Пловдивски университет “Паисий Хилендарски”
Факултет по математика и информатика

Катедра “Математически анализ”

СТОИЛ ИВАНОВ ИВАНОВ

Сходимост на итерационния метод на Халей за индивидуална и едновременна апроксимация на нули на полиноми

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертационен труд
за присъждане на образователната и научна степен
“ДОКТОР”
по област на висше образование:
4. Природни науки, математика и информатика;
професионално направление: 4.5. Математика;
докторска програма: Математически анализ

Научен ръководител:
проф. д-р Петко Димитров Пройнов

Пловдив – 2014

Дисертационният труд е обсъден и насрочен за защита на разширен катедрен съвет на катедра "Математически анализ" при Факултет по математика и информатика на Пловдивски университет "Паисий Хилендарски", проведен на 17.02.2014 г.

Дисертационният труд "Сходимост на итерационния метод на Халей за индивидуална и едновременна апроксимация на нули на полиноми" се състои от увод, три глави, заключение и библиография. Библиографията съдържа 106 заглавия. Общият обем на дисертационния труд е 115 страници. Списъкът на авторските публикации включва 3 заглавия.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на 09.05.2014 г. от 12 ч. в Заседателната зала на Нова сграда на Пловдивски университет "Паисий Хилендарски", гр. Пловдив.

Материалите по защитата са на разположение за интересуващите се в секретариата на ФМИ, Нова сграда на ПУ "Паисий Хилендарски", бул. "България" № 236, каб. 330, всеки работен ден от 8:30 до 17:00 часа.

Научно жури:
проф. д-р Антон Илиев (ПУ „П. Хилендарски", Пловдив, председател);
проф. д.т.н. Васил Ангелов (МГУ „Св. Иван Рилски", София, рецензент);
проф. д-р Петко Пройнов (ПУ „П. Хилендарски", Пловдив);
доц. д-р Андрей Андреев (ИМИ при БАН, София, рецензент);
доц. д-р Гюрхан Неджибов (ШУ „Еп. К. Преславски", Шумен).

Номерацията на теоремите, лемите, следствията и дефинициите в автореферата съвпада с тяхната номерация в дисертационния труд.

Съдържание

Актуалност и цел на дисертационния труд

Актуалност

В световната математическа литература има много монографии посветени на сходимостта на итерационни методи за решаване на нелинейни уравнения. Най-известните сред тях са монографиите на Островски [54], Трауб [95] и Ортега и Райнболд [51]. Най-популярният сред итерационните методи е *метода на Нютон*

$$z_{k+1} = z_k - \frac{f(z_k)}{f'(z_k)},$$

публикуван през 1669 г. През 1690 година Рафсън [80] преоткрива метода на Нютон, а през 1740 година Симсън [89] първи го формулира в съвременната му форма. Методът на Нютон има квадратична сходимост при апроксимиране на прости нули, но в случай на кратни нули сходимостта става линейна. През 1870 година Шрьодер [86] публикува следната модификация на метода на Нютон за апроксимиране на нули с кратност m (*метод на Нютон за кратни нули*):

$$z_{k+1} = z_k - m\,\frac{f(z_k)}{f'(z_k)}.$$

Този метод запазва квадратичната сходимост и при кратни нули.

През 1694 година известният английски математик, физик и астроном Халей [29] публикува своя знаменит итерационен метод (*метод на Халей*)

$$z_{k+1} = z_k - \left(\frac{f'(z_k)}{f(z_k)} - \frac{1}{2}\frac{f''(z_k)}{f'(z_k)}\right)^{-1}.$$

Според Трауб [95, стр. 91] методът на Халей е един от най-преоткриваните и най-изследвани итерационни методи в историята на математиката. Известно е, че методът на Халей притежава кубична сходимост при апроксимиране на прости нули, но за кратни нули сходимостта е линейна. През 1963 година Обрешков [50] публикува следната модификация на метода на Халей за нули с кратност m (*метод на Халей за кратни нули*):

$$z_{k+1} = z_k - \left(\frac{m+1}{2m}\frac{f'(z_k)}{f(z_k)} - \frac{1}{2}\frac{f''(z_k)}{f'(z_k)}\right)^{-1},$$

който запазва кубичната сходимост и при кратни нули.

През последните двайсет години Осада [52, 53], Нета [47], Рен и Аргирос [32], Хомайер [34], Пройнов [69], Ли, Ли и Ченг [41], Дж. Шарма и Р. Шарма [88], Би, Рен и Ву [9], Нета, Скот и Чун [48] и други изследват сходимостта на различни итерационни методи за нули с кратност m.

За да се приложи методът на Халей за кратни нули е необходимо да се знае кратността m. През 1870 година Шрьодер [86] публикува следния итерационен метод (*метод на Шрьодер*):

$$z_{k+1} = z_k - \left(\frac{f'(z_k)}{f(z_k)} - \frac{f''(z_k)}{f'(z_k)} \right)^{-1}.$$

Този метод може да се разглежда като модификация на метода на Халей. Той има квадратична сходимост, както за прости така и за кратни нули, и не изисква предварително познаване на кратността на търсената нула. Методът на Шрьодер се споменава в монографиите на Хаусхолдер [35], Трауб [96], МакНаме [42] и Далкуйст и Бьорк [15], както и в статиите на Амат, Бускеер и Пласа [3], Бен-Израел [8], Хилберт [27, 28], Галантай и Хегедуш [25], Кума, Канва и Синг [39], Скаво и Туу [85], Йепма [101] и други.

През последните 50 години силно нараства интересът на математиците към изследването на сходимостта на итерационни методи за апроксимиране на нули на полиноми. През 1994 година Сендов, Андреев и Кюркчиев [87], а наскоро МакНаме [42] (2007 г.) и МакНаме и Пан [43] (2013 г.) публикуват монографии, които са посветени изцяло на този проблем. Подробен обзор на итерационните методи за нули на полиноми е направен в статията на Пан [55] от 1997 година.

Настоящият дисертационен труд е посветен на изследване сходимостта на итерационния метод на Халей за индивидуална и едновременна апроксимация на нули на полиноми, а също така и на методите на Халей за кратни нули и на Шрьодер за индивидуална апроксимация на кратни нули на полиноми с неизвестна кратност.

През 1891 година Вайерщрас [100] предлага качествено нов подход за апроксимиране на нули на полиноми. Той публикува първия метод за *едновременна апроксимация* на всичките нули на комплексен полином f (*метод на Вайерщрас*), който се дефинира с итерационната формула

$$x^{k+1} = x^k - W_f(x^k),$$

където *оператора на Вайерщрас* W_f се дефинира в $\mathbb{C}^n$ чрез

$$W_f(x) = (W_1(x), \ldots, W_n(x)) \quad \text{и} \quad W_i(x) = \frac{f(x_i)}{a_0 \prod_{j \neq i} (x_i - x_j)},$$

където a_0 е старшият коефициент на f. Също така Вайерщрас [100] доказва теорема за полулокална сходимост на този метод без да я формулира в явен вид. През 1960 година Дюран [20], през 1962 година Дочев [17] и по-късно, през 1966 година, Кернер [38] и Прешич [66] преоткриват метода на Вайерщрас, поради което той често се среща в литературата като: *метод на Вайерщрас-Дочев*, *метод на Дюран-Кернер* и др. Важно е да се отбележи обаче, че Дочев [17] доказва първата теорема за локална сходимост за методът на Вайерщрас. От 1980 година много автори ([65], [104], [105], [102], [99], [59], [57], [60], [63], [6], [31], [62]) получават теореми за полулокална сходимост на метода на Вайерщрас. През 2006 година Пройнов [67, 68] публикува теорема за полулокална сходимост на този метод, която обобщава и подобрява всички предходни резултати в това направление. През 2013 година Пройнов и Петкова [78], използвайки идеи на Вайерщрас [100] и Пройнов [70], получават теорема за полулокална сходимост на метода на Вайерщрас при съществено различни начални условия. Тази теорема може да се разглежда като количествен вариант на резултата на Вайерщрас.

