локализиране на нулите на полинома. Началното условие в тази теорема се задава чрез корекцията на Вайерщрас. Този резултат обобщава, подобрява и допълва всички предишни резултати в това направление, които принадлежат на Прешич (1980), Ченг (1982, 1987), Ванг и Чао (1993, 1995), Петкович, Карстенсен и

Трайкович (1995), Петкович (1996), Петкович, Херцег и Илич (1998), Батра (1998), Хан (2000) и Петкович и Херцег (2001).

12. Получена е нова теорема за сходимост на метода на Вайерщрас със съвършено нов тип компютърно проверяеми начални условия (Теорема 9.2). Началното условие в тази теорема се задава чрез оператора на Виет и вектора от коефициентите на полинома. Новата теорема за сходимост на метода на Вайерщрас може да се разглежда като количествена версия на класическото изследване на Вайерщрас (1891) на сходимостта на метода (Вайерщрас не формулира в явен вид теорема за сходимост на метода).

13. Получени са два вида теореми за локална сходимост на метода на Ерлих за едновременна апроксимация на всичките нули на даден полином с коефициенти от произволно нормирано поле (Теорема 10.6 и Теорема 10.8), които обобщават, подобряват и допълват предишните резултати на Кюркчиев и Ташев (1981), Ванг и Чао (1989), Тили (1998) и други.

14. Получена е нова теорема за полулокална сходимост на метода на Ерлих, която съдържа оценки на грешката и формули за локализация (Теорема 11.3). Теоремата обобщава и подобрява най-добрите резултати в това направление, които принадлежат на Ченг и Хуанг (2000) и Петкович и Херцег (2001).

15. Получена е нова теорема за полулокална сходимост на един метод от типа на Чебишов за едновременна апроксимация на всичките нули на даден полином (Теорема 11.3). Този резултат обобщава, подобрява и допълва в няколко направления предишния резултат на Л. Петкович и М. Петкович (2001).

Списък на публикациите по дисертационния труд

Основните резултати от дисертационния труд са публикувани в следните научни статии:

1. Proinov P.D., Fixed point theorems in metric spaces, Nonlinear Analysis 64 (2006) 546–557. http://dx.doi.org/10.1016/j.na.2005.04.044 **(Impact factor: 0.667)**

2. Proinov P.D., A new semilocal convergence theorem for the Weierstrass method from data at one point, Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences 59 (2006) 131–136. http://www.proceedings.bas.bg

3. Proinov P.D., Semilocal convergence of two iterative methods for simultaneous computation of polynomial zeros, Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences 59 (2006) 705–712. http://www.proceedings.bas.bg

4. Proinov P.D., A generalization of the Banach contraction principle with high order of convergence of successive approximations, Nonlinear Analysis 67 (2007) 2361–2369. http://dx.doi.org/10.1016/j.na.2006.09.008 **(Impact factor: 1.097)**

5. Proinov P.D., General local convergence theory for a class of iterative processes and its applications to Newton's method, Journal of Complexity 25 (2009) 38–62. http://dx.doi.org/10.1016/j.jco.2008.05.006 **(Impact factor: 1.227)**

6. Proinov P.D., New general convergence theory for iterative processes and its applications to Newton-Kantorovich type theorems, Journal of Complexity 26 (2010) 3–42. http://dx.doi.org/10.1016/j.jco.2009.05.001 **(Impact factor: 0.781)**

7. Proinov P.D., A unified theory of cone metric spaces and its applications to the fixed-point theory, Fixed Point Theory and Applications 2013 (2013), Art. ID 103, 38 pp. http://dx.doi.org/10.1186/1687-1812-2013-103 **(Impact factor: 2.486)**

8. Proinov P.D., S.I. Cholakov, Semilocal convergence of Chebyshev-like root-finding method for simultaneous approximation of polynomial zeros, Applied Mathematics and Computation 236 (2014) 669–682. http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2014.03.092 **(Impact factor: 1.600)**

9. Proinov P.D., I.A. Nikolova, Iterative approximation of fixed points of quasi-contraction mappings in cone metric spaces, Journal of Inequalities and Applications 2014 (2014), Art. ID 226, 14 pp.
http://dx.doi.org/10.1186/1029-242X-2014-226 **(Impact factor: 0.768)**

10. Proinov P.D., M.D. Petkova, Convergence of Weierstrass method for simultaneous approximation of polynomial zeros, Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences 66 (2013) 809–818.
http://www.proceedings.bas.bg **(Impact factor: 0.198)**

11. Proinov P.D., M.D. Petkova, A new semilocal convergence theorem for the Weierstrass method for finding zeros of a polynomial simultaneously, Journal of Complexity 30 (2014) 366–380.
http://dx.doi.org/10.1016/j.jco.2013.11.002 **(Impact factor: 1.191)**

Декларация за оригиналност

от **проф. д-р Петко Димитров Пройнов**
катедра "Математически анализ"
при Факултет по математика и информатика
на Пловдивски университет "Паисий Хилендарски"

Във връзка с провеждането на процедура за придобиване на научната степен "доктор на науките" в Пловдивския университет "Паисий Хилендарски" и защита на представения от мен дисертационен труд, декларирам:

Резултатите и приносите на проведеното дисертационно изследване, представени в дисертационния ми труд на тема "Апроксимиране на неподвижни точки и приложения за числено решаване на нелинейни уравнения" са оригинални и не са заимствани от изследвания и публикации, в които нямам участия.

03.12.2014 г. ДЕКЛАРАТОР:
гр.Пловдив /проф. д-р Петко Пройнов/

Библиография

[1] Abbas M., B.E. Rhoades, Fixed and periodic point results in cone metric spaces, Appl. Math. Lett. 22 (2009) 511–515.

[2] Abert O., Iteration methods for finding all zeros of a polynomial simultaneously, Math. Comput. 27 (1973) 339–344.

[3] Abdeljawad T., S. Rezapour, On some topological concepts of TVS-cone metric spaces and fixed point remarks, arXiv:1102.1419 (2011), 13 pp.

[4] Agarwal R.P., M.A. Khamsi, Extension of Caristi's fixed point theorem to vector valued metric spaces, Nonlinear Anal. 74 (2011) 141–145.

