

РЕЦЕНЗИЯ

от д-р Васил Георгиев Ангелов
професор в Минно-геоложки университет „Св. И. Рилски“
ръководител катедра „Математика“
за дисертационния труд
на тема

„Теорема за съществуване и апроксимиране на неподвижни точки в К-метрични пространства“

с автор **Иванка Андреева Николова**

за придобиване на образователната и научна степен „доктор“ по:
област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика;
професионално направление 4.5. Математика;
докторска програма Математически анализ.

ОБЩО ОПИСАНИЕ НА ПРЕДСТАВЕНИТЕ МАТЕРИАЛИ

Със заповед No P33–465/03.02.2015 г. на Ректора на Пловдивския университет „Паисий Хилендарски“ съм определен за член на научното жури във връзка с процедурата за защита на дисертационния труд на тема “Теорема за съществуване и апроксимиране на неподвижни точки в К-метрични пространства” за придобиване на образователната и научна степен „доктор“ по: област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика; професионално направление 4.5. Математика; докторска програма Математически анализ от Иванка Андреева Николова – редовен докторант към катедра „Математически анализ“ на Факултет по математика и информатика (ФМИ) при Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“.

Докторантката е представила следните материали:

1. Автобиография по европейски формат;
2. Диплома за образователно-квалификационна степен „магистър“: серия ПУ-2009, No 036307, регистрационен No. 4287 от 07 юли 2009 г. (копие);
3. Заповед № P33-2259/11.07.2011 г. за зачисляване в докторантура на самостоятелна подготовка и определяне на темата на дисертацията;
4. Заповед № 47/25.01.2012 г. за назначаване на комисия за провеждане на изпит за докторантски минимум от индивидуалния учебен план;
5. Протокол от 14.02.2012 г. за успешно издържан изпит за докторантски минимум от индивидуалния учебен план;
6. Заповед № P33-2384/19.06.2014 г. за отчисляване от докторантура с право на защита, считано от 29.06.2014;

7. Протокол № 11/05.12.2014 г. от КС за откриване на процедура за предварително обсъждане на дисертационния труд;
8. Протокол № 12/12.12.2014 г. от КС от предварителното обсъждане на дисертационния труд;
9. Автореферат;
10. Справка за спазване на специфичните изисквания на ФМИ при ПУ, съгласно чл. 36 (1), т. 9 от ПРАС на ПУ за придобиване на образователна и научна степен „доктор“;
11. Списък на всички научни публикации;
12. Списък на научните публикации по темата на дисертационния труд;
13. Копия на публикациите по темата на дисертационния труд;
14. Служебна бележка с изх. № НПД 790/29.10.2014 г. от подделение НПД при ПУ „Паисий Хилендарски“ за участие в научноизследователски проекти;
15. Декларация за оригиналност и достоверност на приложените документи;
16. Дисертационен труд с декларация за оригиналност;
17. CD с всички документи.

КРАТКИ БИОГРАФИЧНИ ДАННИ ЗА ДОКТОРАНТКАТА ИВАНКА АНДРЕЕВА НИКОЛОВА

Родена е на 25.10.1985 г. Завършила е висше образование „Бакалавър по приложна математика“ и „Бакалавър по маркетинг“ в ПУ „П. Хилендарски“. По-късно завършва магистратура по приложна математика в ПУ „П. Хилендарски“ гр. Пловдив – квалификация „математик“ и магистратура по Електроенергетика и електрообзавеждане в ТУ-София.

В момента е асистент във Факултета по математика и информатика, ПУ „П. Хилендарски“, катедра „Математически анализ“.

ОБЩА ХАРАКТЕРИСТКА НА ДИСЕРТАЦИЯТА

Дисертационният труд е посветен на някои задачи от метричната теория на неподвижните точки. Направените от Л.Чирич през 1971 и 1974 обобщения на теоремата за свиващите изображения на С.Банах се разглеждат в K -метрични пространства. Те се получават като множеството от положителните (неотрицателните) числа в метричния случай се замени с телесен конус във векторно пространство, който задава частична наредба. Оказва се, че техниката на доказателствата е приложима с известни модификации. Това дава възможност да се формулират аналогични теореми в K -метрични пространства. Изследвани са и въпроси за съществуване и единственост на общи неподвижни точки на две и три изображения, както и за точки на съвпадане за две и три изображения в K -метрични пространства.