Първата монография, посветена на методите за едновременна апроксимация на нули на полиноми, е публикувана през 1989 година от Петкович [56]. Други монографии на тази тема са публикувани от Сендов, Андреев и Кюркчиев [87, Гл. 4], Кюркчиев [40], МакНаме [42, Гл. 4], Петкович [58] и др.

През 2002 година Батра [7] разглежда класическия итерационен метод на Нютон като метод за едновременна апроксимация на нули на полиноми. Той въвежда итерационния метод $x^{k+1} = x^k - N_f(x^k)$, където *операторът на Нютон* N_f се дефинира в $\mathbb{C}^n$ чрез

$$N_f(x) = (N_1(x), \ldots, N_n(x)) \quad \text{и} \quad N_i(x) = \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\,.$$

Мотивирани от работата на Батра [7], в трета глава на настоящия дисертационен труд ние разглеждаме метода на Халей като метод за едновременна апроксимация на нули на полиноми.

Цел на дисертационния труд

Целта на настоящия дисертационен труд е да се решат четири основни задачи, които формулираме по-долу.

През 2009 година Пройнов [69] публикува обща теория за локална сходимост на итерационни процеси от типа на Пикар. Основна роля в тази теория играе понятието *функция на началните условия.* В тази статия ПРОЙНОВ [69, Параграф 4-5] изследва сходимостта на метода на Нютон за кратни нули относно две различни функции на началните условия.

Задача 1. *Да се изследва сходимостта на метода на Халей за кратни нули на полиноми, относно двете функции на началните условия на* ПРОЙНОВ *[69] и да се получат теореми за локална сходимост на този метод при различни начални условия.*

Задача 2. *Да се изследва сходимостта на итерационния метод на Шрьодер за апроксимиране на нули на полиноми с неизвестна кратност и да се получат теореми за локална сходимост при различни начални условия.*

През 2002 година БАТРА [7] получава теорема за полулокална сходимост на метода на Нютон като метод за едновременна апроксимация на всичките нули на даден полином $f \in \mathbb{C}[z]$. Тази статия на БАТРА [7] е основната мотивация за формулиране на следващите две задачи.

Задача 3. *Класическият метод на Халей да се разгледа като метод за едновременна апроксимация на нули на полиноми. Да се получат теореми за локална сходимост на итерационния метод на Халей за едновременна апроксимация на нули на полиноми при различни начални условия.*

Задача 4. *Да се получат теореми за полулокална сходимост (с компютърно проверяеми начални условия) на метода на Халей, като метод за едновременна апроксимация на нули на полиноми.*

Ще отбележим, че формулираните по-горе задачи се решават за полиноми с коефициенти в произволно нормирано поле $\mathbb{K}$.

Кратко изложение на получените резултати

Настоящият дисертационен труд е посветен на изследване сходимостта на итерационния метод на Халей за индивидуална и едновременна апроксимация на нули на полиноми.

Дисертационният труд се състои от увод, три глави, заключение и библиография. Заключението включва: резюме на получените резултати, списък на публикациите по дисертационния труд, апробация на получените резултати и декларация за оригиналност.

Ще изложим накратко съдържанието на дисертационния труд по глави и параграфи.

Глава 1. Локална сходимост за кратни нули на полиноми

В тази глава се изследва сходимостта на метода на Халей за кратни нули над произволно нормирано поле $\mathbb{K}$. Тя се състои от пет параграфа.

В Параграф 1.1 представлява въведение към Глава 1. Методът на Халей за кратни нули се формулира в следната форма:

$$z_{k+1} = \begin{cases} z_k - \left(\dfrac{m+1}{2m} \dfrac{f'(z_k)}{f(z_k)} - \dfrac{1}{2} \dfrac{f''(z_k)}{f'(z_k)} \right)^{-1} & \text{при } \ f(z_k) \neq 0, \\ z_k & \text{при } \ f(z_k) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

В Параграф 1.2 показваме, че всички итерационни функции на Халей, които се срещат в литературата, са рестрикции на една функция $\Phi \colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$.

Параграф 1.3 са формулирани някои теореми от общата теория за сходимост на итерационни процеси, публикувана през 2009–2010 година от Пройнов [69, 70]. В тази теория се изследва сходимостта на итерационни процеси от типа на Пикар

$$x_{k+1} = T x_k, \tag{2}$$

където $T \colon D \subset X \to X$ е итерационна функция в метрично пространство X. Основна роля в тази теория играе понятието *функция на началните условия* на оператора T.

Дефиниция 1.5 ([70]). Нека $T \colon D \subset X \to X$ е изображение на произволно множество X. Функция $E \colon D \to \mathbb{R}_+$ се нарича *функция на началните условия* на T (с контролна функция φ в интервал J), ако съществува функция $\varphi \colon J \to J$ такава, че $E(Tx) \le \varphi(E(x))$ за всяко $x \in D$, такова че $Tx \in D$ и $E(x) \in J$.

Сходимостта на итерационните процеси от типа на Пикар винаги се изследва относно предварително избрана функция на началните условия.

Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \ge 2$ и $\xi \in \mathbb{K}$ е нула на f. Ще приведем няколко примера за функции на началните условия, които се използват при доказване на теореми за сходимост на итерационни методи за индивидуална апроксимация на нули на полиноми:

- Функция $E \colon \mathbb{K} \to \mathbb{R}_+$, дефинирана с равенството

$$E(z) = \frac{|z - \xi|}{d}\,, \tag{3}$$

където с d означаваме разстоянието на ξ до най-близката от останалите нули на полинома f;

- Функция $E \colon \mathbb{K} \to \mathbb{R}_+$, дефинирана с равенството

$$E(z) = \frac{|z - \xi|}{\rho(z)}\,, \tag{4}$$

където с $\rho(z)$ означаваме разстоянието на z до най-близката нула на f, която е различна от ξ;

• Функция $E\colon \mathbb{K} \to \mathbb{R}_+$, дефинирана с равенството

$$E(z) = \frac{|z - \xi|}{r}\,, \tag{5}$$

където r е радиуса на отворен диск в $\mathbb{K}$ с център ξ, който не съдържа други нули на полинома f.

Преди да приведем други примери за функции на началните условия ще дефиниране три понятия.

Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$. Вектор $\xi \in \mathbb{K}^n$ се нарича *вектор-корен* на f, ако $f(z) = a_0 \prod_{i=1}^{n}(z - \xi_i)$ за всяко $z \in \mathbb{K}$, където $a_0 \in \mathbb{K}$.

Дефинираме функцията $d\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^n$ по следния начин:

$$d(x) = (d_1(x), \ldots, d_n(x)) \quad \text{и} \quad d_i(x) = \min_{j \neq i} |x_i - x_j|.$$

За всеки два вектора $x \in \mathbb{K}^n$ и $y \in \mathbb{R}^n$, като координатите на y са различни от нула, с $\dfrac{x}{y}$ ще означаваме вектор в $\mathbb{R}^n$, дефиниран с равенството

$$\frac{x}{y} = \left(\frac{|x_1|}{y_1}, \cdots, \frac{|x_n|}{y_n}\right).$$

Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$ и $\xi \in \mathbb{K}^n$ е вектор-корен на f. Следващите три примера за функции на началните условия се използват при методи за едновременна апроксимация на нули на полиноми.

• Функция $E\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$, дефинирана с равенството

$$E(x) = \left\| \frac{x - \xi}{d(\xi)} \right\|_p . \tag{6}$$

• Функция $E\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$, дефинирана с равенството

$$E(x) = \left\| \frac{x - \xi}{d(x)} \right\|_p . \tag{7}$$

• Функция $E\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$, дефинирана с равенството

$$E(x) = \left\| \frac{W_f(x)}{d(x)} \right\|_p . \tag{8}$$

Всички формулирани по-горе функции на началните условия се използват в настоящия дисертационен труд за доказване на основните резултати.