[5] Agarwal R.P., M. Meehan, D. O'Regan, Fixed Point Theory and Applications, Cambridge tracts in mathematics, Vol. 141, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[6] Aliprantis C.D., R. Tourky, Cones and Duality, of Graduate Studies in Mathematics, Vol. 84, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.

[7] Altman M., Contractors with nonlinear majorant functions and equations in Banach spaces, Boll. Unione Mat. Ital. 9 (1974) 615–637.

[8] Alvarez F., J. Bolte, J. Munier, A unified local convergence result for Newton's method in Riemannian manifolds, Found. Comput. Math. 8 (2008) 197–226.

[9] Amini-Harandi A., M. Fakhar, Fixed point theory in cone metric spaces obtained via the scalarization method, Comput. Math. Appl. 59 (2010) 3529–3534.

[10] Angelov V.G., Fixed Points in Uniform Spaces and Applications, Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2009.

[11] Appell J., E. De Pascale, Ju.V. Lysenko, P.P. Zabrejko, New results on Newton-Kantorovich approximations with applications to nonlinear integral equations, Numer. Funct. Anal. Optim. 18 (1997) 1–17.

[12] Arandelović I.D., D.J. Kečkić, On nonlinear quasi-contractions on TVS-cone metric spaces, Appl. Math. Lett. 24 (2011) 1209–1213.

[13] Argyros I.K., On the convergence and application of Newton's method under weak Hölder continuity assumptions, Int. J. Comput. Math. 80 (2003) 767–780.

[14] Argyros I.K., J.M. Gutiérrez, A unified approach for enlarging the radius of convergence for Newton's method and applications, Nonlinear Funct. Anal. Appl. 10 (2005) 555–563.

[15] Argyros I.K., J.M. Gutiérrez, On the semilocal convergence of Newton's method under unifying conditions, in: Fixed Point Theory and Applications, Vol. 7 (Y.J. Cho, J.K. Kim and S.M. Kang, eds.), Nova Science Publishers, New York, 2006, pp. 1–4.

[16] Asadi M., B.E. Rhoades, H. Soleimani, Some notes on the paper "The equivalence of cone metric spaces and metric spaces", Fixed Point Theory Appl. 2012 (2012), Art. ID 87, 4 pp.

[17] Asadi M., S.M. Vaezpour, H. Soleimani, Metrizability of cone metric spaces, arXiv: 1102.2353 (2011).

[18] Azam A., I. Beg, M. Arshad, Fixed point in topological vector space-valued cone metric spaces, Fixed Point Theory Appl. 2010 (2010), Art. ID 604084, 9 pp.

[19] Banach S., Sur les operations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux equations integrals, Fund. Math. 3 (1922) 133–181.

[20] Batra P., Improvement of a convergence condition for Durand-Kerner iteration, J. Comput. Appl. Math. 96 (1998) 117–125.

[21] Beg I., A. Azam, M. Arshad, Common fixed points for maps on topological vector space valued cone metric spaces, Int. J. Math. Math. Sci. 2009 (2009), Art. ID 560264, 8 pp.

[22] Berinde V., On the approximation of fixed points of weak contractive mappings, Carpathian J. Math. 19 (1) (2003) 7–12.

[23] Berinde V., Approximating fixed points of weak contractions using Picard iteration, Nonlinear Analysis Forum 9 (1) (2004) 43–53.

[24] Berinde V., Iterative Approximation of Fixed Points, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1912, Springer, Berlin, 2007.

[25] Bianchini R.M., M. Grandolfi, Transformazioni di tipo contracttivo generalizzato in uno spazio metrico, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fiz. Mat. Natur. 45 (1968) 212–216.

[26] Blum L., F. Cucker, M. Shub, S. Smale, Complexity and Real Computation, Springer, New York, 1998.

[27] Börsch-Supan W., Residuenabschätzung für Polynom-Nullstellen mittels Lagrange Interpolation, Numer. Math. 14 (1970) 287–296.

[28] Boyd D.W., J.S.W. Wong, On nonlinear contractions, Proc. Amer. Math. Soc. 20 (1969) 458–464.

[29] Browder F.E., On the convergence of successive approximations for nonlinear functional equations, Indag. Math. 30 (1968) 27–35.

[30] Browder F.E., W.V. Petryshyn, The solution by iteration of nonlinear functional equations in Banach spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966) 571–575.

[31] Çakalli H., A. Sönmez, C. Genç, Metrizability of topological vector space valued cone metric spaces, arXiv:1102.1419 (2010).

[32] Cholakov S.I., Local convergence of a Chebyshev-type method for finding polynomial zeros simultaneously, Scientific Researches of the Union of Scientists in Bulgaria–Plovdiv, Ser. B, 14 (2012) 197–200.

[33] Cholakov S.I., Local convergence of Chebyshev-like method for simultaneous finding polynomial zeros, C. R. Acad. Bulg. Sci. 66 (2013) 1081–1090.

[34] Cholakov S.I., Convergence of Chebyshev-like Iteration Methods for Simultaneous Approximation of Polynomial Zeros, PhD dissertation, University of Plovdiv, Plovdiv, 2014. (in Bulgarian)

[35] Chung K.J., Nonlinear contractions in abstract spaces, Kodai Math. J. 4 (1981) 288–292.

[36] Chung K.J., Remarks on nonlinear contractions, Pacific J. Math. 101 (1982) 41–48.

[37] Cianciaruso F., E. De Pascale, Newton-Kantorovich approximations when the derivative is Hölderian: old and new results, Numer. Funct. Anal. Optim. 24 (2003) 713–723.

[38] Cianciaruso F., E. De Pascale, Estimates of majorizing sequences in the Newton-Kantorovich method, Numer. Funct. Anal. Optim. 27 (2006) 529–538.

[39] Cianciaruso F., E. De Pascale, Estimates of majorizing sequences in the Newton-Kantorovich method: A further improvement, J. Math. Anal. Appl. 322 (2006) 329–335.

[40] Ćirić L., Generalized contractions and fixed-point theorems, Publ. Inst. Math. 12 (1971) 19–26.

[41] Ćirić L.B., A generalization of Banach's contraction principle, Proc. Amer. Math. Soc. 45 (1974) 267–273.