ОБЩА СТРУКТУРА НА ДИСЕРТАЦИЯТА

Дисертацията се състои от увод, три глави, заключение (състоящо се от резюме на получените резултати, списък на публикациите по дисертацията, апробация на получените резултати и декларация за оригиналност) и библиография.

Глава 1 се състои от шест параграфа. Тук е дадена формулировка на теоремата на Чирич в K -метрични пространства. Получени са оценки на грешката за последователните приближения.

В параграф 1.1 се въвеждат основни понятия и резултати за K -метрични пространства. В параграф 1.2 се прави обзор на резултатите на Л.Чирич и въведените от него по-обща свиващи изображения, а в следващия параграф 1.3 са дадени обобщенията в K -метрични пространства. В параграф 1.4 са доказани леми, които се използват при доказателствата на основните резултати в следващия параграф 1.5:

Нека (X, d) е пълно K -метрично пространство над телесно векторно пространство (Y, \leq) и $T: X \rightarrow X$ е квазисвиващо, то за всяко $x \in X$ изображението T има единствена неподвижна точка в затвореното кълбо $\bar{U}(x, r)$ с радиус $r = \frac{1}{1-\lambda} d(x, Tx)$. Редицата от итерациите клони към неподвижната точка като принадлежи на затвореното кълбо. Дадени са априорни и апостериорни оценки на грешката. (тази формулировка е малко подобрене на оригинала).

Параграф 1.6 съдържа пример, който показва строгото включване на класа на свиващите изображения на Илич, Ракочевич [41] в класа от свивания на Жанг.

Глава 2 се състои от пет параграфа. В нея се разглеждат въпроси за съществуване на точки на съвпадане на две изображения и общи неподвижни точки на две изображения в K -метрични пространства. Параграфите 1 и 2 съдържат основните понятия и исторически обзор на проблемите. Параграф 3 съдържа помощни резултати, необходими за основните теореми в параграф 4: Нека (X, d) е пълно K -метрично пространство над телесно векторно пространство (Y, \leq) и $T, f: X \rightarrow X$ са две изображения, такива че $T(X) \subset f(X)$ и $T(X)$ или $f(X)$ е пълно подпространство на X . Тогава T и $f: X \rightarrow X$ имат единствена точка на съвпадане $\xi \in \bar{U}(f x_0; r) \subset X$, $r = \frac{1}{1-\lambda} d(fx_0, Tx_0)$ за произволно $x_0 \in X$. Редицата използвана от Джунг ($T-f$ -редица (fx_n)) е в затвореното кълбо $\bar{U}(f x_0; r)$ и клони към ξ .

Доказано е съществуване и единственост на обща неподвижна точка при условие за слаба комутация. Дадени са априорни и апостериорни оценки на грешката.

Накрая в параграф 2.5 са дадени два примера, които показват, че условието за пълнота на $T(X)$ или $f(X)$ е съществено.

Глава 3 се състои също от пет параграфа. Тук е доказана теорема за апроксимиране на общи неподвижни точки на три изображения в K -метрични пространства над нормално телесно банахово пространство. Първите три параграфа съдържат уводни и помощни твърдения. Основните резултати са изложени в параграф 3.4, а именно:

Нека (X, d) е пълно K -метрично пространство над телесно векторно пространство (Y, \leq) и $T, S, f : X \rightarrow X$ са три изображения така, че $T(X) \cup S(X) \subset f(X)$. Ако

$$d(Tx, Sx) \leq \lambda \text{co} \left\{ d(fx, fy), d(fx, Tx), d(fy, Sy), \frac{d(fx, Sy) + d(fy, Tx)}{2} \right\}$$

като $T(X) \cup S(X)$ или $f(X)$ е пълно подпространство на X и $d(Tx, Sx) \neq d(fx, Sx) + d(fx, Tx)$, то изображенията T, S, f имат единствена точка на съвпадане в X . Освен това всяка $(T, S) - f$ – редица (fx_n) в X е сходяща към точката на съвпадане.