През 2012 и 2013 година Чолаков [12, 13] доказва теореми за локална сходимост на итерационен метод от типа на Чебишов, като използва функциите (6) и (7). През 2013 година Пройнов и Петкова [77, 79] получават теореми за локална сходимост на метода на Вайерщрас и двустъпковия метод на Вайерщрас, използвайки функцията (6). През 2013 година Пройнов и Петкова [78] получават нов тип теорема за полулокална сходимост на метода на Вайерщрас, като използват функция на началните условия $E\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$, дефинирана чрез

$$E(x) = \|\sigma(x) - C\|_\infty, \tag{9}$$

където $\sigma\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ е *операторът на Виет*, дефиниран с равенството

$$\sigma_i(x) = (-1)^i \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_i \le n} x_{j_1} \ldots x_{j_i} \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

а $C \in \mathbb{K}^n$ е векторът от коефициентите на f.

В Параграф 1.4 се изследва сходимостта на метода на Халей за кратни нули относно функцията на началните условия $E\colon \mathbb{K} \to \mathbb{R}_+$, дефинирана чрез (3).

През 1962 година Дочев [18] доказва, че ако един полином $f \in \mathbb{R}[z]$ има само реални и прости нули, ξ е нула на f и $z_0 \in \mathbb{R}$ удовлетворява условието $E(z_0) \le q/[(q+1)n - 1]$ при някое $0 < q < 1$, то итерационната редица на Нютон е сходяща квадратично към ξ с оценка на грешката $|z_k - \xi| \le q^{2^k - 1} |z_0 - \xi|$ за всяко $k \ge 0$.

През 2009 година Пройнов [69, Теорема 4.5] подобрява резултата на Дочев [18] като доказва, че ако един полином $f \in \mathbb{C}[z]$ е от степен $n \ge 2$, ξ е нула на f с кратност m и началното приближение $z_0 \in \mathbb{C}$ удовлетворява условието

$$E(z_0) \le \frac{m}{2n - m}\,,$$

където функцията $E\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$ е дефинирана с (3), то итерационната редица на Нютон

$$z_{k+1} = \begin{cases} z_k - m\,\dfrac{f(z_k)}{f'(z_k)} & \text{при } \; f'(z_k) \ne 0, \\ z_k & \text{при } \; f'(z_k) = 0 \end{cases} \tag{10}$$

е сходяща квадратично към ξ с оценка на грешката

$$|z_k - \xi| \le \lambda^{2^k - 1} |z_0 - \xi| \quad \text{ за всяко } \; k \ge 0,$$

където $\lambda = \phi(E(z_0))$ и реалната функция ϕ се дефинира с равенството

$$\phi(t) = (n - m)t/(m - nt).$$

Основната теорема в този параграф е аналог на този резултат на Пройнов [69].

Теорема 1.6. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, който се разлага на линейни множители над $\mathbb{K}$ и нека $\xi \in \mathbb{K}$ е нула на f с кратност m. Избираме начално приближение $z_0 \in \mathbb{K}$ така, че да удовлетворява условието*

$$E(z_0) < R = \frac{2m}{n + m + \sqrt{(n-m)(5n-m)}}, \tag{11}$$

където функцията $E\colon \mathbb{K} \to \mathbb{R}_+$ се дефинира чрез (3). Тогава са в сила следните твърдения:

(i) *Итерационната редица на Халей (1) е сходяща кубично към ξ.*

(ii) *В сила е следната априори оценка на грешката:*

$$|z_k - \xi| \leq \lambda^{(3^k-1)/2}\, |z_0 - \xi| \quad \text{за всяко } k \geq 0, \tag{12}$$

където $\lambda = \phi(E(z_0))$ и ϕ е реална функция, дефинирана с

$$\phi(t) = \frac{n(n-m)t^2}{2m(1-t)(m-nt) - n(n-m)t^2}.$$

(iii) *В сила е следната апостериори оценка на грешката:*

$$|z_{k+1} - \xi| < C\, |z_k - \xi|^3 \quad \text{за всяко } k \geq 0, \tag{13}$$

където $C = 1/(Rd)^2$.

Ще отбележим, че при $m < n/2$, тази теорема дава по-голяма област на сходимост за метода на Халей от резултата на Пройнов [69] за метода на Нютон.

Първите две части на формулираната по-горе теорема могат да се формулират в следната еквивалентна форма:

Теорема 1.7. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, който се разлага на линейни множители над $\mathbb{K}$ и нека $\xi \in \mathbb{K}$ е нула на f с кратност m. Нека q е такова, че $0 < q < 1$. Избираме $z_0 \in \mathbb{K}$ така, че да удовлетворява началното условие*

$$E(z_0) \leq \frac{2m}{n + m + \sqrt{(n-m)((3+2/q)n - m)}},$$

където функцията $E\colon \mathbb{K} \to \mathbb{R}_+$ *се дефинира чрез* (3)*. Тогава итерационната редица на Халей* (1) *е сходяща кубично към* ξ *с оценка на грешката*

$$|z_k - \xi| \le q^{(3^k-1)/2}\, |z_0 - \xi| \quad \textit{за всяко } k \ge 0.$$

През 1986 година Смейл [90] публикува своята знаменита статия, в която доказва теорема за полулокална сходимост (известна като α-теорема) и теорема за локална сходимост (известна като γ-теорема) за метода на Нютон. В тази своя статия той въвежда понятията “приближена нула от първи вид” и “приближена нула от втори вид”. В съответствие с последната дефиниция $z_0 \in \mathbb{K}$ е *приближена нула от втори вид* за един итерационен метод от трети ред на сходимост, ако

$$|z_k - \xi| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{(3^k-1)/2} |z_0 - \xi| \quad \text{за всяко } k \ge 0.$$

В светлината на тази концепция на Смейл, от горната теорема получаваме следното следствие:

Следствие 1.1. *Нека* $f \in \mathbb{K}[z]$ *е полином от степен* $n \ge 2$*, който се разлага на линейни множители над* $\mathbb{K}$ *и нека* $\xi \in \mathbb{K}$ *е нула на* f *с кратност* m*. Избираме начално приближение* $z_0 \in \mathbb{K}$ *така, че да удовлетворява началното условие*

$$E(z_0) \le \frac{2m}{n + m + \sqrt{(n-m)(7n-m)}}\,,$$

където функцията $E\colon \mathbb{K} \to \mathbb{R}_+$ *се дефинира чрез* (3)*. Тогава итерационната редица на Халей* (1) *е сходяща кубично към* ξ *с оценка на грешката*

$$|z_k - \xi| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{(3^k-1)/2} |z_0 - \xi| \quad \textit{за всяко } k \ge 0,$$

т.е. $z_0 \in \mathbb{K}$ *е приближена нула от втори вид на* f *за метода на Халей* (1)*.*

В Параграф 1.5 се изследва сходимостта на метода на Халей за кратни нули относно функция на началните условия $E\colon \mathbb{K} \to \mathbb{R}_+$, дефинирана с (4).