[42] Ćirić L., A new fixed-point theorem for contractive mappings, Publ. Inst. Math.30 (1981) 25–27.

[43] Ćirić L., On some nonexpansive type mappings and fixed points, Indian J. Pure Appl. Math. 24 (1993) 145–149.

[44] Ćirić L., A new class of nonexpansive type mappings and fixed points, Czechoslovak Math. J. 49 (1999) 891–899.

[45] Ćirić L.B., Fixed Point Theory, University of Belgrade, Beograd, 2003.

[46] Collatz L., Functional analysis and numerical mathematics, Academic Press, New York, 1966.

[47] Dedieu J.-P., Condition number analysis for sparse polynomial systems, in: F. Cucker, M. Shub (eds), Foundations of Computational Mathematics, Springer, Berlin, 1997, pp. 75–101.

[48] Dedieu J.-P., Points fixes, zéros et la méthode de Newton, Mathématiques et Applications 54, Springer, Berlin, 2006.

[49] Dedieu J.-P., P. Priouret, G. Malajovich, Newton's method on Riemannian manifolds, IMA J. Numer. Anal. 23 (2003) 395–419.

[50] Deimling K., Nonlinear Functional Analysis, Springer, Berlin, 1985.

[51] De Pascale E., G. Marino, P. Pietramala, The use of the E-metric spaces in the search for fixed points, Mathematishe 48 (1993) 367–376.

[52] De Pascale E., P.P. Zabrejko, The convergence of the Newton-Kantorovich method under Vertgeim conditions: a new improvement, Z. Anal. Anwend. 17 (1998) 271–280.

[53] Ding H.-S., M. Jovanović, Z. Kadelburg, S. Radenović, Common fixed point results for generalized quasicontractions in tvs-cone metric spaces, J. Comput. Anal. Appl. 15 (2013) 463–470.

[54] Ding H., Z. Kadelburg, E. Karapinar, S. Radenović, Common fixed points of weak contractions in cone metric spaces, Abstr. Appl. Anal. 2012 (2012), Art. ID 793862, 18 pp.

[55] Dočev K., Über Newtonsche Iterationen, C. R. Acad. Bulg. Sci. 36 (1962) 695–701.

[56] Dochev K., Modified Newton method for simultaneous approximation of all roots of a given algebraic equation, Phys. Math. J. Bulg. Acad. Sci. 5 (1962) 136–139. (in Bulgarian)

[57] Dochev K, P. Byrnev, Some modifications of Newton's method for the approximate solution of algebraic equations. Ž. Vyčisl. Mat. Mat. Fiz. 4 (1964) 915–920. (in Russian)

[58] Durand E., Solutions Numériques des Équations Algébriques, Tome. 1: Équations du Type $F(x) = 0$, Racines d'un Polynôme, Masson, Paris, 1960.

[59] Du W.S., A note on cone metric fixed point theory and its equivalence, Nonlinear Anal. 72 (2010) 2259–2261.

[60] Du W.S., New cone fixed point theorems for nonlinear multivalued maps with their applications, Appl. Math. Lett. 24 (2011) 172–178.

[61] Dudley R.M., On sequential convergence, Trans. Amer. Math. Soc. 112 (1964) 483–507.

[62] Dugundji J., A. Granas, Weakly contractive maps and elementary domain invariance theorems, Bull. Greek Math. Soc. 19 (1978) 141–151.

[63] Edelstein M., On fixed and periodic points under contractive mappings, J. London Math. Soc. 37 (1962) 74–79.

[64] Ehrlich L.W., A modified Newton method for polynomials, Comm. Assoc. Comput. Mach. 10 (1967) 107–108.

[65] Eisenfeld J., V. Lakshmikantham, Comparison principle and nonlinear contractions in abstract spaces, J. Math. Anal. Appl. 49 (1975) 504–511.

[66] Engler A.J., A. Prestel, Valued Fields, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Berlin, 2005.

[67] Ezquerro J.A., M.A. Hernández, Generalized differentiability conditions for Newton's method, IMA J. Numer. Anal. 22 (2002) 187–205.

[68] Ezquerro J.A., M.A. Hernández, On the R-order of convergence of Newton's method under mild differentiability conditions, J. Comput. Appl. Math. 197 (2006) 53–61.

[69] Farmakis I, M. Moskowitz, Fixed Point Theorems and Their Applications, World Scientific, Hackensack, NJ, 2013.

[70] Feng Y., W. Mao, The equivalence of cone metric spaces and metric spaces, Fixed Point Theory 11 (2010) 259–263.

[71] Ferreira O.P., B.F. Svaiter, Kantorovich's majorants principle for Newton's method, Comput. Optim. Appl. 42 (2009) 213–229.

[72] Filip A.D., A. Petruşel, Fixed point theorems on spaces endowed with vector-valued metrics, Fixed Point Theory Appl 2010 (2010), Art. ID 281381, 15 pp.

[73] Franklin S.P., Spaces in which sequences suffice, Fund. Math. 57 (1965), 107–115.

[74] Fréchet M., La notion d'écart et le calcul fonctionnel, C. R. Acad. Sci. Paris 140 (1905) 772–774.

[75] Fréchet M., Sur quelques points du calcul fonctionnel, Rend. Circ. Mat. Palermo 22 (1906) 1–74.

[76] Frič R., History of sequential convergence spaces, In: Handbook of the history of general topology, Vol. 1, 343–355. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997.

[77] Furi M., Un teorema di punto fisso per transformazioni di uno spazio metrico completo in se, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fiz. Mat. Natur. 45 (1968) 207–211.

[78] Gajič L., V. Rakočevič, Quasi-contractions on a nonnormal cone metric spaces, Funct. Anal. Appl. 46 (2012) 62–65.

[79] Galantai A., The theory of Newton's method, J. Comput. Appl. Math. 124 (2000) 25–44.

[80] Galperin A., On convergence domain of Newton's and modified Newton methods, Numer. Funct. Anal. Optim. 26 (2005) 385–405.

[81] Gelman A., A certain fixed-point principle, Soviet Math. Dokl. 12 (1971) 813–816. (in Russian)

[82] Geraghty M., An improved criterion for fixed points of contraction mappings, J. Math. Anal. Appl. 48 (1974) 811–817.