Получени са и една априорна и две апостериорни оценки на грешката.

Авторефератът отразява точно и синтезирано всички основни резултати, получени в дисертацията.

ОСНОВНИ НАУЧНИ ПРИНОСИ В ДИСЕРТАЦИЯТА

Основни приноси в дисертацията на докторантката:

1. Доказана е теорема за неподвижна точка на квазисвиващо изображение в K -метрични пространства, която допълва резултати от [91] Жанг и [33] Динг и др. Теоремите за точки на съвпадане и общи неподвижни точки от [33] са пренесени в K -метрични пространства с квазисвиващо условие. Дадени са и априорни и апостериорни оценки.

2. Получена е теорема за сходимост на итерационен процес за три изображения в случай на точки на съвпадане и общи неподвижни точки. Получени са априорни и апостериорни оценки на грешката. Резултатите в дисертацията подобряват тези от [6], [16], [61], [33]. Оценките на итерационния процес за три изображения са нови и за метричния случай.

КРИТИЧНИ БЕЛЕЖКИ И ПРЕПОРЪКИ

1. На стр. 36 е дадено определение на квазисвиващо изображение в смисъл на Илич, Ракочевич [41] вида: $d(Tx, Tx) \leq \lambda \{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}$,

а в доказателствата по-нататък се използва

$$d(Tx, Tx) \leq \lambda \operatorname{co}\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}.$$

Въпросът обаче е, че Илич, Ракочевич [41] дават следната дефиниция на квазисвиващо изображение: за всеки $x, y \in X$ съществува

$$u \in C(T, x, y) = \{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}, \text{ така, че } d(Tx, Tx) \leq \lambda u.$$

Вероятно по-горното неравенство е в този смисъл, но се налага уточнение, защото главата завършва с пример, отнасящ се до двата вида свивания.

1. Във втора глава не е взета под внимание статията на А.А.Иванов –Неподвижните точки метрических пространств, Исследования по топологии II, Ломи 66, Наука, М, (1976), 5-103. Там са дефинирани същите итерации като тези на Джунг. Между другото аналогията с Канторовия (безкраен) диагонален избор е очевидна.
2. Пак в същата глава 2 не е поне спомената основополагащата статия на К.Goebel , A Coincidence Theorem. Bull.de l'Academie Polonaise de Sci. Ser. des Sci. Math., Astr. Et Phys., v.16, No.9, (1969), 733-735. В нея изображенията действат от произволно множество X (даже без топология) в метрично пространство. Доказаната теорема има съществени приложения към теореми за съществуване и единственост на решение на диференциално уравнение в класове от неограничени функции. Условието $T(X) \subset f(X)$ се появява за първи път в тази статия на К.Goebel.

ПУБЛИКАЦИИТЕ НА ДОКТОРАНТКАТА И ОЦЕНКА НА АВТОРСКОТО УЧАСТИЕ В ПОЛУЧАВАНЕТО НА ПРИНОСИТЕ

Авторството на кандидатката в представените трудове е неоспоримо, тъй като те са написани в единен стил и начин на изложение. Приносът в съавторските публикации е оценен и не оставя място за съмнения.

Статиите на докторантката, свързани с дисертацията са 3 броя и са публикувани в международни списания, едно от които е с импакт фактор.

Авторефератът отразява правилно получените резултати, като са подчертани основните приноси.

Получените резултати са докладвани на няколко математически конференции, отбелязани в края на автореферата.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Оценката ми за дисертационния труд, автореферата, научните публикации и научните приноси на **Иванка Андреева Николова е положителна.**

Представеният дисертационен труд отговаря на всички изисквания, условия и критерии по Закона за развитието на академичния състав в Република България (ЗРАСРБ), Правилника за прилагане на ЗРАСРБ, ПРАС на ПУ и специфичните изисквания на Факултета по математика и информатика при Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“ по ПРАС на ПУ.

На базата на получените резултати предлагам да бъде присъдена образователната и научна степен „**доктор**“ на Иванка Андреева Николова по: област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика; професионално направление 4.5. Математика; докторска програма Математически анализ.

20.03.2015 г.

Подпис:

/...../