През 1998 година Тили [94], подобрявайки резултат на Ренегар [82] доказва, че ако един полином $f \in \mathbb{C}[z]$ има само прости нули и началното приближение $z_0 \in \mathbb{C}$ удовлетворява условието $E(z_0) \le 1/(3n-3)$, тогава итерационната редица на Нютон е сходяща квадратично към нула ξ на полинома f още от първата итерация. През 2009 година Пройнов [69, Теорема 5.3] доказва, че ако един полином $f \in \mathbb{C}[z]$ е от степен $n \geq 2$, ξ е нула на f с кратност m и $z_0 \in \mathbb{C}$ удовлетворява началното условие

$$E(z_0) \leq \frac{m}{2n - m},$$

където функцията $E \colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$ се дефинира чрез (4), то итерационната редица на Нютон (10) е сходяща към ξ с оценка на грешката

$$|z_k - \xi| \leq \theta^k \lambda^{2^k - 1} |z_0 - \xi| \quad \text{за всяко } k \geq 0,$$

където $\lambda = \phi(E(z_0))$, $\theta = \psi(E(z_0))$ и реалните функции ϕ и ψ са дефинирани с

$$\phi(t) = (n - m)t/(m - nt) \quad \text{и} \quad \psi(t) = (m - nt)/(m - (n - m)t).$$

Този резултат на Пройнов [69] дава по-голяма област на сходимост от теоремата на Тили [94].

Основният резултат в този параграф е аналог на тази теорема на Пройнов [69, Теорема 5.3]. В случая $m < n$ следващата теорема дава по-голяма област на сходимост за метода на Халей (1), отколкото резултата на Пройнов [69, Теорема 5.3] за метода на Нютон (10).

Теорема 1.11. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, който се разлага на линейни множители над $\mathbb{K}$ и $\xi \in \mathbb{K}$ е нула на f с кратност m. Нека също началното приближение $z_0 \in \mathbb{K}$ е такова, че*

$$E(z_0) \leq R = \frac{2m}{n + \sqrt{n^2 + 4(n - m)^2}}, \tag{14}$$

където функцията E се дефинира чрез (4). Тогава итерационната редица на Халей (1) е сходяща към ξ с оценка на грешката

$$|z_k - \xi| \leq \theta^k \lambda^{(3^k - 1)/2} |z_0 - \xi| \quad \text{за всяко } k \geq 0, \tag{15}$$

където $\lambda = \phi(E(z_0)), \theta = \psi(E(z_0))$ и реалните функции ϕ и ψ са дефинирани с

$$\phi(t) = \frac{n(n - m)t^2}{2m^2 - 2mnt - (n - m)(n - 2m)t^2}$$

и

$$\psi(t) = \frac{2m^2 - 2mnt - (n - m)(n - 2m)t^2}{2m^2 - 2m(n - m)t - n(n - m)t^2}.$$

Глава 2. Локална сходимост за нули на полиноми с неизвестни кратности

Втора глава се състои от три параграфа и е посветена на изследване сходимостта на метода на Шрьодер за нули на полиноми с неизвестни кратности над произволно нормирано поле $\mathbb{K}$.

Параграф 2.1 представлява въведение в проблема за изследване сходимостта на метода на Шрьодер за нули на полиноми с неизвестна кратност. Записваме метода на Шрьодер в следната форма:

$$z_{k+1} = \begin{cases} z_k - \left(\dfrac{f'(z_k)}{f(z_k)} - \dfrac{f''(z_k)}{f'(z_k)} \right)^{-1} & \text{при } f(z_k) \neq 0, \\ z_k & \text{при } f(z_k) = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Известно е, че този метод за разлика от метода на Халей за кратни нули, е от втори ред на сходимост, но не изисква предварително познаване на кратностите на нулите.

В Параграф 2.2 са получени четири леми, с помощта на които са доказани основните резултати в тази глава. В този параграф сходимостта на итерационния метод на Шрьодер се изследва относно функция на началните условия E, дефинирана с (4).

В Параграф 2.3 са получени два резултата за сходимост на метода на Шрьодер. Ще формулираме само първия от тези резултати.

Теорема 2.1. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, който се разлага на линейни множители над $\mathbb{K}$ и ξ е единствена нула на f в отворения диск с център $z_0 \in \mathbb{K}$ и радиус $r > 0$. Нека е изпълнено началното условие*

$$|z_0 - \xi| < \frac{2\,r}{n + \sqrt{n^2 + 12n - 12}}. \tag{17}$$

Тогава итерационната редица на Шрьодер (16) *е сходяща към ξ със следната априори оценка на грешката:*

$$|z_k - \xi| \leq \lambda^{2^k - 1}\, |z_0 - \xi| \quad \textit{за всяко } k \geq 0, \tag{18}$$

където $\lambda = \phi(|z_0 - \xi|/r)$ и ϕ е реална функция, дефинирана с равенството

$$\phi(t) = \frac{(n-1)(t+1)t}{1 - t - 2(n-1)t^2}\,. \tag{19}$$

Тази теорема може да се формулира и в следната еквивалентна форма:

Теорема 2.2. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, който се разлага на линейни множители в $\mathbb{K}$ и ξ е единствена нула на f в отворен диск с център z_0 и радиус $r > 0$. Нека $0 < q < 1$ и*

$$|z_0 - \xi| \leq \frac{2\,r}{\dfrac{n-1}{q} + 1 + \sqrt{\left(\dfrac{n-1}{q} + 3\right)^2 + 8(n-2)}}\,.$$

Тогава итерационната редица на Шрьодер (16) *е сходяща към ξ с оценка на грешката*

$$|z_k - \xi| \leq q^{2^k - 1}\,|z_0 - \xi| \quad \textit{за всяко } \; k \geq 0.$$

От Теорема 2.1 получаваме следния резултат от типа на Смейл [90]:

Следствие 2.1. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, който се разлага на линейни множители в $\mathbb{K}$ и ξ е единствена нула на f в отворен диск с център z_0 и радиус $r > 0$. Нека е изпълнено началното условие*

$$|z_0 - \xi| \leq \frac{2\,r}{2n - 1 + \sqrt{4n^2 + 12n - 15}}\,.$$

Тогава итерационната редица на Шрьодер (16) *удовлетворява оценката*

$$|z_k - \xi| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k - 1} |z_0 - \xi| \quad \textit{за всяко } \; k \geq 0,$$

т.е. z_0 е приближена нула от втори вид на f за метода на Шрьодер (16).

Глава 3. Едновременна апроксимация на нули на полиноми

Трета глава се състои от шест параграфа и е посветена на изследването сходимостта на метода на Халей, като метод за едновременна апроксимация на всичките нули на даден полином $f \in \mathbb{K}[z]$. За целта се дефинира итерационната редица на Халей в $\mathbb{K}^n$ по следния начин:

$$x^{k+1} = x^k - H_f(x^k), \tag{20}$$

където *оператора на Халей H_f* се дефинира в $\mathbb{K}^n$ чрез

$$H_f(x) = (H_1(x), \ldots, H_n(x)) \quad \text{и} \quad H_i(x) = \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \left(1 - \frac{1}{2}\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\frac{f''(x_i)}{f'(x_i)}\right)^{-1}.$$

Векторното пространство $\mathbb{K}^n$ е снабдено с p-норма $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$, където $1 \le p \le \infty$.

В Параграф 3.1 е направено кратко въведение в проблема за едновременна апроксимация на нули полиноми. Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \ge 2$. Методът на Вайерщрас [100] се дефинира в $\mathbb{K}^n$ чрез итерацията

$$x^{k+1} = x^k - W_f(x^k), \tag{21}$$

където *операторът на Вайерщрас* W_f се дефинира в $\mathbb{K}^n$ чрез

$$W_f(x) = (W_1(x), \ldots, W_n(x)) \quad \text{и} \quad W_i(x) = \frac{f(x_i)}{a_0 \prod_{j \ne i}(x_i - x_j)}, \tag{22}$$

където a_0 е старшият коефициент на полинома f. Както споменахме в увода, този метод се среща в литературата още като *метод на Вайерщрас-Дочев*, *метод на Дюран-Кернер* и др. През 1962 година Дочев [18] получава първата теорема за локална сходимост на метода на Вайерщрас. Той доказва, че ако f притежава n прости нули в $\mathbb{C}$ и началното приближение $x^0 \in \mathbb{C}^n$ е достатъчно близко до вектор-корен ξ на f, то итерационната редица на Вайерщрас (21) е сходяща квадратично към ξ.