[83] Giusti M., G. Lecerf, B. Salvy, J.-C. Yakoubsohn, Location and approximation of clusters of zeros of analytic functions, Found. Comput. Math. 5 (2005), No. 3, 257–311.

[84] Giusti M., G. Lecerf, B. Salvy, J.-C. Yakoubsohn, On location and approximation of clusters of zeros: case of embedding dimension one, Found. Comput. Math. 7 (2007), No. 1, 1–58.

[85] Gragg W.B., R.A. Tapia, Optimal error bounds for the Newton-Kantorovich theorem, SIAM J. Numer. Anal. 11 (1974) 10–13.

[86] Goreham A., Sequential convergence in topological spaces, arXiv: 0412558 (2004)

[87] Gutiérrez J.M., A new semilocal convergence theorem for Newton's method, J. Comput. Appl. Math. 79 (1997) 131–145.

[88] Gutierres G., D. Hofmann, Axioms for sequential convergence, Appl. Categ. Structures 15 (2007) 599–614.

[89] Han D.F., The convergence of the Durand-Kerner method for simultaneously finding all zeros of a polynomial, J. Comput. Math. 18 (2000) 567–570.

[90] Hegedűs M., T. Szilágyi, Equivalent conditions and a new fixed point theorem in the theory of contractive type mappings, Math. Japonica 25 (1980) 147–157.

[91] Hernández M.A., The Newton method for operators with Hölder continuous first derivative, J. Optimization Theory Appl. 109 (2001), 631–648.

[92] Hicks T.L., Another view of fixed point theory, Math. Japonica 35 (1990) 231–234.

[93] Hicks T., B.E. Rhoades, A Banach type fixed point theorem, Math. Japonica 24 (1979) 327–330.

[94] Hopkins M., B. Marshall, G. Schmidt, S. Zlobec. On a method of Weierstrass for the simultaneous calculation of the roots of a polynomial, Z. Angew. Math. Mech. 74 (1994) 295–306.

[95] Huang Z.D., A note on the Kantorovich theorem for Newton's iteration, J. Comput. Appl. Math. 79 (1993) 211–217.

[96] Huang Z.D., On Newton's method under Hölder continuous derivative, J. Math. Anal. Appl. 270 (2002) 332–339.

[97] Huang Z.D., The convergence ball of Newton's method and uniqueness ball of equations under Hölder-type continuous derivatives, Comput. Math. Appl. 47 (2004) 247–251.

[98] Huang L.G., X. Zhang, Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings, J. Math. Anal. Appl. 332 (2007) 1468–1476.

[99] Ilić D., V. Rakočević, Quasi-contraction on a cone metric space, Appl. Math. Lett. 22 (2009) 728–731.

[100] Ilić S.M., L. Rančić, On the fourth order zero-finding methods for polynomials, Filomat 17 (2003) 1–12.

[101] Ilieff L., K. Dochev, Über Newtonsche Iterationen, Wiss. Z. Tech. Univ. Drezden 12 (1963) 117–118.

[102] Iliev A., N. Kyurkchiev, Nontrivial Methods in Numerical Analysis: Selected Topics in Numerical Analysis, Lambert Academic Publishing, 2010.

[103] Ivanov S.I., Convergence of Halley's Iteration Method for Individual and Simultaneous Approximation of Polynomial Zeros, PhD dissertation, University of Plovdiv, Plovdiv, 2014. (in Bulgarian)

[104] Jay L.O., A note on Q-order of convergence, BIT 41 (2001) 422–429.

[105] Jachymski J., Equivalent Conditions and the Meir-Keeler type theorems, J. Math. Anal. Appl. 194 (1995) 293–303.

[106] Jachymski J., Equivalence of some contractivity properties over metrical structures, Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997) 2327–2335.

[107] Jachymski J., On iterative equivalence of some classes of mappings, Ann. Math. Sil. 13 (1999) 149–165.

[108] Jakubík J., On convergence in linear spaces (in Slovak), Mat.-Fyz. Časopis. 6 (1956) 57–67.

[109] Jankó B., Rezolvarea equatiilor operationale neliniare in spatii Banach, Editura Academiei republicii socialiste Romania, Bucuresti, 1969.

[110] Janković S., Z. Kadelburg, S. Radenović, On cone metric spaces: a survey, Nonlinear Anal. 74 (2011) 2591–2601.

[111] Kadelburg Z., S. Radenović, V. Rakočević, Remarks on "Quasi-contraction on a cone metric space", Appl. Math. Lett. 22 (2009) 1674–1679.

[112] Kadelburg Z., S. Radenović, V. Rakočević, A note on the equivalence of some metric and cone metric fixed point results, Appl. Math. Lett. 24 (2011) 370–374.

[113] Kantorovich L.V., Sur la théorie générate des opérations dans les espaces semi-ordonnés. C. R. Acad. USSR 1(10):213–286 (1936)

[114] Kantorovich L.V., The method of successive approximations for functional equations, Acta Mathematica 71 (1939) 63–97.

[115] Kantorovich L.V., On Newton's method for functional equations, Dokl. Acad. Nauk SSSR 59 (1948) 1237–1240. (in Russian)

[116] Kantorovich L.V., G.P. Akilov, Functional Analysis in Normed Spaces, Pergamon Press, Oxford, 1964.

[117] Kantorovich L.V., G.P. Akilov, Functional Analysis in Normed Spaces, Pergamon, Oxford, 1982.

[118] Kasahara S., Some fixed point and coincidence theorems in L-spaces, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 3 (1975), No. 2, Art. ID 28, 7 pp. .

[119] Katok S., p-adic Analysis in Comparison with Real, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

[120] Keller H.B., Newton's method under mild differentiability conditions, J. Comput. System Sci. 4 (1970) 15–28.

[121] Kerner I.O., Ein Gesamtschrittverfahren zur Berechnung der Nullstellen von Polynomen, Numer. Math. 8 (1966) 290–294.

[122] Khamsi M.A., Remarks on cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings, Fixed Point Theory Appl. 2010 (2010), Art. ID 315398, 7 pp.

[123] Khamsi M.A., W.A. Kirk, An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory, Wiley-Interscence, New York, 2001.

[124] Khani M., M. Pourmahdian, On the metrizability of cone metric spaces, Topology Appl. 158 (2011) 190–193.

[125] Kirk W.A., Fixed Point Theory: A Brief Survey, Universidad de Los Andes, Merida-Venezuela, 1990.

[126] Kirk W.A., B. Sims (Eds.), Handbook of Metric Fixed Point Theory, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.

[127] Kjurkchiev N.V., Initial Approximations and Root Finding Methods, Mathematical Research, Vol. 104, Wiley, Berlin, 1998

[128] Kjurkchiev N.V., A. Andreev, Ehrlich's methods with a raised speed of convergence, Serdica Bulg. Math. Publ. 13 (1987) 52–57.

[129] Kjurkchiev N.V., S.M. Markov. Two interval methods for algebraic equation with real roots, Pliska Stud. Math. Bulg. 5 (1983) 118–131.

[130] Kjurkchiev N.V., S. Taschev, A method for simultaneous determination of all roots of algebraic polynomials, C. R. Acad. Bulg. Sci. 34 (1981) 1053–1055. (in Russian)

[131] Kornstaedt H.J., Funktionalungleichungen und iterationsverfahren, Aequationes Math. 13 (1975) 21–45.

[132] Krasnoselskii M.A., Positive Solutions of Operator Equations, Gos. Izdat. Fiz. Mat. Lit., Moscow, 1962. (in Russian)

[133] Krasnoselskij M.A., V.J. Stecenko, On the theory of equations with concave operators Sibirian Math. J. 10 (1969) 405–410.

[134] Krasnoselskij M.A., G.M. Vainikko, P.P. Zabreiko, Y.B. Rutitskij, V.J. Stecenko, Approximate Solutions of Operator Equations, Wolters Noordhoff, Groningen, 1972.

[135] Krein M.G., M.A. Rutman, Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space, Uspehi Matem. Nauk 3 (1948), No. 1, 3–95.

[136] Kuczma M., B. Choczewski, R. Ger, Iterative Functional Equations, Encyclopedia of Mathematics and Applications, Vol. 32, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990

[137] Kurepa Đ.R., Tableaux ramifiés d'ensembles. Espaces pseudo distanciés, C. R. Acad. Sci. Paris 198 (1934) 1563–1565.

[138] Kürschák J., Über Limesbildung und allgemeine Körpertheorie, J. Reine Angew. Math. 142 (1913) 211–253.

[139] Latif A., F.Y. Shaddad, Fixed point results for multivalued maps in cone metric spaces, Fixed Point Theory Appl. 2010 (2010), Art. ID 941371, 11 pp.

[140] Li C., J.-H. Wang, Newton's method for sections on Riemanian manifolds: Generalized covariant α-theory, J. Complexity 24 (2008) 423–451.

[141] Li C., J.-H. Wang, J.-P. Dedieu, Smale's point estimate theory for Newton's method on Lie groups, J. Complexity 25 (2009) 128–151.

[142] Lim T.C., On characterization of Meir-Keeler contractive maps, Nonlinear Anal. 46 (2001) 113–120.

[143] Lin I.J., C.M. Chen, M. Jovanović, T.H. Wu, Fixed points and endpoints of set-valued contractions in cone metric spaces, Abstr. Appl. Anal. 2012 (2012), Art. ID 632628, 14 pp.

[144] Lysenko Yu.V., The convergence conditions of Newton-Kantorovich method for nonlinear equations with Hölder linearizations, Dokl. Akad. Nauk BSSR 38 (1994) 20–24. (in Russian)

[145] Maiti M., T.K. Pal, Generalization of two fixed point theorems, Bull. Calcuta Math. Soc. 70 (1978) 57–61.

[146] Makrelov I.V., On the simultaneous determination of the roots of polynomial equations, C. R. Acad. Bulg. Sci. 43 (1990), No. 7, 23–25. (in Russian)

[147] Makrelov I., On a modification of Chebyshev's method, J. Comput. Appl. Math. 41 (1992) 373–375.

[148] Matkowski J., Integrable solutions of functional equations, Dissertationes Math. 127, Polish. Acad. Sci., Warszaw, 1975.

[149] Matkowski J., Fixed point theorems for contractive mappings in metric spaces, Cas. Pest. Mat. 105 (1980) 341–344.

[150] McNamee J.M., Numerical Methods for Roots of Polynomials Part I, Studies in Computational Mathematics, Vol. 14, Elsevier, Amsterdam, 2007.

[151] Meir A., E. Keeler, A theorem on contraction mappings, J. Math. Anal. Appl. 28 (1969) 326–329.

[152] Miel G.J., Majorizing sequences and error bounds for iterative methods, Math. Comp. 34 (1980) 185–202.

[153] Miel G.J., An update version of the Kantorovich theorem for Newton's method, Computing 27 (1981) 237–244.

[154] Niell A.M. Method for simultaneous determination of all the roots of algebraic equations, Comput. Math. Appl. 41 (2001) 1–14.

[155] Milovanovic G., M. Petković, On the convergence order of a modified method for simultaneous finding polynomial zeros, Computing 30 (1983) 171–178.

[156] Mukherjea A., Contractions and completely continuous mappings, Nonlinear Anal. 1 (1977), 235–247.

[157] Mysovskih I.P., On the convergence of L.V. Kantorovic's method of solution of functional equations and its applications, Dokl. Acad. Nauk SSSR 70 (1950) 565–568. (in Russian)

[158] Nedić J., On convergence of Börsch-Supan's method with Weierstrass' corrections, Novi Sad J. Math. 31 (2001), No. 1, 103–111.

[159] Nikolova I.A., Approximation of common fixed points of three quasi-contraction mappings, Int. J. Sci. Res. 4 (2015), No. 2, 166–170.

[160] Nikolova I.A., Exictence Theorems and Approximation of Fixed Points in K-Metric Spaces, PhD dissertation, University of Plovdiv, Plovdiv, 2015. (in Bulgarian)

[161] Nourein A.W.M., An improvement on Nourein's method for the simultaneous determination of the zeros of a polynomial (an algorithm), J. Comput. Appl. Math. 3 (1977) 109–110.

[162] Olaleru J.O., Some generalizations of fixed point theorems in cone metric spaces, Fixed Point Theory Appl. 2009 (2009), Art. ID 657914, 10 pp.