През 2002 година Батра [7] доказва, че метода на Нютон, като метод за едновременна апроксимация на всичките нули на полиноми $f \in \mathbb{C}$, е сходящ към вектор-корен $\xi \in \mathbb{C}^n$ на f при начално условие:

$$\|N_f(x^0)\|_\infty \le \frac{\delta(x^0)}{8n},$$

където $x^0 \in \mathbb{C}^n$, а функцията $\delta\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ се дефинира чрез

$$\delta(x) = \min_{i \ne j} |x_i - x_j|.$$

В Параграф 3.2 са дадени някои основни означения и дефиниции във векторното пространство $\mathbb{K}^n$.

В Параграф 3.3 се изследва сходимостта на метода на Халей като метод за едновременна апроксимация на нули на полиноми, относно функция на началните условия $E\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$, дефинирана с (6). Основен резултат в този параграф е следната теорема:

Теорема 3.1. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \ge 2$, който има n прости нули в $\mathbb{K}$ и $\xi \in \mathbb{K}^n$ е вектор-корен на f. Нека $x^0 \in \mathbb{K}^n$ е вектор, удовлетворяващ началното условие*

$$E(x^0) < R = \frac{2}{n + 1 + \sqrt{(n-1)(5n-1)}},$$

където функцията $E\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$ *се дефинира чрез* (6)*. Тогава итерационната редица на Халей* (20) *е сходяща кубично към* ξ *с оценка на грешката*

$$\|x^k - \xi\|_\infty \le \lambda^{(3^k-1)/2} \, \|x^0 - \xi\|_\infty \quad \textit{за всяко} \quad k \ge 0,$$

където $\lambda = \beta(E(x^0))$*, а* β *е реална функция, дефинирана с*

$$\beta(t) = \frac{n(n-1)t^2}{2(1-t)(1-nt) - n(n-1)t^2} \, .$$

Ако полинома f притежава n прости нули в $\mathbb{K}$, то със $\operatorname{sep}(f)$ ще означаваме *числото на отделимост* на f, което се дефинира като минималното разстояние между нулите $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ на f, т.е.

$$\operatorname{sep}(f) = \min_{i \ne j} |\xi_i - \xi_j|.$$

Следващата теорема за сходимост на метода на Халей (20) е следствие от последната теорема.

Следствие 3.1. *Нека* $f \in \mathbb{K}[z]$ *е полином от степен* $n \ge 2$*, който притежава* n *прости нули в* $\mathbb{K}$ *и* $\xi \in \mathbb{K}^n$ *е вектор-корен на* f*. Нека* $x^0 \in \mathbb{K}^n$ *е вектор, удовлетворяващ началното условие*

$$\|x^0 - \xi\|_\infty < \frac{2 \operatorname{sep}(f)}{n + 1 + \sqrt{(n-1)(5n-1)}} \, , \tag{23}$$

където функцията $E\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$ *се дефинира чрез* (6)*. Тогава итерационната редица на Халей* (20) *е сходяща кубично към* ξ*.*

За първи път начално условие от вида (23) е формулирано през 1962 година от Дочев [18] (виж също Дочев и Бърнев [19]). Той доказва, че ако $f \in \mathbb{C}[z]$ има само прости нули, тогава итерационната редица на Вайерщрас (21) е сходяща при следното начално условие:

$$\|x^0 - \xi\|_\infty < \frac{\sqrt[n-1]{2} - 1}{2 \sqrt[n-1]{2} - 1} \operatorname{sep}(f).$$

В Параграф 3.4 се изследва сходимостта на метода на Халей като метод за едновременна апроксимация на нули на полиноми относно функция на началните условия $E\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$, дефинирана с (7). Основен резултата в този параграф е следната теорема:

Теорема 3.2. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, който има n прости нули в $\mathbb{K}$ и $\xi \in \mathbb{K}^n$ е вектор-корен на f. Нека $1 \leq p \leq \infty$ и $x^0 \in \mathbb{K}^n$ е вектор с различни координати, удовлетворяващ началното условие*

$$E(x^0) < 1/n \quad \text{и} \quad h(E(x^0)) \geq 0,$$

където функцията $E\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$ се дефинира с (7), а реалната функция h е дефинирана с

$$h(t) = (1-t)(1-nt)(1-2^{1/q}t) - n(n-1)t^2, \quad (1/q + 1/p = 1).$$

Тогава итерационната редица на Халей (20) е сходяща към ξ с оценка на грешката

$$\|x^k - \xi\|_p \leq \theta^k \lambda^{(3^k-1)/2} \|x^0 - \xi\|_p \quad \text{за всяко} \quad k \geq 0, \tag{24}$$

където $\lambda = \phi(E(x^0))$, $\theta = \psi(E(x^0))$, а реалните функции ϕ и ψ са дефинирани с

$$\phi(t) = \frac{n(n-1)t^2}{2(1-t)(1-nt)(1-2^{1/q}t) - n(n-1)t^2}$$

и

$$\psi(t) = \frac{2(1-t)(1-nt)(1-2^{1/q}t) - n(n-1)t^2}{2(1-t)(1-nt) - n(n-1)t^2}\,.$$

Като следствие от тази теорема се получава следния резултат.

Следствие 3.3. *Нека $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$, който има n прости нули в $\mathbb{K}$ и $\xi \in \mathbb{K}^n$ е вектор-корен на f. Нека $x^0 \in \mathbb{K}^n$ е вектор с различни координати, удовлетворяващ началното условие*

$$\|x^0 - \xi\|_\infty \leq \frac{\delta(x^0)}{2n}\,, \tag{25}$$

където $\delta(x) = \min_{i \neq j} |x_i - x_j|$. Тогава итерацията на Халей (20) е сходяща кубично към ξ с оценка на грешката (24).

Ще отбележим, че за първи път начално условие от вида (25) е получено през 1991 година от Ванг и Чао [98]. Те доказват, че ако $f \in \mathbb{C}[z]$ има само прости нули, тогава итерационната редица на Вайерщрас (21) е сходяща към вектор-корен $\xi \in \mathbb{C}^n$ на f при следното начално условие:

$$\|x^0 - \xi\|_\infty < \frac{\sqrt[n-1]{2} - 1}{4\sqrt[n-1]{2} - 3}\,\delta(x^0).$$

Освен това Ванг и Чао [98] доказват, че от последното начално условие може да се конструират компютърно проверяеми начални условия за метода на Вайерщрас.

В Параграф 3.5 е доказана теорема за сходимост на метода на Халей (20) с компютърно проверяеми начални условия. Доказателството се базира на една теорема на Пройнов [71], която дава зависимост между началните условия в теоремите за локална и началните условия в теоремите полулокална сходимост на методи за едновременна апроксимация на нули на полиноми.