[163] Ostrowski A.M., La méthode de Newton dans les espaces de Banach, C. R. Acad. Sci. Paris Seŕ A 272 (1971) 1251–1253.

[164] Ortega J.M., W.C. Rheinboldt, Iterative Solutions of Nonlinear Equations in Several Variables, Academic Press, New York, 1970.

[165] Park S., B.E. Rhoades, Meir-Keeler type contractive conditions, Math. Japon. 26 (1981) 13–20.

[166] Park S., A unified approach to fixed points of contractive maps, J. Korean Math. Soc. 16 (1980) 95–105.

[167] Pathak H.K., N. Shahzad, Fixed point results for generalized quasi-contraction mappings in abstract metric spaces, Nonlinear Anal. 71 (2009) 6068–6076.

[168] Petcu D., On the Kantorovich hypothesis for Newton's method, Informatika (Vilnius) 4 (1993), No. 1–2, 188–198.

[169] Perov A.I., On the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations, in: Approximate. Methods of Solving Differential Equations, Vol. 2, 115–134, Naukova Dumka, Kiev, 1964. (in Russian)

[170] Petkov M., Numerical Methods in Algebra, Nauka i izkustvo, Sofia, 1974. (in Bulgarian)

[171] Petkova M.D., Local and Semilocal Convergence of the One-Point and Two-Point Weierstrass Method for Simultaneous Approximation of Polynomial Zeros, PhD dissertation, University of Plovdiv, Plovdiv, 2014. (in Bulgarian)

[172] Petković M.S., On initial conditions for the convergence of simultaneous root-finding methods, Computing 57 (1996) 163–177.

[173] Petković M., Point Estimation of Root Finding Methods, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1933, Berlin, Springer, 2008.

[174] Petković M., C. Carstensen and M. Trajković, Weierstrass formula and zero-finding methods, Numer. Math. 69 (1995) 353–372.

[175] Petković M.S., D. Herceg, Point estimation and safe convergence of root-finding simultaneous methods, Sci. Rev. 21-22 (1996) 117–130.

[176] Petković M.S., D. Herceg, Börsch-Supan-like methods: Point estimation and parallel implementation, Int. J. Comput. Math. 64 (1997) 327–341.

[177] Petković M.S., D. Herceg, Point estimation of simultaneous methods for solving polynomial equations, J. Comput. Appl. Math. 136 (2001) 283–307.

[178] Petković M.S., D. Herceg, S. Ilić, Point Estimation Theory and its Applications, Institute of Mathematics, Novi Sad, 1997.

[179] Petković M.S., D. Herceg, S. Ilić, Safe convergence of simultaneous methods for polynomial zeros, Numer. Algorithms 17 (1998) 313–331.

[180] Petković M.S., S.M. Ilić, Point estimation and the convergence of the Ehrlich-Aberth method, Publ. Inst. Math., 62 (1997) 141-149.

[181] Petković L.D, M.S. Petković, Safe convergence of Chebyshev-like method, Novi Sad J. Math. Vol. 31 (2001), No. 1, 113–123.

[182] Petković M.S., L.D. Petković, J. Džunić, On an efficient simultaneous method for finding polynomial zeros, App. Math. Lett. 28 (2014) 60–65.

[183] Petković M.S., N. Kjurkchiev, A note on the convergence of the Weierstrass SOR method for polynomial roots, J. Comput. Appl. Math. 80 (1997) 163–168.

[184] Petruşel A., I.A. Rus, Fixed point theorems in ordered L-spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 134 (2006) 411–418.

[185] Potra F.A., On the aposteriori error estimates for Newton's method, Beitraege Numer. Math. 12 (1984) 125–138.

[186] Potra F.A., V. Pták, Sharp error bounds for Newton's process, Numer. Math. 34 (1980) 63–72.

[187] Prešić M.D., A convergence theorem for a method for simultaneous determination of all zeros of a polynomial, Publ. Inst. Math. 28 (1980) 159–165.

[188] Prešić S.B., Un procéd é itératif pour la factorisation des polynômes, C. R. Acad. Sci. Paris Sèr. A, 262 (1966) 862–863.

[189] Proinov P.D., Fixed point theorems in metric spaces, Nonlinear Anal. 64 (2006) 546–557.

[190] Proinov P.D., A new semilocal convergence theorem for the Weierstrass method from data at one point, C. R. Acad. Bulg. Sci. 59 (2006) 131–136.

[191] Proinov P.D., Semilocal convergence of two iterative methods for simultaneous computation of polynomial zeros, C. R. Acad. Bulg. Sci. 59 (2006) 705–712.

[192] Proinov P.D., A generalization of the Banach contraction principle with high order of convergence of successive approximations, Nonlinear Anal. 67 (2007) 2361–2369.

[193] Proinov P.D., General local convergence theory for a class of iterative processes and its applications to Newton's method, J. Complexity 25 (2009) 38–62.

[194] Proinov P.D., New general convergence theory for iterative processes and its applications to Newton-Kantorovich type theorems, J. Complexity 26 (2010) 3–42.

[195] Proinov P.D., A unified theory of cone metric spaces and its applications to the fixed-point theory, Fixed Point Theory Appl. 2013 (2013), Art. ID 103, 38 pp.

[196] Proinov P.D., S.I. Cholakov, Semilocal convergence of Chebyshev-like root-finding method for simultaneous approximation of polynomial zeros, Appl. Math. Comput. 236 (2014) 669–682.

[197] Proinov P.D., S.I. Cholakov, Convergence of Chebyshev like method for simultaneous computation of multiple polynomial zeros, C. R. Acad. Bulg. Sci. 67 (2014) 907–918.

[198] Proinov P.D., S.I. Ivanov, A theorem for local convergence of Halley's method for finding polynomial zeros simultaneously, Scientific Researches of the Union of Scientists in Bulgaria–Plovdiv, Ser. B, 14 (2012) 173–176.

[199] Proinov P.D., S.I. Ivanov, On the convergence of Schröder's method for polynomial zeros of unknown multiplicity, C. R. Bulg. Acad. Sci. 66 (2013) 1073–1080.

[200] Proinov P.D., S.I. Ivanov, On the convergence of Halley's method for multiple polynomial zeros, Mediterranean J. Math. (2014), http://dx.doi.org/10.1007/s00009-014-0400-7.

[201] Proinov P.D., S.I. Ivanov, On the convergence of Halley's method for simultaneous computation of polynomial zeros, J. Numer. Math. (2014), in press.

[202] Proinov P.D., I.A. Nikolova, Iterative approximation of fixed points of quasi-contraction mappings in cone metric spaces, J. Inequal. Appl. 2014 (2014), Art. ID 226, 14 pp.

[203] Proinov P.D., I.A. Nikolova, On the convergence of the Jungck iteration scheme for approximating common fixed points, Indian J. Appl. Res. 5 (2015), No. 2, 398–402.

[204] Proinov P.D., M.D. Petkova, Convergence of the Weierstrass method for simultaneous approximation of polynomial zeros, C. R. Bulg. Acad. Sci. 66 (2013) 809–818.

[205] Proinov P.D., M.D. Petkova, A new semilocal convergence theorem for the Weierstrass method for finding zeros of a polynomial simultaneously, J. Complexity 30 (2014) 366–380.

[206] Proinov P.D., M.D. Petkova, Convergence of the two-point Weierstrass root-finding method, Japan J. Indust. Appl. Math. 31 (2014) 279–292.

[207] Ptak V., The rate of convergence of Newton's process. Numer. Math. 25 (1976) 279–285.

[208] Radenović S., Kadelburg Z., Quasi-contractions on symmetric and cone symmetric spaces, Banach J. Math. Anal. 5 (2011) 38–50.

[209] Rall L.B., A note on the convergence of Newton's method, SIAM J. Numer. Anal. 11 (1974) 34–36.

[210] Rakotch E., A note on contractive mappings, Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962) 459–465.

[211] Reich S., D. Shoiykhet, Nonlinear Semigroups, Fixed Points and Geometry of Domains in Banach Spaces, World Scientific, London, 2005.

[212] Renegar J., On the worst-case arithmetic complexity of approximating zeros of polynomials, J. Complexity 3 (1987) 90–113.

[213] Rezapour S., R.H. Haghi, N. Shahzad, Some notes on fixed points of quasi-contraction maps, Appl. Math. Lett. 23 (2010) 498–502.

[214] Rezapour S., Hamlbarani R., Some notes on the paper: “Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings”, J. Math. Anal. Appl. 345 (2008) 719–724.

[215] Rheinboldt W.C., A unified convergence theory for a class of iterative processes, SIAM J. Numer. Anal. 5 (1968) 42–63.

[216] Rheinboldt W.C., An adaptive continuation process for solving systems of nonlinear equations, in: Banach Center Publications, Vol. 3, Polish Academy of Science, Warsaw, 1977, pp. 129–142.

[217] Rheinboldt W.C., On a theorem of S. Smale about Newton’s method for analytic mappings, Appl. Math. Lett. 1 (1988) 69–72.

[218] Rokne J., Newton’s method under mild differentiability conditions with error analysis, Numer. Math. 18 (1972) 401–412.

[219] Rudin W., Functional Analysis, McGraw-Hill, New York, 1973.

[220] Rus I.A., Some fixed point theorems in metric spaces, Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste. 3 (1971) 69–172.

[221] Rus I.A., Teoria Punctului Fix, II, Univ. Babes, Cluj, 1973.

[222] Rus I.A., Generalized Contractions and Applications, Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2001.

[223] Rus I.A., Picard operators and applications, Sci. Math. Japon. 58 (2003) 191–219.

[224] Rus I.A., Fixed Point Structure Theory, Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2006.

[225] Rus I.A., A. Petruşel, G. Petruşel, Fixed Point Theory, Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2008.

[226] Rus I.A., A. Petruşel, M.A. Şerban, Weakly Picard operators: equivalent definitions, applications and open problems, Fixed Point Theory 7 (2006) 3–22.

[227] Rzepecki B., On fixed point theorems of Maia type, Publ. Inst. Math. 28 (1980) 179–186.

[228] Şahin I., M. Telci, A theorem on common fixed points of expansion type mappings in cone metric spaces, An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa, 18 (2010) 329–336.

[229] Schröder E., Über unendlich viele Algorithmen zur Autlösung der Glleichungen, Math. Anal. 2 (1870) 317–365.

[230] Schröder J., Das Iterationsverfahren bei allgemeinerem Abstandsbegriff, Math. Z. 66 (1956) 111–116.

[231] Schröder J., Nichtlineare Majoranten beim Verfahren der schrittweisen Näherung, Arch. Math. 7 (1956) 471–484.

[232] Semerdzhiev Khr., Iteration methods for simultaneous finding all roots of generalized polynomial equations, Math. Balkanica 8 (1994) 311–335.

[233] Sendov Bl., A. Andreev, N. Kjurkchiev, Numerical Solution of Polynomial Equations, in: Handbook of Numerical Analysis (P. Ciarlet and J. Lions, eds.), Vol. III, pp. 625–778, Elsevier, Amsterdam, 1994.

[234] Sendov Bl., V. Popov, Méthodes d'Analyse Numérique, Tome 1, Sofia, 1996.

[235] Simić S., A note on Stone's, Baire's, Ky Fan's and Dugundji's theorem in tvs-cone metric spaces. Appl. Math. Lett. 24 (2011) 999–1002.

[236] Smale S., Newton's method estimates from data at one point, in: R.E. Ewing, K.E. Gross, C.F. Martin (eds), The Merging of Disciplines: New Direction in Pure, Applied, and Computational Mathematics, Springer, New York , 1986, pp. 185–196.

[237] Song G., X. Sun, Y. Zhao, G. Wang, New common fixed point theorems for maps on cone metric spaces, Appl. Math. Lett. 23 (2010) 1033–1037.

[238] Sönmez A., On paracompactness in cone metric spaces, Appl. Math. Lett. 23 (2010) 494–497.

[239] Tashev S., N. Kjurkchiev, Certain modifications of Newton's method for the approximate solution of algebraic equations, Serdica Bulg. Math. Publ. 9 (1983) 67–72. (in Russian)

[240] Taskovic M.R., A monotone principle of fixed points, Proc. Amer. Math. Soc. 94 (1985) 427–432.

[241] Tilli P., Convergence conditions of some methods for the simultaneous computation of polynomial zeros, Calcolo 35 (1998) 3–15.