Основният резултат в този параграф е следната теорема:

Теорема 3.4. *Нека $\mathbb{K}$ е алгебрично затворено нормирано поле и $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$. Нека $x^0 \in \mathbb{K}^n$ е вектор с различни координати, удовлетворяващ началното условие*

$$\left\| \frac{W_f(x^0)}{d(x^0)} \right\|_\infty < \frac{2}{3n + 5 + \sqrt{(n-1)(5n-1)}} \,. \tag{26}$$

Тогава са в сила следните твърдения:

(i) *Полиномът f има само прости нули в $\mathbb{K}$.*

(ii) *Итерацията на Халей (20) е сходяща кубично към вектор-корен ξ на полинома f.*

Като следствие от тази теорема получаваме следният резултат:

Следствие 3.4. *Нека $\mathbb{K}$ е алгебрично затворено нормирано поле и $f \in \mathbb{K}[z]$ е полином от степен $n \geq 2$. Нека $x^0 \in \mathbb{K}^n$ е вектор с различни координати, удовлетворяващ началното условие*

$$\left\| W_f(x^0) \right\|_\infty < \frac{2\,\delta(x^0)}{3n + 5 + \sqrt{(n-1)(5n-1)}} \,. \tag{27}$$

Тогава са в сила следните твърдения:

(i) *Полиномът f има само прости нули в $\mathbb{K}$.*

(ii) *Итерацията на Халей (20) е сходяща кубично към вектор-корен ξ на полинома f.*

В математическата литература има много теореми за сходимост на итерационни методи за едновременна апроксимация на нули на полиноми с начални условия от вида (27) (виж, например, последната монография на

Петкович [58] и литературата посочена в нея). От друга страна се срещат само няколко теореми за сходимост при начални условия от вида (26). За метода на Вайерщрас, такива теореми са публикувани през 2000 и 2006 година съответно от Хан [31] и Пройнов [67]. Теореми за сходимост от този вид за метода на Ерлих [21] и метода на Нурейн [49] са публикувани през 2006 година от Пройнов [68].

В Параграф 3.6 на тази глава са направени числени експерименти, в които е приложена получената теорема за полулокална сходимост, за компютърно доказване на кубичната сходимост на метода на Халей (20).

Заключение

Резюме на получените резултати

По мнение на автора основните приноси в дисертационния труд са:

1. Получени са две нови теореми за локална сходимост на метода на Халей за кратни нули на полиноми. И двете теореми включват оценки на грешката. Резултатите са нови дори и в случая на проста нула.

2. Получени са две нови теореми за локална сходимост с оценки на грешката за метода на Шрьодер (вариант на метода на Халей) за нули на полиноми с неизвестни кратности.

3. Получени са достатъчни условия, при които началното приближение се явява приближена нула от втори вид (в смисъл на Смейл) за методите на Халей и на Шрьодер.

4. За пръв път класическият метод на Халей се изследва, като метод за едновременна апроксимация на всичките нули на даден полином.

5. Получени са две нови теореми за локална сходимост с оценки на грешката за метода на Халей за едновременна апроксимация на нули на полиноми.

6. Получена е теорема за сходимост на метода на Халей за едновременна апроксимация на нули на полиноми с компютърно проверяеми начални условия. Дадени са числени примери, в които този резултат се прилага за компютърно доказване на кубична сходимост на метода при даден полином и дадено начално приближение.

7. Получено е достатъчно условие, при което всичките нули на даден полином са прости.

8. Всичките резултати за сходимост на метода на Халей са получени за полиноми с коефициенти от произволно нормирано поле.

Списък на публикациите по дисертационния труд

Основните резултати от дисертационния труд са публикувани в следните три научни статии:

1. Petko D. Proinov, Stoil I. Ivanov, A theorem for local convergence of Halley's method for finding polynomial zeros simultaneously, Scientific Researches of the Union of Scientists in Bulgaria–Plovdiv, Ser. B, 14 (2012) 173–176, ISSN: 1311–9192.

2. Petko D. Proinov, Stoil I. Ivanov, On the convergence of Schröder's method for polynomial zeros of unknown multiplicity, Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences 66 (2013), No. 8, 1073–1080, ISSN: 1310–1331. http://www.proceedings.bas.bg **(Impact factor: 0.211)**

3. Petko D. Proinov, Stoil I. Ivanov, On the convergence of Halley's method for multiple polynomial zeros, Mediterranean Journal of Mathematics (2014), http://dx.doi.org/10.1007/s00009-014-0400-7, ISSN: 1660-5454. **(Impact factor: 0.641)**

Връзките между приносите, целите, задачите, мястото на описание в дисертационния труд и направените публикации по темата са следните:

Принос	Цел	Задачи	Параграф	Публикации
1	1	1	1.4, 1.5	3
2	1	2	2.3	2
3	1	1, 2	1.4, 2.3	2, 3
4	1	3	3.1 - 3.4	1
5	1	3	3.1 - 3.4	1
6	1	4	3.5, 3.6	
7	1	4	3.5	
8	1	1-4	1.4, 1.5, 2.3, 3.3, 3.4, 3.5	2, 3

Апробация на получените резултати

А) Доклади на семинари и конференции

- Теорема за локална сходимост на метода на Халей за едновременно намиране нули на полиноми, Научна сесия на съюза на учените в България "Дни на науката 2011", Пловдив, 10-11 ноември 2011.
- Метод на Халей – Метод за едновременна апроксимация на нули на полиноми, научен семинар "Итерационни методи", Пловдивски университет "Паисий Хилендарски", 9 март 2012.
http://fmi-plovdiv.org/GetResource?id=1630
- Сходимост на метода на Халей за кратни нули на полиноми, Юбилейна национална научна конференция с международно участие "Традиции, посоки, предизвикателства", Смолян, 19-21 октомври 2012.
http://old.uni-plovdiv.bg/smolyan/GetResource?id=3214
- Сходимост на метода на Шрьодер за нули на полиноми с неизвестни кратности, Научен семинар "Итерационни методи и неподвижни точки", Пловдивски университет "Паисий Хилендарски", 31 май 2013.
http://fmi-plovdiv.org/GetResource?id=1429

Б) Участие в проекти

- Научен проект НИ11-ФМИ-004 към НПД на ПУ на тема: "Разработка и приложение на иновативни ИКТ за провеждане на качествени конкурентноспособни научни изследвания и цялостно осъвременяване процеса на обучение във ФМИ", 2011-2012.
- Научен проект НИ13-ФМИ-002 към НПД на ПУ на тема: "Интеграция на ИТ в научните изследвания по математика, информатика и педагогика на обучението", 2013-2014.

Декларация за оригиналност

от **Стоил Иванов Иванов**,
редовен докторант към катедра “Математически анализ”
при Факултет по математика и информатика
на Пловдивски университет “Паисий Хилендарски”

Във връзка с провеждането на процедура за придобиване на образователната и научна степен “доктор” в Пловдивски университет “Паисий Хилендарски” и защита на представения от мен дисертационен труд, декларирам:

Резултатите и приносите на проведеното дисертационно изследване, представени в дисертационния ми труд на тема “Сходимост на итерационния метод на Халей за индивидуална и едновременна апроксимация на нули на полиноми”, са оригинални и не са заимствани от изследвания и публикации, в които нямам участие.

10.01.2014 г. ДЕКЛАРАТОР:
гр.Пловдив /Стоил Иванов Иванов/

Библиография

[1] Aberth O., Iteration Methods for Finding all Zeros of a Polynomial Simultaneously, Math. Comp. 27 (1973) 339–344.

[2] Alefeld G., On the convergence of Halley's method, Amer. Math. Monthly 88 (1981) 530–536.

[3] Amat S., S. Busquier, S. Plaza, Review of some iterative root-finding methods from a dynamical point of view, Scientia, Ser. A 10 (2004) 3–35.

[4] Bailey D.F., A historical survey of solution by functional iteration, Math. Magazine 62 (1989) 155–166.

[5] Bateman H., Halley's method for solving equations, Amer. Math. Monthly 45 (1938) 11–17.

[6] Batra P., Improvement of a convergence condition for Durand-Kerner iteration, J. Comput. Appl. Math. 96 (1998) 117–125.

[7] Batra P., Simultaneous point estimates for Newton's method, BIT 42 (2002) 467–476.

[8] Ben-Israel A., Newton's method with modified functions, In: Contemporary Mathematics, Vol. 204, Amer. Math. Soc., Providence, 1997, 39–50.

[9] Bi W., H. Ren, Q. Wu, Convergence of the modified Halley's method for multiple zeros under Hölder continuous derivative, Numerical Algorithms 58 (2011) 497–512.

[10] Blum. L., F. Cucker, M. Shub, S. Smale, Compexity and Real Computation, Springer, New York, 1998.

[11] Brown G.H., On Halley's variation of Newton's method, Amer. Math. Monthly 84 (1977) 726–728.

[12] Cholakov S.I., Local convergence of Chebyshev-type method for finding polynomial zeros simultaneously, Scientific Researches of the Union of Scientists in Bulgaria–Plovdiv, Ser. B, 14 (2012) 198–202.

[13] Cholakov S.I., Local convergence of Chebyshev-like method for simultaneous finding polynomial zeros, C. R. Bulg. Acad. Sci. 66 (2013) 1081–1090.

[14] Chun C., B. Neta, A third-order modification of Newton's method for multiple roots, Appl. Math. Comput. 211 (2009) 474–479.

[15] Dahlquist G., Å. Björck Numerical Methods in Scientific Computing: Vol. 1, SIAM, Philadelphia, 2008.

[16] Davies M., B. Dawson, On the global convergence of Halley's iteration formula. Numer. Math. 24 (1975), 133–135.

[17] Dochev K., Modified Newton's method for simultaneous computation of all the roots of a given algebraic equation, Phys. Math. J. Bulg. Acad. Sci. 5 (1962) 136–139 (in Bulgarian).

[18] Dočev K., Über Newtonsche Iterationen, C. R. Acad. Bulg. Sci. 36 (1962) 695–701.

[19] Dochev K., P. Byrnev, Certain modifications of Newton's method for the approximate solution of algebraic equations, USSR Comput. Math. Math. Phys. 4 (1964) 174–182.

[20] Durand E., Solutions Numériques des Equations Algébriques: Vol. 1, Masson et Compagnie, Paris, 1960.

[21] Ehrlich L.W., A modified Newton method fol polynomials Comm. ACM 10 (1967), 107–108.

[22] Ezquerro J., J. Gutiérrez, M. Hernández, M. Salanova, Halley's method: perhaps the most rediscovered method in the world, in: Margarita Mathematica, Univ. La Rioja, Logroño, 2001, 205–220 (in Spanish).

[23] Ezquerro J.A., M.A. Hernández, On the R-order of the Halley method, J. Math. Anal. Appl. 303 (2005) 591–601.

[24] Frame J.S., A variation of Newton's method, Amer. Math. Monthly 51 (1944) 36–38.

[25] Galántai A., C.J. Hegedűs. A study of accelerated Newton methods for multiple polynomial roots, Numerical Algorithms 54 (2010) 219–243.

[26] Gander W., On Halley's iteration method, Amer. Math. Monthly 92 (1985) 131–134.

[27] Gilbert W.J., Newton's method for multiple roots, Comput. and Graph. 18 (1994) 227–229.

[28] Gilbert W.J., Generalizations of Newton's method, Fractals 9 (2001) 251–262.

[29] Halley E., A new, exact, and easy method of finding the roots of any equations generally, and that without any previous reduction, Philos. Trans. Roy. Soc. London 18 (1694) 136–148 (in Latin).

[30] Hamilton M.J., A Type of Variation on Newton's Method, Amer. Math. Monthly 57 (1950) 517–522.

[31] Han D., The convergence of the Durand-Kerner method for simultaneously finding all zeros of a polynomial. J. Comput. Math. 18 (2000) 567–570.

[32] Hansen E., M. Patrick, A Family of Root Finding Methods, Numer. Math. 27 (1977) 257–269.

[33] Hernandez M.A., A note on Halley's method, Numer. Math. 59 (1991) 273–276.

[34] Homeier H.H.H., On Newton-type methods for multiple roots with cubic convergence, J. Comput. Appl. Math. 231 (2009) 249–254.

[35] Householder A.S., The Numerical Treatment of a Single Nonlinear Equation, McGraw-Hill, New York, 1970.

[36] Kalantari B., I. Kalantari, R. Zaare-Nahandi, A basic family of iteration functions for polynomial root finding and its characterizations, J. Comput. Appl. Math. 80 (1997) 209–226.

[37] Kanno S., N. Kjurkchiev, T. Yamamoto, On the convergence of the Halley method for nonlinear equation of one variable, Japan J. Indust. Appl. Math. 13 (1996) 267–288.

[38] Kerner I., Ein Gesamtschrittverfahren zur Berechnung von Nullstellen von Polynomen, Numer. Math. 8 (1966) 290–294.

[39] Kumar S., V. Kanwar, S. Singh, On some modified families of multipoint iterative methods for multiple roots of nonlinear equations, Appl. Math. Comput. 218 (2012) 7382–7394.

[40] Kyurkchiev N.V., Initial Approximations and Root Finding Methods, Mathematical Research, Vol. 104, Wiley, Berlin, 1998.

[41] Li S., H. Li, L. Cheng, Some second-derivative-free variants of Halley's method for multiple roots, Appl. Math. Comput. 215 (2009) 2192–2198.

[42] McNamee J.M., Numerical methods for roots of polynomials – Part I, Studies in Computational Mathematics, Vol. 14, Elsevier, Amsterdam, 2007.

[43] McNamee J.M., V. Pan, Numerical methods for roots of poly-nomials – Part II, Studies in Computational Mathematics, Vol. 16, Elsevier, Amsterdam, 2013.

[44] Melman A., Geometry and Convergence of Euler's and Halley's Methods, SIAM Review 39 (1997) 728–735.

[45] Nedić J., On convergence of Börsch-Supan's method with Weierstrass' corrections, Novi Sad J. Math. 31 (2001), No. 1, 100–111.

[46] Nedzhibov G.H., M.G. Petkov, On a family of iterative methods for simultaneous extraction of all roots of algebraic polynomial, Appl. Math. Comput. 162 (2005) 427–433.

[47] Neta B., New third order nonlinear solvers for multiple roots, Appl. Math. Comput. 202 (2008) 162–170.

[48] Neta B., M. Scott, C. Chun, Basin attractors for various methods for multiple roots, Appl. Math. Comput. 218 (2012) 5043–5066.

[49] Nourein A.W.M., An improvement on Noureins method for the simultaneous determination of the zeros of a polynomial (an algorithm), J. Comput. Appl. Math. 3 (1977) 109-–110.

[50] Obreshkov N., On the numerical solution of equations, Annuaire Univ. Sofia Fac. Sci. Phys. Math. 56 (1963) 73–83 (in Bulgarian).

[51] Ortega J, W. Rheinboldt, Iterative Solutions of Nonlinear Equations in Several Variables, Academic Press, New York, 1970.

[52] Osada N., An optimal multiple root finding method of order three, J. Comput. Appl. Math. 51 (1994) 131–133.

[53] Osada N., Asymptotic error constants of cubically convergent zero finding methods, J. Comput. Appl. Math. 196 (2006) 347–357.

[54] Ostrowski A.M., Solution of Equations in Euclidean and Banach Spaces. Academic Press, New York, 1973.

[55] Pan V.Y., Solving a polynomial equation: some history and recent progress, SIAM Rev. 39 (1997) 187–220.

[56] Petković M., Iterative Methods for Simultaneous Inclusion of Polynomial Zeros, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[57] Petković M., On initial conditions for the convergence of simultaneous rootfinding methods, Computing 57 (1996) 163–177.

[58] Petković M., Point Estimation of Root Finding Methods, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1933, Springer, Berlin, 2008.

[59] Petković M., C. Carstensen, M. Trajković, Weierstrass formula and zero-finding methods, Numer. Math. 69 (1995) 353–372.

[60] Petković M., D. Herceg, Point estimation and safe convergence of rootfinding simultaneous methods, Scientific Review 21-22 (1996) 117–130.

[61] Petković M., D. Herceg, Börsch-Supan-like methods: Point estimation and parallel implementation, Int. J. Comput. Math. 64 (1997) 327–341.

[62] Petković M., D. Herceg, Point estimation of simultaneous methods for solving polynomial equations, J. Comput. Appl. Math. 136 (2001) 283–307.