[242] Traub J.F., H. Woźniakowski, Convergence and complexity of Newton iteration for operator equations, J. Assoc. Comput. Mach. 26 (1979) 250–258.

[243] Turkoglu D., M. Abuloha, Cone metric spaces and fixed point theorems in diametrically contractive mappings, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 26 (2010) 489–496.

[244] Vandergraft J.S., Newton's method for convex operators in partially ordered spaces, SIAM J. Numer. Anal. 4 (1967) 406–432.

[245] Vertgeim B.A., On the conditions for the applicability of Newton's method, Dokl. Akad. Nauk SSSR 110 (1956) 719–722. (in Russian)

[246] Vertgeim B.A., On some methods of the approximate solution of nonlinear functional equations in Banach spaces, Uspekhi Mat. Nauk 12 (1957), 166–169. (in Russian) [Engl. Transl.: Amer. Math. Soc. Transl. 16 (1960) 378–382].

[247] Wang D., F. Zhao, Complexity analysis of a process for simultaneously obtaining all zeros of polynomials, Computing 43 (1989) 187–197

[248] Wang D., F. Zhao. On the determination of a safe initial approximation for the Durand–Kerner algorithm, J. Comput. Appl. Math. 38 (1991) 447–456.

[249] Wang D., F. Zhao, The theory of Smale's point estimation and its applications, J. Comput. Appl. Math. 60 (1995) 253–269.

[250] Wang X.H., The convergence of Newton's method (in Chinese), Kexue Tongbao 25 (1980) 36–37.

[251] Wang X.H., Convergence of Newton's method and inverse function theorem in Banach space, Math. Comp. 68 (1999) 169–186.

[252] Wang X.H., Convergence of Newton's method and uniqueness of the solution of equations in Banach space, IMA J. Numer. Anal. 20 (2000) 123–134.

[253] Wang X.H., D.F. Han On dominating sequences method in the point estimate and Smale theorem, Science in China (Ser. A) 33 (1990) 135–144.

[254] WANG X.H., D.F. HAN, Criterion α and Newton's method under weak conditions, (in Chinese) Math. Numer. Sin. 19 (1997), 103–112; English translation in: Chinese J. Numer. Math. Appl. 19 (1997) 96–105.

[255] WANG X.H., C. LI, Convergence of Newton's method and uniqueness of the solution of equations in Banach spaces. II, Acta Math. Sinica (Engl. Ser) 19 (2003) 405–412.

[256] WEIERSTRASS K., Neuer Beweis des Satzes, dass jede ganze rationale Function einer Veränderlichen dargestellt werden kann als ein Product aus linearen Functionen derselben Veränderlichen, Sitzungsber. Königl. Akad. Wiss. Berlin (1891) 1085–1101.

[257] WERNER W., On the simultaneous determination of polynomial roots, Lecture Notes Math. 953 (1982) 188–202.

[258] WONG C.S., Characterizations of certain maps of contractive type, Pacific J. Math. 68 (1977) 293–296.

[259] WARDOWSKI D., Endpoints and fixed points of set-valued contractions in cone metric spaces, Nonlinear Anal. 71 (2009) 512–516.

[260] YAKOUBSOHN J.-C., Finding a cluster of zeros of univariate polynomials, J. Complexity 16 (2000) 603–638.

[261] YAKOUBSOHN J.-C. Simultaneous computation of all the zero-clusters of univariate polynomial, In: Foundations of computational mathematics, River Edge, World Sci. Publ., 2002, pp. 433–455.

[262] YAKOUBSOHN J.-C., Numerical elimination, Newton method and multiple roots, in: F. Chyzak (ed.), Algorithms Seminar 2001-2002, INRIA, 2003, pp. 49–54; see: http://algo.inria.fr/seminars/.

[263] YAMAMOTO T., A unified derivation of several error bounds for Newton's process, J. Comput. Appl. Math. 12-13 (1985) 179–191.

[264] YAMAMOTO T., A method for finding sharp error bounds for Newton's method under the Kantorovich assumptions, Numer. Math. 49 (1986) 203–220.

[265] YAMAMOTO T., Historical development in convergence analysis for Newton's and Newton-like methods, J. Comput. Appl. Math. 124 (2000) 1–23.

[266] YAO Q., Improved schemes on Durand-Kerner method and Aberth method, Int. J. Differ. Eqn. Appl. 1A (2000), No. 4, 459–467.

[267] Ypma T.J., Affine invariant convergence results for Newton's method, BIT 22 (1982) 108–118.

[268] Ypma T.J., Local convergence of inexact Newton methods, SIAM J. Numer. Anal. 21 (1984) 583–589.

[269] Zabrejko P.P., K-metric and K-normed linear spaces: survey, Collect. Math. 48 (1997) 825–859.

[270] Zamfirescu T., A theorem on fixed points theorems in metric spaces, Atti Acad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 52 (1972) 832–834 (1973).

[271] Zamfirescu T., Fixed point and contraction theorems in metric spaces, Aequationes Math. 11 (1974) 138–142.

[272] Zeidler E., Applied Functional Analysis: Applications to Mathematical Physics, Applied Mathematical Sciences, Vol. 8, Springer, New York, 1995.

[273] Zhang X., Fixed point theorem of generalized quasi-contractive mapping in cone metric space, Comput. Math. Appl. 62 (2011) 1627–1633.

[274] Zhao F.G., D.R. Wang, The theory of Smale's point estimation and the convergence of Durand-Kerner program, Math. Numer. Sinica 15 (1993) 196–206 (in Chinese).

[275] Zheng S.M., On convergence of the Durand-Kerner's method for finding all roots of a polynomial simultaneously, Kexue Tongbao 27 (1982) 1262–1265.

[276] Zheng S.M., On convergence of a parallel algorithm for finding the roots of a polynomial, J. Math. Res. Exp. 7 (1987) 657–660 (in Chinese).

[277] Zheng S.M., Z.D. Huang, On convergence of Nourein iterations for simultaneous finding all zeros of a polynomial, J. Comput. Math. 18 (2000) 113–122.

[278] Zitarosa A., Una generalizzazione del teorema di Banach sulle contrazioni, Matematiche 23 (1968) 417–424.