[63] Petković M., D. Herceg, S. Ilić, Safe convergence of simultaneous methods for polynomial zeros, Numer. Algorithms 17 (1998) 313–331.

[64] Petković M., S. Ilić, Point estimation and the convergence of the Ehrlich-Aberth method, Publ. Inst. Math. 62 (1997) 141–149.

[65] Prešić M., A convergence theorem for a method for simultaneous determination of all zeros of a polynomial, Publ. Inst. Math. (N.S.) 28 (1980) 159–165.

[66] Prešić S., Un procéd é itératif pour la factorisation des polynômes, C.R. Acad. Sci. Paris, Sèr. A, 262 (1966) 862–863.

[67] Proinov P.D., A new semilocal convergence theorem for the Weierstrass method from data at one point, C. R. Acad. Bulg. Sci. 59 (2006) 131–136.

[68] Proinov P.D., Semilocal convergence of two iterative methods for simultaneous computation of polynomial zeros, C. R. Acad. Bulg. Sci. 59 (2006) 705–712.

[69] Proinov P.D., General local convergence theory for a class of iterative processes and its applications to Newton's method, J. Complexity 25 (2009) 38–62.

[70] Proinov P.D., New general convergence theory for iterative processes and its applications to Newton-Kantorovich type theorems, J. Complexity 26 (2010) 3–42.

[71] Proinov P.D., Relationships between different types of initial conditions for simultaneous root finding methods, in preparation.

[72] Proinov P.D., Geometry of Halley and Chebyshev methods (report), Scientific seminar on iterative methods, University of Plovdiv, 20.04.2012.

[73] Proinov P.D., S.I. Ivanov, A theorem for local convergence of Halley's method for finding polynomial zeros simultaneously, Scientific Researches of the Union of Scientists in Bulgaria–Plovdiv, Ser. B, 14 (2012) 173–176.

[74] Proinov P.D., S.I. Ivanov, On the convergence of Schröder's method for polynomial zeros of unknown multiplicity, C. R. Bulg. Acad. Sci. 66 (2013) 1073–1080.

[75] Proinov P.D., S.I. Ivanov, On the convergence of Halley's method for multiple polynomial zeros, Mediterranean J. of Mathematics (2014), http://dx.doi.org/10.1007/s00009-014-0400-7.

[76] Proinov P.D., S.I. Ivanov, On the convergence of Halley's method for simultaneous computation of polynomial zeros, submited.

[77] Proinov P.D., M.D. Petkova, Convergence of the Weierstrass method for simultaneous approximation of polynomial zeros, C. R. Bulg. Acad. Sci. 66 (2013) 809–818.

[78] Proinov P.D., M.D. Petkova, A new semilocal convergence theorem for the Weierstrass method for finding zeros of a polynomial simultaneously, J. Complexity 30 (2014) 366–380.

[79] Proinov P.D., M.D. Petkova, Convergence of the two-point Weierstrass root-finding method, Japan J. Indust. Appl. Math. 31 (2014) http://dx.doi.org/10.1007/s13160-014-0138-4

[80] Raphson J., Analysis Aequationum Universalis seu ad Aequationes Algebraicas Resolvendas Methodus Generalis, et Expedita, ex Nova Infinitarum Serierum Doctrina Deducta ac Demonstrata, London, 1690.

[81] Ren H., I.K. Argyros, Convergence radius of the modified Newton method for multiple zeros under Hölder continuous derivative, Appl. Math. Comput. 217 (2010) 612–621.

[82] Renegar J., On the worst-case arithmetic complexity of approximating zeros of polynomials, J. Complexity 3 (1987) 90–113.

[83] Safiev R.A., The method of tangent hyperbolas, Sov. Math. Dokl. 4 (1963) 482–485.

[84] Salehov G.S., On the convergence of the process of tangent hyperbolas, Dokl. A. N. SSSR 82 (1952) 525–528 (in Russian).

[85] Scavo T.R., J.B. Thoo, On the Geometry of Halley's Method, Amer. Math. Monthly 102 (1995) 417–433.

[86] Schröder E., Über unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen. Math. Ann. 2 (1870) 317–365.

[87] Sendov B., A. Andreev, N. Kjurkchiev, Numerical Solution of Polynomial Equations, in: Handbook of Numerical Analysis (P. Ciarlet and J. Lions, eds.), Vol. 3, Elsevier, Amsterdam, 1994, pp. 625–778.

[88] Sharma J.R., R. Sharma, New third and fourth order nonlinear solvers for computing multiple roots, Appl. Math. Comput. 217 (2011) 9756–9764.

[89] Simpson T., Essays on Several Curious and Useful Subjects in Speculative and Mix'd Mathematicks, Illustrated by a Variety of Examples, London, 1740.

[90] Smale S., Newton's method estimates from data at one point, in: The Merging of Disciplines: New Directions Pure, Applied, and Computational Mathematics (R. Ewing, K. Gross and C. Martin, eds), Springer, 1986, 185–196.

[91] Snyder R.W., One more correction formula, Amer. Math. Monthly 62 (1955) 722–725.

[92] Stewart J.K., Another Variation of Newton's Method, Amer. Math. Monthly 58 (1951) 331–334.

[93] Sun F., P. Kosmol, A new simultaneous method of fourth order for finding complex zeros in circular interval arithmetic, J. Comput. Appl. Math. 130 (2001) 293–307.

[94] TILLI P., Convergence conditions of some methods for the simultaneous computation of polynomial zeros, Calcolo 35 (1998) 3–15.

[95] TRAUB J.F., Iterative Methods for the Solution of Equations, Englewood Cliffs, New Jersey, 1964.

[96] TRAUB J.F., Iterative Methods for the Solution of Equations, Second Edition. Chelsea Publishing Company, New York, 1982.

[97] WALL H.S., A modification of Newton's method, Amer. Math. Monthly 55 (1948) 90–94.

[98] WANG D., F. ZHAO, On the determination of a safe initial approximation for the Durand–Kerner algorithm. J. Comput. Appl. Math. 38 (1991) 447–456.

[99] WANG D., F. ZHAO, The theory of Smale's point estimation and its applications, J. Comput. Appl. Math. 60 (1995) 253–269.

[100] WEIERSTRASS K., Neuer Beweis des Satzes, dass jede ganze rationale Function einer Veränderlichen dargestellt werden kann als ein Product aus linearen Functionen derselben Veränderlichen, Sitzungsberichte Königl. Akad. Wiss. Berlin (1891) 1085–1101.

[101] YPMA T.J., Finding a multiple zero by transformations and Newton-like methods, SIAM Rev. 25 (1983) 365–378.

[102] ZHAO F., D. WANG, The theory of Smale's point estimation and the convergence of Durand-Kerner program, Math. Numer. Sinica 15 (1993) 196–206 (in Chinese).

[103] ZHENG S., Z. HUANG, On convergence of Nourein iterations for simultaneous finding all zeros of a polynomial, J. Comput. Math. 18 (2000) 113–122.

[104] ZHENG S., On convergence of the Durand-Kerner's method for finding all roots of a polynomial simultaneously, Kexue Tongbao 27 (1982) 1262–1265.

[105] ZHENG S., On convergence of a parallel algorithm for finding the roots of a polynomial, J. Math. Res. Exp. 7 (1987) 657–660 (in Chinese).

[106] ZHENG S., A family of high-order parallel rootfinders for polynomials, J. Comput. Math. 18 (2000) 283–288.

Благодарности

Изказвам своята искрена благодарност към научния си ръководител проф. д-р Петко Димитров Пройнов за това, че отвори пред мен вратите към един необятен свят и ми показа как да бъда част от него.

Дълбока благодарност изказвам на семейството си и особено на моята съпруга за неизчерпаемото търпение и постоянна подкрепа.